

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DISCURSO INAUGURAL

DEL AÑO ACADÉMICO 1978-1979

LEIDO EN LA SESION CELEBRADA EL DIA 15 DE NOVIEMBRE DE 1978

POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

EXCMO. SR. D. GREGORIO MILLAN BARBANY



M A D R I D
DOMICILIO DE LA ACADEMIA
VALVERDE, 22.—TELEFONO 221-25-29
1 9 7 8

Depósito Legal M. 86.584. 1978

TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERMEJO - J. GARCÍA MORATO, 122 - MADRID

**LA RESOLUCION NUMERICA DE LOS PROBLEMAS
AERODINAMICOS**

A la memoria de TEODORO VON KARMAN

El autor

La Tecnología Aeroespacial necesita conocer, con un pormenor y una precisión cada vez mayores, los campos de velocidades, presiones, temperaturas y densidades que produce una aeronave o alguna otra clase de ingenio al moverse en el seno de la atmósfera, así como la aerodinámica interna de sus sistemas de propulsión, incluidos los procesos de combustión que se desarrollan en el seno de los mismos.

Conocimiento que se requiere, además, para un espectro de situaciones que los nuevos sistemas de propulsión han ampliado enormemente y que abarca, desde los movimientos al nivel del mar a los que se producen en las capas muy enrarecidas de la atmósfera; para una gama de velocidades que va desde el reposo hasta 20 o más veces la velocidad del sonido y todo ello tanto en régimen estacionario como variable con el tiempo, bien sea en forma periódica o para modos más irregulares, con objeto de explorar el comportamiento y la estabilidad de la aeronave o del ingenio en condiciones dinámicas, así como los efectos de las ráfagas, turbulencias, estelas de la propia aeronave en sus órganos de gobierno o de otras aeronaves en zonas de gran densidad de tráfico, el ruido producido sobre áreas pobladas, etc.

Este conocimiento debe tomar además en consideración el hecho de que las aeronaves e ingenios no son cuerpos rígidos. En primer lugar porque, en general, tienen órganos móviles de gobierno como son los alerones y timones, o a causa de las hélices o rotores en algunos de ellos y de los compresores y turbinas en los motores. Pero además, porque se trata de cuerpos elásticos y las deformaciones que en ellos se producen, a causa de las sollicitaciones aerodinámicas, modifican a su vez tales fuerzas, de donde resulta una interacción entre fuerzas aerodinámicas, elásticas y de inercia, que es causa de un gran número de fenómenos de importancia creciente al aumentar la velocidad de vuelo y que pueden producir efectos muy perjudiciales e incluso

catastróficos, si no se previenen y controlan debidamente. Tal es, por ejemplo, el caso del «flameo» (flutter) de alas, timones y paneles, que es una vibración autosostenida, al extraer energía la estructura de la aeronave o del ingenio, del campo aerodinámico, así como los fenómenos de divergencia, pérdida de rendimiento e incluso inversión de los mandos por deformación elástica de la estructura, etc.

El estudio de todo lo cual obliga a combinar los conocimientos de la Teoría de Estructuras y de la Aerodinámica, en una ciencia mixta: la Aeroelasticidad (1), con problemas y métodos propios y que plantea a la Aerodinámica algunas de las cuestiones más difíciles, de entre las que hemos mencionado al comienzo para el régimen no estacionario.

Por otra parte, el conocimiento de los datos aerodinámicos necesarios para el estudio de un sistema determinado debe resultar accesible en una fase lo más prematura posible del desarrollo del proyecto, a efectos de la optimización de éste, habida cuenta del costo involucrado en las modernas realizaciones aeroespaciales y del largo período de tiempo que media desde que se da luz verde a un nuevo programa hasta que la realización del mismo se hace operativa.

A título de ejemplo, deseo citar dos de las realizaciones más recientes y espectaculares de la moderna Tecnología Aeroespacial: una aeronáutica y otra espacial.

La primera se refiere al proyecto franco-británico del avión supersónico Concorde, el cual se inició a comienzos de la pasada década, para hacerse operativo en la presente, con un costo acumulado que en 1970 superaba los 500 millones de libras esterlinas.

La segunda realización es la relativa al más avanzado de los proyectos aeroespaciales actualmente en construcción: el transbordador orbital, llamado también «lanzadera» (shuttle) con una denominación sumamente expresiva de su misión. Se trata de una nave que permitirá colocar en órbita, para transferirlos a estaciones y laboratorios espaciales, o rescatarlos de ellos, hombres y equipos, con una carga útil total de hasta 30 Tm. en cada misión y que podrá utilizarse repetidamente, en lugar de quedar inutilizada tras su retorno a la tierra, como viene ocurriendo hasta ahora con las cápsulas rusas y norteamericanas.

(1) I. E. GARRICK: *Aeroelasticity. Frontiers and Beyond*. 13.^a Conferencia Von Karman. «Journal of Aircraft», sept. 1976.

Este ambicioso proyecto, que combina las características de una nave espacial de despegue vertical impulsada por motores cohete y de movimiento orbital en el espacio exterior a la atmósfera, con las de un avión tripulado, de aterrizaje horizontal sobre pista, mediante vuelo planeado, tras su retorno a la atmósfera densa, constituye un paso decisivo en el desarrollo de la Tecnología Aeroespacial y de sus aplicaciones prácticas (2). Se inició, tras los estudios preliminares de factibilidad, en 1972; será operativo a comienzos de la próxima década y el costo del mismo se estima en más de 3.000 millones de dólares.

Por último, es necesario poder analizar con rapidez y flexibilidad los efectos en el comportamiento aerodinámico de la nave o ingenio, de las diversas alternativas y modificaciones que se introduzcan en el proyecto o en alguna de sus componentes, a los fines de optimización antes citados, en función de los objetivos que se persigan con el programa.

Todo lo cual plantea un conjunto de requerimientos de precisión, rapidez, flexibilidad y eficacia, en la determinación y empleo de los datos aerodinámicos de un moderno proyecto aeroespacial, cuya adecuada satisfacción obliga a poner a contribución los más depurados recursos teóricos, experimentales y organizativos de que puede disponerse.

* * *

Al igual de lo que ocurre con otras ramas de la Ingeniería, para la resolución de los problemas aerodinámicos que plantea la Tecnología Aeroespacial en la forma que acabamos de exponer, existen, en general, dos procedimientos que no son excluyentes, sino complementarios y de los que se viene haciendo un uso combinado y extraordinariamente fructífero desde los primeros tiempos de la Aeronáutica: el método experimental en laboratorio y en vuelo, y el método teórico.

El instrumento propio por antonomasia del método experimental en Aerodinámica es el llamado Túnel Aerodinámico, que consiste en un conducto abierto o cerrado, de funcionamiento continuo o intermitente, una de cuyas secciones, dotada de los medios de observación y

(2) E. S. LORE: *Advanced Technology and the Space Shuttle*. 10.^a Conferencia Von Karman. «Astronautics and Aeronautics», febr. 1973.

de medición apropiados, es la cámara de ensayos, donde se intenta reproducir con la mayor fidelidad posible las condiciones del movimiento en estudio, mediante la creación de una corriente de aire o de algún otro gas, de características determinadas, con la ayuda de un sistema de propulsión adecuado.

El desarrollo de los túneles aerodinámicos y de los medios de observación y de medición utilizados en los mismos, desde los muy rudimentarios que emplearon los precursores de la aviación hasta los altamente sofisticados que se usan en la actualidad, es un capítulo fascinante de la Tecnología Aeroespacial (3), que está lejos de haberse terminado (4).

En la actualidad existen varios cientos de estas instalaciones distribuidos por los países desarrollados, en los centros oficiales, civiles y militares, de investigación aeroespacial, así como en numerosas industrias y Universidades. Según sus características, los hay desde los más versátiles, que pueden cubrir una extensa gama de ensayos, hasta los altamente especializados, para la exploración y el estudio de problemas específicos.

Así, existen túneles aerodinámicos de baja velocidad para el ensayo de modelos y de partes de los mismos en dos y tres dimensiones; túneles de baja turbulencia; túneles transónicos, supersónicos e hipersónicos; túneles para ensayos en vuelo libre, de estabilidad y de barrena; para la formación de hielo; para aeronaves de despegue y aterrizaje vertical; para el ensayo de motores; para ensayos a escala natural; en atmósferas enrarecidas, a bajas y a elevadas temperaturas, etc.

A título de ejemplo para los de tipo convencional, lo que da además una idea de las dimensiones a que hay que llegar en algunos casos, puede citarse como una de las realizaciones más gigantescas, el túnel aerodinámico de escala natural de la NASA (Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio), de los Estados Unidos de América, en Moffett Field, California. Se trata de un túnel de simple retorno, que opera a la presión atmosférica, es de funcionamiento continuo y está

(3) V., p. e., A. POPE y J. J. HARPER: *Low-Speed Wind Tunnel Testing*. John Wiley and Sons., 1966. También S. M. GORLIN e I. I. SLEZINGER: *Wind Tunnels and their Instrumentation*. Oldbourne Press, Londres, 1966.

(4) K. J. ORLIK-RUCKEMANN: *Ground Testing and Simulation*. «Astronautics and Aeronautics», junio 1974.

dotado de una potencia de 36.000 C. V. En este tunel, el aire alcanza una velocidad máxima que se aproxima a los 400 Km. por hora en la cámara de ensayos, la cual es de sección elíptica, de 12×24 m.

De otro lado, como ejemplo típico de instalaciones altamente especializadas, se pueden citar los túneles de choque que se emplean para obtener velocidades hipersónicas. Se trata de túneles aerodinámicos intermitentes, donde el tiempo útil de cada ensayo se mide en microsegundos, en los que la corriente de aire a través del modelo se consigue mediante otro gas (nitrógeno, helio, mezcla de gases combustibles), que una vez fuertemente comprimido, se pone instantáneamente en contacto con el aire del túnel al romper un diafragma que los separa. Con ello se engendra una onda de choque, la cual al propagarse en el aire deja detrás de éste una corriente que se acelera en una tobera y proporciona la velocidad hipersónica en la cámara de ensayos (5). Los requerimientos de este área experimental son muy fuertes, porque se trata de conseguir presiones de miles de atmósferas y temperaturas de miles y decenas de miles de grados, con velocidades que se miden en decenas de Kms. por segundo puesto que, por ejemplo, la velocidad orbital en torno a la tierra es de 7,9 Km/seg. y la de escape, de 11,2 Km/seg. Condiciones bajo las cuales es necesario tomar en consideración los efectos termoquímicos, de disociación, ionización y radiación del aire. Por ello se viene realizando desde hace años un gran esfuerzo de desarrollo de las técnicas experimentales de este campo (6), que están evolucionando muy rápidamente.

Una aspiración permanente del investigador aerodinámico experimental ha sido la de visualizar la corriente, más bien a efectos cualitativos para ver lo que ocurre en el campo del movimiento, como es, por ejemplo, la formación de torbellinos, los desprendimientos de la corriente, etc., que con fines de medición. Las técnicas de las sombras, interferométricas y «schlieren» de uso tan extendido y tradicional para la observación de las ondas de choque de los movimientos supersónicos, son un buen ejemplo de la forma en que ha logrado resolverse ese problema en la Aerodinámica de altas velocidades.

(5) V., p. e., J. LUKASIEWICZ: *Experimental Methods of Hypersonics*. Marcel Dekker, Inc. Nueva York, 1973.

(6) V. como un prometedor ejemplo de las mismas el trabajo de S. R. PATE, I. G. SILER, D. W. STALLINGS y D. A. WAGNER: *Development of an MHD-Augmented, High Enthalpy, Shock Tunnel Facility*. «AIAA Journal», 1974, págs. 289 y ss.

Pues bien, recientemente, estos procedimientos han podido complementarse con el empleo de una técnica de visualización mediante la fluorescencia que produce en la corriente de un gas enrarecido alrededor del objeto en estudio, un haz de electrones (7), lo que permite ver y fotografiar las ondas de choque, sus interferencias, la formación de estelas y otros muchos detalles del campo del movimiento exterior al obstáculo. Cuando esta técnica se combina con el empleo de películas de aceite sobre la superficie de aquel, se pueden hacer simultáneamente visibles, tanto el movimiento exterior como la distribución de las líneas de corriente sobre el cuerpo, en forma realmente espectacular.

* * *

Las instalaciones aerodinámicas experimentales, como las que acabamos de describir, sirven un doble propósito: de un lado, se utilizan para la investigación aerodinámica básica y aplicada. De otro, para el desarrollo y optimización de proyectos específicos. Claro es que la aplicación a uno u otro fin depende de la índole de la instalación así como del programa previsto. Por ejemplo; las instalaciones de tipo convencional dedican la mayor parte de su esfuerzo a trabajos de desarrollo.

Pero su utilización para estos fines tiene una doble limitación que depende de factores a la vez económicos y técnicos.

Unos pocos datos bastarán para ilustrar la limitación económica del procedimiento.

Los hermanos Wright, que en 1903 fueron los primeros que consiguieron volar, en un avión dotado de órganos de sustentación, propulsión y maniobra, en cuyo desarrollo utilizaron un rudimentario túnel aerodinámico proyectado y construido por ellos mismos, cuyas observaciones fueron de gran utilidad para su avión, consumieron tan solo unas pocas decenas de horas ensayándolo en el túnel.

El bimotor Douglas DC-3, probablemente el avión más popular de la década de los años 30, anterior a la Segunda Guerra Mundial,

(7) W. S. WOODS y J. P. ARRINGTON: *Electron-Beam Flow Visualization-Application in the Definition of Configuration Aerothermal Characteristics*. «AIAA Paper», n.º 72-1016.

necesitó de ensayos en túnel aerodinámico durante algo menos de un centenar de horas.

En cambio, el mayor avión comercial en servicio, el «Jumbo», Boeing 747, precisó, hace una decena de años, de más de 10.000 horas de ensayos en túnel aerodinámico, es decir, de más de un año sin interrupción.

Por último; el transbordador espacial antes citado, está necesitando de más de 80.000 horas, o sea, aproximadamente de una década.

Todo lo cual, aparte de la demora que introduce en el desarrollo de los modernos proyectos, particularmente si se tiene en cuenta que alguna de las instalaciones críticas están saturadas de carga de trabajo, representa un costo que en el caso del transbordador resulta superior a los 100 millones de dólares.

En cuanto a las limitaciones de índole técnica, resultan de las posibilidades de reproducir en la escala del laboratorio sobre el modelo, las condiciones reales del vuelo.

Para lo cual, como enseña la Teoría de la Semejanza Dinámica, basta con que coincidan en ambos casos los valores de determinados parámetros, así como las condiciones de contorno.

El primero de tales parámetros, y el único mientras las velocidades no se aproximan a la del sonido es, naturalmente, el número de Reynolds: $R_e = \frac{\rho \cdot V \cdot L}{\mu}$ (8), que expresa la relación entre las fuerzas de inercia y las de rozamiento debidas a la viscosidad del gas y cuyo valor tiene influencia decisiva en algunos aspectos fundamentales del comportamiento aerodinámico de los vehículos aeroespaciales.

Por ello, el aumento incesante de la velocidad y del tamaño de los aviones e ingenios ha obligado a aumentar paralelamente la dimensión y la velocidad (9) de los túneles aerodinámicos, hasta llegar a los de escala natural, como el anteriormente citado de la NASA, aparte de recurrir a otros procedimientos, tales como aumentar la densidad del aire, comprimiéndolo, fórmula consagrada en los túneles herméticos

(8) ρ = densidad; V = velocidad; L = longitud característica; μ = coeficiente de viscosidad.

(9) Claro es que la velocidad debe mantenerse en todo caso sensiblemente por debajo de la del sonido, para prevenir efectos perjudiciales de compresibilidad, que alterarían las condiciones de semejanza.

llamados de densidad variable, de los que hay un número considerable en funcionamiento desde hace años.

Para dar una idea del estado de la cuestión en este punto, hay que señalar, en primer lugar, que los números de Reynolds máximos de los grandes aviones actuales como, por ejemplo, el Jumbo antes citado, referidos a la velocidad y altura de crucero y a la longitud total del aparato, son del orden de 10^9 , mientras que los que permiten alcanzar las instalaciones existentes están aproximadamente de medio a un orden de magnitud por debajo de dicha cifra.

Por otra parte resulta muy difícil extrapolar, en ese régimen, las condiciones del ensayo hasta las de la escala natural, siendo así que los efectos del cambio de escala pueden llegar a ser muy grandes. Por ejemplo: en la zona citada al aumentar el número de Reynolds en un orden de magnitud, el coeficiente de resistencia del avión y con él la potencia necesaria, puede reducirse en más de un 30 por 100, entre otros factores.

Todo lo cual hace sumamente deseable el desarrollo de nuevos túneles aerodinámicos que permitan alcanzar números de Reynolds análogos a los de vuelo con lo que el investigador aerodinámico se encuentra enfrentado, una vez más, con el viejo problema de aumentar suficientemente el valor de dicho parámetro en su instalación experimental.

Sin que la solución pueda alcanzarse ahora aumentando el tamaño de la cámara de ensayos, o aumentando la presión, porque la potencia requerida para accionar la masa de aire se hace prohibitiva, ya que resulta del orden del medio millón de caballos de vapor.

Pero, en cambio, la solución puede obtenerse al enfriar el aire a temperaturas próximas a la de la licuefacción del nitrógeno, es decir, a unos cien grados bajo cero, porque la potencia necesaria se reduce entonces a una cifra comprendida entre el 5 y el 10 por 100 de la anterior y si se varía además la presión de ensayo, se obtienen condiciones operativas muy flexibles. Claro es que construir una instalación hermética de funcionamiento continuo, que opere a velocidades del aire próximas a la del sonido, a una temperatura inferior a los cien grados bajo cero y con dimensiones para una cámara de ensayo del orden de los 3×3 m², dotada de un complejo instrumental de soporte, observación y medición de los modelos, plantea problemas tecnológicos de gran consideración, aunque hoy solubles. Pero las ventajas de disponer de una instalación de estas o parecidas características son tan grandes que

durante los últimos años se han realizado estudios de viabilidad técnica y económica, así como ensayos en instalaciones piloto de menor tamaño todo ello con resultados tan plenamente satisfactorios (10), que hacen previsible el que en los próximos años se disponga de uno a varios túneles aerodinámicos criogénicos transónicos de presión variable, que suplan la insuficiencia de las instalaciones actuales. El presupuesto de construcción de un túnel como el descrito se situaría en estos momentos entre los 100 y los 150 millones de dólares.

Otro sector de la tecnología aeroespacial en rápido desarrollo, que plantea problemas aerodinámicos especiales a causa de los altos coeficientes de sustentación que se requieren (11) en las maniobras de aterrizaje y despegue y que adolece también de una insuficiencia de instalaciones experimentales, principalmente por lo que respecta a la interacción de las paredes del túnel, es el de las aeronaves de aterrizaje y despegue vertical y de corto recorrido en tierra.

Cuando la velocidad del movimiento se aproxima a la del sonido, se producen efectos de compresibilidad, que tuvieron manifestaciones muy perjudiciales, primero en las puntas de las hélices y durante la Segunda Guerra Mundial en las alas y órganos de gobierno de los aviones rápidos, cuyo esclarecimiento obligó a desarrollar técnicas experimentales especiales, ya que los túneles aerodinámicos convencionales no podían emplearse satisfactoriamente para explorar el régimen transónico, a causa del efecto de bloqueo que produce en la cámara de ensayos la reducción de sección debida a la presencia del modelo, que convierte al túnel en una tobera de Laval. La solución al problema se obtuvo mediante el empleo de paredes con aberturas, con lo que se abrió a la observación controlada en el laboratorio uno de los regímenes aerodinámicos más difíciles e importantes: el transónico.

Naturalmente, cuando la velocidad del movimiento se aproxima a la del sonido, junto al número de Reynolds, cuya influencia resulta pre-

(10) E. C. POLHAMUS, R. A. KILGORE, J. B. ADCOCK y E. J. RAY: *The Langley Cryogenic High Reynolds Number Wind-Tunnel Program*. «Astronautics and Aeronautics», oct. 1974, págs. 30 y ss. También R. HILLS: *The Need for a large Transonic Wind Tunnel in Europe: A Summary of the Report of an A. G. A. R. D. Working Group*. «AIAA Papers», 74-630, año 1974.

(11) A. M. O. SMITH: *High-Lift Aerodynamics*. «Journal of Aircraft», junio 1975, págs. 501 y ss. También G. K. KORBACHER: *Aerodynamics of Powered High-Lift Systems*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1974, pág. 319.

cisamente crítica en este caso, debido a la interferencia entre las ondas de choque que se forman sobre la cara superior de las alas y la capa límite contigua a la misma, a lo que nos referiremos después, es necesario preservar el valor de otro parámetro de semejanza: el número de Mach $M = \frac{V}{a}$, que mide la relación entre la velocidad de referencia y la de propagación del sonido.

Parámetro cuyo valor hay que preservar, así mismo, en los regímenes más rápidos, llamados supersónico ($M > 1$) e hipersónico ($M > 5$), a los que haremos referencia más detenida posteriormente.

Por último, un tercer parámetro de semejanza a considerar, en los procesos con transporte de calor, que adquieren importancia capital en los movimientos más rápidos, es el número de Prandtl $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$ (12).

* * *

Estas breves consideraciones sobre el empleo del método experimental para el estudio de los problemas aerodinámicos tiene el propósito de poner de manifiesto el extenso uso que se ha hecho del mismo desde los orígenes de la Tecnología Aeroespacial, así como sus requerimientos y limitaciones e indicar algunas de las direcciones en que tiende a proseguir su desarrollo.

Pero junto a él, se ha hecho un uso igualmente intensivo, desde los albores de la Aeronáutica, del otro instrumento fundamental para resolver los problemas de la Aerodinámica: el método teórico.

El cual consiste en formular las ecuaciones que expresan las leyes que gobiernan el proceso; definir las condiciones del problema que se desea analizar y buscar soluciones exactas o aproximadas, analíticas y numéricas, así como evaluar la aproximación con que todo ello refleja la realidad del proceso estudiado.

Y creo que la estrecha simbiosis en la que han colaborado ambos métodos constituyen un modelo, en cierta forma ejemplar, del modo de trabajo propio de la moderna Tecnología.

(12) C_p = Calor específico a presión constante. λ = Coeficiente de conductividad térmica.

Por otra parte, me parece también que la Aerodinámica aporta un excelente ejemplo de la forma en que tiende a evolucionar esa colaboración entre los métodos teórico y experimental, al ilustrar en qué medida, el desarrollo de la Matemática Aplicada, particularmente con la entrada en servicio de las nuevas generaciones de calculadoras electrónicas, está permitiendo sustituir cada vez más durante los últimos años los ensayos de laboratorio para el desarrollo de nuevos proyectos, por las soluciones numéricas que las nuevas calculadoras empiezan a hacer ya asequibles, con la precisión que se necesita, incluso para los diseños más complicados y bajo las condiciones operativas más complejas.

Lo cual resulta tanto más estimulante sobre las perspectivas de aquella tendencia, al considerar que los problemas matemáticos que plantea la Aerodinámica de la moderna Tecnología Aeroespacial ofrecen una gran dificultad intrínseca, tanto por la complejidad del sistema no lineal de ecuaciones en derivadas parciales para el movimiento de un gas, como por las condiciones iniciales y de contorno que suelen darse en sus problemas.

* * *

Después de comentar en la primera parte de esta breve exposición las características, limitaciones y tendencias más destacadas del método experimental en su aplicación a la Aerodinámica, desearía hacer lo mismo, en lo que resta, para el método teórico, sobre todo por lo que se refiere al predominio que está adquiriendo recientemente el cálculo numérico sobre los otros procedimientos teóricos y experimentales.

Cálculo numérico que, como es natural, aplica modalidades muy diversas según las áreas de problemas que trata de resolver, como se verá más adelante, pero en donde, junto al procedimiento clásico de Diferencias Finitas que se extiende y codifica a casos cada vez más complejos, se abren rápidamente camino otros más recientes, los cuales, una vez comprobada su eficacia en las Ciencias Aplicadas para las que fueron creados, extienden su aplicación a la Mecánica de Fluidos.

Tal es el caso, por ejemplo, del Método de Relajación (13) y, desde

(13) H. LOMAX y J. L. STEGER: *Relaxation Methods in Fluid Mechanics*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1975, pág. 63.

hace muy pocos años, del de Elementos Finitos (14) que, habiendo tenido gran éxito en el Cálculo Estructural, está penetrando con gran fuerza en la Mecánica de Fluidos, porque su inherente flexibilidad lo hace particularmente idóneo para tratar los problemas de Aerodinámica, a causa de la complejidad geométrica de las condiciones de contorno características de esta Ciencia. Todo ello aparte de aquellos otros métodos que la propia Aerodinámica desarrolla por su cuenta y de los que más adelante se encontrarán ejemplos.

La última aspiración de estos métodos de cálculo, en su aplicación al desarrollo para la optimización aerodinámica de proyectos aeroespaciales, es la de conseguir un sistema integrado y flexible de programas debidamente codificados para su empleo en calculadoras electrónicas, que permita, con rapidez, precisión y economía, el análisis de la incidencia aerodinámica que tienen las numerosas alternativas y modificaciones que los objetivos perseguidos en cada caso suelen requerir.

Desde hace algunos años existen ya ejemplos concretos de tales sistemas integrados (15), cuya extensión, perfeccionamiento y desarrollo, constituye actualmente una de las tareas fundamentales del cálculo numérico en Aerodinámica (16).

Por último, un importante aspecto a tener en cuenta en la Técnica de aplicación de los modernos recursos del cálculo numérico a los problemas de Aerodinámica, es el de la exigencia de un alto nivel de especialización mixta por parte de quienes deben concebir, desarrollar y hacer utilizables tales métodos, porque lo que se requiere de ellos es una doble y difícil capacitación, entre ambos dominios de conocimientos: el de la Mecánica de Fluidos y el del Cálculo Numérico electrónico; situación cuya significación y problemática, para alcanzar la eficacia que se requiere de estos nuevos procedimientos ha sido bien ilustrada recientemente por H. Lomax, profesional de larga y acreditada experiencia en la materia (17).

(14) S. SHEN: *Finite-Element Methods in Fluid Mechanics*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1977, pág. 421.

(15) Un buen ejemplo es el de D. S. MILLER y W. D. MIDDLETON: *An Integrated System for the Aerodynamic Design and Analysis of Supersonic Aircraft*. «Aerodynamic Analysis Requiring Advanced Computers». NASA SP-347, 1975.

(16) G. S. PATTERSON: *Prospects for Computational Fluid Mechanics*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1978, pág. 289.

(17) H. LOMAX: *Recent-Progress in Numerical Techniques for Flow Simulation*. «AIAA Jour.», 1976, pág. 512.

Al entrar a comentar el empleo del Método Teórico en Aerodinámica me parece adecuado comenzar por recordar, que las leyes que gobiernan el comportamiento de un gas, en las condiciones que interesan en la Tecnología Aeroespacial, son las que expresan los principios de conservación. En primer lugar, el principio de conservación de la masa del gas y el de cada una de las diversas especies que lo forman, si se trata de una mezcla de composición variable, como ocurre, por ejemplo, cuando hay procesos químicos o de difusión tales como los que se desarrollan en los sistemas de propulsión, o bien en los fenómenos de disociación e ionización que se producen en algunos movimientos hipersónicos. En segundo lugar, la ley de conservación de la cantidad de movimiento y, por último, la de conservación de la energía. A las cuales hay que agregar la ecuación de estado del gas, que da la Termodinámica, así como las leyes de reacción química y las de disociación e ionización, cuando tienen lugar estos fenómenos.

Así mismo, con gases ionizados y en presencia de campos electromagnéticos, es necesario tomar en consideración las leyes que gobiernan estos fenómenos, lo que corresponde a la rama de la Mecánica de Fluidos llamada Magnetogasdinámica, la cual vamos a excluir del espectro de situaciones que aquí consideramos, porque en la Tecnología Aeroespacial corresponde a situaciones muy especiales.

La formulación matemática de estas leyes, en el correspondiente sistema de ecuaciones, depende del estado de enrarecimiento del gas y el parámetro de semejanza propio es el número de Knudsen $Kn = \frac{l}{L}$ que mide la relación entre el camino libre molecular medio l del gas y una longitud característica L del proceso, tal como una dimensión geométrica de la aeronave o ingenio, pudiendo comprobarse fácilmente que el número de Knudsen se puede expresar como la relación entre los números de Mach y de Reynolds, lo que tiene la ventaja de operar con magnitudes macroscópicas.

Los casos en que el número de Knudsen no es muy pequeño frente a la unidad, corresponden a situaciones en que el gas no puede considerarse como un medio continuo, lo que da lugar a fenómenos y tratamientos especiales (18), que se dan realmente en Astronáutica. Por

(18) V., p. e., V. P. SHIDLOVSKY: *Introduction to Dynamics of Rarefied Gases*. Elsevier, Nueva York, 1967.

ejemplo: el camino libre medio molecular de la atmósfera, que a nivel del mar es del orden de 10^{-5} cm., a 100 Km. de altura es de varios centímetros y a 200 Km., de más de 100 m.

En caso contrario, es decir, cuando el número de Knudsen es muy pequeño frente a la unidad, lo que ocurre siempre en Aeronáutica, el gas se comporta como un medio continuo y entonces las leyes de conservación se expresan mediante las ecuaciones de Navier-Stokes (19), ampliadas con las de difusión de las especies, y las leyes de reacción química, de disociación y de ionización, en los casos en que tiene lugar alguno de estos fenómenos, situación de la que prescindiremos también en lo sucesivo, mientras no se haga mención explícita en contrario.

En consecuencia, para un gas de composición homogénea, las ecuaciones se reducen a la de continuidad, que expresa la conservación de la masa; las tres de la conservación del movimiento, en tres direcciones coordenadas; la de conservación de la energía y la de estado. En total, cinco ecuaciones diferenciales para el cálculo de las tres componentes de la velocidad y de la presión y densidad o temperatura, o bien de alguna otra magnitud termodinámica alternativa, como la entalpía o la entropía, merced a la ecuación de estado.

El sistema es, pues, de cinco ecuaciones en derivadas parciales, no lineal, y para la determinación de un problema concreto es necesario además establecer las condiciones de contorno e iniciales. En particular, por lo que respecta a las primeras, la condición es la de no deslizamiento en los puntos de contacto del gas con una pared (20).

En un planteamiento de esta generalidad, tanto las cuestiones de existencia y unicidad de las soluciones, como la determinación de las mismas están sólo resueltas para un reducido número de casos (21) de interés tecnológico muy limitado.

Por ejemplo; para la integración numérica de las Ecuaciones de

(19) V., p. e., J. SERVIN: *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*. «Encyclopedia of Physics», Springer-Verlag, 1960.

(20) Para una discusión de la condición de adherencia ver, p. e., S. GOLDSTEIN. *Modern Developments in Fluid Dynamics*. Oxford, Clarendon Press, 1938.

(21) Para bibliografía y comentarios ver G. MILLÁN: *Problemas Matemáticos de la Mecánica de Fluidos. Estructura de las ondas de choque y combustión*. «Rev. Acad. de Ciencias», 1975, págs. 41 y ss. También O. A. LADYZHENSKAYA: *Mathematical Analysis of Navier-Stokes Equations for Incompressible Liquids*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1975, pág. 249.

Navier-Stokes, en un caso complejo de interés técnico como puede ser el del vuelo de una aeronave, se estima que el número mínimo de puntos de la red de discretización necesaria, tiene un orden de magnitud no inferior a 10^9 , lo que, por el momento, está fuera del alcance de las calculadoras electrónicas existentes, si se desea obtener el resultado en un tiempo razonable (20).

Afortunadamente tampoco ello es necesario, porque el tratamiento matemático de la mayoría de los problemas aerodinámicos de interés tecnológico puede efectuarse previa introducción de modelos simplificados asequibles al cálculo y que preservan los aspectos fundamentales del fenómeno con lo que, en muchos casos, se logra obtener resultados satisfactorios, como lo confirma su comparación con las mediciones experimentales o con las soluciones exactas, cuando se dispone de ellas, así como la convergencia de iteraciones sucesivas.

En todo caso, durante los últimos años, los mayores esfuerzos para obtener soluciones válidas a problemas «útiles» del sistema de Navier-Stokes se están llevando a cabo en el campo del cálculo numérico, mediante el empleo de los modelos aproximados aludidos, si bien con una complejidad creciente bien sea del propio modelo de descripción del fenómeno o del algoritmo empleado o de la combinación de ambos (23).

Entre tales modelos, el fundamental, así como el más amplio, útil y fecundo, es el de la llamada «capa límite», cuya idea básica es la de que, en la inmensa mayoría de los casos de interés práctico, el número de Reynolds es muy grande, lo que permite prescindir de los efectos de

(22) Para conocer el estado de desarrollo del cálculo de movimientos de fluidos viscosos, ver el reciente trabajo de revisión de A. ORSZAG y M. ISRAELI: *Numerical Simulation of Viscous Incompressible Flows*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1974, páginas 281 y ss.

(23) V. los siguientes trabajos, que contienen abundante bibliografía del «AIAA Journal»: TH. BRATANOW, A. ECER y M. KOBISKE: *Finite-Element Analysis of Unsteady Incompressible Flow around an Oscillating Obstacle of Arbitrary Shape*, 1973, pág. 1471. J. C. WU: *Numerical Boundary Conditions for Viscous Flow Problems*, 1976, pág. 1042. P. R. DODGE: *Numerical Method for 2D and 3D Viscous Flows*, 1977, pág. 961. J. D. MURPHY: *An Efficient Solution Procedure for the Incompressible Navier-Stokes Equations*, 1977, pág. 1307. J. S. SHANG: *Implicit-Explicit Method for Solving the Navier-Stokes Equations*, 1978, pág. 496. También R. T. CHENG: *Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations by the Finite-Element Method*, «The Physics of Fluids», 1972, pág. 2098.

la viscosidad en todo el espacio fluido, excepto en una capa de espesor muy pequeño, contigua a las superficies sólidas en contacto con el gas, donde aquellos efectos son del mismo orden de magnitud que las fuerzas de inercia.

El espesor de la capa límite es del orden de magnitud de $l/\sqrt{Re}$, donde l es la longitud característica del movimiento, lo que permite apreciar lo muy reducido de tal espesor a la vista de la magnitud de los números de Reynolds a que nos hemos referido antes. Por otra parte, la influencia de su espesor en la corriente exterior, puede tomarse en cuenta, además, cuando es necesario, mediante una corrección equivalente al mismo, del contorno de la superficie en contacto con el gas.

Este concepto de la capa límite, que fue introducido por Ludwig Prandtl en 1904, ha sido una de las contribuciones decisivas para todo el desarrollo moderno de la Mecánica de Fluidos (24) al permitir separar el espacio del movimiento en dos zonas distintas: la de la capa límite y la exterior a ella, las cuales admiten tratamientos esencialmente distintos, si bien mutuamente influyentes a causa de las interacciones que existen entre una y otra y que el modelo propuesto hace también asequible al análisis y al cálculo.

Efectivamente, la capa límite puede analizarse mediante una forma simplificada y asequible al cálculo de las ecuaciones de Navier-Stokes, que conduce a un sistema diferencial parabólico, cuya primera solución analítica, para el caso más sencillo, fue proporcionada por H. Blasius, discípulo de Prandtl, en 1908 (25).

El carácter parabólico del sistema diferencial de la Capa Límite hace que el tipo de condiciones a fijar para determinar la solución de un movimiento sea el de los valores iniciales junto a las condiciones de contorno. Estas se establecen en primer lugar sobre la pared, donde por ejemplo, para la velocidad, son en general las de adherencia ya citadas; así como en el límite exterior de la capa límite, donde está

(24) Para una reseña histórica del desarrollo de esta teoría ver el reciente trabajo de I. TANI: *History of Boundary Layer Theory*, «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1977, pág. 87.

(25) Para una exposición completa de la Teoría de la Capa Límite ver H. SCHLICHTING: *Teoría de la Capa Límite*, URMO, Bilbao, 1972, traducción de la edición alemana de 1965.

empalma con la corriente del espacio exterior a la misma, cuya solución, obtenida por alguno de los métodos que se comentan después, proporciona los valores de contorno requeridos.

Es en el seno de la capa límite donde se producen los torbellinos que se difunden progresivamente a la corriente principal y bajo determinadas condiciones, se desprende del contacto con la superficie del cuerpo donde se ha formado (26), dando lugar a la aparición de estelas (27), todo lo cual tiene una influencia decisiva en las características del movimiento del gas exterior a ella. Por otra parte, su comportamiento es fundamental para la resistencia «parásita», de rozamiento y de forma, de las aeronaves y ingenios, así como para el calentamiento de la superficie de unos y otros en los vuelos a grandes velocidades y en el retorno a la tierra de las cápsulas y otros vehículos espaciales.

De donde resulta que el estudio experimental y teórico de la capa límite es un tema principal del contenido de la Aerodinámica moderna.

Una complicación esencial de la cuestión se debe a la inestabilidad del movimiento en el seno de la capa límite, a partir de un cierto valor del número local de Reynolds, lo cual se traduce en el tránsito del régimen laminar al turbulento, con todas las dificultades inherentes a los fenómenos de turbulencia, cuya formulación matemática conduce al sistema de ecuaciones de Reynolds (28), que si bien es formalmente similar al laminar resulta «abierto» a causa del carácter aleatorio de los términos adicionales que expresan en las mismas los efectos del transporte turbulento de materia, cantidad de movimiento o energía.

Los esfuerzos de investigación e ingenio que se han aplicado durante los últimos cincuenta años para «cerrar» el sistema de ecuaciones de Reynolds mediante la construcción de modelos semiempi-

(26) Para un estudio del problema matemático de la separación de la capa límite, ver el trabajo de S. N. BROWN y K. STEWARTSON: *Laminar Separation*, «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1969, pág. 45. También J. C. WILLIAMS: *Incompressible Boundary-Layer Separation*, «Ann. Rev. Fluid Méch.», 1977, pág. 113. Para soluciones numéricas del problema de la separación ver el trabajo de J. E. CARTER y S. F. WORNOM: *Forward Marching Procedure for Separated Boundary-Layer Flows*, «AIAA Journal», 1974, pág. 1101, que contiene bibliografía adicional.

(27) J. F. THOMSON, S. P. SHANKS y J. C. WU: *Numerical Solution of Three-Dimensional Navier-Stokes Equations Showing Trailing Tip Vortices*. «AIAA Journal», 1974, pág. 787.

(28) Ver la obra de SCHLICHTING ya citada.

ricos sobre el comportamiento de los términos de la turbulencia en aquellos, a falta de respuestas más completas, son verdaderamente impresionantes, porque la importancia y la dificultad del problema constituyen un desafío singular que ha convocado a los más eminentes investigadores de la Mecánica de Fluidos, con resultados que sin aportar todavía la solución definitiva permiten tratar en forma muy satisfactoria la mayoría de los problemas de interés tecnológico (29).

Recientemente las posibilidades de las últimas generaciones de calculadoras electrónicas, combinadas con nuevas aportaciones de las observaciones experimentales (30), están permitiendo plantearse el problema en términos más ambiciosos, por lo que respecta a la estructura de la turbulencia y a sus efectos en el movimiento medio, aproximación que parece ofrecer el futuro más atrayente para el tratamiento de este problema durante los próximos años (31).

A lo largo de su desarrollo, la Teoría de la Capa Límite ha extendido progresivamente su campo de aplicación, desde los casos más simples de movimientos laminares, bidimensionales y estacionarios, a lo largo de contornos de formas sencillas y en ausencia de efectos de compresibilidad, hasta los regímenes turbulentos y de transición, en movimientos estacionarios o no, sobre contornos tridimensionales y complejos como los que plantean los problemas técnicos, incluidos los casos de desprendimiento de la corriente, así como para movimientos transónicos, supersónicos e hipersónicos, en que la interacción entre la capa límite y las ondas de choque producen efectos especiales e importantes, en gran parte responsables, por ejemplo, en el caso transónico de las perturbaciones de la «barrera del sonido» que tanta popularidad alcanzaron al final de la Segunda Guerra Mundial. Además en los regímenes de gran velocidad, junto a los efectos de rozamiento son fundamentales los transportes de calor a la superficie, cuya prevención técnica ha obligado

(29) V., p. e., B. E. LAUNDER y D. B. SPALDING: *Mathematical models of Turbulence*. Acad. Press, 1972.

(30) J. LAUFER: *New Trends in Experimental Turbulence Research*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1975, pág. 307. A. ROSHKO: *Structure of Turbulent Shear Flows: A New Look*, «AIAA Jour.», 1976, pág. 1349. J. H. FERZIGER: *Large Eddy Numerical Simulations of Turbulent Flows*, «AIAA Jour.», 1977, pág. 1261.

(31) W. C. REYNOLDS: *Computation of Turbulent Flows*, «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1976, págs. 183 y ss.

a estudiar problemas especiales como el de la ablación de capas protectoras o el del soplado a través de superficies porosas.

La limitación de este trabajo no permite entrar en la exposición de tales procedimientos y de los problemas que plantea su aplicación, por lo que debemos remitir a la abundante bibliografía sobre la materia (32), y a simbolizar el resultado de los conocimientos adquiridos en un dato global altamente expresivo del nivel alcanzado por la Técnica Aero-náutica en este dominio: la resistencia parásita (33), de un avión moderno coincide prácticamente con el valor teórico que corresponde a una capa límite turbulenta sobre la superficie del mismo, lo que permite apreciar la magnitud de la operación de «limpieza» aerodinámica que se ha desarrollado en el diseño de aviones, la cual ha permitido reducir esa resistencia a la cuarta parte desde los años treinta y casi en un orden de magnitud desde el avión de los hermanos Wright. Por consiguiente, la posibilidad de futuras reducciones de la resistencia parásita depende básicamente de las posibilidades de «laminarización» de la aeronave, la cual, a su vez, depende del grado de pulimento y limpieza de su superficie, de la distribución de presiones sobre la misma y del empleo de medios adicionales de control de la capa límite para diferir su tránsito al régimen turbulento.

La cuestión, que merició atención especial de la NASA (entonces NACA), después de la Segunda Guerra Mundial, en el proyecto de alas «laminares» (34) que se conseguían mediante una adecuada distri-

(32) «AIAA Jour.», T. CEBECI: *Calculation of Three-Dimensional Boundary Layers*, parte I, 1974, pág. 779; parte II, pág. 1056; parte III, 1976, pág. 1090. A. K. RASTOGI y W. RODI: *Calculation of General Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers*, 1978, pág. 151. J. E. HARRIS: *Calculation of Three Dimensional Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layers*. P. BRADSHOW: *Calculation of Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers*, «Jour. Fluid Mech.», 1971, pág. 417 y *Compressible Turbulent Shear Layers*, id., id., 1977, pág. 33. D. M. BUSHNELL e I. E. BECKWITH: *Calculation of Nonequilibrium Hypersonic Turbulent Boundary Layers and Comparisons with Experimental Data*, «AIAA Jour.», 1970, pág. 1470. T. CEBECI, K. KAMPS, G. J. MOSINSKIS y J. A. REHN: *Some Problems of the Calculation of Three-Dimensional Boundary-Layer Flow on General Configurations*. NASA CR-2285, 1973.

(33) La resistencia de una aeronave resulta de las contribuciones de tres efectos: la parásita, básicamente, debida en las modernas realizaciones al rozamiento del aire; la inducida por la sustentación que hay que generar para soportar el peso y la de onda, en los vuelos supersónicos.

(34) E. JACOBS: *Preliminary Report on Laminar Flow Airfoils and New Methods*

bución de presiones pero que no tuvo una aplicación práctica eficaz, ha recobrado importancia cara al futuro, al encarecerse la energía, por la economía que podría aportar al transporte aéreo (35).

* * *

Pasemos ahora a considerar el movimiento del gas en la región exterior a la capa límite y a las zonas producidas por ésta, tales como las estelas.

En esa región exterior que en general ocupa la casi totalidad del espacio fluido, pueden ignorarse los efectos disipativos y considerar el gas como un fluido ideal, lo cual introduce una simplificación esencial en el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes, que se reducen en este caso a las ecuaciones de Euler.

Así mismo, las condiciones de contorno experimentan una relajación fundamental, al sustituirse la condición de adherencia a la pared por la de desplazamiento a lo largo de ella.

Por último, a diferencia de lo que ocurre con los fluidos viscosos, se comprueba que los movimientos de fluidos ideales pueden presentar superficies de discontinuidad, es decir, superficies tales que los valores de las diversas magnitudes fluidas experimentan un salto al atravesarlas, si bien los valores de los saltos están ligados entre sí por condiciones de compatibilidad, que resultan de aplicar a la discontinuidad los principios de conservación enunciados anteriormente.

Estas superficies de discontinuidad pueden ser de dos clases diferentes, según se produzca o no transporte de gas a través de las mismas.

En el segundo caso; es decir, si no hay transferencia de materia a través de la superficie, ésta es una discontinuidad «tangencial» como las que se forman en el borde de salida de las alas, llamadas generalmente «capas de torbellinos», o los contornos fluidos de las estelas, y la condición de compatibilidad se reduce a la igualdad de la presión en ambas caras de la superficie.

Cuando hay transferencia de gas a través de ella, es decir, si la

Adopted for Airfoil and Boundary-Layer Investigation. NACA War Time Rept. N.º L-345, 1939.

(35) J. J. KRAMER: *Planning a New Era in Air*, «Astronautics and Aeronautics», agosto 1978, pág. 26.

discontinuidad se propaga en el seno de la masa de gas, se trata de una «onda de choque», la cual sólo puede producirse en las zonas de movimientos supersónicos. Las condiciones de compatibilidad son, entonces, las de Rankine-Hugoniot y se comprueba que las ondas de choque son, siempre, ondas de compresión, a causa del Segundo Principio de la Termodinámica.

Claro es que al incorporar al proceso los efectos disipativos de la viscosidad y de la conductividad térmica, las superficies de discontinuidad se transforman en zonas de pequeño espesor y rápida transición, cuya estructura interna se analiza con los métodos de la capa límite para las capas de torbellinos y por procedimientos propios para las ondas de choque (36).

Una causa de dificultades en el estudio del movimiento de masas de gas que han sido atravesadas por ondas de choque es que tales masas quedan afectadas por los efectos disipativos producidos por el paso de la onda. Estos efectos se hacen sensibles en ondas fuertes y dependen de la magnitud del salto, lo que complica mucho el tratamiento matemático de algunos problemas de gran interés tecnológico.

Otra dificultad matemática importante, que originan tanto las capas de torbellinos como las ondas de choque, de las que unas u otras o bien ambas simultáneamente son ingredientes en la mayoría de los procesos aerodinámicos de interés tecnológico, es que, muy frecuentemente, su localización y forma geométrica son incógnitas del propio problema, al mismo tiempo que aparecen como superficies de condiciones de contorno, lo que obliga a resolver un problema «inverso» o bien a emplear procedimientos de iteración.

* * *

Hemos dicho que la ausencia de efectos disipativos introduce una simplificación fundamental en las ecuaciones de la Aerodinámica.

Dicha simplificación se traduce en el hecho de que, en tales circunstancias, el campo de velocidades del movimiento es un campo potencial, determinado por una ecuación en derivadas parciales de segundo orden y en que la presión se relaciona con la velocidad mediante la ecuación de Bernoulli, o una generalización de la misma para el caso de los movimientos no estacionarios.

(36) V. G. MILLÁN, ya citado pág. 345.

Los problemas aerodinámicos exteriores a las capas límites consisten, generalmente, en determinar los campos de velocidades, presiones y eventualmente temperaturas o alguna otra magnitud termodinámica, que se producen como consecuencia de movimientos determinados de una aeronave o ingenio, o de alguna de sus partes, tales como rotores u órganos de gobierno, en el seno de la atmósfera o por el paso del aire a través de conductos dotados, a su vez, de órganos móviles como los compresores y turbinas de los motores de reacción. Incluyendo las interacciones aerodinámicas de unos componentes sobre otros, en sistemas complejos, así como los efectos de las estelas propias o ajenas.

Un ejemplo típicamente básico de tales problemas, es el de determinar la fuerza de sustentación en una aeronave que se traslada con movimiento uniforme, y su distribución sobre las alas y otras partes de la misma, lo que lleva al cálculo de la distribución de los coeficientes de presión, así como la determinación de la resistencia inducida producida por la sustentación y la resistencia de onda originada por las ondas de choque en los movimientos supersónicos.

Otro ejemplo típico es el del efecto aerodinámico producido por el accionamiento de los órganos de gobierno.

Por último, un tercer ejemplo, también fundamental, es el de la respuesta aerodinámica a movimientos no estacionarios, tales como los producidos por los cambios de actitud, las ráfagas, la turbulencia y las oscilaciones, así como los efectos aeroelásticos.

Sin olvidar que los valores de los campos de velocidades, presiones y eventualmente temperaturas que se obtienen sobre la superficie de la aeronave, son condiciones de contorno, como ya se ha dicho, para el borde exterior en el cálculo de la capa límite a que antes nos hemos referido.

Casos todos en que el problema consiste en integrar la ecuación del potencial de velocidades, con condiciones de contorno sobre las superficies de la aeronave, determinadas por las características del movimiento en estudio y con condiciones iniciales también dadas, con la particularidad de que hay que tomar en consideración la existencia de las capas de torbellinos y ondas de choque antes mencionadas. Calculado el campo de velocidades, la ecuación de Bernoulli determina el de presiones y la de estado del gas las otras magnitudes termodinámicas.

Por otra parte, las situaciones que se plantean dan lugar a dos clases de problemas distintos: uno «directo» en el que se conoce la forma del cuerpo y se quiere determinar el campo aerodinámico en torno al mismo, y otro «inverso», en el que se busca la forma de contorno que produce una distribución de presiones o velocidades prefijada.

En definitiva podría decirse que, así como la Teoría de la Capa Límite se ocupa fundamentalmente de los problemas de resistencia parásita y de transporte de calor, la Teoría de Fluidos Ideales resuelve básicamente los problemas de sustentación, y su distribución así como los de resistencia inducida y de onda y los de los efectos de las interacciones.

Y debe señalarse a este respecto que la Teoría de la Circulación es un instrumento básico para todo lo relacionado con los problemas de la sustentación, bien sea en dos o en tres dimensiones, como la Capa Límite lo es para los problemas de resistencia.

Para abordar estos problemas, acostumbran a distinguirse cinco regímenes de movimientos distintos, en función de la velocidad, porque requieren procedimientos específicos de tratamiento.

En primer lugar está el régimen incompresible, cuando la velocidad es pequeña con respecto a la del sonido. El límite de tales movimientos se suele fijar en un número de Mach igual a 0,5.

En tal caso, el potencial de velocidades se reduce a la ecuación de Laplace, la más conocida y estudiada de la Física Teórica.

Al ser una ecuación lineal, la solución puede buscarse mediante la superposición de soluciones elementales hasta satisfacer las condiciones de contorno, pero debe recordarse que tales condiciones no son lineales sobre las capas de torbellinos, a causa de la ecuación de Bernoulli y que, además, la geometría de aquéllas suele ser desconocida, lo que introduce una complicación muy sustancial como dificultad específica de la Mecánica de Fluidos, frente a otros fenómenos físicos regidos por la misma ecuación.

Un segundo régimen es el del movimiento subsónico compresible, el cual se produce cuando el número de Mach es inferior a la unidad en todo el campo pero los efectos de compresibilidad se hacen sensibles.

La ecuación del potencial de velocidades si bien sigue siendo de tipo elíptico, como en el caso incompresible, lo que origina una clara

afinidad de planteamientos, deja de ser lineal, lo que introduce en el problema una dificultad básica que ha llevado a tratar, con éxito, de obtener las soluciones mediante el cálculo de correcciones, estimadas por diversos procedimientos, a las correspondientes al caso incompresible (37). Desde hace años, la aviación comercial opera en este dominio.

El tercero es el régimen llamado transónico, en donde las velocidades son próximas a la del sonido y coexisten zonas subsónicas y supersónicas. La ecuación del potencial de velocidades es en este caso de tipo mixto. Los efectos aerodinámicos del régimen transónico son muy intensos, desfavorables (pérdida de sustentación, aumento de resistencia, oscilaciones, etc.) y difíciles de controlar y el tratamiento matemático del problema ofrece grandes dificultades.

En los problemas transónicos aeroespaciales hay, en general, a partir de un cierto valor del número de Mach, el valor «crítico», una región supersónica en contacto con una zona del obstáculo, embebida en una región subsónica. Por encima de otro valor del número de Mach superior al «crítico», se produce una onda de choque en la zona supersónica, que interfiere fuertemente con la capa límite en el punto de contacto de la onda con la pared del obstáculo.

Se trata de un problema aerodinámico de gran interés práctico, puesto que los actuales aviones de línea vuelan en la proximidad de este régimen. Por ello, se ha dedicado gran esfuerzo, desde hace años, a desarrollar formas de secciones con alas que retrasen todo lo posible la aparición de la onda de choque; las llamadas formas «supercríticas» (38).

Un cuarto régimen es el supersónico, cuando el número de Mach es superior a la unidad pero no demasiado grande ($M \ll 4$ a 5). La ecuación diferencial del movimiento es de tipo hiperbólico, por lo que el instrumento matemático adecuado es el método de las Características, introducido por B. Reimann en 1860. La más expresiva manifestación práctica de este régimen es la de que la influencia de las perturbaciones que se producen en un punto determinado, queda circunscrita al «cono

(37) V. G. MILLÁN, págs. 185 y ss.

(38) G. Y. NIEUW y B. M. SPEE: *Transonic Airfoils: Recent Developments in Theory, Experimental and Design*, «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1973, pág. 119. P. K. PIERPONT: *Bringing Wings of Change*, «Astronautics and Aeronautics», 1975, pág. 20.

de Mach» situado aguas abajo de dicho punto y no afecta, por tanto, a la región exterior del mismo (Ley de las Señales Prohibidas), a diferencia de lo que ocurre en el régimen subsónico, en que tales efectos se propagan a todo el espacio fluido, lo cual ocurre, además, instantáneamente en un fluido incompresible.

Por tanto, el tratamiento matemático se facilita mucho merced a la posibilidad de empalmar a lo largo de las características, soluciones diferentes que sean válidas en zonas contiguas.

Otra característica de este régimen, en el que actúa desde hace años la aviación militar, donde ha penetrado recientemente la civil y que es el propio de la balística y de algunos sistemas de propulsión, es, como se ha indicado, la formación de ondas de choque.

Por último, está el régimen hipersónico para velocidades mucho mayores que la del sonido, que es propio de algunos ingenios balísticos y el del retorno de las cápsulas espaciales a la atmósfera densa. En él, el campo del movimiento queda circunscrito a una zona cónica de pequeño ángulo de abertura, limitada por una onda de choque que se forma a proa del vehículo; los fenómenos de calentamiento tienen una gran importancia y la interacción entre la capa límite y la corriente exterior es muy fuerte, todo lo cual exige tratamientos matemáticos específicos de este régimen (39).

El problema fundamental completo a resolver, fuera de la capa límite, es el de determinar con la mayor precisión posible la distribución de presiones o de velocidades sobre la superficie de la aeronave, ingenio u órgano motor, bajo condiciones de movimiento estacionarias, transitorias u oscilantes, porque con ello se obtienen la distribución de sustentación, las resistencias inducida y de onda y el comportamiento aerodinámico debido al accionamiento de órganos de gobierno, ráfagas u oscilaciones, así como las características de las hélices, rotores, compresores, turbinas, etc.

En general; en todos los casos indicados se llega fácilmente a una ecuación integrodiferencial, al aplicar a una expresión integral del potencial de velocidades o de alguna otra función relacionada con él como, por ejemplo, el potencial de aceleraciones, la condición de con-

(39) V. V. MIKHAILOV, V. Y3. NEILAND y V. V. SYCHER: *The Theory of Viscous Hypersonic Flow*, «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1971, pág. 371.

torno sobre las paredes del cuerpo en contacto con el aire, de igualdad de las velocidades normales de ambos, así como las condiciones iniciales que correspondan al caso y de compatibilidad sobre las ondas de choque en los movimientos supersónicos, y sobre las capas de torbellinos, siempre presentes en los movimientos que producen fuerzas de sustentación y depositarias además de la historia completa del movimiento que se analiza, desde el instante en que empezó.

Este planteamiento resulta, evidentemente, demasiado ambicioso, por lo que ha sido necesario aproximarse a la solución del problema por etapas, a partir de modelos muy simplificados de los elementos más críticos, como son las alas y órganos de gobierno, a los que progresivamente se ha incorporado una mayor precisión de descripción y cálculo, la extensión a otros órganos como hélices, etc., la interacción entre los diversos elementos y la consideración de condiciones operativas cada vez más complejas, especialmente por lo que respecta a los casos de movimientos no estacionarios.

La teoría de Perfiles de Kutta (1902) y Joukowski (1906) y de la Línea Sustentadora de Prandtl (1911) así como su extensión al estudio de hélices, rotores, compresores y turbinas, constituyen las dos primeras etapas de este largo recorrido que pasa por la Teoría de la superficie sustentadora, idealización de espesor nulo del ala, cuyo desarrollo constituye una etapa esencial de todo el proceso (40), la de las interacciones, el estudio de los movimientos no estacionarios, el de los efectos no lineales y, finalmente, el cálculo numérico de las soluciones completas en que hoy nos encontramos.

En este largo recorrido ha jugado un papel fundamental, entre los modelos empleados, el de la Teoría Lineal de Perturbaciones Pequeñas (41), análogo en su concepción a los que se aplican, por ejemplo, en Acústica, Resistencia de Materiales o Teoría de Vibraciones y que en Aerodinámica resulta de superponer a un movimiento «principal» conocido, otro de perturbaciones pequeñas frente a aquél, y linealizar las ecuaciones y las condiciones iniciales y en los límites. Como «premio» adicional al esfuerzo realizado, resulta afortunado señalar que la aplica-

(40) S. M. BELOTSERKOVSKI: *Study of the Unsteady Aerodynamics of Lifting Surfaces Using the Computer*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1977, pág. 469.

(41) G. N. WARD: *Linearized Theory of Steady High-Speed Flow*. Cambridge Univ. Press, 1955.

ción práctica de sus resultados se ha podido extrapolar con éxito, en general, bastante más allá de lo que pudiera anticiparse de las limitaciones de su planteamiento, no siempre rigurosamente coherente con las exigencias del análisis matemático.

Una simplificación importante de este método, aparte de la linealización del problema, es que permite predeterminar la geometría de las «capas de torbellinos» y la de las ondas de choque, así como que retiene el carácter potencial del movimiento detrás de éstas.

La aplicación más extensa que se ha hecho del mismo ha sido al cálculo de la distribución de la sustentación sobre las alas de los aviones y a otros casos afines, así como al estudio de la distribución de presiones sobre cuerpos fuselados con simetría de revolución.

El fundamento de los diversos métodos empleados en este modelo consiste, en general, en calcular el potencial de velocidades de perturbación (o el de aceleraciones) mediante la superposición de soluciones singulares de intensidad desconocida, repartidas uniformemente sobre la superficie del obstáculo y de las capas de torbellinos (42) y en relacionar aquellas intensidades con la condición de contorno en cada punto de la superficie del cuerpo y de la estela, lo que conduce a ecuaciones integrodiferenciales singulares, cuya solución se obtiene mediante la discretización del problema, por alguno de los diversos procedimientos enunciados al comienzo, con el empleo de calculadoras electrónicas (43). Como ya se ha dicho, por exigencias de estabilidad, control y aeroelásticas, los movimientos no estacionarios han cobrado una importancia hoy predominante en este problema.

En algunos casos, las singularidades se distribuyen en el interior del obstáculo, en lugar de hacerlo sobre la superficie, método introducido por Von Karman para el cálculo de la corriente en el caso de cuerpos con simetría de revolución (44). Un reciente procedimiento se debe a Zedan y Dalton (45), de la Universidad de Houston, quienes,

(42) V., F. KEUNE y K. BURG: *Singularitätenverfahren der Strömungslehre*. G. Braun, Karlsruhe, 1975.

(43) H. ASHLEY, S. WINDALL y M. T. LANDAHL: *New Directions in Lifting Surface Theory*. «AIAA Jour.», 1965, pág. 3. M. T. LANDAHL y V. J. E. STARK: *Numerical Lifting Surface Theory. Problems and Progress*. «AIAA Jour.», 1968, pág. 2049.

(44) TH. VON KARMAN: *Calculation of the Flowfield Around Airships*. NACA TM 574, 1930.

(45) M. F. ZEDAN y CH. DALTON: *Potential Flow Around Axisymmetric Bodies: Direct and Inverse Problems*. «AIAA Jour.», 1978, pág. 242.

además, han efectuado una revisión de la evolución histórica y estado de la cuestión.

Otro ejemplo clásico de aplicación práctica del método lineal se refiere al estudio de los efectos de compresibilidad en régimen subsónico, mediante la llamada analogía de Prandtl-Glauert, que reduce el caso al del régimen incompresible sobre un cuerpo de geometría afin. Este método fue extendido a mayores valores del número de Mach, por Von Karman y Tsien, con un procedimiento que revela una gran intuición del proceso (46).

Existen, sin embargo, dos regímenes de movimiento entre los anteriormente descritos, donde el método de linealización resulta inaplicable, a causa del orden de magnitud de determinados términos de la ecuación diferencial de potencial de velocidades: el régimen transónico y el hipersónico, lo que constituyen una manifestación clara de las dificultades inherentes a uno y otro, a las que hemos aludido ya.

Por tanto, el tratamiento matemático de ambos regímenes ha de partir inicialmente de modelos simplificados pero no lineales (47).

Obviando en cierto modo estas dificultades por un procedimiento análogo al de Prandtl-Glauert para los movimientos subsónicos, Von Karman en el caso transónico, así como Tsien y Hayes en el hipersónico, han formulado leyes de semejanza que ponen de manifiesto la incidencia de parámetros fundamentales como el espesor del cuerpo y el número de Mach y relacionan problemas afines.

* * *

Un segundo paso, tras la aproximación lineal, consiste, naturalmente, en buscar aproximaciones de orden superior, a partir de aquella, mediante el desarrollo de la ecuación diferencial en términos de un parámetro que represente, por ejemplo, la influencia del espesor del cuerpo o la del número de Mach, para los efectos de compresibilidad, etc. También de estos métodos se ha hecho uso muy amplio en la resolución de los problemas de Aerodinámica (48).

(46) G. MILLÁN, págs. 183 y ss.

(47) G. MILLÁN, págs. 260 y 275 respectivamente.

(48) M. J. LIGHTHILL: *Higher Approximations*. Sec. E. Vol. VI, «High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion», Princeton Univ. Press.

Pero como ya hemos dicho, lo más característico de la situación en el momento presente, es la resolución numérica, con ayuda de las calculadoras de gran velocidad y capacidad de almacenamiento, de las soluciones de las ecuaciones completas con las condiciones de contorno que corresponden al conjunto de las formas complejas de las aeronaves, ingenios y sistemas de propulsión reales aplicadas sobre sus contornos reales y sobre la geometría real de las capas de torbellinos y ondas de choque, mediante alguno de los sistemas de discretización a que antes hicimos referencia (49).

Un excelente ejemplo y uno de los primeros de estos nuevos métodos, es el desarrollado por Hess y Smith (50), ambos investigadores de la casa Douglas, lo que resulta muy expresivo sobre el origen de la necesidad de tales métodos, para el cálculo de la corriente en torno a cuerpos de geometría arbitraria, en régimen incompresible, mediante la reducción del problema a la integración sobre la superficie del cuerpo, de una ecuación integral de Fredholm de segunda clase, la cual se obtiene al representar el potencial de velocidades mediante una distribución continua de fuentes sobre la superficie del cuerpo e imponer la condición de contorno correspondiente.

La discretización para el cálculo numérico consiste en dividir la superficie del cuerpo en un cierto número de elementos planos, en cada uno de los cuales se mantiene constante la intensidad de la fuente e imponer en cada uno de ellos la condición de contorno de que la velocidad normal del fluido sea igual a la del cuerpo, con lo que se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas para la determinación de las intensidades de las fuentes, al que se aplican el cálculo matricial y el ordenador.

El método permite tratar con la aproximación necesaria el complejo problema de las interacciones entre fuselajes, alas, órganos de gobierno, etc. y la comparación con las mediciones experimentales es excelente, al operar con un nivel de discretización perfectamente asequible a las modernas posibilidades de cálculo numérico (51). En los casos

(49) S. R. BLAND: *Recent Advances and Concepts in Unsteady Aerodynamic Theory*. NASA SP-347, 1975.

(50) J. L. HESS y A. M. O. SMITH: *Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies*. «Progress in Aeronautical Sciences», vol. 8, 1967, Pergamon Press.

(51) Un excelente trabajo de revisión sobre problemas de interacción es el debido

con sustentación, el problema se complica mucho por la presencia de la capa de torbellinos, de forma desconocida (52).

Por otra parte, ejemplos de métodos de cálculo numérico no lineales que permiten determinar la configuración y evolución de la estela turbillonaria detrás del ala, problema que hoy tiene gran interés en cuestiones de interferencia sobre la propia aeronave u otras próximas, se deben a Djojodiharjo y Widnall (53), y a Sucin y Morino (54). Un trabajo de revisión útil de la cuestión es el debido a Rossow, de la NASA (55). Por último, el Prof. Belotserkovskii, del Instituto Joukowski de Moscú, en el excelente trabajo ya citado de revisión de los métodos de cálculo numérico para la Teoría de la Superficie Sustentadora en régimen no estacionario incluye una discusión y bibliografía muy completas sobre la determinación numérica de la formación y evolución de las estelas turbillonarias detrás de las alas.

Otro procedimiento más reciente, general y flexible que el de Hess y Smith, aplicable a los regímenes subsónicos y supersónicos, al que se atribuyen grandes posibilidades, si bien por el momento su aplicación se ha limitado al caso de perturbaciones pequeñas, ha sido desarrollado por L. Morino (56) y sus colaboradores, de la Universidad de

a H. ASHLEY y W. S. RODDEN: *Wing-Body Aerodynamic Interaction*. «Ann. Rev. Fluid. Mech.», 1972, pág. 481.

(52) P. E. RUBBERT y G. R. SAARIS: *Review and Evaluation of a Three-Dimensional Lifting Potential Flow Analysis Method for Arbitrary Configurations*. «AIAA Paper», 72-188, 1972.

(53) R. H. DJOJODIHARDJO y S. E. WIDNALL: *A Numerical Method for the Calculation of Nonlinear, Unsteady Lifting Potential Flow Problems*. «AIAA Jour.», 1969, pág. 2001.

(54) E. O. SUCIN y L. MORINO: *Nonlinear Steady Incompressible Lifting-Surface Analysis with Wake Roll-Up*. «AIAA Jour.», 1977, pág. 54.

(55) V. J. ROSSOW: *Survey of Computational Methods for Lift-Generated Wakes*. NASA SP-347, 1975.

(56) La exposición general y desarrollada se hallará en M. MORINO: *A General Theory of Unsteady Compressible Potential Aerodynamics*. NASA CE-2464, 1975. Resúmenes de la misma se hallarán en «AIAA Jour.», 1974, pág. 191 y 1975, pág. 368. Además, en esta última se expone un análisis crítico de las cuatro alternativas de formulación posibles, a que conduce la expresión integral del potencial de velocidades mediante distribuciones continuas de singularidades sobre el contorno del espacio fluido. Por último, para el caso de movimientos arbitrarios en régimen subsónico o supersónico, ver. L. MORINO y L. T. CHEN: *Initial Compressible Potential Aerodynamics Around Complex Aircraft Configurations*. «Aerodynamic Analysis Requiring Advanced Computers», NASA SP-347, 1975.

Boston, y consiste en aplicar el método de la función de Green a la ecuación del potencial de velocidades, lo que proporciona una representación en forma integral del potencial en cualquier punto del campo del movimiento, en función de los valores del mismo y de su derivada normal sobre la superficie del cuerpo y de la estela. Al particularizar aquella expresión a los puntos situados sobre la superficie del cuerpo, se obtiene también aquí una ecuación integral del Fredholm de segunda clase, que relaciona los valores del potencial y de su derivada normal sobre ella.

La discretización se lleva a cabo mediante el fraccionamiento del cuerpo en pequeños elementos que se aproximan por paraboloides hiperbólicos, en cada uno de los cuales se suponen constantes los valores del potencial y de su derivada normal, cuyo valor está determinado por la condición de contorno en el elemento. Con lo cual, la ecuación integral se reduce aquí también a un sistema de ecuaciones algebraicas, que resuelve el ordenador. La comparación con las mediciones experimentales da resultados también muy satisfactorios.

En el caso de los movimientos supersónicos, el carácter hiperbólico de las ecuaciones permite aplicar un procedimiento de integración numérica paso a paso de la ecuación del potencial de velocidades, a partir de una sección determinada en donde se dan las condiciones iniciales, situada en la zona de proa del vehículo.

Un ejemplo típico reciente de aplicación de este procedimiento, previa representación conforme de cada una de las secciones en planos transversales a la dirección del movimiento, con objeto de facilitar la red de discretización empleada para el cálculo numérico, ha sido desarrollado por Marconi et al. de la NASA y aplicado al estudio del movimiento en torno al transbordador espacial (57).

La dificultad en este tipo de movimientos radica generalmente en que se forma a proa una onda de choque desprendida, detrás de la cual existe una zona de movimiento subsónica y transónica, hasta llegar a la región supersónica a la que puede aplicarse procedimientos como el anterior.

Por el contrario, el tratamiento de la zona subsónica, en donde la onda de choque desprendida obliga a resolver un problema «inverso»

(57) F. MARCONI, L. YAEGER y H. H. HAMILTON: *Computation of High-Speed Inviscid Flows About Real Configurations*. NASA, SP-347, 1975.

puesto que su forma inicial no es conocida, ofrece dificultades considerablemente mayores, de cuyo tratamiento puede dar una idea el método codificado, desarrollado hace algunos años por Inouye et al. de la NASA (58), para movimientos bidimensionales o con simetría de revolución, o el más general de Moretti y Abbel (59) para movimientos en tres dimensiones.

Ejemplos más recientes de aplicación de estos métodos de integración paso a paso al problema del transbordador orbital han sido desarrollados por Kutler (60) et al. y por Solomon (61) et al., con resultados excelentes cuando se comparan los valores obtenidos con los de las mediciones experimentales.

* * *

Para terminar esta exposición, desearía referirme brevemente a algunos aspectos específicos del tratamiento numérico del problema transónico.

Particularmente por lo que se refiere a los movimientos transónicos en que la corriente principal es subsónica, pero en el seno de la misma aparecen regiones supersónicas contiguas a las superficies de los obstáculos que las limitan como las que se producen, por ejemplo, sobre las alas de los aviones que vuelan a velocidades subsónicas elevadas; en las tomas de aire de los motores; en los compresores, en las puntas de las palas de los rotores de helicópteros, etc. (62).

Como ya se ha dicho, en general, cuando la región supersónica alcanza una extensión suficiente, se produce en su seno una onda de

(58) M. INOUE, J. V. RAKICH y H. LOMAX: *A Description of Numerical Methods and Computer Programs for Two-Dimensional and Axisymmetric Supersonic Flow Over Blunt-Nosed and Flared Bodies*. NASA, TND-2970, 1965.

(59) G. MORETTI y M. ABBEL: *A Time-Dependent Computational Method for Blunt Body Flow*. «AIAA Jour.», 1966, pág. 2136.

(60) P. KUTLER, R. F. WARMING y H. LOMAX: *Computation of Space Shuttle Flowfields Using Noncentered Finite-Difference Schemes*. «AIAA Jour.», 1973, pág. 196.

(61) J. M. SOLOMON, M. CIMET, R. E. FERGUSON y J. B. BELL: *Inviscid Flowfield Calculations for Re-Entry Vehicles with Control Surfaces*. «AIAA Jour.», 1977, pág. 1742.

(62) V., p. e., H. H. PEARCEY y J. OSBORNE: *Some Problems and Features of Transonic Aerodynamics*. «AIAA Professional Study Series», 1970.

choque, cuya interferencia con la capa límite da lugar a efectos de perturbación muy fuertes y, además, el efecto de pequeñas oscilaciones se amplifica mucho, todo lo cual hace que se trate de un caso tecnológicamente crítico.

Por lo que el tratamiento matemático de este problema transónico de una zona supersónica embebida en otra región subsónica (63) está siendo objeto de una gran atención, desde hace años, que ha permitido realizar progresos fundamentales en las dos últimas décadas (64).

Análisis matemático que se ve muy dificultado porque no admite un tratamiento linealizado, y además la ecuación del potencial de velocidades es de tipo mixto, puesto que pasa de ser elíptica sobre la zona subsónica a hiperbólica sobre la supersónica.

La primera idea para controlar los efectos perjudiciales producidos por la aparición de la onda de choque en la región supersónica es la de retrasar todo lo posible su presencia, lo que ha conducido al desarrollo de los perfiles de ala llamados supercríticos (65).

Se trata de un problema «inverso», en dos dimensiones, que puede resolverse mediante la transformación del movimiento al plano hodógrafo, donde el sistema diferencial es lineal y además se resuelve por aplicación del método de las características imaginarias (66).

El tratamiento numérico de los problemas transónicos, inicialmente para movimientos bidimensionales estacionarios, se ha llevado a cabo básicamente mediante dos procedimientos. Uno, análogo en su concepción al de Moretti antes citado, consiste en obtener la solución como resultado asintótico de un movimiento no estacionario para la ecuación exacta. Otro, mediante un método de diferencias finitas e iteración por relajación, bien sea para la ecuación exacta o para una ecuación aproximada no lineal, obtenida por el método de perturbaciones pequeñas.

(63) Ya nos hemos referido al caso contrario de una zona subsónica rodeada por otra supersónica, al tratar de las ondas de choque desprendidas en los movimientos supersónicos o hipersónicos.

(64) Para una revisión del estado de la cuestión, ver el trabajo de H. YUSHIHARA: *Computational Methods for 2D and 3D Transonic Flows with Shocks*. 1972. «Transonic Aerodynamics», AIAA Professional Study Series.

(65) G. Y. NIEWLAND: «*Theoretical Design of Shock-Free Transonic Flow Around Aerofoil Sections*». 5.º Congreso ICAS, Londres, 1966. R. T. WHITCOMB: «Review of NASA Supercritical Airfoils», 1974. Trans. Aerod. AIAA Prof. Series.

(66) P. R. GARABEDIAN: *Computational Transonics*. NASA SP-347, 1975.

La referencia de Yoshihara antes citada, describe estos procedimientos e incluye la bibliografía correspondiente, hasta 1972.

Una dificultad de los métodos de diferencias finitas se refiere a la formación de la onda de choque y ha sido subsanada posteriormente por Murman (67). Otra dificultad se debe a la lenta convergencia del proceso de iteración que requiere cientos de pasos para alcanzar una aproximación satisfactoria, lo que también se ha subsanado recientemente mediante el desarrollo de algoritmos más eficaces (68).

El paso siguiente ha sido la extensión de estos métodos al estudio de movimientos con simetría de revolución y a problemas en tres dimensiones, incluidos los de interferencias entre alas y fuselajes y otros. En la referencia de Garabedian se encontrará alguna bibliografía.

Finalmente, durante los últimos años se ha abordado el caso de los movimientos estacionarios, particularmente importante en el régimen transónico por las razones aeroelásticas y de estabilidad y control a las que ya se ha hecho referencia. En primer lugar, se han desarrollado procedimientos de cálculo para un sistema linealizado de ecuaciones de perturbaciones, superpuesto a una corriente principal transónica (69), para proseguir con los efectos no lineales (70).

Un breve resumen del estado de la cuestión, en 1975, se encuentra en un trabajo de revisión de Bland, ya citado, al cual hay que agregar las más recientes contribuciones de Ballhaus y Goorjian (71).

* * *

(67) E. M. MURMAN: *Analysis of Embebbed Shock Waves Calculated by Relaxations Methods*. «AIAA Jour.», 1974, pág. 87.

(68) E. D. MARTIN: *A Fast Semidirect Method for Computing Transonic Aerodynamic Flows*. «AIAA Jour.», 1976, pág. 914. M. M. HAFEZ y H. K. CHENG: *Convergence Acceleration of Relaxation Solutions for Transonic Flow Computations*. «AIAA Jour.», 1977, pág. 329.

(69) F. E. EHLERS: *A Finite-Difference Method for the Solution of the Transonic Flow Around Harmonically Oscillating Wings*. NASA CR-2257, 1973.

(70) S. S. STAHARA y J. R. SPRITER: *Development of a Non-linear Unsteady Transonic Flow Theory*. NASA CR-2258, 1973.

(71) W. F. BALLHAMS y P. M. GOORJIAN: *Implicit Finite-Difference Computations of Unsteady Transonic Flows About Airfoils*. «AIAA Jour.», 1977, pág. 1728 y *Computation of Unsteady Transonic Flows by the Inditital Method*. «AIAA Jour.», 1978, pág. 117.

Para terminar, debe señalarse que frente a los importantes progresos realizados durante los últimos años en la aplicación del cálculo numérico rápido a la resolución de los problemas de la Aerodinámica Moderna, existen todavía cuestiones importantes que están lejos de haber alcanzado una situación satisfactoria.

Algunas están empezando a abordarse ahora con éxito y es de esperar que se efectúen avances de consideración durante los próximos años. Tal es el caso del cálculo simultáneo y combinado de corrientes exteriores y de la capa límite, del que existen ejemplos recientes de tratamiento numérico en movimientos bidimensionales (72).

Otras, se presentan todavía bajo una perspectiva más oscura y distante. Entre todas, la más importante y difícil, una de las cuestiones básicas de la moderna Mecánica de Fluidos, de gran significación tecnológica, aún pendiente de resolución, es el tratamiento numérico satisfactorio de movimientos con corrientes de desprendimientos de las capas límites (73).

(72) R. B. KINNEY y Z. M. CIELAK: *Analysis of Unsteady Viscous Flow Past an Airfoil*. «AIAA Jour.», Part I: «Theoretical Development», 1977, pág. 1712. Part II: «Numerical Formulation and Results», 1978, pág. 105.

(73) W. R. SEARS: *Unsteady Motion of Airfoils with Boundary-Layer Separation*. «AIAA Jour.», 1976, pág. 216. H. L. MOSES, R. R. JONES y W. F. O'BRIEN: *Simultaneous Solution of the Boundary Layer and Freestream with Separated Flow*. «AIAA Jour.», 1978, pág. 71.