DISCURSOS

LEIDOS ANTE

LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS,

FISICAS Y NATURALES

EN LA RECEPCION PUBLICA DEL

SEÑOR DON JOSÉ BALANZAT.

MADRID:
IMPRENTA Y LIBRERÍA DE DON EUSEBIO AGUADO.—PONTEJOS, 8.

1866.

DISCURSO

DEL

SR. DON JOSÉ BALANZAT.

Señores:

Poseido de profunda emocion, elevo hoy mi voz por primera vez en este santuario de las ciencias, cuyas puertas me habeis franqueado, dispensándome la honra mayor, la mas alta merced que hubiera podido acariciar en mis sueños de noble ambicion. Y esta emocion, Señores, no es producida por el justo temor de tener que dirijiros mi desautorizada palabra, ni nace del convencimiento íntimo de que nunca podré cautivar vuestra atencion, por mas esfuerzos que haga para ello mi limitada inteligencia, ni por muchos que sean los recursos que pretenda sacar con tal objeto del pobre arsenal de mis conocimientos y erudicion. Estas dos causas bastarian por sí solas en este momento, para embargar mi voz y conturbar mi espíritu, si no las dominase otro sentimiento mas íntimo y poderoso: tal es, Señores, el de la profunda gratitud que me inspira la inmerecida honra que me habeis dispensado, admitiéndome en el seno de esta Real Academia, á compartir vuestros trabajos y las árduas tareas que le están confiadas.

Si las altas mercedes que enaltecen al hombre, inspiran profundo reconocimiento al que las recibe, por grandes que sean sus títulos para alcanzarlas, ¡cuán grande no será el que hoy experimento yo, Señores, que sin mas merecimientos que vuestra suma benevolencia, me veo elevado á tanta altura por vuestros unánimes sufragios! No extrañeis, pues, que el sentimiento de mi profunda gratitud domine á todo otro en este instante; y permitidme, Señores, que os lo manifieste con toda la efusion de mi alma, en esta ocasion solemne.

Tambien contribuye poderosamente, Señores, á conmover mi espíritu, el vivísimo recuerdo del honrado y sabio académico cuya vacante vengo á ocupar, y cuya muerte deplora como yo la Academia. El fue mi maestro cuando emprendí la carrera de las armas; él guió mis primeros pasos por el escabroso y dificil sendero de las ciencias; él fue despues mi gefe y compañero en el Cuerpo de Artillería; con él, por último, compartí los trabajos encomendados á la Junta Superior Facultativa de esta arma, hasta que los achaques de la vejez y las honrosísimas cicatrices que cubrian su cuerpo, le obligaron á dejar el servicio activo, sin abandonar por ello sus científicas tareas, en medio de las que le sorprendió la muerte. Séame, pues, dado aprovechar esta ocasion, para rendir respetuoso homenaje de cariño al Brigadier *D. José de Odriózola*, al maestro y amigo, que bajó al sepulcro ciñendo la doble corona del sabio y del guerrero, y dejando en esta ilustre Corporacion un vacío que nunca podré llenar dignamente.

Dominando cuanto me sea dable estos sentimientos, voy á dirijir mi voz á esta eminente Corporacion, para cumplir con el deber que me imponen sus estatutos. Y un temor profundo se apoderaría de mi espíritu al exponer mis ideas ante tan ilustrado concurso, si no lo mitigase el convencimiento, de que la benevolencia es compañera inseparable del verdadero saber. Con ella cuento, Señores; ella me anima á dirijiros mi desautorizada palabra, y á exponer mis ideas acerca de la *influencia de la filosofía matemática en el estudio y progreso de las ciencias exactas*, tema de importancia suma, dificil de desarrollar convenientemente en los estrechos límites de un discurso, y muy superior á mis escasos conocimientos y débiles fuerzas.

Pero confieso, Señores, que á pesar de tamañas dificultades, no he podido resistir al deseo de discurrir sobre un asunto que siempre he considerado como muy importante, y más en la época actual, en que elevada la ciencia matemática á las altas y serenas regiones de la filosofía que le es propia, y en las que siempre debió vivir y desarrollarse, se irradia desde ellas, y presta su esencia, su lógica y sus eternas verdades, á todos los ramos del saber humano.

Despues de los fructíferos trabajos de sábios y filósofos; despues de inmensos descubrimientos, muchos de ellos tan filosóficos y grandes que bien pudieran pasar por providenciales; despues de empeñadas discusiones y sofísticas controversias; despues, en fin, de persecuciones para algunos de sus hombres ilustres; la ciencia matemática, consagrada siempre á investigar la verdad sin confundirla nunca con el error, unas veces avanzando con trabajosa lentitud, permaneciendo otras estacionaria siglos enteros, y otras devorando el espacio con portentosos descubrimientos, ha llegado en la segunda mitad del presente siglo, á constituir una ciencia esencialmente filosófica, base fundamental de la filosofía positiva, que tuvo origen hace más de dos siglos en el gran movimiento comunicado á la inteligencia por los preceptos de Bacon, las grandes concepciones de Descartes y los descubrimientos de Galileo, y que empezó á tomar forma con el nombre de filosofía natural, desde la época de Newton. La ciencia matemática es, por tanto, la primera y mas perfecta, digámoslo así, de las ciencias fundamentales; y sus ideas, como muy oportunamente dice Auguste Comte, son las más comprensivas, abstractas y sencillas á la vez que se pueden concebir. Desde el punto de vista lógico y filosófico, la ciencia matemática es universal, sin que en último resultado haya cuestion que no esté bajo su dominio.

Si la ciencia matemática es, en el concepto que dejo lijeramente expresado, base fundamental de todos los conocimientos humanos, es evidente que debe asentarse en una filosofía que la conduzca á la unidad sistemática, estableciéndola sobre principios sólidos é indestructibles. Y así es en efecto.

Establecer *à priori* los principios de la ciencia matemática y de sus leyes fundamentales; explicar los fenómenos intelectuales que presenta; demostrar la necesidad de estos fenómenos, y reducir á unidad sistemática sus diversas ramas, dándoles por base de la exactitud que las caracteriza, una certidumbre superior, absoluta; tal es el objeto de la filosofía matemática; tal la definicion que de ella da un sábio matemático y filósofo moderno, del que hablaré mas adelante.

Cumple á mi propósito, Señores, recorrer el camino del progreso y desarrollo de la ciencia matemática desde sus primeros albores, no con el fin de trazar su historia ni siquiera á grandes rasgos, sino con el objeto de hacer ver el influjo de la filosofía en los adelantamientos de dicha ciencia, y de qué modo sus distintos elementos, sus diversas ramas, sus partes todas, esparcidas, sin cohesion y sin lazos que las sujetasen, han ido progresivamente acercándose, ligando sus principios fundamentales, fundiéndolos en las sanas doctrinas de una filosofía asentada en la certidumbre absoluta, y constituyendo poco á poco la unidad sistemática, ley fundamental de la ciencia.

La observacion de los fenómenos del mundo físico, así como la armonía de la constitucion orgánica de los séres del globo que habitamos, y de la parte del universo creado que percibimos, debieron herir vivamente la imaginacion de los mas antiguos pobladores de la tierra, é inducirlos al estudio de sus leyes fundamentales. La ciencia matemática puede decirse que ha sido la primera estudiada en su parte mas contingente y concreta, que es la que podia hacer impresion en los pueblos primitivos, cuya inteligencia, poco cultivada, no estaba en aptitud de elevarse á las altas regiones de la filosofía, al análisis de los hechos, ni á las leyes de observacion de los fenómenos que percibian los sentidos como realizados en el espacio y en el tiempo, que son las dos intuiciones puras en que estriban cuantas tenemos de los objetos materiales.

No es debido á la casualidad, Señores, que las primeras investigaciones matemáticas se hiciesen sobre la geometría, rama tan esencial de la ciencia; ni tampoco es casual que las primeras investigaciones de los hombres sobre la mecánica y la astronomía, se refieran á la mas remota antigüedad, aunque entonces no se considerasen estas ramas de la ciencia matemática como partes constitutivas de ella. Si los hombres en aquellas lejanas edades se dedicaron casi exclusivamente al estudio de la geometría y de la mecánica, hiciéronlo obedeciendo á la accion del entendimiento humano, que no pudiendo percibir los objetos y fenómenos físicos y exteriores sino con arreglo á las intuiciones puras del tiempo y del espacio, habia de ejercerse, falta de un criterio esencialmente filosófico, en la parte más concreta y palpable de ambas intuiciones, que son las dos formas invariables del mundo físico. ¿Y qué más necesario, Señores, para la percepcion de los fenómenos y la intuicion de los objetos finitos en el espacio, que la forma de estos mismos objetos y su extension, cuyo estudio constituye la geometría? ¿Ni qué fenómenos más concretos en lo que se refiere al tiempo, segunda forma del mundo físico, que el movimiento regular y admirable de los innumerables astros que rodean nuestro globo, á los que dirijian sus miradas hasta con adoracion aquellos pueblos primitivos? No es pues casual, Señores, que las primeras investigaciones del entendimiento sobre los fenómenos y objetos del mundo exterior fuesen geométricas en lo tocante al espacio, ni mecánicas con aplicacion á la astronomía por lo que respecta al tiempo. La accion de la inteligencia, obligada á amoldarse, por decirlo así, á las formas eternas de espacio y tiempo, hubo de ejercerse, como ya he dicho, y se ejerció, á falta de un criterio filosófico, en la parte más concreta, más palpable de fenómenos y objetos; en la forma y la extension, como traduccion del espacio; y en el movimiento, como símbolo del tiempo. No hubo pues, repito, nada casual en el estudio de la geometría y de la mecánica por los antiguos: al contrario; todo fue lógico y natural, y tanto más natural y más lógico, cuanto menor era su criterio filosófico y más limitada la accion especulativa de su inteligencia, que no les permitió siquiera considerar la mecánica como rama esencial de la ciencia matemática.

Las formas de espacio y tiempo, á que precisamente han de amoldarse las percepciones de los objetos y fenómenos del mundo exterior, y las leyes que los rijen, son la base mas radical de la filosofía matemática, y de ella se derivan los algoritmos primitivos y los axiomas fundamentales de esta ciencia. No pudiendo la forma ser dada directamente por el objeto, puesto que ella en sí no es sensacion, debe considerársela como un conocimiento ó intuicion pura anterior al objeto, dada *à priori*, y tan necesaria, que sin ella la percepcion de los objetos no seria posible. Así, cuando se separa de la representacion de un cuerpo todo lo que concibe el entendimiento, como la sustancia, la fuerza y la divisibilidad; y lo que las sensaciones hacen conocer, como la dureza y el color; quedan aún, sin embargo, la extension y la figura. Estas dos cualidades son por lo tanto intuiciones puras que tienen lugar *à priori*, en el espíritu humano, como forma invariable de la sensibilidad, sujetas tambien á leyes invariables de percepcion. Pero siendo imposible la representacion de los objetos y su intuicion sensible, sin estar separados unos de otros, y colocados por consiguiente como objetos finitos en el espacio; y como por otra parte no es posible percibir su existencia sino de una manera sucesiva, es decir, en el tiempo, resulta que el espacio y el tiempo son las condiciones precisas de todas nuestras intuiciones, el espacio para los objetos exteriores, y el tiempo para todos en general. Y en efecto, Señores, ¿es posible siquiera concebir objetos materiales fuera del espacio y el tiempo, ni tampoco separar, por mas abstracciones que para ello haga nuestro entendimiento, de las condiciones de existencia de un objeto, las del espacio y el tiempo referentes á este mismo objeto? Siendo, pues, el espacio y el tiempo intuiciones puras necesarias para las de los objetos sensibles, sus condiciones, y los juicios que sobre ellas se formen, deben tener una existencia real: esto explica la evidencia, la exactitud y necesidad de las proposiciones matemáticas, y su aplicacion á todos los fenómenos del universo.

Las intuiciones puras del espacio y del tiempo, que no se pueden separar del entendimiento por mas que se aniquile y reduzca á la nada el objeto percibido, y que tampoco desaparecen aunque por una abstraccion de la razon se destruya en dichos objetos todo lo que de ellos comprende el entendimiento y conocemos por la sensacion; son eternas, verdaderas, indestructibles, y base fundamental de la filosofía matemática; y los algoritmos y axiomas que de ellas se deducen, verdades tambien eternas, inmutables, que dan á la ciencia que de ellos se deriva, llamada ciencia matemática, todas las condiciones de exactitud y certidumbre que la caracterizan.

De estos principios filosóficos se deducen inmediatamente, como ya he indicado, los algoritmos primitivos y los axiomas fundamentales de la ciencia matemática; porque si para la percepcion de los objetos finitos, bajo las formas características del espacio y el tiempo, han de estar separados unos de otros, y si además la percepcion no puede ser simultánea, sino sucesiva; es evidente que la entidad objeto es la unidad, y la operacion intelectual de agregacion ó segregacion de diferentes partes ú objetos, es precisa para concebir la existencia de estos en el tiempo, ó lo que es lo mismo, para que sea sucesiva y no simultánea su percepcion. La agregacion ó segregacion de unos objetos á otros ó de unas partes á las demás, constituyen los dos algoritmos primitivos de la suma y resta de unidades indenominadas; resultando inmediatamente de estas consideraciones, que de las intuiciones puras de espacio y tiempo se deriva, como intuicion pura tambien, la de la unidad, y los algoritmos primitivos de la ciencia matemática, la suma y la resta. Y, como las operaciones de la multiplicacion y division, no son otra cosa respectivamente que la suma y resta abreviadas bajo otra forma derivada lógicamente, es indudable que la intuicion pura de la unidad, y los cuatro algoritmos primitivos de la suma, resta, multiplicacion y division, son la base filosófica sobre que se levanta el inmenso edificio de la ciencia matemática.

A esta base va unida, Señores, la idea del infinito, inseparable del entendimiento humano, como antítesis de lo finito, que es lo que solo pueden percibir nuestros sentidos. El infinito no es, pues, cantidad, y no debe aparecer como tal en las operaciones matemáticas; así como el símbolo de la nada no es mas que una abstraccion de la cantidad y un límite hácia el que tiende la disminucion progresiva; y como el punto matemático no es tampoco otra cosa que la negacion de la longitud, y un límite hácia el que tiende la disminucion de la extension lineal, que en su infinita pequeñez goza de todas las propiedades y está sujeta á las mismas leyes que la línea á que pertenece: idea filosófica que encierra en sí la admirable concepcion del cálculo de los infinitamente pequeños. ¡Y á cuántos errores, Señores, á cuánto atraso en el estudio de la ciencia matemática, ó mejor dicho en el de las ramas de esta ciencia que entonces se cultivaban, no dieron lugar entre los antiguos las falsas concepciones de los símbolos y los límites que tan lastimosamente confundian!

Si las cuestiones matemáticas hubieran sido tratadas con un criterio verdaderamente filosófico, y los principios fundamentales de la ciencia se hubiesen establecido *á priori* con la elevacion de ideas, y la tendencia hácia la unidad sistemática que exije imperiosamente la filosofía matemática; ni se habria dudado en lo antiguo de que la mecánica era una de las ramas más importantes y más lógicas de la ciencia, ni se hubiera tenido tan falsa idea de los límites, ni hubieran existido escuelas filosóficas como las de Epicuro y Pirron, que negaran la certidumbre de las proposiciones matemáticas. Por mas que la secta de Pirron se ocupase en suscitar dudas sobre todos los conocimientos humanos (razon por la cual parece lógico que pretendiera hallarlas en las proposiciones matemáticas), tal vez habria desistido de su empresa, ó hubiera en vano tratado de sustentarla, si los matemáticos hubiesen tenido un conocimiento filosófico de los fundamentos de la ciencia, y medios por consiguiente para defenderla de los rudos aunque sofísticos ataques de sus enemigos. El Pirronismo entonces, con sus exajeraciones y sofismas, no se habria atrevido á combatirla, y mucho ménos á sentar como principio, que no habia demostraciones ni medios de alcanzar la menor certidumbre; porque los axiomas mismos eran de menor peso que el testimonio de los sentidos, expuestos tantas veces á error; y por último, no hubiera llegado el caso de que un Empírico, digno discípulo de esta escuela, escribiese cuatro libros exclusivamente destinados á combatir las proposiciones matemáticas, teniendo la absurda pretension de probar que no habia cuerpos, ni extension, ni números, ni sonidos.

Para comprender las falsas concepciones y la carencia de ideas verdaderamente matemáticas, de que adolecian algunos filósofos de aquella época, bastará fijar un momento la atencion en los argumentos con que combaten las verdades geométricas, y que tan magistralmente resume y comenta el sábio Montucla. Los objetos de que trata la geometría, decian, no tienen ninguna realidad, puesto que no pueden existir líneas sin latitud, superficies sin espesor, y puntos sin latitud, longitud y profundidad; añadiendo, que semejantes afirmaciones eran creaciones de la fantasía. Las mismas figuras geométricas no tenian para ellos ninguna realidad, porque no era posible trazar ni construir un círculo ó una esfera perfectos; de todo lo que deducian, que la geometría era una ciencia que trataba de quimeras é imposibles. ¡Admirable lógica! Negar las intuiciones puras geométricas, solo porque no pueden tener existencia contingente y tangible!

Y aquí es donde precisamente se pone en relieve la falta de sano criterio filosófico de los pirrónicos, impugnadores de las verdades geométricas. Sus mismos argumentos forman el proceso de sus errores; condenan su sistema y patentizan su ignorancia. Su lastimosa confusion de los límites con las cantidades, hace resaltar más las verdades geométricas, y las intuiciones puras que le sirven de indestructible fundamento. Entre los peregrinos argumentos de que se valian para combatir los principios capitales de la geometría, hay algunos que merecen reseñarse. Si desde el centro de un círculo, decian, se tiran rádios á todos los puntos de la circunferencia, estos llenarán la superficie del círculo, y toda otra circunferencia concéntrica será cortada por dichos rádios en el mismo número de puntos, siendo por esta razon igual á ella. Asimismo, si se hacen pasar por todos los puntos del rádio de un círculo circunferencias concéntricas, estas llenarán toda el área del círculo, resultando que una superficie finita es la agregacion ó suma de figuras que no tienen latitud, lo que encontraban absurdo. En ambos ejemplos se supone al punto elemento del círculo, confundiendo el límite de la extension lineal, que no es por sí cantidad, con el elemento constituyente de la circunferencia, que, aun en su infinita pequeñez, está sujeto á las mismas leyes de generacion de la circunferencia de que forma parte. Iguales ó parecidos argumentos hacian para tratar de demostrar que la geometría no podia existir como ciencia contingente, fundados en la absurda suposicion de ser el punto elemento de la línea, esta de la superficie y la superficie del volumen; y aun mas, en la de que estos límites fuesen cantidades, y pudiesen existir materialmente separados de los cuerpos.

Las leyes de generacion de las diversas líneas y figuras, tales como se consideran en geometría analítica y en las aplicaciones de los cálculos diferencial é integral, son independientes de la mayor ó menor perfeccion de forma que pueda darse á los cuerpos materiales. Esta circunstancia, en que fundaban precisamente los pirrónicos sus ataques contra los principios fundamentales de la geometría, es la que la constituye ciencia exacta. La imperfeccion de nuestros sentidos, no nos permite realizar con la rigorosa exactitud que da la ciencia, todas las leyes de existencia y de generacion de las cantidades geométricas: la regla más tersa y más perfectamente construida para nuestra limitada vista, sería una superficie escabrosísima, y lo mismo la línea recta que determinase, para el que la contemplara con un microscópio ó aparato óptico de considerable aumento, ó cuya vista, por la organizacion de su órgano visual, le proporcionase el aumento mismo que tales instrumentos; mas no por esto la verdad, la rigorosa exactitud de la ciencia dejaria de existir; no por eso, Señores, las leyes de existencia y de generacion de las líneas, superficies y volúmenes dejarian de ser leyes inmutables, como derivadas de los principios filosóficos fundamentales de la ciencia matemática.

Cuanto mas se examinan y analizan los argumentos en que fundaban los asertos contra las verdades matemáticas y principios fundamentales de la geometría, aparece mas la falta de un criterio filosófico: pero si abandonando al voluptuoso Aristipo, al sofista Pitágoras, á Zenon, y á todos los admiradores y sectarios de las escuelas de Pirron y de Epicuro, impugnadores de la ciencia matemática, se fija la atencion en filósofos de elevado criterio y merecida fama; el ánimo se contrista al considerar, que tambien entre estos se hallaban, si no enemigos, al menos apreciadores débiles de las verdades geométricas; resultado inmediato de la falta de verdaderas ideas filosóficas en todo lo que se referia á esta ciencia. Sócrates, el gran filósofo, proclamado por el oráculo de Delfos el mas sábio de los hombres, se oponia á que se hiciese un estudio profundo de las matemáticas. Cuando se sabe, decia, bastante geometría para medir cada cual su campo, y bastante astronomía para conocer las horas y los tiempos, y guiarse en los viajes de tierra y mar, no se debe adquirir un saber mas sólido y profundo. Tal era la triste idea que este filósofo, el primero de su siglo, habia formado de la ciencia matemática, ó mas bien de aquellas de sus ramas que entonces se cultivaban. Para cohonestar la pobre opinion que tenia Sócrates de dicha ciencia, y que tan claramente revelan sus apreciaciones, Montucla las considera como resultado de que el gran filósofo, fijándose únicamente en la parte moral, creia que no debian los hombres ocuparse en otro estudio que en el que los condujera á ser mas perfectos. Por respetable que sea la opinion del historiador de la ciencia matemática, no encuentro fundada su interpretacion de la citada opinion de Sócrates. Dedúcese de ella la creencia, de que el estudio de las matemáticas no podia traer otros resultados que los que él expresaba, y que todos los demás descubrimientos de la ciencia, por grandes que fuesen, no podian tener aplicacion conveniente en la vida de la humanidad; error lamentable, en que sin duda no hubiera incurrido, á tener conocimiento más filosófico de los principios fundamentales de la ciencia matemática. Las verdades que esta demuestra, por abstractas que sean, tienen su utilidad material en la vida, aunque por su naturaleza especial parezcan alguna vez leyes importantísimas y admirables, pero sin realizacion alguna; y las aplicaciones mas importantes se derivan de teorías y descubrimientos puramente especulativos, que se cultivan por siglos enteros antes de producir un resultado práctico. ¡Quién habia de decir, Señores, á Arquímedes y á

Apolonio, que sus bellos trabajos sobre las secciones cónicas habian de conducir despues á la trasformacion del sistema astronómico, y más tarde al perfeccionamiento del arte de la navegacion, dando lugar á que el ilustre Condorcet exclamase: *El marinero que se libra del naufragio por una exacta observacion de la longitud, debe su vida á una teoría concebida dos mil años antes por génios privilegiados, que no se habian propuesto otro fin que meros estudios y especulaciones geométricas!*

Creo, Señores, que es exacta la opinion que he formado de las apreciaciones de Sócrates, las cuales prueban, más aún que los sofismas y paradojas de los sectarios de Epicuro y de Pirron, la falta entre los antiguos de un criterio esencialmente filosófico para juzgar y apreciar los principios fundamentales de la ciencia matemática.

Natural era, por consiguiente, y la historia lo patentiza, que las ramas de esta ciencia cultivadas entre los antiguos floreciesen y progresasen tanto en su parte contingente y tan poco en la especulativa, siendo en su consecuencia la geometría el estudio más especial y casi exclusivo en aquellas remotas edades. Así vemos desarrollarse esta rama de la ciencia matemática, cuyo orijen conocido se fija en Egipto, en el reinado de Sesostris, segun las autorizadas opiniones de Herodoto y de Newton. Tales, siete siglos antes de la era cristiana, hizo rápidos progresos en la geometría, muy especialmente en las propiedades de los triángulos y del círculo. Pitágoras, en el siglo siguiente, arrancando á los sacerdotes egipcios sus noticias acerca de dicha ciencia, contribuyó de una manera notable á su adelantamiento, y muy poderosamente con dos proposiciones fundamentales: la de ser igual á dos rectos la suma de los tres ángulos de un triángulo, y la de que el cuadrado formado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual á la suma de los formados sobre los dos catetos. Dos siglos despues Platon, fundador de la Academia de Atenas, en cuya puerta se leia esta inscripcion: *Aquí no entran los que ignoran la geometría*, abrió más extensos horizontes á esta ciencia, inspirando además á sus discípulos el amor á su estudio; viniendo tres siglos antes de la era cristiana Euclides, autor de los *Elementos* que tanto han honrado su nombre y enriquecido la ciencia, en los que encadenó con tal lógica las proposiciones geométricas, que ninguno de los que han intentado posteriormente reformar su método ha logrado alcanzar otro tan rigorosamente establecido.

De los elementos de Euclides, diez libros corresponden á la geometría, y tres á la aritmética. Pero ¡qué diferencia, Señores, entre los trabajos geométricos y los aritméticos! Los primeros son de un rigor, de un encadenamiento y de un método tan sábiamente concebido, que, como dejo manifestado, no ha podido ser sustituido por otro más útil para la ciencia; mientras que los segundos, no solo no se hallan á tal altura, sino que se resienten del atraso de ideas filosóficas; y la teoría de los incomensurables es un dédalo en que difícilmente puede penetrar la inteligencia de ningun matemático.

No seguiré trazando los adelantos sucesivos de la geometría, porque no me propongo historiarla, y porque, en realidad, esta rama de la ciencia, considerada aisladamente, no hizo notables progresos desde la época de Euclides, ni era posible que los hiciera sin auxilio del análisis. El primer paso verdaderamente filosófico y de inmensa importancia dado en la ciencia matemática, es la invencion del álgebra, sin el que aquella hubiera permanecido estacionaria ó adelantado muy poco. Este descubrimiento permitió aplicar el análisis á todas las ramas de la ciencia cultivadas hasta entonces, dándoles el impulso poderoso que cabe en la generalidad de su expresion y sus métodos. Pero los progresos del álgebra fueron muy lentos, y tanto, que conociéndose ya desde su mismo origen la resolucion de las ecuaciones de segundo grado, no empezaron á resolverse las de tercero hasta fines del siglo V de la era cristiana. Esta lentitud en su desarrollo, y la escasa y poco filosófica aplicacion que se hizo del álgebra á la geometría, impidieron por mucho tiempo que se obtuviesen los inmensos resultados á que estaba llamado este gran descubrimiento. Hasta mediados del siglo XVI no empieza verdaderamente el período filosófico de la ciencia matemática. Francisco Bacon fue el primero que, siguiendo con inteligencia suma el camino abierto por nuestro admirable Juan Luis Vives (protejido un tiempo de Enrique VIII de Inglaterra, y verdadero iniciador de la reforma científica, medio siglo antes del canciller de Verulamio), sustituyó con gran éxito á los sutiles argumentos y vanas hipótesis, entonces tan en uso, la observacion de los hechos y el resultado de la experiencia, llegando á ser, por sus muchos y bellos trabajos, el padre, digámoslo así, de la filosofía experimental. Galileo no se dedicó con menos ardor ni inteligencia al estudio de las ciencias, y especialmente de la matemática, siendo el que inventó el péndulo y descubrió las leyes de la pesantez. Mucho deben estos conocimientos á las investigaciones de tan gran filósofo, cuyo nombre ha pasado á la posteridad y vivirá en las generaciones futuras, tanto por su ciencia, como por las persecuciones que esta le hizo padecer.

Brilló despues el génio de Descartes, verdadero renovador de la filosofía matemática. La existencia de este sábio ilustre señala uno de los períodos más gloriosos para dicha ciencia, á la que imprimió su carácter esencialmente filosófico, y enriqueció con grandes descubrimientos, entre los que descuella la aplicacion de las fórmulas algebráicas á la investigacion de las propiedades de las curvas geométricas, gérmen fecundo de los grandes progresos que se hicieron ulteriormente en el análisis algebráico. Desde este momento el álgebra y la geometría, ramas separadas de la ciencia matemática, constituyeron una sola tan fecunda, que fueron resueltos por ella, con admirable sencillez, problemas tenidos hasta entonces por insolubles. Desde esta época, las cantidades geométricas y las algebráicas son unas mismas desde el punto de vista filosófico, teniendo por base radical los cuatro algoritmos primitivos de la suma, resta, multiplicacion y division de las cantidades indenominadas. La geometría analítica es, además, el primer paso dado para crear la unidad sistemática. bello ideal de la ciencia, que tiene su fundamento en los algoritmos primitivos, unidos á las intuiciones puras de la forma y de la cantidad.

Pero á pesar de este descubrimiento, aún la ciencia matemática estaba encerrada en estrecho círculo, de que no le permitian salir los conocimientos filosóficos y principios fundamentales de la análisis, adquiridos hasta dicha época. El análisis algebráico solo podia aplicarse á las cantidades finitas; y por lo tanto, era imposible penetrar hasta los elementos constitutivos de las cantidades, bien se considerasen algebráicas ó geométricas, ni descubrir las leyes de su generacion. Los cuatro algoritmos primitivos, no podian aplicarse más que á lo que las distintas ramas de las matemáticas presentaban de finito; pero de ningun modo á los elementos constituyentes de las cantidades: preciso era crear un nuevo sistema, unos nuevos algoritmos, que permitiesen hacer con dichos elementos las mismas operaciones que con las cantidades finitas, y que pudieran servir para toda clase de especulaciones matemáticas; era preciso, en fin, sujetar al cálculo cantidades infinitamente pequeñas, sin representacion tangible en el mundo exterior ni en el cálculo finito. La empresa era árdua, y solo podia realizarse por un nuevo descubrimiento esencialmente filosófico y casi providencial. Este hecho se efectuó en la segunda mitad del siglo XVII, debido á dos génios privilegiados que, inspirados de una misma idea fecunda y trascendental, lo desenvolvieron por distintos medios. Newton con su admirable concepcion del cálculo de las fluxiones, y Leibnitz con el de los infinitamente pequeños, crearon casi al propio tiempo y por diversos caminos el cálculo de las cantidades diferenciales; y adoptando para estas una forma simbólica, y estableciendo como base de su introduccion en el análisis, principios filosóficos, sólidos é indestructibles, abrieron á la ciencia el inmenso campo en que habia de ejercer imperio, y le dieron medios de penetrar en la esencia de los cuerpos y de las cantidades, arrancándoles el secreto de su constitucion y generacion, y de las admirables leyes que las rijen. Si el ánimo se contrista y oprime al considerar la pobre opinion que hombres tan ilustres como Sócrates tenian de las matemáticas, dilátase por el contrario en los serenos é inmensos horizontes por donde se extendió la ciencia desde el descubrimiento del cálculo de las fluxiones. Desde esta época, desaparecieron y se allanaron los escollos en que se estrellaban, y las barreras en que se vieron encerradas inteligencias superiores: el cálculo de las cantidades infinitamente pequeñas ó diferenciales se apoderó de la geometría, de la mecánica, de la astronomía, y de todas las ramas, en fin, de la ciencia matemática, que, poco fecundas hasta entonces, se extendieron en el camino de la investigacion de la verdad y de la resolucion de los grandes problemas científicos.

El cálculo de los infinitamente pequeños tuvo tambien sus impugnadores; y aunque entre ellos se encuentran algunos, como Berckley, que pretendia probar la no existencia de los cuerpos, y que la geometría es contraria á la religion (como pudieran decirlo los sofistas discípulos de las escuelas de Epicuro y de Pirron), fuerza es confesar que en general la censura fué de críticos que, no hallando en el nuevo cálculo toda la rigurosa exactitud que requeria un elemento tan poderoso, lo combatian en nombre de la certidumbre que la ciencia exije. Además de no conceptuar matemático el sistema de introducir por via de adicion en los cálculos, elementos que, por ser infinitamente pequeños, no podian en realidad considerarse como cantidades; no juzgaban posible ni exacto que se despreciasen los infinitamente pequeños de segundo orden, creyendo que esta operacion hacia del cálculo de Leibnitz, uno de aproximacion, falto de la rigurosa exactitud del cálculo finito. Pero el gran paso estaba dado, y enriquecida la ciencia con este gran descubrimiento. La controversia quedó pronto reducida á una cuestion de forma, y los coeficientes diferenciales vinieron á poner término á todas las dudas; sin que se niegue desde entonces que la relacion entre la diferencial de una funcion y la de su variable segun la ley de decrecimiento con que la funcion y la variable están ligadas, es una nueva funcion de la misma variable, ó una cantidad finita, que puede entrar en el cálculo como las demás cantidades algebráicas ó numéricas.

Aunque el cálculo diferencial tuvo desde luego inmensas aplicaciones, descubriendo las leyes de generacion de las cantidades y determinando la expresion y condiciones de sus elementos, estaba incompleto respecto á la valuacion de aquellas, pues de nada servia tener la expresion y ley de existencia de la unidad, si se carecia de los medios de aplicarla para hacer dicha valuacion. En una palabra, dado el medio de pasar de una expresion representante de un valor algebráico ó geométrico al de su diferencial, indispensable era tener el de elevarse desde esta diferencial al valor algebráico de que aquella se derivase, estableciendo al efecto un cálculo inverso, que es el que despues fue conocido con el nombre de cálculo integral.

No era posible que á Newton y á Leibnitz se les ocultara la necesidad de este cálculo: así vemos que el primero manifiesta en la carta que escribió al segundo en 1676, que se halla en posesion del método inverso de tangentes, constando despues en sus obras, que lo habia inventado bajo el título de método de los fluentes; mientras que Leibnitz dió á luz en las actas de Leipsick de 1686 sus primeros ensayos del cálculo integral. La importancia de este cálculo no fue comprendida desde el momento de su invencion, y el célebre Jacobo Bernoulli lo consideró solamente como una abreviacion del de Barrou, hasta que en 1687, con motivo del estudio de la curva isócrona, propuesto por Leibnitz, vió con claridad el mérito y trascendencia del nuevo método. Desde esta época, se empezó con asiduidad el estudio del cálculo integral, y despues de sus inventores, el que más se dedicó á estudiarlo y desarrollarlo fue Juan Bernoulli, cuyas lecciones salieron á luz en 1692. A pesar de lo inmenso y trascendental del descubrimiento de los cálculos diferencial é integral, es sin embargo, en su esencia, como todos los grandes inventos, de notable sencillez. Las intuiciones puras del tiempo y del espacio, formas del mundo físico, no permiten al hombre más que la percepcion de los objetos finitos, y le dan la nocion de la unidad, y, como resultado, los algoritmos primitivos de la suma y resta de las cantidades indenominadas y finitas. Pero esta operacion intelectual no puede efectuarse del mismo modo que con elementos finitos, con los diferenciales ó infinitamente pequeños, pues ni estos tienen una representacion contingente, ni es posible físicamente segregar de un objeto un número infinito de elementos infinitamente pequeños, para obtener el elemento tambien infinitamente pequeño; ni tampoco sumar otro infinito número de diferenciales ó elementos infinitamente pequeños. Las concepciones de los cálculos diferencial é integral, son las que realizaron la suma y resta de los elementos infinitamente pequeños de las cantidades, permitiendo establecer los algoritmos primitivos de la suma y resta de tales elementos, y realizando en toda su extension el gran principio filosófico, de ser la suma y la resta las operaciones matemáticas fundamentales de la ciencia.

El método inverso del cálculo diferencial, ó lo que es lo mismo, el integral, ofrecia mayores dificultades que el directo; y por lo tanto, mientras que este se desarrolló rápidamente, el cálculo integral avanzó con suma lentitud, á pesar de que, convencidos todos los ilustres matemáticos contemporáneos de Newton y de Leibnitz de su importancia y necesidad, se dedicaron con ardor á estudiarlo y desarrollarlo. Los hermanos Bernoulli, Euler, Taylor, Maclaurin y tantos otros cuyos grandes trabajos son conocidos, hicieron notables adelantos en ambos cálculos; pero el integral no se desarrolló verdaderamente hasta el siglo actual, en el que ha hecho los mayores progresos y tenido las más importantes aplicaciones.

Este algoritmo de la suma de las cantidades infinitamente pequeñas, es de tal necesidad para el adelanto sucesivo de la ciencia matemática y principalmente para que esta pueda elevarse á la altura filosófica en que debe desenvolverse, que cuantos trabajos puedan hacerse en este sentido, serán siempre de la mayor importancia, y dignos del aprecio y alabanza de los que se dedican al cultivo de las ciencias.

A falta de métodos de integracion para muchas funciones, fue preciso apelar al de integracion por séries, para encontrar, si no las integrales determinadas de las funciones diferenciales, al menos las expresiones aproximadas de sus valores; medio que, aunque adoptado solamente como un recurso á falta de otros directos, puede y debe constituir por sí algun dia un sistema de integracion, como parte constituyente de la teoría de séries, que es el método general de valuacion de las funciones algebráicas y trascendentales.

La importancia de las séries, si bien reconocida tácitamente por los muchos trabajos ejecutados desde Arquímedes hasta nuestros dias, y por las admirables leyes que se han descubierto en la valuacion y generacion de las cantidades, no ha sido en mi opinion debidamente apreciada desde el punto de vista filosófico de la ciencia, y de la tendencia hácia una unidad sistemática. Los métodos seguidos para el desarrollo de las funciones y de las cantidades en série; la carencia de principios fundamentales para su establecimiento; la falta de una definicion exacta, y hasta las aplicaciones hechas de las distintas clases de séries (con independencia unas de otras, y sin lazo que las ligue á un principio fijo y á los algoritmos primitivos de la ciencia), son prueba evidente de esta opinion, corroborada por el uso que Hoene Wronsky hizo de ellas en su brillante concepcion filosófica de la valuacion de las cantidades.

Al hablar de Wronsky y de su bella teoría de séries, no es mi ánimo, Señores, analizar la filosofía general de este discípulo de Kant, empresa á que no alcanzarian todos mis esfuerzos si tuviera el atrevimiento de intentarla: limitaréme, pues, á considerar su alta concepcion en lo que tenga relacion con la ciencia matemática.

Arquímedes fue el primero que, tres siglos antes de la era cristiana, trató de la valuacion de una cantidad por el método de séries, encontrando el término sumatorio de una progresion geométrica decrecente y contínua. A pesar de sus grandes trabajos geométricos y mecánicos, daba mas importancia á la parte especulativa de la ciencia, y fue el primero que comprendió filosóficamente la valuacion de las cantidades numéricas. Despues, la historia de las matemáticas no presenta otros que hayan discurrido detenidamente sobre las séries hasta la época de Newton y de Leibnitz, en que vuelve á desarrollarse este método de valuacion de las cantidades, y á ser estudiado con esmero y solicitud. Al mismo tiempo que Leibnitz, dedicáronse á dicho estudio los hermanos Juan y Jacobo Bernoulli; y posteriormente Mr. de Montmort y Nicolás Bernoulli profundizaron cuanto les fue dable en la suma de las séries, que les era tan necesaria para resolver muchas cuestiones del cálculo de probabilidades. Moivre, inventor de las séries recurrentes, hizo grandes progresos en este método de valuacion; y Stirling, siguiendo sus huellas, desarrolló entre otros métodos el de la demostracion de sus teoremas ó proposiciones por medio de la suma de los términos de las séries; encontrando muchos casos en que de este modo se obtiene un resultado finito y determinado. Herman, Taylor, Maclaurin, Euler, Lagrange, Tomás Simpson, Landen, Waring y otros muchos que fuera prolijo enumerar, abrazaron con ardor el estudio de las séries, habiéndose hecho célebres las de Taylor y Maclaurin, como poderosos auxiliares de los cálculos diferencial é integral.

Prolija sería la tarea de enumerar las distintas séries debidas á tantos génios ilustres, y las leyes verdaderamente admirables que descubrieron en el estudio de este método de valuacion; así como las teorías que inventaron, y entre las que debe citarse muy particularmente la de las funciones analíticas de Lagrange, uno de los mas bellos trabajos que han enriquecido la ciencia. Pero circunscribiéndome al punto de vista filosófico, no puedo menos, Señores, de manifestar con el temor propio de mi pequeñez, que á pesar de tan altas especulaciones y de la importancia de los hombres ilustres que se ocuparon en ellas, los principios fundamentales del desarrollo en série eran muy poco generales, hasta que Wronsky los estableció en bases sólidas é indestructibles. Como el desarrollo en série de la funciones no habia sido hasta entonces deducido *à priori*, el método que se estableció no era general; Wronsky deduciendo *à priori* el desenvolvimiento de las séries, demuestra rigorosamente que el número de términos debe ser infinito, y que los exponentes de la unidad valuatriz han de seguir la ley de números naturales, demostraciones ambas que son meras suposiciones en el método antiguo; probando además, que los coeficientes son términos constantes, y que la unidad valuatriz puede ser una funcion cualquiera de la variable independiente.

Ignoro, Señores, si me dejaré arrastrar por el entusiasmo que me ha producido siempre el estudio de las obras de Wronsky en su parte matemática; pero debo confesar que nada he encontrado mas bello, sencillo y matemático que su método ó teoría de séries; base de su célebre fórmula, que en concepto de este gran génio resolvia el problema de encontrar la unidad sistemática y método de valuacion de todas las cantidades. No he olvidado, Señores, al apuntar esta opinion, la lucha que se entabló entre este ilustre matemático y el Instituto de

Francia: pero al estudiar y examinar la memoria escrita por aquel y las refutaciones de dicha corporacion, en que habia hombres tan eminentes, no puedo menos de decir que en esta contienda, Wronsky dió á conocer su gran génio matemático y su alta concepcion filosófica.

La gran belleza de la teoría de séries de Wronsky consiste en el rigor matemático con que está desarrollada: fundada solamente en los algoritmos primitivos de la suma y de la division, con la condicion de que esta no incurra nunca, cualquiera que sea el valor de la variable, en el caso de imposibilidad, es decir, en el símbolo infinito; su teoría de séries, bajo este lógico y elemental fundamento, se deduce *à priori* con todo el rigor matemático que exije este importante y casi general algoritmo de valuacion de las cantidades. En este desarrollo en série está fundada su fórmula universal, con la que Wronsky se habia propuesto realizar la unidad sistemática, fundada sobre la teoría de la algoritmia, que tiene por objeto la generacion universal de las cantidades, deduciendo una sola y suprema ley de valuacion, que coronaba, por decirlo así, el magnífico edificio de la ciencia matemática. Esta ley suprema es la que presentó, como dejo dicho, en 1811 al Instituto de Francia; corporacion que por conducto de sus comisarios Lagrange y Lacroix, se manifestó admirada de que de la fórmula de Wronsky se dedujeran como casos particulares, y con rigorosa exactitud, todos los que hasta entonces se conocian para el desenvolvimiento en serie y valuacion de las funciones algebráicas y trascendentales.

Aquí termina el brillante período de desarrollo filosófico de la ciencia matemática, que parte de las grandes concepciones de Descartes. Despues de Wronsky, nadie se ha ocupado especialmente en el estudio de la filosofía matemática; pero elevada esta á tan grande altura, y con los poderosos medios de análisis por ella conquistados, las aplicaciones han sido generales y los resultados fecundos. Nada hay ya que no se halle bajo el dominio del análisis: las mas importantes aplicaciones de la ciencia á la industria y á las artes, están basadas en sus teorías, pudiendo decirse que la mayor parte de la civilizacion moderna ha sido conquistada, gracias al desenvolvimiento de la

4

filosofía matemática, y su aplicacion á las ciencias denominadas físico-matemáticas.

Tal es, Señores, aunque bosquejado con desaliñados trazos, el cuadro que presenta la historia del progreso y desarrollo de las matemáticas, consideradas desde su punto de vista filosófico, y cuyo estudio, mas que otro alguno, conduce al rápido y general adelantamiento de las ciencias, y á la mayor unidad y generalidad de sus métodos. Confundiéndose en los orígenes de la humanidad con la observacion de los objetos exteriores y de los fenómenos del mundo físico, puede decirse que la ciencia matemática existe desde entonces, aunque la historia no ofrezca datos que lo demuestren hasta el reinado de Sesostris en Egipto. Reducida allí á escasos conocimientos de aritmética y al estudio casi exclusivo de la geometría, fue ésta estudiada y desarrollada con ardor en la Grecia, pero con falta de ideas verdaderamente filosóficas, lo que dió ocasion á que se hicieran tan rápidos progresos en la parte contingente y tan pequeños en la especulativa, sin que la mecánica fuera considerada como parte constituyente de las matemáticas. En esta época de tan notables adelantos en la geometría, las ramas de la ciencia se desarrollaban separadamente sin el mútuo auxilio que deben prestarse, como fundadas en iguales principios filosóficos y en los mismos algoritmos primitivos: la invencion del álgebra fue el primer paso dado hácia la unidad sistemática; desde entonces el cálculo algebráico, la aritmética y la geometría caminaron juntos, constituyendo ya un cuerpo de doctrina en que empezaba á fructificar el gérmen fecundo del análisis, que no produjo ópimos frutos hasta Descartes, quien con la influencia de su peculiar filosofía dió nuevo impulso á la ciencia matemática. Desde este tiempo su estudio se extiende rápidamente, é invade todos los ramos del saber á que puede aplicarse el cálculo finito; y aunque detenido un instante en los límites de lo infinitamente pequeño, rompe al fin esta última valla, y con las grandes concepciones de Newton y Leibnitz, avanza ya sin obstáculos por el fecundo campo de las investigaciones, en busca de la verdad y de la unidad sistemática de la ciencia.

Los algoritmos primitivos de la suma y resta de cantidades finitas é infinitamente pequeñas, son desde entonces la base de la valuacion de las cantidades y del método de desenvolvimiento en serie de las funciones. Este método empieza á ser estudiado, y aunque sin un asiento sólido y armónico, se desarrolla rápidamente, aplicándose á la resolucion de graves problemas y al establecimiento de importantes teorías, brillando por fin el génio privilegiado de Hoene Wronsky, que abarca el ancho campo de la valuacion de las cantidades, concibe el gran pensamiento de establecer una fórmula única, fundada en su teoría fecunda general de séries, y aspira por tal medio á la unidad sistemática de la ciencia. Pero desgraciadamente este gran pensamiento no llega á realizarse por completo, ya porque Wronsky no aclaró la teoría filosófica en que lo fundaba, ya porque el método de determinacion de los coeficientes de su fórmula universal, no fue nunca convenientemente explicado.

De lamentar es, Señores, que tan gran concepcion matemática no haya sido realizada en toda su extension, y que la ciencia carezca de este algoritmo general de generacion de las cantidades. Pero la simiente ha caido en tierra fértil, y de seguro dará frutos abundosos. Así lo hacen esperar la generalidad de los métodos, el dominio adquirido por el análisis algebráico sobre los diversos ramos del saber humano, y lo ilimitado de las aplicaciones; pudiendo predecirse que llegará tiempo en que se realice la gran concepcion de Wronsky, aunque para ello sea necesario que vuelvan á aparecer génios tan privilegiados como Descartes, Newton y Leibnitz, y teorías tan atrevidas y descubrimientos tan notables como la invencion del álgebra, la geometría analítica, y el cálculo de los infinitamente pequeños. Esperemos confiadamente, Señores, en que ha de realizarse este bello ideal de la filosofía matemática, y en que ha de brillar la aurora de tan hermoso dia, que será de grande esplendor para todas las ciencias á que consagra su actividad el espíritu humano.=He dicho.

CONTESTACION

AL DISCURSO ANTERIOR

POR EL ILMO. SEÑOR

DON MANUEL MARIA DE AZOFRA,

ACADEMICO DE NUMERO.

Señores.

La Academia de Ciencias ha tenido por conveniente encargar la contestacion al profundo discurso que acabais de oir, al último de sus individuos: otros mas competentes que yo podrian haber desempeñado con gran lucimiento una tarea tan superior á mis fuerzas; pero respetando las poderosas razones que les hayan obligado á declinar esta honra y acatando la disposicion de la Academia, procuraré desempeñar mi cometido, contando con la bondadosa indulgencia de tan ilustrado auditorio, que no ha de negarla (estoy seguro de ello) á quien hace callar su modestia para cumplir con su deber.

El nuevo Académico consagra un merecido recuerdo de cariñoso respeto al que fue su maestro, gefe y compañero en el esclarecido Cuerpo de Artillería, á que ambos pertenecian; al bizarro, sabio y modesto Brigadier *D. José de Odriózola*, cuya pérdida llora la Academia. Largo fuera enumerar aquí los distinguidos méritos y relevantes servicios que el Sr. Odriózola prestó al Estado, al Cuerpo en que sirvió, á nuestra Academia y á las ciencias; pero el que hoy tiene la honra de hablar en este lugar se considera en el imprescindible deber de citar al menos su Tratado de *Mecánica elemental*, y sobre todo el de *Mecánica aplicada á las máquinas operando*, con cuya publicacion prestó un señalado servicio á los que se ocupan de una manera práctica en el trabajo de las fuerzas. Para llenar el doloroso vacío que deja en esta Corporacion el Sr. *Odriózola* ha sido elejido el Sr. *Balanzat:* derramando una lágrima á la memoria del primero, damos la mas afectuosa bienvenida al segundo. Y como si no fueran bastantes las razones que tuvo la Academia para hacer tan acertada eleccion, el nuevo Académico ha querido confirmarlas con el primer trabajo que le presenta: solo la eleccion de un tema tan filosófico y profundo como el que ha escojido para objeto de su discurso, es ya prueba de su aventajado talento y de sus vastos conocimientos, puestos mas de relieve en la brillantez y acierto con que lo ha desarrollado. No es mi ánimo seguir al nuevo Académico en las elevadas consideraciones que hace sobre la *influencia de la filosofía matemática en el estudio y progresos de las ciencias exactas;* no alcanzan á tanto mis débiles fuerzas; que no es dado á todos remontarse á las sublimes regiones de la ciencia pura, y contemplar desde su elevacion, con la penetrante mirada del águila, las relaciones que tienen entre sí los diversos ramos de los conocimientos humanos, la influencia de unos en otros, la armonía de todos y la unidad científica que forma su conjunto; pero obligado á contestar al discurso que se acaba de leer, solo podré hacer algunas observaciones, y añadir varias pinceladas, no para correjir el cuadro que nos ha presentado el nuevo Académico, sino para completarlo; no para rectificar sus ideas, sino para confirmarlas y robustecerlas.

Con el fin de demostrar el influjo de la filosofía en los adelantos de la ciencia matemática, y de qué manera han ido agrupándose los dispersos elementos que la constituian, ligando sus principios, fundiéndolos en las sanas doctrinas de una filosofía asentada sobre la certidumbre absoluta, y constituyendo así gradualmente la unidad sistemática, ley fundamental de la ciencia, traza el Sr. Balanzat á grandes rasgos la historia de los principales progresos de las matemáticas, que con tan fascinadora elocuencia han sido recientemente espuestos en este lugar desde otro punto de vista. Partiendo de la observacion de los fenómenos del mundo físico, y remontándose á la mayor antigüedad, hace aquel ver que las primeras investigaciones matemáticas versaron sobre la geometría y la mecánica, aunque entonces no se considerasen estas como ramas de una misma ciencia; y demuestra que no fue, ni podia ser, la casualidad causa de esta preferencia, sino que los hombres en aquellas remotísimas edades, obedeciendo á la accion del entendimiento, y faltos de un criterio esencialmente filosófico, era indispensable que dirijieran su estudio y observaciones á la parte mas concreta de las intuiciones puras del espacio y del tiempo que se les presentaban en la forma de los objetos esteriores, estudio especial de la geometría, y en el movimiento de los innumerables astros que pueblan el espacio, base de la mecánica con aplicacion á la astronomía. Entra el nuevo Académico en importantes y luminosas consideraciones sobre estos puntos; hace ver cómo de las intuiciones puras del tiempo y del espacio, que no se pueden separar del entendimiento por mas que material ó abstractamente se reduzca á la nada el objeto percibido, que son eternas, verdaderas, indestructibles, y base fundamental de la filosofía matemática, se deducen los algoritmos primitivos de la suma y de la resta, y de estos los de la multiplicacion y division, que constituyen la base sobre la cual se levanta el magnífico edificio de la ciencia matemática. Añade á esta base la idea del infinito, inseparable del entendimiento como antítesis de lo finito; y expone en seguida los errores, y las causas de los errores, de que adolecian las escuelas filosóficas de Epicuro y de Pirron, que negaban la certidumbre de las proposiciones matemáticas, cuando el fundamento en que para hacerlo se apoyaban es precisamente prueba irrefragable de su evidencia; porque nada tiene que ver la imperfeccion de nuestros sentidos y de nuestros medios de operar con la rigorosa exactitud de la ciencia. Prosigue lamentando la falta de este criterio en muchos de los filósofos de la antigüedad, doliéndose de encontrar entre ellos á Sócrates, que no creia fuera necesario adquirir mas profundo saber en geometría y astronomía que el suficiente para medir su campo, y para conocer las horas y los tiempos.

Partiendo de estos principios halla natural que las ramas de la ciencia matemática cultivadas entre los antiguos, progresaran tanto en su parte contingente y tan poco en la especulativa; indica despues la historia y limitados adelantos que la geometría pudo hacer entre ellos, citando los mas importantes de Pitágoras, Platon y Euclides; demostrando que sin el auxilio del álgebra no era tampoco razonable esperar que hicieran muchos mas. Habla tambien de Descartes, á quien considera como el renovador de la filosofía matemática, descollando entre sus mas bellos descubrimientos la aplicacion de las fórmulas algebráicas á la investigacion de las propiedades de las curvas geométricas: desde entonces el álgebra y la geometría, partes de una misma ciencia como ramas de un mismo tronco, marcharon de consuno, y uniéndose la claridad de la una á la generalidad de la otra, se formó la geometría analítica, primer paso dado para la creacion de la unidad sistemática, bello ideal de la ciencia en opinion de nuestro nuevo é ilustrado colega. Empero los progresos obtenidos con los descubrimientos de Descartes no eran ya suficientes; necesitábase que el análisis algebráico, solo aplicable á cantidades finitas, pero ineficaz para penetrar en sus elementos constituyentes, pudiera aplicarse tambien á estos: para ello era indispensable crear un nuevo sistema, unos nuevos algoritmos, pues los cuatro primitivos solo podian aplicarse á lo que tenian de finito las distintas ramas de las matemáticas; era, en fin, preciso sujetar al cálculo cantidades infinitamente pequeñas, sin representacion tangible en el mundo exterior ni en el cálculo finito; árdua y sublime tarea, realizada á mediados del siglo XVII por las elevadas concepciones de *Newton* y de *Leibnitz*, cuyos cálculos de las fluxiones y de los infinitamente pequeños, abrieron á la ciencia el ancho campo en que habia de ejercer su imperio, dándole medios de penetrar en la esencia misma de los cuerpos y de las cantidades, arrancándoles, por decirlo así, el secreto y las leyes de su generacion y constitucion.

El nuevo académico se extasía, y con razon, al contemplar el inmenso desarrollo que con la invencion del nuevo cálculo habian de adquirir todas las ramas de la ciencia matemática, y que comenzaron á tomar efectivamente desde su nacimiento; desvaneciendo como de pasada las impugnaciones que tuvo tambien aquel, á semejanza de las que hicieron á la geometría Epicúreos y Pirronistas. Hace ver que el cálculo diferencial de Leibnitz ó el de las fluxiones de Newton, á pesar de sus inmensas ventajas, quedaba incompleto si no se encontraba medio de elevarse desde el valor infinitamente pequeño al valor algebráico de que aquel se derivaba; si no se encontraba un método inverso de aquel, que fuera su complemento y perfeccion; lo que practicaron tambien ambos filósofos casi al mismo tiempo, distinguiéndole el primero con el nombre de cálculo integral, y el segundo con el de cálculo de las fluentes; con lo cual se pudieron hacer extensivos á las cantidades infinitamente pequeñas los algoritmos primitivos de la suma y de la resta, que llegaron á ser así las operaciones fundamentales de la ciencia en toda su extension.

Hace notar las mayores dificultades del cálculo inverso respecto del directo, y por consecuencia los lentos progresos de aquel en comparacion de los de este, á pesar del ardor con que se dedicaron á estudiarlo y desarrollarlo sus mismos inventores, los hermanos *Bernoulli*, *Euler*, *Tailor*, *Maclaurin*, y tantos otros como en el siglo pasado y en el actual han contribuido á sus progresos y á sus importantes aplicaciones.

A falta de métodos directos de integracion para muchas funciones, ha sido necesario apelar á la integracion por séries para encontrar, ya que no las integrables determinadas de las funciones diferenciales, al menos la expresion aproximada de sus valores; y esto da margen á nuestro ilustrado compañero para recorrer tambien á grandes pasos los principales y fecundos progresos efectuados en la teoría de las séries, desde los primeros trabajos sobre esta materia, debidos á Arquímedes, el primero que tres siglos antes de nuestra era discurrió sobre la valuacion de una cantidad por el método de las séries, hasta nuestros dias, citando con merecido encomio los nombres de los célebres matemáticos ya indicados, y los de *Moivre*, inventor de las séries recurrentes *Stirling*, que tanto las perfeccionó, *Simpsom*, *Waring* y otros muchos, cuyos teoremas de séries son hoy tan indispensables y conocidos de cuantos se ocupan en estas cuestiones. Tambien hace mencion especial de la luminosa teoría de las funciones analíticas de *Lagrange*, que caracteriza como el mas bello trabajo con que se ha enriquecido la ciencia; y termina enalteciendo los de *Wronsky*, y su tendencia filosófica, el cual, deduciendo *à priori* el desenvolvimiento de las séries, demuestra rigurosamente sus principales propiedades, sirviéndole esta teoría como de base para establecer la célebre fórmula que en su concepto realiza el problema de encontrar la unidad sistemática de la ciencia, y el método de evaluacion de todas las cantidades; pero cuyo pensamiento no ha llegado á realizarse por completo, ya porque no fue aclarada por Wronsky la teoría filosófica en que la fundaba, ya porque tampoco ha sido nunca convenientemente explicado el método de determinacion de los coeficientes de su fórmula universal.—Tal es el pálido resumen de la brillante exposicion que acabais de oir de lábios del nuevo Académico: permitidme agregar, como ya he dicho, algunas breves observaciones para completar su pensamiento.

La influencia de la filosofía matemática en los progresos de las ciencias exactas es el objeto del discurso del Sr. Balanzat; la unidad sistemática de la ciencia, la adopcion de un principio único, de una fórmula universal, de la cual se deriven natural y sencillamente todas las verdades y las aplicaciones de que son capaces, su bello ideal, y el de todos los que aspiran, no á establecer sino á conocer el orden, armonía, dependencias y enlace de los diversos ramos del saber humano, como lo tienen sin duda los diversos cuerpos de la naturaleza, que son el objeto de sus investigaciones. Para llegar á este fecundo resultado, cita las tentativas y trabajos que se han hecho por los mas distinguidos filósofos, y enumera los obstáculos que se han opuesto á la consecucion de sus laudables deseos. Entre estos no puede menos de contarse en primer lugar el atraso respectivo en cada época de los conocimientos que se querian hacer derivar de un principio único. Cuando no es conocida una ciencia en todos sus desarrollos, ó al menos en buena parte de ellos, mal se puede sistematizar su estudio y enseñanza, y menos aún manifestar su enlace con otras ciencias no mas adelantadas que ella misma. Cuando la filosofía positiva no existia, ó estaba aún en la infancia, no podia razonablemente exigirse que se aplicara por completo su acertado criterio á las diversas ramas de la ciencia matemática: era indispensable que vinieran al mundo Bacon y el español Luis Vives, para que con su superior y privilegiada inteligencia echaran los cimientos de la reforma de la ciencia; Descartes, renovador, y mas bien podria decirse fundador de la filosofía matemática, para que con sus sorprendentes aplicaciones de las fórmulas algebráicas á las cuestiones geométricas, comunicase vigoroso impulso á los adelantos de ambas ciencias, formara una sola de las dos, y diera de este modo un paso decisivo hácia la unidad sistemática, bello ideal de la ciencia matemática. Y aun esto no bastaba; á los descubrimientos de Vives, Bacon y Descartes era indispensable sucedieran los de otros filósofos y matemáticos que, dilatando por un lado los horizontes de las ciencias, y ligándolos por otro á un solo principio, coadyuvaran á aquel importante resultado. Pero cuando estos adelantos no existian, vuelvo á repetir; cuando estos conocimientos eran tan limitádos; cuando las observaciones eran tan reducidas; cuando los mismos medios de aprender y saber eran tan escasos, no podia aplicarse un criterio rigurosamente filosófico á conocimientos tan incompletos y defectuosos. Observemos, siquiera sea rápidamente, lo que se ha verificado respecto de los progresos de la ciencia en general, para fijarnos despues un momento en uno de los mas importantes puntos que con tanto acierto dilucida nuestro nuevo colega.

Al estudiar el desarrollo de la inteligencia en sus diversas esferas de actividad, desde su nacimiento hasta nuestros dias, dice un célebre filósofo moderno, *Augusto Comte*, es fácil observar que cada uno de los ramos de nuestros conocimientos pasa por tres estados teóricos diferentes: el estado ideal ó *teológico*, como él lo denomina; el estado abstracto ó *metafísico;* y el estado científico ó *positivo;* dando así lugar á tres métodos de filosofar, á tres diferentes filosofías, á tres sistemas generales de concepciones sobre el conjunto de los fenómenos. El primero es el punto de partida indispensable de la inteligencia humana; el tercero su estado definitivo; el segundo solo sirve para marcar la transicion entre los anteriores.

En el estado teológico, el entendimiento humano, todavía en la infancia, conmovido por los hechos que le rodean y por los fenómenos que hieren la imaginacion, dirije sus investigaciones hácia la naturaleza íntima de los mismos seres, hácia las causas primitivas de todos los efectos, en una palabra, hácia los conocimientos absolutos; y se representa los fenómenos todos como producidos inmediatamente por la accion directa y contínua de agentes sobrenaturales, por cuya intervencion explica las anomalías aparentes del universo; y en verdad, que no podria hacer otra cosa, cuando estos fenómenos se presentan al entendimiento, y se halla desprovisto de toda observacion anterior, de toda experiencia y criterio para darse cuenta de ellos.—El estado metafísico no es en su esencia mas que una modificacion del anterior; solo que en él, los agentes sobrenaturales son reemplazados por fuerzas abstractas, verdaderas entidades, que el hombre considera como capaces de engendrar por sí mismas todos los fenómenos observados, cuya explicacion se reduce entonces á señalar la entidad correspondiente á cada uno.—Por último, en el estado positivo, reconociendo el entendimiento humano la imposibilidad en que se halla de obtener nociones absolutas, renuncia á investigar las causas íntimas, la esencia de los fenómenos que le rodean, y dirije sus investigaciones solo á descubrir, con el empleo bien combinado del razonamiento y de la observacion, las leyes efectivas de su manifestacion; esto es, las leyes invariables de sucesion y semejanza con que se le presentan: la explicacion de los hechos, reducida de este modo á términos reales, no versa ya sino sobre el enlace y relacion que tienen los diversos fenómenos particulares con algunos hechos generales diferentes, cuyo número tienden á disminuir gradualmente los progresos de las ciencias.—Ahora bien; así como el sistema teológico se puede considerar elevado á toda su perfeccion cuando se ha sustituido la accion providencial de un solo Dios á la multitud de divinidades del paganismo; de igual modo, la perfeccion del sistema metafísico consiste en concebir, en lugar de las diferentes entidades particulares, una sola entidad general, la naturaleza, considerada como único orijen de todos los fenómenos; y el sistema positivo habrá llegado á toda la de qué es susceptible, cuando se puedan representar los fenómenos observables como casos particulares de un solo hecho general; perfeccion y unidad sistemática á que se aspira sin cesar, á que converjen todos los adelantos modernos, y á la que probablemente nunca llegará por completo la limitada inteligencia del hombre.

Esta ley de graduacion en la marcha de nuestros conocimientos, esta verdadera revolucion del entendimiento humano, tan justamente apreciada hoy por todos los que profundizan la historia general de las ciencias, se puede confirmar tambien por lo que se verifica en el desarrollo de la inteligencia individual; porque el punto de partida de la educacion del individuo y de la especie es siempre el mismo, y las diversas fases principales del primero corresponden á las épocas fundamentales de la segunda. ¿Y quién de nosotros, Señores, no ha sido en este sentido teólogo en su infancia, metafísico en su juventud, y físico en su edad viril?

Además, al presente todos proclaman que no hay verdaderos conocimientos sino los basados en la observacion de los hechos; pero esto, que es incontestable cuando se refiere convenientemente al estado actual de nuestra inteligencia, no podia ni debia serlo cuando el entendimiento se hallaba en su estado primitivo. En efecto, si bien es cierto que toda teoría positiva debe indispensablemente estar fundada en las observaciones, tambien lo es que, para entregarse á la observacion, necesita nuestro entendimiento formarse una teoría cualquiera; porque si al contemplar los diversos fenómenos no los refiriésemos á algunos principios, ni podríamos combinar las observaciones aisladas, ni sacar fruto de ellas; y hasta los mismos fenómenos pasarían sin ser notados. Por manera que el entendimiento del hombre, obligado en su infancia á observar para formarse teorías reales, y á formarse teorías para entregarse á observaciones seguidas, se veia encerrado en un círculo vicioso, del que jamás hubiera podido salir sin apelar á las concepciones teológicas, que además de las consideraciones sociales y religiosas, de que prescindiremos aquí, le han servido de grande auxilio para el desarrollo de su inteligencia, proporcionándole un punto de union para sus esfuerzos, y un alimento para su actividad intelectual.

De cierto, la filosofía positiva es el estado definitivo de la inteligencia humana, y hácia él se ha dirijido esta siempre; mas por su misma naturaleza era indispensable en un principio, y aun durante larga série de siglos, emplear, bien como método, bien como doctrina provisional, la filosofía teológica, cuyo caracter es el de ser espontánea, y por lo mismo la única posible en su orijen; y para pasar de esa filosofía provisional á la definitiva, ha debido emplear los métodos y doctrinas metafísicas como una filosofía de transicion; porque caminando siempre el entendimiento por grados casi imperceptibles, no podia pasar bruscamente de unas concepciones á otras tan profundamente incompatibles entre sí: las concepciones metafísicas llenaron esta laguna; y las entidades abstractas, que en el estudio de los fenómenos sustituyeron á la accion directriz y sobrenatural, y que en un principio no eran mas que emanaciones de la primera, acostumbraron al hombre á no considerar sino los hechos mismos, llegando aquellos agentes metafísicos á representar solo los nombres abstractos de los fenómenos á que se referian.

Pero ¿cuál es el caracter de esta filosofía positiva? ya lo he indicado anteriormente: mirar todos los fenómenos como sujetos á ciertas leyes naturales invariables, cuyo descubrimiento exacto, y cuya reduccion al menor número posible, deben ser el constante fin de todos nuestros esfuerzos; y hoy se mira como vacía de sentido, como absolutamente inaccesible para nosotros, la investigacion de lo que se ha llamado causas primeras ó generadoras de los mismos fenómenos. Citaré un solo ejemplo, pero quizá el mas importante de todos: se considera hoy que los fenómenos generales del universo quedan explicados tan satisfactoriamente como pueden serlo por la ley de la gravitacion universal revelada al mundo por el inmortal Newton, porque esta luminosa teoría nos hace ver que la inmensa variedad de los fenómenos astronómicos no es mas que un solo hecho mirado desde diversos puntos de vista, la tendencia constante de todas las moléculas á dirijirse unas hácia otras en razon directa de sus masas y en razon inversa de los cuadrados de las distancias que las separan; al paso que nos presenta este mismo hecho general como la simple extension de un fenómeno que nos es muy familiar, y que por lo mismo se considera como perfectamente conocido, la pesantez de los cuerpos en la superficie de la tierra. Pero en cuanto á determinar qué son en sí mismas esta atraccion ó pesantez, y qué causas las producen, esas son cuestiones que, cual las del conocimiento íntimo de todos los demás motores, se miran ya por las personas sensatas como de imposible resolucion: y la prueba mas evidente de su imposibilidad es que siempre que se ha querido dar alguna explicacion razonable sobre este asunto, no ha podido hacerse mas que definir un principio por el otro, diciendo que la atraccion no es otra cosa que la pesantez universal, ó que la pesantez consiste solo en la atraccion terrestre.

Si considerando la filosofía positiva como estado definitivo de la inteligencia humana, quisiera exponer ahora cuál fue su principio, cómo se encuentra en el dia, y qué resta por hacer para completar su objeto, me dejaria llevar á consideraciones superiores á mis escasas facultades, y que harian interminable este discurso. Me limitaré, pues, á observar que los diversos ramos de nuestros conocimientos no han podido recorrer con igual paso las tres grandes fases ó períodos de su desarrollo, que constituyen los tres estados de que se ha hecho mérito, ni por consecuencia llegar simultáneamente al estado positivo; que en este concepto no puede menos de existir un orden invariable y sucesivo en nuestras diversas concepciones, con arreglo á la diversa naturaleza de los fenómenos, y á su mayor grado de generalidad, de sencillez y de recíproca independencia; que tambien es imposible señalar época fija en que se haya verificado esta revolucion en el orden de nuestras concepciones, y principalmente en el establecimiento de la filosofía positiva; pero bien puede asegurarse que desde hace poco más de dos siglos, la accion combinada de los preceptos de Bacon, de las concepciones de Descartes y de los descubrimientos de Galileo, han dado tan poderoso impulso al entendimiento en este sentido, que no parece exajerado considerar esa época memorable como el punto de partida de los conocimientos positivos.

En el estado primitivo del saber, no puede existir division alguna regular entre los diversos trabajos intelectuales; todas las ciencias son cultivadas simultáneamente por las mismas personas; pero esta organizacion de los estudios, indispensable en su origen, cambia á medida que se desarrollan los diversos órdenes de concepciones, porque cada rama del sistema científico se separa insensiblemente de su tronco cuando ha adquirido bastante incremento y robustez para ocupar por sí sola la actividad permanente de varias inteligencias; y la division del trabajo intelectual contribuye tan poderosamente á su desarrollo, como la del trabajo material á la perfeccion de sus productos. Pero no se debe olvidar que esta misma division, que ha de ser en lo sucesivo base fundamental de la organizacion general del saber, y que dando orijen á las especialidades, ha de llevar los conocimientos de todas á su mayor perfeccion, tiene tambien graves inconvenientes por la excesiva particularidad de las ideas que hace dominar en la inteligencia de cada individuo; y es indispensable poner remedio á tan funestos resultados, sin privarse de las ventajas que aquella division lleva consigo. Para ello propone, entre otros, un ilustrado autor anteriormente citado, no el suprimir, no el disminuir las especialidades de los conocimientos humanos, sino al contrario, formar una especialidad más de las generalidades científicas de todos ellos.

Sin detenerme en este punto, ni tratar de exponer la multitud de clasificaciones de todos los conocimientos, que se han propuesto de dos siglos á esta parte con el propósito de fijar el lugar que en esta escala debiera ocupar cada uno de ellos, observaré solo que en la exposicion de toda ciencia pueden seguirse dos caminos distintos, denominados *histórico* el uno y *dogmático* el otro. Por el primer procedimiento se exponen sucesivamente los conocimientos en el mismo orden en que el entendimiento los ha adquirido, y aun por los mismos medios en cuanto sea posible; en el segundo se presenta el sistema de las ideas como podria concebirlo ahora una persona dotada de la inteligencia necesaria, y colocada en la situacion conveniente, para rehacer la ciencia en toda su extension. El primer método es indispensable para el estudio de cada ciencia en su nacimiento, porque no exije ningun trabajo diferente del de su misma formacion, toda vez que la parte didáctica se reduce entonces á estudiar en el orden cronológico las diversas obras originales que han contribuido á sus progresos: el segundo supone ya que todos estos trabajos particulares se han refundido en un sistema general para ser presentados segun el orden lógico más natural, lo que no es aplicable sino á una ciencia que haya llegado á cierto estado de desarrollo. Por manera que, á medida que se aumentan los progresos de una ciencia, el método histórico se hace más penoso, dificil é impracticable; y el dogmático más natural y necesario, porque las nuevas concepciones permiten presentar los descubrimientos anteriores de una manera más directa: la educacion de un geómetra de la antigüedad podria reducirse al estudio de las pocas obras debidas á Arquímedes y Apolonio; la del que hoy quisiera seguir el mismo camino estudiando separadamente todas las obras publicadas sobre esta materia sería impracticable. Así que la tendencia constante del espíritu en la exposicion de los conocimientos es reemplazar el orden histórico con el dogmático. Y no se crea que esto es desconocer, ni mucho ménos despreciar la importancia y utilidad del primero; ya lo he dicho, en el origen de cada ciencia, y lo mismo pudiera decirse respecto de los ramos especiales que cada dia se desprenden del tronco de la inteligencia humana, es el más acomodado; pero en general el problema de la educacion intelectual consiste en hacer llegar en pocos años un solo entendimiento, á veces mediano, al mismo grado de desarrollo á que han llegado durante muchos siglos gran número de genios superiores aplicando sucesivamente, y durante su vida entera, todas sus fuerzas al estudio de un objeto determinado; y bien se comprende que aun cuando sea mas facil y breve aprender que inventar, sería de todo punto imposible llegar á este resultado si se quisiera obligar á cada uno á pasar por todos los intermedios que indispensablemente ha debido seguir el genio colectivo de la especie humana; de aquí la indispensable necesidad del orden dogmático, único que puede conducir tambien á la unidad sistemática, sobre todo para las ciencias mas avanzadas, cuya manera de exposicion en el dia apenas deja rastro alguno de la filiacion de sus detalles; sin que por eso deje de tener merecida importancia la historia de los progresos de cada ciencia, que ordinariamente caminan de consuno con los de otras; pues no es lo mismo conocer la historia de una ciencia, que seguir el método histórico en la exposicion de sus conocimientos.

Estas consideraciones pueden aplicarse, mas aún que á las otras, á la ciencia matemática, que muchos miran, no solo como parte constituyente de la filosofía natural propiamente dicha, sino como su base fundamental. Lo cierto es que en el dia la ciencia matemática es aún mas importante que por sus conocimientos propios y reales, que lo son tanto, por constituir el instrumento mas poderoso de cuantos emplea el entendimiento para investigar los fenómenos naturales. «El estudio de las matemáticas, dice el ilustrado Mr. *Coiteux* en su Examen sobre los verdaderos principios de estas ciencias, se dirije á fortificar el entendimiento desarrollando la razon.» Las matemáticas se pueden dividir en dos grandes ciencias de caracter esencialmente distinto: las abstractas, ó sea el cálculo en toda su extension; y las concretas, compuestas de la geometría y de la mecánica racional en todo su desarrollo: la parte concreta se funda naturalmente en la parte abstracta; y como los fenómenos geométricos ó mecánicos son los mas generales, sencillos é independientes entre todos los que se verifican en la naturaleza, su estudio deoe preceder al de todos los demás, y la ciencia matemática ser considerada, segun ya he repetido, como verdadera base de la filosofía natural. Las matemáticas, á las que *Condorcet* designaba en singular para expresar con mayor energía la unidad que debe caracterizar esta ciencia, han llegado en el dia á tal grado de perfeccion y desarrollo en sí mismas y en sus mas importantes aplicaciones, que es ya tiempo de esforzarse en formar un sistema único de las diversas partes que las constituyen, á fin de preparar y acelerar nuevos progresos; tal es el propósito de nuestro ilustrado compañero; tal la tendencia filosófica de los mas importantes descubrimientos modernos, que imprimen á todas sus partes un caracter de unidad que antes no tenian, y entre los cuales citaré en privilegiado lugar y en amigable consorcio los trabajos del célebre autor de la *teoría de las funciones analíticas*, y del no menos célebre de la *reforma absoluta del saber humano,* de *Lagrange* y de *Wronsky*, que tienen una misma tendencia y caminan á idéntico resultado, á pesar de las diferencias que ellos mismos se complacian de encontrar en sus obras, y que dieron lugar á tan vivas é ilustradas controversias.

Se acostumbra á definir á las matemáticas como la *ciencia que tiene por objeto la medida de las cantidades;* y esta definicion, que á primera vista, y tomada en sentido literal, parece reducir las matemáticas á la simple comparacion de una cantidad con otra de la misma especie tomada por unidad de medida, á un simple *arte,* se acrece y desarrolla inmensamente cuando se la profundiza como corresponde, dándole el sentido que nace de la naturaleza misma de los cosas. En efecto, la medida directa de una cantidad por medio de la superposicion de otra, ó por cualquiera operacion semejante, es casi siempre impracticable; y para determinar estas magnitudes hay necesidad de valerse de comparaciones intermedias, que á veces llegan á ser muy complicadas, y cuya determinacion y relaciones forman el verdadero objeto de las matemáticas: comprobaré esto con un ejemplo muy comun. La medida de una línea recta por medio de otra recta es sin disputa el caso mas sencillo, y que puede efectuarse con mayor facilidad; y sin embargo, muchas veces no será posible realizarlo directa é inmediatamente: en unas ocasiones no podrá recorrerse en toda su longitud la línea recta que se trata de medir, para aplicar sucesivamente sobre ella la que se ha elejido como unidad de medida, privándonos (si no tuviéramos otros medios de efectuarlo) de determinar la magnitud de las líneas que acaso más nos importe conocer: la distancia que existe entre los diferentes cuerpos celestes; la de la tierra á cualquiera de ellos; la mayor parte de las alturas ó distancias que en la misma tierra son tantas veces inaccesibles, se encuentran en este caso. En otras, la disposicion misma de las líneas nos impide su exacta determinacion: basta suponer vertical una distancia que siendo horizontal podríamos medir con facilidad, para que ya no pueda realizarse; y siempre se necesita que estas distancias sean ni demasiado grandes ni demasiado pequeñas, comparadas con la unidad de medida, para que haya alguna exactitud en los resultados. Tales son las dificultades que lleva consigo la medicion inmediata de una línea, que casi siempre se establecen, se crean, digámoslo así, otras líneas susceptibles de medicion inmediata y rigorosa, para comparar con ellas todas las demás. En su seno cuenta esta corporacion distinguidos académicos que pueden dar honroso testimonio de esta verdad, con la delicada operacion de medir una base para la formacion del mapa geográfico de nuestro país, que con tan singular acierto han llevado á cabo, y que tan lisonjera como merecida acogida ha encontrado dentro y fuera de España. Y lo que acabo de decir respecto de las líneas, se aplica con mayor fundamento á las superficies, á los volúmenes, á las velocidades, á los tiempos, á las fuerzas, á las temperaturas, á todas las cantidades. El único método general para conocer las que no son susceptibles de medida directa, es el referirlas á otras que puedan determinarse inmediatamente, y con cuyo auxilio se llega á descubrir las primeras por medio de las relaciones que existen entre unas y otras; punto de vista desde el cual debe mirarse la ciencia matemática, cuya extension fácilmente se comprende ahora, observando que esta determinacion indirecta puede serlo en distintos grados, dando así lugar á una larga série de cuestiones intermedias. Fijémonos tambien, como ejemplo, en un fenómeno natural y sencillísimo, que se halla á la vista de todos, y que es susceptible de muchas aplicaciones; la caida vertical de los cuerpos pesados. Al observar este fenómeno, la persona más extraña á las concepciones matemáticas distinguirá en él las dos cantidades que presenta, la altura de que cae el cuerpo y el tiempo empleado en la caida; cantidades invariablemente ligadas entre sí, porque varían juntas, permaneciendo fijas simultáneamente, que son una *funcion* de otra. Considerado así este fenómeno da lugar á una verdadera cuestion matemática, que consiste en reemplazar la medida directa de una de estas dos cantidades por la de la otra, cuando una de ellas sea imposible ó ménos facil de obtener directamente; de este modo se podrá medir la profundidad de un pozo por el conocimiento del tiempo que tarda un cuerpo en llegar á su fondo, y medirla con tanto rigor y exactitud como si hubiera sido una línea horizontal colocada en las circunstancias más favorables para ello. Otras veces se podrá determinar con igual exactitud el tiempo que un cuerpo tardaria en andar un espacio conocido, tal como el que emplearia en caer verticalmente de la luna á la tierra, conociendo esta distancia. Y este ejemplo, que es el más sencillo en la caida de los cuerpos, puede complicarse y ampliarse mucho, suponiendo oblícua la caida, y teniendo en cuenta las principales circunstancias que la modifican: el espacio recorrido en el sentido vertical y en el horizontal, el tiempo empleado en recorrerlo, la velocidad del móvil en cada instante, la intensidad y direccion del primer impulso en muchos casos, la resistencia del medio, la energía de la gravedad, y otras mil y mil circunstancias que estarán todas ligadas entre sí, presentarán tantas investigaciones matemáticas como sean las cantidades coexistentes que entran en el fenómeno que se considera, y convertirán un problema de suyo muy sencillo en una de las cuestiones más difíciles y complicadas, y á veces superior á la inteligencia humana en su completa y rigorosa resolucion.

Lo mismo pudiera decirse respecto de la determinacion de distancias inaccesibles con otras con las que formen figuras de todas clases, y en particular triángulos, cuyas magnitudes pueden determinarse por el conocimiento de las relaciones que existen entre sus lados y sus ángulos; lo que constituye un trabajo, una serie de operaciones matemáticas que exijirán á su vez, en muchos casos, otras operaciones auxiliares, que servirán para determinar, como si pudieran medirse directamente, las dimensiones de un cuerpo, su superficie, volumen, peso, y otra multitud de circunstancias, que sin estos procedimientos nos serian completamente desconocidas. Con ayuda de semejantes trabajos ha llegado el hombre á conocer las distancias de los cuerpos celestes entre sí, su magnitud y figura, las desigualdades de su superficie, y lo que es mas, porque parece que se escapa á nuestros medios de observacion, sus masas respectivas, sus densidades, y otros mil fenómenos naturales, que no lograria comprender sin el poder de las teorías matemáticas, y sin la comparacion de unas medidas con otras reducidas al menor número posible. En vista de esto, bien se podria señalar como objeto de la ciencia matemática en general, no la medida *directa* sino la *indirecta* de las cantidades; esto es, *la determinacion de las cantidades unas por otras, segun las relaciones exactas que existen entre ellas;* cuya definicion, en vez de reducir á la condicion de mero *arte* este ramo importantísimo del saber, le restituye el carácter de *ciencia* que le corresponde, justificando así el que los antiguos le dieran tal nombre, porque no conocian otra, y el que los modernos se lo conserven como á la ciencia por excelencia.

Abusaría, Señores, de la indulgencia con que me honrais, si tratase de presentar aquí la division que se hace de los diferentes ramos constitutivos de la ciencia matemática en su parte abstracta y en la concreta; el verdadero carácter de una y otra; los adelantos hechos en cada uno de aquellos; las innovaciones propuestas en la enseñanza por diversos autores, como en la «enseñanza universal» de Mr. *Jacotot*, en la «geometría sin axiomas» de Mr. *Thompson*, en la «reforma de la geometría» de Mr. *Bailly*, y tantas otras, tan victoriosamente refutadas por Mr. Coiteux, autor de un «sistema filosófico,» y otros varios trabajos; de qué manera han influido en los progresos del cálculo los que se hacian en la parte concreta, especialmente desde la época de Descartes; la necesidad, conveniencia y posibilidad que existe, sin embargo de esto, de exponer independientemente las teorías analíticas en un estudio metódico de las matemáticas; y otra multitud de cuestiones de sumo interés en la ciencia, bien conocidas de los que me escuchan, ajenas ahora de mi propósito, y que convertirian este desaliñado discurso en una obra voluminosa. Me limitaré, pues, á apuntar algunas ligeras observaciones sobre el cálculo infinitesimal, para mayor comprobacion de lo que manifesté al principio, y de lo que con tanta brillantez ha expuesto nuestro nuevo colega.

En la parte abstracta de las matemáticas se puede considerar á la Arimética como *cálculo de los valores*, y al Algebra como *cálculo de las funciones;* formando entre ambas la ciencia que ha caracterizado con el nombre de *Algoritmia* el atrevido iniciador de la completa reforma del saber humano, Hoëne Wronsky; y sin pretender ni negar que sea dable considerar en cierto modo al primero como aplicacion particular del segundo, y por consiguiente dejar de formar parte distinta de las matemáticas abstractas, advertiré que el dominio de la arimética, á pesar de ser mas extenso de lo que ordinariamente se piensa, lo es mucho menos que el del álgebra: el cálculo de los valores no será sino un punto en comparacion del cálculo de las funciones, que constituye esencialmente la ciencia. El número de elementos analíticos ó de algoritmos, segun la denominacion adoptada por Wronsky, que componen las funciones abstractas hoy conocidas, es muy limitado; y aunque bastan para dar márgen á un número infinito de combinaciones, esa limitacion es causa de la dificultad que se encuentra para establecer en muchas ocasiones la relacion de lo concreto con lo abstracto; dificultad que ha llegado á vencerse en multitud de casos importantes por un procedimiento verdaderamente filosófico. A primera vista parece que siendo el principal obstáculo para establecer las ecuaciones de los fenómenos, el pequeño número de elementos analíticos conocidos, todo se remediaria con crear otros nuevos; pero esto ofrece tan grandes dificultades, que sin decir que la inteligencia humana haya llegado á su límite en este particular ni en ningun otro, hay que reconocer que sus progresos son muy lentos, y no se ha proporcionado por este medio los poderosos recursos que le han facilitado en gran manera el establecimiento de las ecuaciones. Viendo que en muchas circunstancias era imposible encontrar directamente las ecuaciones entre las cantidades que se consideraban, buscáronse las correspondientes á otras cantidades auxiliares, ligadas con las primeras segun una ley determinada, y elevándose desde estas á las cantidades primitivas. Tal es en esencia la concepcion eminentemente fecunda del *análisis trascendente*, que ha conseguido fundar el entendimiento del hombre, y que constituye el instrumento más admirable y poderoso para la exploracion matemática de los fenómenos naturales. En general, las cantidades auxiliares que se introducen en lugar de las primitivas ó al par de ellas para facilitar el establecimiento de las ecuaciones, podrian derivarse de los elementos inmediatos de la cuestion segun una ley cualquiera, concibiendo así un método de derivacion, con el que se podria llegar algun dia á perfeccionar esencialmente el análisis matemático, y establecer para investigar las leyes de la naturaleza medios aún más poderosos que los procedimientos actuales, insuficientes en muchos casos á pesar de su incontestable superioridad, como observa el nuevo académico; pero concretándome al estado presente de la ciencia, diré que las cantidades auxiliares que ordinariamente se introducen, en vez de las primitivas, en el análisis trascendente, son los *elementos infinitamente pequeños*, las *diferenciales* de diversos órdenes de estas cantidades, segun el método de Leibnitz; ó bien las *fluxiones*, los *límites* de relacion de las cantidades primitivas unas con otras, las *primeras* y *últimas razones* de estos aumentos segun el método de Newton; ó por último, las *derivadas* propiamente dichas, los *coeficientes* de los diversos términos de sus incrementos respectivos, segun el método de Lagrange. Estos tres métodos principales de considerar el análisis trascendente tal como hoy se conoce, son necesariamente idénticos por su naturaleza, tanto respecto del cálculo como respecto de sus aplicaciones; pero tienen condiciones y ventajas respectivas que los distinguen. La concepcion de Leibnitz es por su facilidad muy superior en la práctica de las operaciones, al paso que su carácter lógico es esencialmente vicioso. La concepcion de Lagrange, al contrario, admirable por su sencillez y perfeccion lógica, y por la unidad filosófica que ha establecido en el conjunto del análisis matemático, dividido hasta entonces en dos mundos casi independientes, presenta aún en las aplicaciones graves inconvenientes, dificultando la marcha de la inteligencia. La concepcion de Newton ocupa un término medio entre estas diversas relaciones, siendo ménos rápida pero más racional que la de Leibnitz, ménos filosófica pero más aplicable que la de Lagrange.

No explicaré aquí de qué suerte la consideracion de estas cantidades auxiliares introducidas en las ecuaciones en lugar de las primitivas, facilita la expresion analítica de las leyes de los fenómenos, ni las repetidas y apasionadas objeciones que se han formulado contra los tres métodos que se acaban de indicar; pero sí debe observarse que el cálculo de las funciones, el álgebra, considerada de la manera más general, abraza dos cálculos esencialmente distintos: el análisis trascendente, que en el orden racional de las ideas aparece forzosamente el primero, pues tiene por objeto facilitar el conocimiento de las ecuaciones; y el análisis ordinario, que se ocupa en su resolucion. Bien conoceis que á pesar de esto conviene principiar el estudio del cálculo por el segundo, por multitud de razones que fuera ocioso enumerar; mas para enlazar el uno con el otro, para evitar consideraciones extrañas, para generalizar las ideas de Lagrange y referir ambos cálculos á un mismo orden de ideas, para conducir á la unidad de que ambos pueden derivarse, distinguen muchas personas al uno con el nombre de *cálculo de las funciones directas*, y al otro con el de *cálculo de las funciones indirectas*.

La historia razonada de la formacion sucesiva del análisis trascendente ó sea del cálculo de las funciones indirectas, podria remontarse hasta el *método de exhaucion* de Arquímedes y otros geómetras griegos, á quienes servia para pasar de lo relativo de las líneas rectas á lo correspondiente á las curvas, sustituyéndolas con la consideracion auxiliar de los polígonos inscritos y circunscritos, aumentando el número de sus lados hasta confundirlos con las mismas curvas, y tomando los límites de las relaciones primitivas; pero sin desconocer la importancia y utilidad de este método, que tanto facilita las operaciones prácticas, no es posible considerarlo como la base del análisis trascendente moderno, precisamente porque los antiguos carecian de medios para generalizar esta concepcion y reducirla al cálculo, carácter principal de nuestro análisis trascendente: «el método de exhaucion, ni por su fin ni por sus medios tiene nada de comun con el cálculo diferencial,» dice Hõene Wronsky en su Filosofía del infinito, porque el fin del cálculo diferencial considerado como método, consiste en remontarse á los elementos indefinidos de los *números* ó del *tiempo*, y el de exhaucion, considerado tambien solo como método, en elevarse á los elementos indefinidos del *espacio* ó de la *extension:* y porque los medios del primero consisten en procedimientos rigurosos de la razon, y los del segundo en procedimientos puramente induccionales del juicio, como se podria comprobar extensamente si no me retrajera de hacerlo el temor de molestaros.

Los trabajos de *Fermat* sobre los máximos y mínimos, y sobre investigacion de las tangentes, pueden mas bien tomarse por el primer bosquejo de la formacion directa de este análisis, segun reconoce el mismo Lagrange, por mas que tan terminantemente lo contradiga el citado Wronsky; pero es cierto que estos trabajos, sin que esto sea privarles del mérito que los distingue, estaban lejos de constituir un cálculo general con su notacion propia, y libre de las complicaciones inútiles que se observan en el de Fermat. *Wallis* con su aritmética de los indefinidos; *Barrow* con su pequeño triángulo diferencial; *Mercator* con su arte de formar séries infinitas de otra especie que las de Wallis; y otros diversos geómetras, introdujeron notables modificaciones en las ideas de Fermat; y medio siglo despues apareció Leibnitz, verdadero creador del análisis trascendente, tal cual hoy se conoce y generalmente practica. Casi al mismo tiempo que Leibnitz, ó muy poco antes, descubrió Newton un método equivalente, considerando el análisis desde muy diverso punto de vista; y aunque mas racional en sí mismo, es menos conveniente (como ya se ha indicado) para dar al método fundamental toda la extension y facilidad que le han impreso las ideas y procedimientos de Leibnitz. Apareció despues *Lagrange*, quien prescindiendo de las consideraciones hetereogéneas que habian guiado á Newton y Leibnitz, consiguió reducir el análisis trascendente á su mayor perfeccion, á un sistema puramente algebráico, al cual solo falta mayor aptitud para las aplicaciones.

Se han formulado muchas objeciones contra los principios filosóficos del cálculo infinitesimal, como indica el nuevo académico; se ha discutido ampliamente acerca de la existencia, naturaleza y órdenes de los infinitamente pequeños: admitidos con facilidad cuando fueron descubiertos ó expresados mas bien en vista de su resultado que de su evidencia, bien pronto cayeron en descrédito, porque se descuidó el definirlos de una manera rigurosa, y fundarlos en sus verdaderos principios filosóficos; se propusieron muchos métodos nuevos para reemplazar el de Leibnitz; se ha querido eliminar por completo la nocion de los infinitamente pequeños: mas á pesar de todas estas tentativas, á pesar de tanta oposicion y de tantas recriminaciones, el método infinitesimal ha quedado vencedor en la esencia; y los mismos que negaban su rigor, se han visto obligados á recurrir á él, triunfando su indisputable utilidad de todos los obstáculos. Hoy muchos matemáticos parece que se hayan convenido en admitir los infinitamente pequeños, no como realidades, sino como ingeniosa hipótesis que abrevia el cálculo, que resuelve los problemas mas difíciles de la geometría, de la mecánica y la astronomía, y que conduce á resultados, ya que no de un rigor lógico absoluto, de una aproximacion que satisface á todas las exijencias; estableciendo así una completa antinomía entre las leyes subjetivas y las objetivas del cálculo diferencial, que fácilmente se podria hacer ver no esta fundada en razon alguna.

Bien quisiera entrar en mas pormenores sobre tan importante cuestion; hacer con el debido detenimiento la exposicion dogmática de las tres concepciones principales del análisis trascendente para apreciar mejor sus propiedades características (lo que serviria al mismo tiempo para confirmar la necesaria identidad de los métodos que se derivan de ellas); indicar que el cálculo de las funciones indirectas ó el análisis trascendente se divide en otros dos, íntimamente ligados entre sí por su naturaleza, segun se trate de encontrar las relaciones entre las cantidades auxiliares por las que existen entre las primitivas correspondientes, ó en sentido inverso, descubrir estas ecuaciones directas por las indirectas establecidas inmediatamente. Estos dos cálculos, que han recibido diferentes nombres, segun el punto de vista desde que se ha considerado el conjunto de cuestiones que comprenden, fueron llamados por Leibnitz, cálculo *diferencial* el uno, y cálculo *integral* el otro, formando entre ambos su cálculo *infinitesimal*, nombres generalmente adoptados por los geómetras del continente; segun el método de Newton, denomínase el primero cálculo de las *fluxiones*, y el segundo cálculo de las *fluentes;* y segun el de Lagrange, podria llamarse al uno *cálculo de las funciones derivadas*, y al otro *cálculo de las funciones primitivas*. Señalar las diferencias esenciales entre ambos, el orden más racional de su exposicion, el enlace que tienen entre sí, las dificultades con que en muchos casos tropiezan, los ingeniosos métodos adoptados para vencerlas, los nuevos cálculos á que han dado orijen, la perfeccion á que los antiguos han llegado con su auxilio, y las importantes y numerosas aplicaciones que de ellos se hacen á pesar de tales inconvenientes, me llevaria demasiado lejos: harto he abusado ya de vuestra benevolencia. Dispensadme por ello, y permitid que concluya recordando que en el estado actual de la ciencia, cada una de las tres concepciones generales de este análisis ofrece ventajas esenciales que le pertenecen exclusivamente, sin que aún se haya llegado á establecer un método único que reuna las propiedades características de los tres, aunque de seguro se llegará á este resultado en lo sucesivo, tomando probablemente por base la concepcion de Lagrange. Cuando se haya efectuado este importante trabajo filosófico, que exije tan profunda elaboracion de todas las ideas matemáticas fundamentales, la exposicion y estudio del análisis trascendente podrá limitarse á esta concepcion definitiva, quedando reducidas las otras á dato meramente histórico; pero hasta que tal suceda habrá de considerarse la ciencia, á lo menos en este concepto, como en estado provisional; lo cual exijirá indispensablemente, aun para la exposicion dogmática del análisis, la consideracion simultánea de los diversos métodos generales de que se ha hecho referencia.

Esta necesidad, esta multiplicidad de concepciones de un asunto idéntico, esta falta de sistematizacion en la parte más importante del análisis matemático, es imprescindible en el dia para adquirir completo conocimiento del mismo análisis y de sus aplicaciones; y nada tiene tampoco de extraño, atendiendo por una parte á la superioridad del mismo cálculo, y por otra á lo reciente de su formacion. Se aspira á reducirlo á un principio único; se llegará á este resultado con el tiempo; él mismo ha sido un gran paso hácia la unidad de todo cálculo; pero en el estado en que se encuentra, especialmente respecto de su parte inversa, á pesar de sus importantísimas y numerosas aplicaciones, es indispensable renunciar por ahora á este bello ideal de la filosofía matemática.

He procurado comprobar con las consideraciones expuestas la verdad é importancia del principio sentado por nuestro ilustrado colega en su luminoso discurso, indicando al mismo tiempo algunas de las dificultades que el estado respectivo de los conocimientos humanos opone para llegar á él. Si un dia llegan á desvanecerse por completo; si el génio del hombre, destello de la Divinidad, que ilumina su sér y dirije su inteligencia, llevando siempre por guia el fecundo lema que distingue nuestra Academia y caracteriza la época actual, *observacion* y *cálculo*, logra vencer todos los obstáculos, descubrir con claridad y exactitud todos los fenómenos del universo y de los séres que lo pueblan, entonces habrá reducido todos sus conocimientos á una sola ciencia, y todos sus fundamentos á un solo principio, sublime y constante aspiracion de la inteligencia humana.