



ORIGINAL

LOS p -ÁDICOS: UNA NUEVA VÍA EN GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA

THE p -ADICS: A NEW PATH IN SYMPLECTIC GEOMETRY

Luis Crespo¹; Álvaro Pelayo^{2,3}

1. Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria.
2. Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid.
3. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, España.

RESUMEN

El cuerpo de los números p -ádicos es un mundo de números distintos a los que conocemos, en los que las distancias no son las mismas que en la recta real. Sobre este cuerpo es posible hacer geometría simpléctica, igual que en los reales, pero esta geometría se comporta de modo distinto que su equivalente real. Por ejemplo, el importante teorema de no-estrujamiento de Gromov, que dice que no es posible estrujar una bola grande para meterla dentro de un cilindro fino conservando el área de rodajas bidimensionales, es falso en el caso p -ádico. También es posible extender a los p -ádicos la teoría de sistemas integrables, pero la clasificación de singularidades es mucho más compleja que en el caso real.

Palabras clave: Geometría simpléctica; Sistemas integrables; Números p -ádicos.

ABSTRACT

The field of p -adic numbers constitutes a world of numbers which are different from what we are used to, in which distances aren't measured in the same way. Working with this field it is still possible to develop symplectic geometry, in analogy with the real case, but this new symplectic geometry behaves differently than its real counterpart. For instance, Gromov's Non Squeezing Theorem, which is a fundamental result, and which says that it is not possible to squeeze a big ball into a thin cylinder preserving the area of the 2-dimensional sections of the ball, is false in the p -adic case. It is also possible to extend the theory of integrable systems to the p -adic case, but the classification of singularities is much more complicated than in the real case.

Keywords: Symplectic geometry; Integrable systems; p -adic numbers.

Correspondencia

Álvaro Pelayo

Facultad de Ciencias Matemáticas

Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, España

E-mail: alvpel01@ucm.es

Dedicado en su ochenta cumpleaños con admiración a Pilar Bayer, académica de la RAC y pionera de la teoría de números en España, cuya brillante trayectoria y generosidad han trazado caminos para generaciones de matemáticos.

LOS NÚMEROS p -ÁDICOS

Todos usamos los números reales, y los conocemos muy bien. Incluyen los números enteros, pero también otros números más complicados como la raíz cuadrada de dos ($\sqrt{2}$) o el número $\pi = 3.1415\dots$. La representación típica de los números reales es una

línea horizontal continua, centrada en el número 0, como en la Figura 1.

Los números positivos se colocan a la derecha del 0, mientras que los negativos se colocan a su izquierda. En esta línea encontramos todas las fracciones, desde las más ínfimas como $\frac{1}{100000000000}$ hasta las enormes como $\frac{99999999999}{17}$.

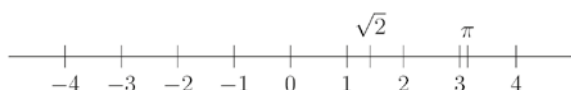


Figura 1. La recta real.

Los números reales son intuitivos y no hay agujeros entre ellos, están colocados de forma continua a lo largo de una línea que escapa a infinito tanto en la dirección positiva como en la negativa. Hasta aquí todo bien. La distancia entre dos números reales a y b es el valor absoluto $|a - b|$ de $a - b$. Por ejemplo, la distancia entre 5 y 12 es el valor absoluto de $5 - 12 = -7$, que es 7. La distancia de un número a al origen es su valor absoluto. Los números reales están en todas partes de nuestro mundo, por lo que constituyen los fundamentos con los que describimos las leyes de la física.

Por otro lado, existe un mundo de números donde la regla anterior no se aplica. Estos números son extremadamente peculiares, y sin embargo son muy importantes en matemáticas y física: se llaman los números p -ádicos. ¿Qué es un número p -ádico? ¿Cuál es la distancia entre dos números p -ádicos a y b ? Explicaremos esto a continuación. En primer lugar tenemos que decir qué es p . La letra p se refiere a un número primo. Un número primo es un entero positivo distinto de 1 que solo es divisible por 1 y por sí mismo. Desde los tiempos de Pitágoras se sabe que hay infinitos números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ... y así sucesivamente. Los números primos son los bloques de construcción de todos los números enteros: todos los enteros positivos son producto de potencias de números primos.

Una vez que hemos elegido p , definimos la distancia p -ádica entre dos números enteros a y b una vez más, como el valor absoluto $|a - b|_p$ de $a - b$; pero este valor absoluto no es el que conocemos: en la expresión de $a - b$ como producto de potencias de primos, tomamos la potencia de p que aparezca (o $p^0 = 1$), si no aparece ninguna, y el valor absoluto va a ser su inverso. Esta definición vale también para fracciones, porque una fracción no es más que un cociente de dos enteros y también se puede factorizar en primos (solo que hacen falta exponentes negativos). Por ejemplo, la distancia 2-ádica entre -23 y 2025 es el valor absoluto de $2025 + 23 = 2048$, cuya factorización es 2^{11} , luego la distancia es $2^{-11} \approx 0.0005$, o sea, -23 y 2025 están cerquísima 2-ádicamente hablando, pero están muy lejos en la distancia usual. Por contra,

la distancia entre $\frac{1}{15}$ y $\frac{1}{16}$, que en los reales están muy cerca, es $\frac{1}{15} - \frac{1}{16} = 2^{-4} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-1}$, o sea, $2^4 = 16$.

Esta distancia es muy peculiar: no es posible colocar en una recta (lo que habitualmente entendemos como "recta") todas las fracciones respetando las distancias. Esto significa que la "recta" p -ádica es muy distinta de la real. Una forma de representarla, para $p = 3$, es la Figura 2.

Los tres triángulos que vemos corresponden a los enteros que dejan resto 0, 1 o 2 al dividir por 3. Estos tres triángulos se dividen cada uno en tres triángulos, que corresponden a restos al dividir por 9; estos nueve triángulos se dividen en cada uno en otros tres, que son restos al dividir por 27, y así hasta el infinito. Lo mismo pasa con los números 7-ádicos en la Figura 3.

Las representaciones no son del todo fiables porque todos los puntos de cada uno de los tres triángulos que vemos deberían estar a la misma distancia de cada uno de los puntos de los otros triángulos. Además, aquí solo están los enteros: si quisiéramos añadir las fracciones, estas formarían infinitos triángulos más de la misma forma.

La historia no acaba aquí, porque igual que los racionales no llenan la recta real, tampoco llenan la "recta" p -ádica. Si en los reales, números como $\sqrt{2}$ o π dejan huecos entre los racionales, en la recta p -ádica también quedan huecos que corresponden a números p -ádicos irracionales. Una vez que llenamos estos huecos, obtenemos el conjunto de los números p -ádicos. Recomendamos el libro de Gouvea (Gouvea F. Q. 1993) para una introducción a los números p -ádicos. Matemáticos distinguidos como Jacob Lurie en IAS Princeton y Peter Scholze en el Instituto Max Planck han sido pioneros en muchas ideas recientes en el mundo de los números p -ádicos.

Históricamente los números p -ádicos son bastante recientes. La idea su construcción la introdujo hace algo más de un siglo el matemático alemán Kurt Hensel. Partiendo de la escritura de los enteros positivos en base p , como sumas finitas de potencias del primo p , Hensel dio un paso decisivo: permitir también sumas infinitas de potencias crecientes de p . La construcción de los números p -ádicos se puede explicar también considerando estas nuevas potencias. Adentrarnos en los detalles detrás de estas afirmaciones va más allá de lo que queremos lograr en este artículo divulgativo.

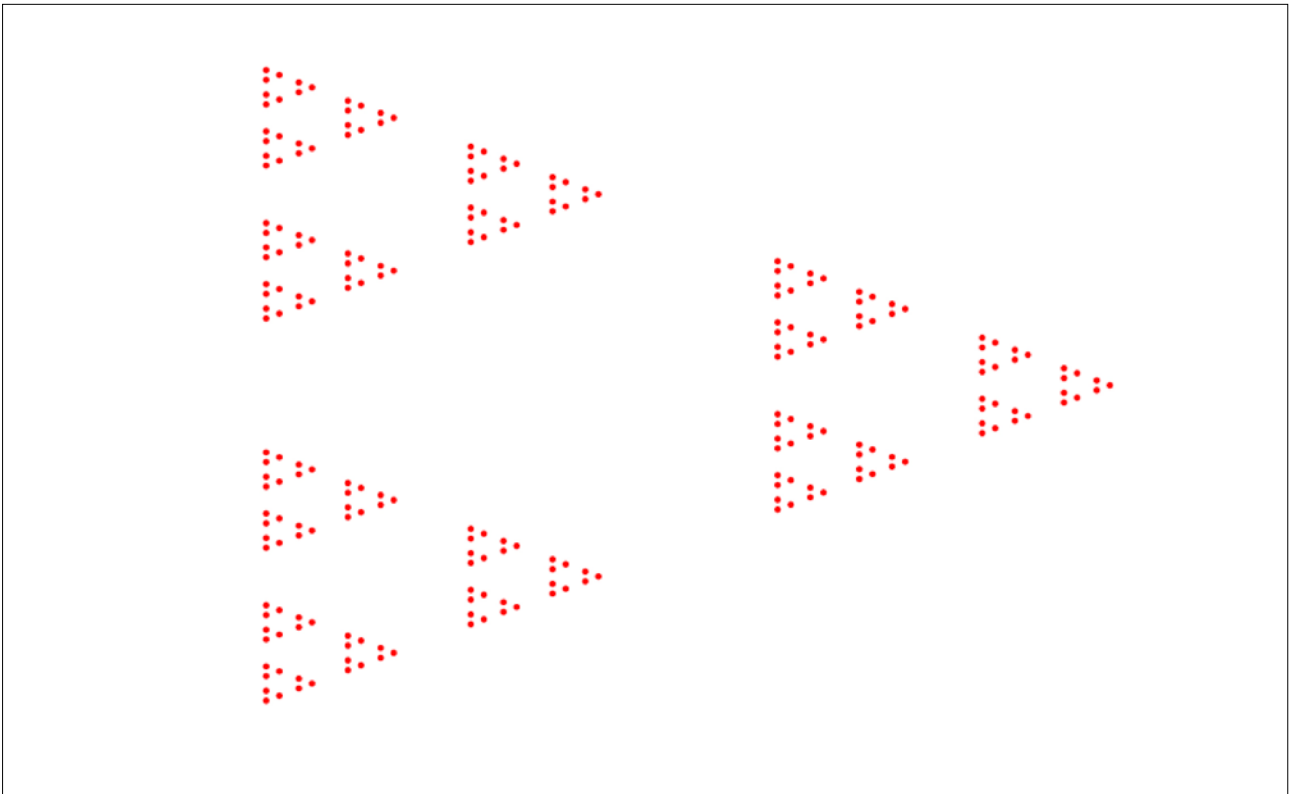


Figura 2. Los números 3-ádicos.

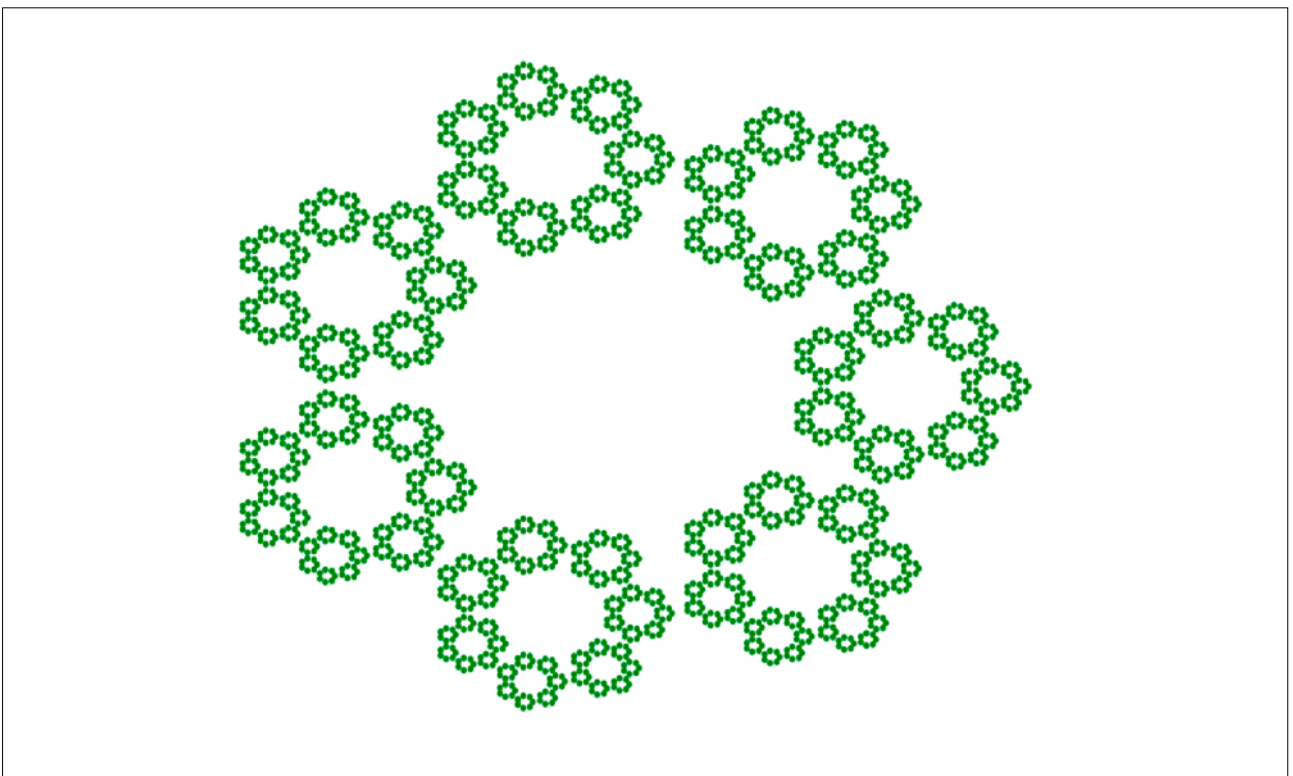


Figura 3. Los números 7-ádicos.

CONEXIÓN CON GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA

Por otra parte, la geometría simpléctica es un tipo peculiar de geometría que solo existe en dimensiones pares: 2, 4, etc. Recomendamos el artículo del segundo autor <https://www.fbbva.es/noticias/que-es-la-geometria-simplotica> para una introducción a la geometría simpléctica para un público general. Explicaremos aquí brevemente las ideas principales de ese artículo. Los lectores pueden consultar los bien conocidos libros de Cannas da Silva (Cannas da Silva A. 2001), Hofer-Zehnder (Hofer H. et al. 1994) y McDuff-Salamon (McDuff D. et al. 2017). para una introducción a la geometría simpléctica y los sistemas dinámicos.

La palabra “simpléctica” se remonta a Hermann Weyl en 1939. La geometría simpléctica es una rama de la geometría diferencial que estudia las mediciones de áreas de secciones bidimensionales de objetos de dimensión par. En este sentido es menos intuitiva que otras ramas de la geometría, ya que los objetos de los que toma secciones tienen al menos dimensión 4; pero ello no impide que tenga importantes conexiones con la física. De hecho, es de destacar que la geometría simpléctica salvó una misión espacial, y hoy en día se usa a la hora de diseñar misiones espaciales. También tiene aplicaciones en física del plasma, teoría de la elasticidad, robótica y mecánica de fluidos, y se relaciona con la geometría algebraica, y en particular con el mundo de los politopos, a través de la teoría de Atiyah, Guillemin, Sternberg y Delzant.

Los orígenes de la geometría simpléctica se remontan a los siglos XVII y XVIII, cuando se empezaron a estudiar los movimientos de los planetas. El despegue de la geometría simpléctica moderna se produjo en 1913, cuando Poincaré y Birkhoff demostraron que *si se deforma una corona circular haciendo girar en sentidos opuestos los bordes interior y exterior, entonces al menos dos puntos no se mueven*. Notemos que la deformación aquí mencionada es de una superficie bidimensional y conserva el área. La generalización a dimensión superior de este teorema, referida a deformaciones de objetos en dimensión par que conservan el área de “rodajas” bidimensionales, se conoce como conjetura de Arnold, y fue demostrada en algunos casos en los años 80.

Otro hito importante de la geometría simpléctica es el teorema de Gromov, que dice que *no es posible deformar una bola para que quepa en un cilindro más estrecho que la bola conservando el área de las rodajas*.

bidimensionales. Todos entendemos que se puede estrujar una bola de radio enorme en un cilindro infinito muy delgado conservando el volumen de la bola. Cuanto mayor es el radio, más hay que estrujar la bola, pero siempre se puede hacer porque el cilindro no tiene extremos en la dirección vertical, luego tiene volumen infinito. Pero Gromov dijo que eso no se puede hacer conservando las áreas de las rodajas de la bola, como en la Figura 4. Este resultado es uno de los más fundamentales en la historia de la geometría simpléctica, y se podría decir en la historia de toda la geometría. Es obvio que una rodaja transversal a un cilindro va a tener área menor que la esfera, pero aquí estamos permitiendo rodajas de cualquier forma, que incluso pueden no ser planas.

En vista de esto, muchos pensarán que el mundo simpléctico es un tanto “extraño”, pero de hecho esto puede tener tanto o más que ver con los números reales que con ser simpléctico. Para poner las cosas en contexto, acabamos de decir que Gromov demostró que no se puede estrujar una bola gruesa en un cilindro fino en el mundo simpléctico. Pero, ¿y si decimos que hemos descubierto recientemente que sí que es posible si vemos el mundo

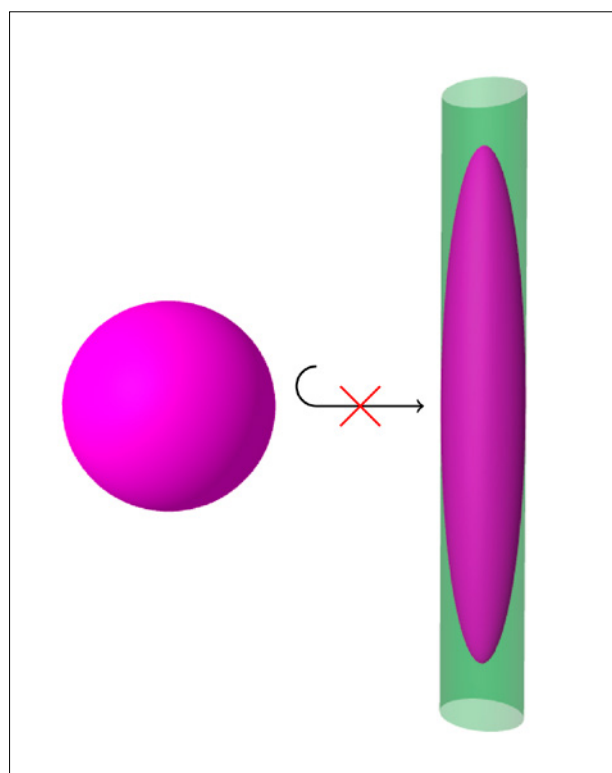


Figura 4. El teorema de no-estrujamiento de Gromov dice que *no es posible estrujar una bola para que quepa en un cilindro más estrecho manteniendo el área de las rodajas de la bola*.

simpléctico con gafas p -ádicas? Esto es, la propiedad de estrujamiento tiene más que ver con los números reales que con vivir en un mundo simpléctico. Esto en cierto modo nos desafía la intuición. A continuación explicamos este sorprendente contraste, que aparece en nuestro artículo (Crespo L. et al. 2026).

Todos los números reales tienen una expansión en base p : una forma de escribirlos como una secuencia de dígitos entre 0 y $p - 1$ que sigue infinitamente hacia la derecha. Esto es algo que también pasa con los p -ádicos, solo que en ese caso la expansión es infinita hacia la izquierda. Un punto en el espacio p -ádico de dimensión $2n$ está en el cilindro de radio 1 si y solo si sus dos primeras coordenadas son enteras (quizá con infinitos dígitos).

Pues bien, tomemos un punto cualquiera en el espacio p -ádico, por ejemplo para $p = 7$ y $n = 2$, es decir, en dimensión 4:

$x = \dots 225.044$
 $y = \dots 361.413$
 $z = \dots 012.366$
 $t = \dots 521.431$

Ahora dejamos sin tocar los dígitos que están a la izquierda del punto, y escribimos los dígitos de la derecha de x y z todos ellos en z , alternando un dígito de x con uno de z , y lo mismo con y y t :

$x = \dots 225$
 $y = \dots 361$
 $z = \dots 012.034646$
 $t = \dots 521.441331$

Como ahora x e y son enteros, el punto resultante está en el cilindro de radio 1. Esta operación corresponde a una deformación del espacio que conserva el área de rodajas bidimensionales (esto se debe a que no hemos tocado los dígitos de más a la izquierda), y que mete todo el espacio en un cilindro de radio 1. La Figura 5 muestra una representación de la deformación del espacio para $p = 3$. Las direcciones horizontal y vertical representan x y z . Esta deformación es continua porque los cuadrados de la figura están a una distancia fija unos de otros. En el caso real estos cuadrados tendrían bordes comunes y la deformación sería discontinua.

De hecho, el radio 1 no tiene nada de especial: para cualquier cilindro, por estrecho que sea, se puede hacer la misma construcción. O sea, no solo se puede

estrujar una bola gruesa en un cilindro fino conservando su área simpléctica, sino que

¡se puede estrujar todo el espacio dentro del cilindro, por muy fino que sea!

Sin embargo, en el caso lineal el fenómeno de no-estrujamiento sí que ocurre, lo que es extraño a primera vista. Esto significa que las aproximaciones lineales a la geometría simpléctica real y la p -ádica coinciden, a pesar de ser opuestas en el caso general. Por otra parte, la deformación que hemos encontrado en nuestras investigaciones en el caso p -ádico no lineal deforma tanto el espacio que no es invariante por rotación. Ser invariante por rotación significa que las rotaciones del espacio sigan siendo rotaciones después de la deformación. Nos podemos preguntar entonces si el fenómeno de no-estrujamiento ocurre si nos restringimos a deformaciones que sí las conserven. La respuesta es sí o no dependiendo de cuántos ejes de rotación queremos conservar.

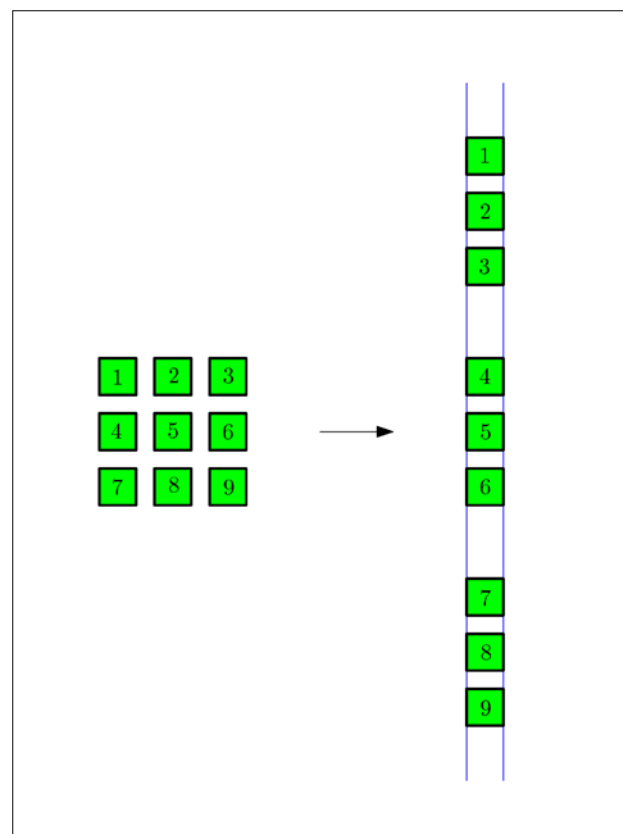


Figura 5. Una forma de deformar una bola p -ádica para que quepa en un cilindro más estrecho manteniendo el área de sus rodajas bidimensionales.

CONEXIÓN CON SISTEMAS DINÁMICOS Y FÍSICA MATEMÁTICA

Otra faceta que consideramos fascinante de los números p -ádicos es su conexión con los sistemas dinámicos. Un sistema dinámico es grosso modo una colección de objetos o variables que evolucionan con el tiempo, por ejemplo una población o una partícula en movimiento. Entre los sistemas dinámicos hay una clase muy importante, los que son integrables. Estos son sistemas dinámicos con muchas cantidades que se conservan durante el movimiento, como energía o momento. La geometría simpléctica nos proporciona herramientas fundamentales para estudiar los sistemas integrables. Los fenómenos más importantes sobre ellos ocurren en sus singularidades, es decir, los instantes en los que el sistema tiene un comportamiento extremo o crítico. En el artículo expositivo (Pelayo Á. et al. 2011) se da una introducción a los sistemas integrables desde el punto de vista de la geometría simpléctica.

En los otros puntos, llamados regulares, de un sistema integrable, la trayectoria de una partícula viene dada por las ecuaciones de Hamilton. Sin embargo, estas ecuaciones no funcionan en los puntos singulares, donde la trayectoria puede bifurcarse, contraerse a un punto o salir en todas las direcciones a la vez.

En los sistemas en dimensión 4 (que podemos entender como dos dimensiones de posición y otras dos de momento) todas las singularidades se clasifican en cuatro formas normales, es decir, solo existen cuatro singularidades esencialmente distintas, al menos en lo que al comportamiento local alrededor de la singularidad se refiere. Todas las demás son una de estas cuatro vista de otra forma.

La noción de sistema integrable se puede aplicar también en los p -ádicos, y una vez más las ecuaciones de Hamilton nos predicen el movimiento de las partículas, excepto en los puntos singulares. Se puede intentar, igual que antes, una clasificación del comportamiento local de estas singularidades. El problema es que, en dimensión 4, ya no nos basta con 4 formas normales. Si p es un múltiplo de 4 más 1, necesitamos 49 formas; si p es múltiplo de 4 más 3, necesitamos 32 formas; y si $p = 2$, necesitamos 211 formas. Es decir, la clasificación de las singularidades también es posible en este caso, pero mucho más complicada, y empeora al aumentar la dimensión: si en el caso real el número de formas normales aumenta con el cuadrado de la dimensión, en el caso p -ádico la relación es casi exponencial. Todos estos resultados aparecen en nuestro artículo (Crespo L. et al. 2025).

Un ejemplo fundamental de sistema integrable p -ádico es el modelo de Jaynes-Cummings que se estudia

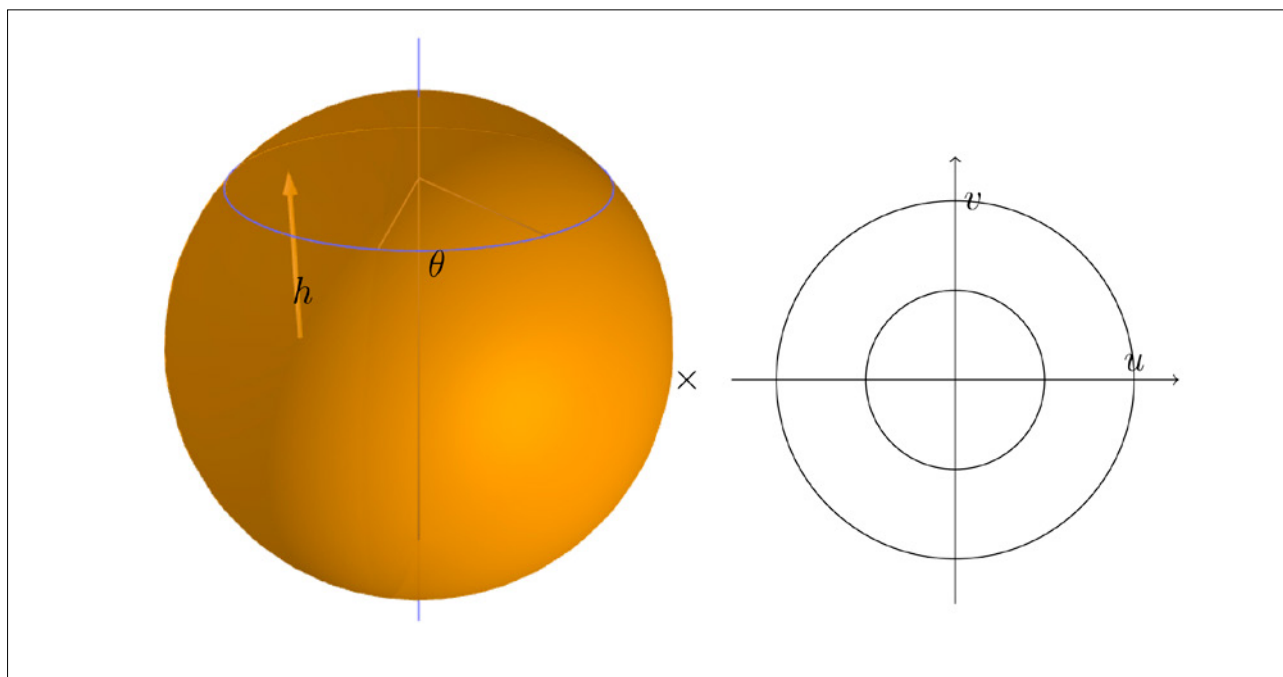


Figura 6. El modelo de Jaynes-Cummings (Jaynes E. T. et al. 1963).

en (Crespo L. et al. 2025) y que corresponde al acoplamiento de un spin y un oscilador como en la Figura 6.

Es importante que el lector sepa que hay un marcado contraste entre el uso generalizado que los números p -ádicos tienen en teoría de números (así como ciertas partes de la geometría algebraica), y la escasa utilización que, hasta ahora, han tenido en otras ramas de las matemáticas, como es el caso de la geometría simpléctica. Aunque los números p -ádicos puedan parecer unos objetos de aplicación muy restringida, creemos que su potencial para complementar otras áreas de las matemáticas es enorme. Por ejemplo, como contienen a los números racionales, y las mediciones de la física se hacen con números racionales, los p -ádicos nos permiten responder a la pregunta de cuando una propiedad depende de los coeficientes que se tomen, y cuando es estructural. En este artículo hemos visto que el teorema de no estrujamiento de Gromov no es, en este sentido, estructural.

En conclusión, la geometría simpléctica p -ádica es una nueva rama de la geometría, en gran medida sin explorar, que si bien permite obtener resultados análogos a los que conocemos de geometría simpléctica real, también puede comportarse de formas muy distintas, en ocasiones mucho más ricas que sus análogos reales.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Pilar Bayer conversaciones sobre el tema de este artículo que nos han ayudado a plasmar algunas de las ideas que contamos.

L. Crespo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación durante la preparación de este artículo, y Á. Pelayo ha sido financiado por la Fundación BBVA a través del Proyecto "From Integrability to Randomness in Symplectic and Quantum Geometry".

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Cannas da Silva, A. (2001). Lectures on Symplectic Geometry. Lecture Notes in Math., 1764, Springer-Verlag, Berlin.
2. Crespo, L. Pelayo, Á. (2025). The p -adic Jaynes-Cummings model in symplectic geometry. J. Nonlinear Sci. 35, artículo 66.

3. Crespo, L. Pelayo, Á. (2025). p -adic symplectic geometry of integrable systems and Weierstrass-Williamson theory I. arXiv:2501.14444.
4. Crespo, L. Pelayo, Á. (2026). Rigidity and flexibility in p -adic symplectic geometry. Rev. Mat. Complut.
5. Gouvea, F. Q. (1993). p -adic Numbers, Springer-Verlag.
6. Hofer, H., Zehnder, E. (1994). Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics, Birkhäuser.
7. Jaynes, E. T., Cummings, F. W. (1963). Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. Proc. IEEE 51(1), 89–109.
8. McDuff, D., Salamon, D. (2017). Introduction to Symplectic Topology. Oxf. Grad. Texts Math. Oxford University Press, Oxford.
9. Pelayo, Á., Vũ Ngọc, S. (2011). Symplectic theory of completely integrable. Hamiltonian systems. Bull. Amer. Math. Soc. 48(3), 409–455.

Si desea citar nuestro artículo:

Crespo, L. Pelayo, Á. Los p -ádicos: una nueva vía en geometría simpléctica. RACSG.2026;114(01):43-49 rac.2026.114.1.org03