# DISCURSOS

LEÍDOS ANTE LA

# REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

EN LA RECEPCIÓN PÚBLICA

DEL

## SR. D. VICENTE DE GARCINI Y PASTOR

el día 7 de Junio de 1908.

MADRID
IMPRENTA DE LA «GACETA DE MADRID»
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8
1908

DISCURSO

DEL

SR. D. VICENTE DE GARCINI Y PASTOR

## *Señores Académicos:*

Jamás cruzó mi pensamiento la idea de llegar á ser compañero vuestro, y tan seguro estoy de no merecerlo, que, si no fuera descortés corresponder á la merced con la censura, me apresuraría á declarar que os habéis equivocado de una manera lamentable al elegirme para compartir vuestras tareas. Por aquella última consideración callaría vuestro error, si no fuera ineficaz mi reserva en tal extremo, pues el deber, que me obliga á cumplir trámites reglamentarios, para no contestar al favor con el desvío, pondrá de manifiesto lo que no declare yo de una manera explícita y terminante.

Pero en el pecado llevaréis la penitencia, que no será pequeña, porque tendréis que sufrir ahora resignados la lectura de mi discurso, y más tarde, aunque yo ponga toda mi voluntad para excusarlo, os obligará también á ser mis guías y maestros en cuantas labores me encarguéis, resultando así que no ahorraréis trabajo alguno con mi cooperación, y que tal vez lo tengais mayor que en el caso de no contar con ella.

Por fortuna, debo esperar que tengais benevolencia suficiente para dirigirme, pues no sería justo negármela en el porvenir habiendo demostrado tanta en el pasado al llamarme á vuestro seno sin tener merecimientos, y tan fundadas esperanzas se afirman todavía más al ver entre vosotros algunos que tienen añeja costumbre de enseñarme y á quienes ha de parecer cosa natural continuar la misma tarea en lo sucesivo.

Los honores son tanto más agradecidos cuanto más intervino en su concesión la gracia y, por consiguiente, menos la justicia; y si todos aquellos á quienes antes otorgasteis el honor que ahora me habéis dispensado demostraron su gratitud en frases elocuentes, no es posible que encuentre yo palabras bastante expresivas para demostrar lo que debo sentir y siento en este instante. Y no creais cuanto llevo dicho mera cortesía en frases de ritual: creed que es sólo expresión exacta y sincera de mi convencimiento.

Gracias á vuestra benevolencia, y acatando vuestra invitación, debo ocupar la vacante del Ilmo. Sr. D. Manuel María de Azofra, porque si bien elegisteis para cubrirla á mi maestro y amigo queridísimo el Excmo. é Ilmo. señor D. Miguel Martínez de Campos, éste no llegó á tomar posesión de su cargo; podré, repito, ocupar aquella vacante, pero no me será posible llenar el vacío que dejaron en esta docta corporación aquellos ilustres varones.

De los méritos del Ilmo. Sr. D. Manuel María de Azofra hablaré poco, aunque sería necesario decir mucho si hubiera de encarecerlos todo lo que se merecen; una razón poderosa justifica mi parsimonia en este caso, y es que sólo conozco por referencias los méritos de mi antecesor y no puedo abrigar la confianza de cumplir debidamente la obligación de recordarlos.

Fué D. Manuel María de Azofra un amante apasionado de la ciencia, y apenas cumplidos veinte años obtuvo ya el título de Profesor de Matemáticas. Poco después le confirió el Gobierno la cátedra de Aritmética, Geometría, Mecánica y Delineación aplicadas á las Artes, de la ciudad de Valencia. Demostró en su profesorado un celo extraordinario: el establecimiento no contaba con elementos suficientes para la enseñanza, achaque muy antiguo en España, pero Azofra ponía á disposición de sus discípulos libros, modelos y aparatos de su pertenencia, que él adquiría ó mandaba construir á sus expensas. Publicó un *Curso industrial*, que daba perfectas enseñanzas con la sencillez indispensable para alumnos artesanos, que habían de tener una preparación científica extraordinariamente limitada.

Su labor cuotidiana de enseñar no le impidió estudiar al mismo tiempo la carrera de Arquitecto y alcanzar ese título en la Academia Nacional de San Carlos de Valencia; tampoco le impidió fundar en el Liceo de aquella capital una cátedra de Geodesia, que él mismo desempeñó, y prestar su valiosa cooperación en el establecimiento de Cajas de Ahorros y Bancos de socorros.

En 1843 vino á Madrid para desempeñar el cargo de Catedrático del Conservatorio de Artes, que dirigió también desde 1854. Simultaneó el ejercicio de aquellos cargos con el de Profesor de Mecánica en la Escuela de Arquitectura y con los de Consejero de Agricultura, Industria y Comercio, Vocal de la Junta consultiva de Aduanas y Aranceles y Vocal de la Comisión de pesas y medidas.

Por sus méritos extraordinarios, y no por servicios políticos, desempeñó la Dirección general de Agricultura, Industria y Comercio, y fué elegido Académico de la de Nobles Artes de San Fernando. Por ellos también fué designado para cubrir la vacante que dejó en esta Academia el eminente matemático D. Juan Cortázar.

Fatigado el Sr. Azofra de una vida tan laboriosa durante más de treinta y cinco años, solicitó y obtuvo su jubilación en 1866; sin embargo, no dejó de ocuparse en trabajos útiles, y sobre todo, en la terminación de su obra de mecánica, que no había podido concluir y publicar anteriormente, porque sus obligaciones oficiales absorbían todo el tiempo de que podía disponer.

La personalidad del Sr. Azofra queda bien definida diciendo que fué un hombre enamorado de la ciencia y del trabajo, á los que prestó siempre su excepcional inteligencia y todas sus energías con el mayor desinterés.

Si los méritos de Azofra bastan para justificar que me sienta yo incapaz de substituirle en esta docta corporación, al recordar que me llamasteis á mí, porque la muerte separó para siempre de nosotros á mi insigne maestro D. Miguel Martínez de Campos, que fué vuestro primer elegido, mis temores y mis angustias superan á todo cuanto podría expresar mi torpe lengua, y mi pequeñez se achica más y más.

No trataré de los méritos de Martínez de Campos mientras fué estudiante, sobre todo mientras fué alumno de la Escuela de Ingenieros de Caminos; que si alcanzó por ellos distinciones, que en aquel centro docente son excepcionales; si fué el primero de su promoción y obtuvo siempre la nota de sobresaliente, entre los números primeros puede haber muy distintas categorías. El alumno Martínez de Campos se destacaba entre los más eximios de todos ellos, y podía alternar, hablando sólo de alumnos de aquella Escuela, con los Echegaray, los Saavedra, los Morer, etc., es decir, con todos aquéllos que fueron dotados por el Supremo Hacedor de facultades que sólo se digna otorgar de cuando en cuando á algunas de sus criaturas.

Tampoco hablaré de los trabajos meritísimos que realizó como Ingeniero en poco más de dos años, mientras prestó el servicio ordinario de su profesión en la jefatura de Obras públicas de la provincia de Cáceres á las órdenes del Ingeniero Jefe D. Alejandro Millán, aunque desarrolló en tan pequeño lapso de tiempo una labor que podría compararse sin desventaja con la efectuada por cualquier otro Ingeniero de Caminos en toda su vida de subalterno.

No podían alcanzarse tales resultados sin desplegar una actividad capaz de comprometer la salud más firme. Los calores estivales del centro del día en un clima como aquél y las mayores perturbaciones atmosféricas, nunca fueron bastantes para obligar á Martínez de Campos á dejar para mañana la labor proyectada para hoy El abuso de trabajar en el campo y en el centro del día, cuando más recios eran los calores del verano, le ocasionaron una gravísima enfermedad.

Era época de esplendor para nuestra Escuela aquélla en que Martínez de Campos prestaba en Cáceres sus valiosos servicios; la dirigía D. Calixto Santa Cruz, y daban en ella las enseñanzas profesores eminentes, se anteponía el brillo y el prestigio de aquel centro á toda conveniencia personal, y eran destinados á la Escuela, casi á la fuerza, los Ingenieros de cualidades relevantes. Por eso fué nombrado Profesor de la misma Martínez de Campos, cuando apenas habían transcurrido tres años desde el día en que terminó en ella sus estudios.

De sus brillantes explicaciones sobre Mecánica racional, Construcción, Hidráulica, Conducción de aguas, Saneamientos, Canales y Máquinas, guardamos grata memoria todos los Ingenieros de Caminos que estudiamos la carrera dentro del período comprendido entre 1863 y 1886; porque si bien dejó de ser Profesor en algunas ocasiones, obligado por la incompatibilidad de las necesidades de una familia numerosa y las estrecheces económicas de cargo que tan escasa remuneración disfrutaba, era al poco tiempo solicitado de nuevo con tan vivas instancias, que apenas resuelta la necesidad del momento, volvía á ejercer el sacerdocio de la enseñanza con la asiduidad, con el entusiasmo y con la brillantez que siempre demostró.

La primera y más larga interrupción de sus labores en la Escuela de Caminos duró tres años. Ese mismo tiempo desempeñó en Puerto Rico el cargo de Inspector general de Obras públicas, y dejó, como recuerdo de su paso por aquella isla, el anteproyecto del puerto de la capital, el plan de alumbrado marítimo, el de carreteras y caminos vecinales y tres proyectos de puentes, todo obra personal suya.

El segundo período de su alejamiento temporal de la enseñanza fué muy corto. Por delicadeza y compañerismo no quiso aceptar excepciones á que tenía derecho y prefirió quedar en la precaria situación creada á sus compañeros por la reducción violenta y extraordinaria de las plantillas vigentes. El tercero apenas merece mención, duró poquísimo tiempo y la mayor parte de él siguió desempeñando gratuitamente la clase que entonces explicaba.

Tenían las enseñanzas de Martínez de Campos un sello especial de improvisación, porque aplicaba en cada instante su inteligencia superior á discurrir sobre la cuestión que se trataba; por eso á veces, sobre todo en los primeros años de su profesorado, producía en los alumnos alguna confusión, nacida de la dificultad que encontraban para colocarse de repente en puntos de vista inesperados; poco después, y dándose cuenta ya de que era necesario amoldarse á la inteligencia de los alumnos y no ir tan deprisa, aquel defecto desapareció, y Martínez de Campos fué maestro irreprochable.

Aunque fueron grandes sus méritos, fué mayor su modestia; en mi sentir, constituía su único defecto. Por eso no escribió ni publicó ningún trabajo; todos los suyos le parecían nimiedades. Seguro estoy de que si alguien hubiera recogido taquigráficamente sus palabras para publicarlas como propias, sólo al verlas escritas como ajenas le hubieran parecido dignas de estimación.

En Febrero de 1886 abandonó definitivamente la enseñanza y pasó á desempeñar el cargo de Consejero de Estado á que lo llevaron sus méritos relevantes. En 1890 aprobó en una sola convocatoria todas las asignaturas de la facultad de Derecho con nota de sobresaliente, porque, celoso en cumplimiento de su deber, se consideró obligado á estudiarlas por razón de su cargo. Ejerció después la abogacía con mayor lucimiento que provecho, porque su estrecha conciencia no le permitía defender á quien no tuviera de su parte la razón.

En la Dirección general de la Compañía de los Caminos de hierro de Madrid á Zaragoza y á Alicante demostró lo mucho que valía como Ingeniero, como letrado y como administrador. Las enfermedades le obligaron á renunciar ese cargo, y últimamente pertenecía al Comité de Dirección de aquella importante Empresa ferroviaria.

Fué Martínez de Campos diputado en varias legislaturas por distritos de la isla de Puerto Rico, en que había prestado tan buenos servicios durante su juventud, y obtuvo más tarde el nombramiento de Senador vitalicio. Su intervención en las tareas legislativas, sin ofrecer el brillo que suele alcanzar la de aquellos grandes oradores que acostumbran á intervenir en debates exclusivamente políticos, fué siempre tan modesta como acertada.

Aunque las dotes de inteligencia y de laboriosidad de Martínez de Campos fueron excepcionales, sus virtudes lo fueron más; su delicadeza y corrección eran extraordinarias; amante de su familia y de sus amigos, siempre estuvo dispuesto á sacrificarse por la una y por los otros; su resignación y su paciencia para sufrir crueles padecimientos físicos y morales no se desmintió jamás.

Y tócame explicar ahora un hecho que puede aparecer anómalo. ¿Cómo no correspondió Martínez de Campos á vuestra invitación? Yo me lo explico. Era, como he dicho, extraordinariamente modesto; sentiría en un principio algún temor de no acudir á ella bastante bien pertrechado; disfrutó siempre de poca salud, y la poca que tenía había de emplearla en labores inexcusables y diarias con asiduidad exagerada; á medida que el tiempo pasaba, el temor era más grande, la salud era menor y las obligaciones eran mayores; y más tarde, hace algunos años, cuando sólo podía utilizar en el trabajo su inteligencia siempre despierta y su palabra para aconsejar, porque había perdido la vista y las enfermedades minaban su existencia, era ya imposible que pensara en cooperar á los fines de esta institución.

Con lo dicho quedan cumplidos los únicos deberes gratos para mí en este instante: demostraros gratitud por el inmerecido honor que me habéis otorgado, y tributar justísimo homenaje á la memoria de mis antecesores.

***

Aquí daría por terminado mi trabajo, si la prescripción reglamentaria no fuese tan terminante; ella exige que os moleste todavía más con alguna disertación. Dos razones me decidieron á ser diligente en cumplir ese deber inexcusable: la primera, que no había de ofreceros en mi discurso novedad alguna, y por lo tanto, no tendría disculpa la demora; la segunda, que toco ya la sexta decena de años con no mucha salud, y cuando esto ocurre, suele llegar pronto la incapacidad más ó menos completa; si tardara en acudir á vuestra invitación, probablemente llegarían á coincidir las fechas de mi ingreso y de mi jubilación de hecho ó de derecho, impuesta por la edad y los achaques, y acaso llegara la segunda antes que la primera. Si esto último ocurriese, podría parecer que sólo para disfrutarlo acepté el honor que me otorgasteis, y como debo corresponder á él con mi trabajo en lo que mis fuerzas alcancen, es necesario que no tarde mucho en cumplir el primero de los deberes que me impuso vuestra elección.

Las dudas y vacilaciones en escoger el tema del discurso hacen que transcurra mucho tiempo sin comenzar á escribirlo; para no verme detenido por esa causa, decido consignar mis impresiones en busca del asunto sobre el cual diré lo indispensable para cumplir las fórmulas reglamentarias.

Hubiera disertado sobre las ideas que desarrolla Releaux en su "Cinemática" ó principios fundamentales de una teoría general de las "Máquinas", ideas que, simplificadas al subordinarlas á los teoremas fundamentales relativos al movimiento de sistemas indeformables, sirvieron de base á mi insigne maestro Martínez de Campos para redactar el programa de la clase de Máquinas un año antes de abandonar la Escuela.

Al desarrollar ese tema, hubiera cumplido mi gusto dedicando todo mi discurso á rendir homenaje á la memoria de aquel insigne profesor y amigo cariñoso; me lo vedan, sin embargo, dos consideraciones: una es, que me encargué de aquella clase para dar la enseñanza adoptando los puntos de vista por él escogidos, y otra, haberse impreso apuntes de esas lecciones que tomaron los alumnos, y que ya estuvieron sometidas á vuestro dictamen.

* * *

Por ser tema referente á mi profesión, por haber dedicado á él algún estudio y por su notoria actualidad, me hubiera inclinado á discutir los importantísimos problemas del aprovechamiento de las aguas públicas; pero dos ilustres compañeros los trataron en sus discursos de recepción en esta Academia y hube de abandonar ese tema, porque ni diría más de lo que ellos dijeron, ni lo diría tan bien como ellos.

Pensé luego que, dentro de este género de cuestiones, podría limitarme á tratar de las obras y procedimientos que pueden y deben emplearse para evitar en lo posible los daños que producen las aguas en determinadas ocasiones y circunstancias, asunto diferente del que trataron aquellos discursos. Y en verdad que el tema es interesante; porque si muchas y buenas razones justifican la intervención del Estado en las Obras públicas, entran más de lleno en la misión de los Gobiernos, y merecen preferencia especial las que procuran modificar el régimen de las aguas corrientes para conseguir disminución de daños que suelen ocasionar y aumento de beneficios, por la mayor facilidad de aprovecharlas.

Pero si existen caracteres diferenciales muy marcados entre las obras de defensa contra las inundaciones y las que se dirigen á facilitar el empleo de las aguas públicas en riegos y abastecimientos; si los *canales de descarga* y los *canales de riego* han de proyectarse de muy diferente manera; si los *pantanos reguladores*, de embalse accidental, y los *pantanos de riego*, de embalse permanente, han de obedecer á condiciones técnicas distintas; y si, por último, las dificultades de la explotación de unos y otros, son también muy desiguales, al fin y al cabo de pantanos, canales y encauzamientos tendría que ocuparme; habría, pues, bastantes analogías entre ambos temas, y resultaría, además, el elegido de un carácter técnico y administrativo muy marcado.

***

Pensé después que podría disertar sobre los principios y abstracciones en que se funda la Mecánica racional; sobre el concepto de la fuerza y de la masa; sobre la entidad llamada punto material; sobre el principio fundamental de la acción y de la reacción y el de la inercia; sobre la identidad de dirección de la fuerza y de la aceleración total del movimiento que produce; sobre la proporcionalidad de fuerzas y aceleraciones cuando actúan las primeras sobre puntos materiales de igual masa; en una palabra, sobre todo lo que constituye el fundamento de la estática y dinámica del punto, base á la vez de la estática y dinámica de los entes de razón llamados "sistema de puntos materiales". También abandoné ese tema por referirse á nociones propias de las primeras lecciones de un curso de Mecánica racional.

***

Recordé más tarde que, apenas salido de la niñez, y obligado por la necesidad, hube de aplicar las matemáticas á las operaciones financieras, y más particularmente á las que, además de estar regidas por la ley del interés compuesto, quedan sometidas á la determinación de probabilidades de sucesos que constituyen las condicionales de efectividad de los derechos y obligaciones respectivas de los contratantes. La afición que tenemos en el ocaso de la vida á los recuerdos de la niñez, lo poco que han estudiado estos asuntos los matemáticos españoles y el gran interés que tales cuestiones encierran desde el punto de vista social, me inclinan á elegir tales problemas como tema de mi discurso.

***

La ley de interés compuesto, una vez aceptada como buena, establece la condición de igualdad entre las obligaciones de las partes contratantes cuando ambas se evalúan en fecha igual, bien sea la de alguno de los vencimientos, bien otra cualquiera elegida arbitrariamente; por la razón fundamental de que valores idénticos en un mismo instante y que han de variar con el tiempo de idéntica manera, serán siempre iguales siendo coetáneos.

Y como en todas las operaciones financieras ofrece una de las partes cantidades de numerario que pagará en fechas determinadas, á cambio de otras cantidades de dinero que le son entregadas ú ofrecidas por la otra parte para fechas diferentes, claro es que se obtiene la ecuación del problema al igualar las sumas de valores presentes de los respectivos compromisos. La clásica fórmula $c = c_0 (1 + r)^n$, de todos conocida, expresa la ley de variación del capital con el tiempo.

El primer estudio que puede hacerse es el relativo á los diferentes valores que alcanza el mismo capital inicial al cabo de igual tiempo, cuando á la vez se subdividen, en número idéntico de partes iguales, el plazo de composición del rédito con el capital, y el tipo del interés.

Para hacer más notoria esa ley puedo deciros, por ejemplo, que á los veinte años, un capital de 1 000 pesetas, al 6 por 100 anual, se convierte en otro de 3 207 pesetas; al fin de ochenta trimestres, y al 1 $^1/_2$ trimestral, llega á valer 3 290,66; al fin de los siete mil trescientos días que tienen los veinte años, y al $\frac{6}{365}$ por 100 de rédito diario, llegarán á valer las 1 000 pesetas 3 320,07; pero si continuamos componiendo los intereses por minutos ó segundos, el valor que llegue á tomar dicho capital, al fin de aquellos veinte años, no podrá llegar á la cifra de 3 320 pesetas 12 céntimos, límite de la expresión $1\,000 \left(1 + \frac{0,06}{n}\right)^{20n}$, cuando $n$ crece indefinidamente.

He dicho todo esto para hacer notar que no es lo mismo colocar el dinero á interés compuesto al 6 por 100 anual, al

3 por 100 semestral, al 1/2 por 100 mensual, etc., etc,; pero la influencia de la pequeñez del tipo del interés, aplicado á períodos de tiempo *que decrezcan en la misma proporción*, tiene mucha influencia en las primeras subdivisiones y muy poca cuando se llevan muy lejos.

No es igual, como hemos visto, componer los intereses por años, al tipo $r$, que componerlos por fracciones de año y á un tipo que sea igual fracción de $r$. Fácilmente se demuestra que, componiendo los intereses anualmente al tipo $r$, y componiéndolos en fracciones $\frac{1}{n}$ de año, sólo se obtendrán valores iguales y coetáneos para un mismo capital inicial, cuando sea el tipo de interés para el segundo caso $\frac{r'}{n}$, y cuando entre $r'$ y $r$ exista la relación siguiente:

$$r' = n\left[(1+r)^{\frac{1}{n}} - 1\right].$$

Del mismo modo se demuestra que, componiendo los intereses anualmente al tipo $r$ y componiéndolos por múltiplos $m$ de años, sólo se obtendrán valores iguales y coetáneos para un mismo capital inicial, cuando el tipo de interés para el segundo caso sea $mr'$, estando ligadas $r$ y $r'$ por la relación siguiente:

$$r' = \frac{(1+r)^m - 1}{m}.$$

El valor que haya de adquirir un capital dado $C_0$ al fin del tiempo $\frac{m}{n}$ de año, y al tipo $r$ de interés anual, podrá calcularse, por consiguiente, dando al tiempo el valor entero $m$, con tal de substituir $r$ por $\frac{r'}{n}$ tipo de interés para el enésimo de año, equivalente al $r$ anual. De esta manera se establece el carácter general de la fórmula clásica para tiempos fraccionarios. Demostrada la generalidad de dicha fórmula, no está justificado que se la aplique sólo á valores enteros del tiempo y emplear otra diferente para valores fraccionarios.

La composición de intereses podría hacerse en tiempos infinitamente pequeños expresados por $\frac{1}{n}$ del año, siendo $n$ un número indefinidamente creciente. Cuando $n$ se hace infinitamente grande y el período infinitamente corto, el valor de $r'$ correspondiente al $r$ anual es lo que se llama *rédito anual en la composición continua é infinitesimal*. Como $C\left(1+\frac{r'}{n}\right)^{mn}$ ha de ser igual á $C\,(1+r)^m$, cuando $n$ es infinito, el valor de $r'$ estará enlazado con el de $r$, en este caso límite, por la relación $e^{r'}=(1+r)$ ó $r'=l\,(1+r)$.

Todas las fórmulas en que aparezcan potencias $(1+r)$ pueden substituirse por potencias iguales de $e^{r'}$, y de este modo se obtienen fórmulas en apariencia muy diferentes de las que suelen ofrecer los libros elementales que tratan de esas cuestiones, pero idénticas en el fondo, y que son de gran utilidad en muchas ocasiones.

***

No entraré en detalles acerca de los problemas prácticos á que dan lugar los descuentos; para ellos se emplean las fórmulas llamadas de descuento á interés simple, á interés compuesto y comercial. El problema se reduce á calcular el valor presente de una promesa de pago de cierta cantidad para tiempo futuro, dentro de la ley general del interés compuesto, aplicable, como hemos visto, á tiempos enteros ó fraccionarios. Se resolverá dando al exponente el valor negativo del tiempo que ha de transcurrir hasta que se haga efectiva la promesa. La diferencia entre la cantidad que se paga al contado y la prometida, ó valor nominal del documento, es la diferencia de ordenadas de la curva de valores del capital, y se llama descuento á interés compuesto.

No por ser más fácil el cálculo, sino por ser más beneficioso para el que paga de presente, que generalmente es el banquero, se substituye la ley general ó descuento á interés compuesto por el descuento á interés simple; éste da la misma cifra si el plazo es exactamente un año, pero da una cifra mayor cuando el plazo es inferior, como sucede casi siempre en la práctica del descuento de efectos comerciales. Y tampoco suele emplearse esa ley del interés simple, sino otra llamada del descuento comercial, que favorece al banquero todavía más.

Desde el punto de vista puramente matemático no tienen razón de ser tales excepciones.

* * *

El problema más general no consiste en determinar el valor presente de una sola promesa de pago; por lo común pueden ser muchos los vencimientos y en épocas venideras diferentes; pero claro es que, sabiendo calcular el valor de cada uno, bastará sumar todos ellos pàra tener el que corresponde á la totalidad de las promesas. Cuando las cantidades ofrecidas para cada vencimiento son iguales, y los vencimientos equidistantes, forman lo que se llama una *renta*, que podrá ser perpetua é inmediata, perpetua pero diferida, inmediata y temporal, ó diferida y temporal.

Los valores presentes de todos ellos son siempre iguales á cierta suma de términos de una progresión por cociente, cuya razón es una potencia negativa, entera ó fraccionaria, del binomio formado por la unidad y el tipo de interés correspondiente al período de tiempo de la composición de réditos, el cual á su vez podrá ser igual ó diferente del plazo que separa dos vencimientos sucesivos de la renta.

Para obtener la fórmula más general posible, en la que estén comprendidos todos los casos particulares, llamaremos:

*a* al importe de la cuota constante pagadera á cada vencimiento.
*n* al número de cuotas separadas por vencimientos equidistantes que constituyen la renta.
$t_1$ al lapso de tiempo que corresponde á la composición de los réditos con el capital.
*r* al tipo de interés correspondiente al lapso de tiempo $t_1$.
$t_2$ al lapso de tiempo constante que separa dos vencimientos consecutivos de cuotas de renta.
$t_3$ al de tiempo que ha de transcurrir hasta el vencimiento de la primera cuota.
*c* á la relación de $t_2$ á $t_1$.
*k* á la diferencia $\frac{t_3}{t_1} - \frac{t_2}{t_1}$; si *k* es positivo, se dice que la renta es diferida; si *k* es negativo, que es anticipada; si *k* es nula, que es inmediata; cuando *n* es finito, la renta es temporal; cuando *n* es infinito, que es perpetua.

La fórmula del valor presente de cualquier renta será:

$$V = \frac{a}{(1+r)^k}\left(\frac{1}{(1+r)^c - 1}\right)\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^{nc}}\right)$$

Si es inmediata, *k* será nula y la fórmula se convierte

en $V = \frac{a}{(1+r)^c - 1}\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^{nc}}\right\}$, si además $t_2 = t_1$, que es el caso de las rentas anuales ordinarias cuando la composición de réditos es anual, se convertirá en

$$V = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right),$$

y por último, si además fuera perpetua, en $V = \frac{a}{r}$.

En las fórmulas relativas á las rentas intervienen cuatro variables: la cuantía de cada pago, supuesta igual para todos ellos; el número de pagos; el tipo del interés ó rédito anual de la unidad, y el valor presente de la renta. De esas cuatro variables serán datos tres y podrá encontrarse el valor de la desconocida.

Si la incógnita es el tipo del interés, su determinación ofrece alguna dificultad por ser de grado superior la ecuación que ha de resolverse.

Bayli, distinguido matemático inglés, consiguió establecer una fórmula para encontrar directamente la solución del problema sin acudir á los procedimientos generales del Algebra, que resultarían demasiado laboriosos. En el caso de ser el rédito anual de la unidad superior á seis centésimas, la fórmula de Bayli no da resultados suficientemente aproximados; pero Charlón estableció otras que permiten encontrar un nuevo valor mucho más cercano al verdadero en función del que proporciona directamente la fórmula de Bayli.

La fórmula de Bayli para el caso de rentas inmediatas ordinarias de $n$ términos y en las que los vencimientos de las cuotas están separados por el lapso de tiempo que se toma como base para la composición de los réditos con el capital y para la definición del tipo del interés, es la siguiente:

$$r' = h \cdot \frac{1 - \frac{n-1}{12}h}{1 - \frac{n-1}{6}h};$$

en ella es: $h = \left(\frac{v}{a\,n}\right)^{-\frac{2}{n-1}} - 1$; $a$ la cuota anual, $n$ el número de cuotas que forma la renta; $V$ el valor presente, y $r'$ el tipo *aproximado* del interés.

Para las rentas diferidas por $d$ años, y de $n$ cuotas iguales á $a$, llamando $V_d$ su valor presente, la fórmula de Bayli, en las mismas hipótesis del caso anterior, sería:

$$r' = h\,\frac{12\,(2\,d + n + 1) - h\,(n^2 - 1)}{12(2\,d + n + 1) - 2\,h(n^2 - 1)},$$

siendo

$$h = \left(\frac{V_d}{n\,a}\right)^{-\frac{2}{2\,d + n + 1}} - 1;$$

la de Charlón sería para el primer caso:

$$r = r' + \frac{1 - (1 + r')^{-n} - \dfrac{r'\,V}{a}}{\dfrac{V}{a} - n\,(1 + r')^{-(n+1)}}$$

y para el segundo:

$$r = r' + \frac{(1 + r')^{-d} - (1 + r')^{-(d+n)} - \dfrac{V_d\,r'}{a}}{\dfrac{V_d}{a} + d(1 + r')^{-(d+1)} - (n + d)\,(1 + r')^{-(d+n+1)}}$$

* * *

La fórmula que da el valor presente de una renta inmediata y temporal, en la que cada vencimiento es, por ejemplo, anual, y anual también la composición de intereses al tipo adoptado, puede escribirse descompuesta en dos sumandos; es uno de ellos, el valor presente de la totalidad de los pagos multiplicado por el tipo de interés, y es el otro, el valor presente de un capital idéntico al importe de cada cuota, pagadero al vencimiento de la última anualidad.

Si hubiéramos de pagar sólo anualmente los intereses de capital que se entregó de presente, como valor de la renta, deberíamos satisfacer lo que vale el primer sumando; el segundo corresponderá al reintegro del capital, y, por lo mismo, debe ser tal, que, colocándolo cada año á interés compuesto y al tipo adoptado, formarían todas esas entregas, al vencimiento de la última anualidad, un capital idéntico al que se entregó, lo que permitiría reintegrarle entonces de una vez. Es bien fácil comprobar esa condición.

Pero si en vez de hacer lo que hemos dicho, entregamos al acreedor toda la *renta*, reintegramos cada año una porción del capital y cada vez que se paga una anualidad sólo quedará en pie una parte de la deuda, que llamaremos *resto*. El valor del resto será el de una renta inmediata de igual cuota y de tantas anualidades como sean las que no vencieron todavía. Lo que se amortiza al pagar la sexta anualidad, por ejemplo, será la diferencia entre los restos quinto y sexto.

De esa manera podremos encontrar la porción de capital que cada año se amortiza, y formar el cuadro de amortización de obligaciones cuando el préstamo se repartió en títulos iguales y se destinó al pago de intereses y amortización de todos ellos la renta constante inmediata y temporal que resultó necesaria.

La fórmula correspondiente sería:

$$R_{p-1} - R_p = \frac{a}{(1+r)^{n-p+1}};$$

y dando á $p$ los valores sucesivos desde uno hasta $n$, tendremos las amortizaciones parciales que á cada año corresponden.

Aunque una operación financiera se contrate ó se calcule sobre la base de un tipo de interés y con arreglo á él se establezca el valor de cada título, tanto para el cobro de intereses como para el reintegro, el mercado fija en realidad el valor presente, quedando como nominal el que sirvió de base al cálculo de la anualidad ó renta que ha de pagar de todos modos la entidad que negoció el préstamo.

Siempre que el valor de emisión de los títulos es diferente del valor nominal, surge el problema de hallar el tipo efectivo de interés á que realmente resulta efectuada la operación, problema de que ya me ocupé.

Este mismo problema puede resolverse en cualquier instante, conociendo la *edad* de las obligaciones y, por tanto, las anualidades futuras y el número de obligaciones que subsistan en circulación como partícipes en el valor de aquéllas. Claro es que nos darán también el valor presente, que será el de su cotización en el mercado, ó el aceptado en la transacción que sirva de base á la determinación del tipo de interés.

***

Los problemas de arbitrajes de valores exigen la comparación de los precios que deberían tener obligaciones ó títulos de empréstitos diferentes para que el dinero produzca un mismo tipo de interés. Para ello se calcula: primero, el tipo de interés que corresponde, según la cotización que alcancen y la edad que tengan determinados títulos que se toman como término de comparación, aceptando su valor efectivo como valor matemático, y segundo, el valor presente ó *cotización matemática*, que corresponde á los otros títulos ú obligaciones, adoptando para el cálculo el tipo de interés antes encontrado. Este valor matemático de los segundos títulos podrá resultar igual, mayor ó menor que su valor corriente en el mercado. Si es igual, hay ***paridad*** entre las deudas que se comparan; si es menor, se dice que los segundos títulos están *preferidos*, y si mayor, que están *postergados*. Todo ello, claro está, relativamente á los primeros que se tomaron como tipo de comparación.

Si la cuantía del rédito no comprendiese una apreciación relacionada con la mayor ó menor seguridad de que se cumplan ó no los ofrecimientos de pago, no habría razón para la preferencia ó postergación, y debería existir siempre paridad entre toda clase de títulos; pero de todos modos, en virtud de los cálculos á que me acabo de referir, podrá verse cuál es la importancia de la preferencia ó postergación que el mercado otorga á unos y otros, y aceptarla ó no el tenedor, según sus apreciaciones personales, eligiendo en definitiva los que en su concepto estén menos apreciados de lo que merecen.

Aunque en todo lo que llevo dicho se han supuesto las rentas anuales y que anualmente se hace la composición de intereses, claro es que podrá ser menor el plazo que separa cada pago de la renta con tal de ser iguales todos esos plazos, y podrá efectuarse la composición de intereses en períodos menores de un año, iguales ó diferentes del período que separe dos pagos sucesivos de la renta. Las fórmulas se complican un poco, sobre todo en este último caso, pero en definitiva, y como ya hicimos ver, el valor presente de la renta se obtiene sumando los términos de una progresión.

*
* *

No sucede lo mismo cuando no es constante la cuota de la renta, ó no lo es el intervalo de tiempo que separa el vencimiento de dos cuotas sucesivas. El problema se plantea siempre de idéntica manera, pero las fórmulas á que podremos llegar en algunos casos, son muy diferentes. Si no hay ley ninguna que rija la cuantía de las cuotas y los lapsos de tiempo que separan cada dos vencimientos consecutivos, no hay más remedio que calcular aisladamente el valor actual de cada término y sumarlos todos; pero si existe alguna ley que los rija, lo que hasta ahora fueron progresiones se convierten en series, que á veces pueden reducirse á fórmulas sumatorias que evitan cálculos penosos.

No entraré en el examen de la infinidad de problemas que en tal concepto podrían plantearse; sólo me ocuparé breves instantes de las rentas uniformes con relación al tiempo y cuya cuota ó anualidad varía según leyes sencillas.

*Cuando el importe de las anualidades es constante* podemos llamar á la renta *paralela,* porque la ley de variación de su cuota con el tiempo estaría representada por una paralela al eje de los tiempos. Si la cuota anual creciese ó decreciese con uniformidad, estaría representada por una oblícua respecto del eje de los tiempos, y por lo mismo podríamos llamarla *lineal,* conteniendo dicha cuota dos argumentos ó coeficientes: el valor $a$ de la primera y su incremento representado por $b$.

Los términos que forman en este caso el valor presente de una renta de $n$ cuotas serían de la forma $\dfrac{a \pm pb}{(1+r)^{p+1}}$, y dicho valor sería igual á la suma de términos sucesivos de esta serie entre los valores de $p$, cero y $p-1$. Dicha serie puede sumarse por descomposición, y la fórmula de $V$ será:

$$V = \Sigma_{p=0}^{p=n-1} \frac{a \pm pb}{(1+r)^{p+1}} =$$

$$= \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) \pm \frac{b}{r^2}\left(1 - \frac{1+nr}{(1+r)^n}\right).$$

Esta fórmula puede ponerse bajo la forma siguiente:

$$a = Vr + \frac{a}{(1+r)^n} \mp \frac{b}{r}\left(1 - \frac{1+nr}{(1+r)^n}\right).$$

Si, como sucede muchas veces, el mismo capital $V$ que se entrega es la única garantía ofrecida por el que le recibe y se obliga á pagar la renta equivalente, y si además, por ser esa renta de cuota creciente, es la primera anualidad la más pequeña de todas, el valor de $a$ debe valer, cuando menos, los intereses del capital representados por $Vr$, y por lo mismo debe ser mayor que cero la suma algebraica de las otras dos.

De la condición $\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{r}\left[1 - \frac{1+nr}{(1+r)^n}\right] > 0$

deducimos:

$$b < \frac{ar}{(1+r)^n - [1+nr]};$$

por lo mismo podremos igualar $b$ á la indicada fracción multiplicada por $\mu$, siendo $\mu$ un numeral comprendido entre cero y la unidad. Si en la fórmula general de $V$, reemplazamos $b$ por ese valor, y simplificamos la expresión que resulta, llegamos á la siguiente:

$$V = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) + \frac{\mu}{r}\,\frac{a}{(1+r)^n}.$$

Con la renta de cuota mínima $a$, se puede levantar un empréstito de valor presente $\frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$, luego en el caso de no tener otra garantía que el mismo capital que se ha de recibir, el mayor empréstito á que puede aspirarse, obligándose á pagar rentas lineales crecientes, sólo podrá superar al que podría obtenerse á cambio de una renta constante, de cuota igual á la mínima, en la cantidad $\frac{a}{r(1+r)^n}$.

Dando á $\mu$ el valor máximo igual á la unidad, la forma de $V$ sería:

$$V = \frac{a}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] + \frac{a}{r}\cdot\frac{1}{(1+r)^n},$$

obtenida dando á $b$ el valor límite

$$b = \frac{ar}{(1+r)^n - (1+nr)}.$$

Si en la última fórmula de $V$, llamamos $\lambda$ al cociente de dividir el segundo sumando por el primero, encontraremos

$$\lambda = \frac{1}{(1+r)^n - 1}.$$

Se puede determinar el tipo de interés que habría de exigir la posibilidad de conseguir determinado valor numérico para $\lambda$, con una renta lineal creciente de $n$ cuotas; ese tipo sería:

$$r = 1 - \sqrt[n]{\frac{1+\lambda}{\lambda}}.$$

Si el tipo de interés fuera dato, y quisiéramos encontrar cuántos términos podrían formar una renta de aquella clase, para que fuera posible conseguir un valor de $\lambda$ escogido de antemano, el valor de $n$ vendría dado por la fórmula:

$$n = \frac{\log.\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)}{\log.(1+r)}.$$

En todos estos casos, por haber dado á $\mu$ el valor uno, habremos impuesto la condición de que la primera cuota $a$ sea exactamente igual al importe del interés anual del capital recibido, y que la amortización comienza desde la segunda anualidad.

En la fórmula general de esta clase de rentas intervienen cinco variables. De ellas dos corresponden á la ley que define completamente todas las cuotas anuales. Tomando arbitrario uno de los coeficientes, ó estableciendo relación entre los dos que definen aquellas últimas, pueden resolverse en esta clase de rentas los mismos problemas que en las paralelas.

Cuando es la incógnita uno de aquellos coeficientes, ó cuando lo es el valor presente de la renta, la solución es muy fácil.

Sin embargo, en este último caso puede surgir un problema interesante. Si fueron escogidos arbitrariamente el importe de la primera cuota, su crecimiento anual, el tipo del interés y el número de las cuotas, y si buscado el valor presente de la renta, el rédito anual que le correspondería superase al valor de la primera anualidad, resultaría que en vez de irse amortizando el préstamo la deuda crecería en los primeros años; habría, digámoslo así, una amortización negativa, que se haría positiva más tarde. Aun suponiendo que el valor presente de lo que se entrega no fuera fungible y pudiera responder al cumplimiento del pacto, habría de exigirse otra especial garantía para el incremento máximo que podía alcanzar la deuda. El problema, que es interesante, tendría, y ha tenido aplicación, al caso de convertirse un colono en propietario mediante el compromiso de pago de una renta de cuota creciente, pero á condición de efectuar antes á su costa, ó con su trabajo, obras ó construcciones en el inmueble bastantes á garantizar el déficit inicial de la renta en los primeros años.

La determinación del importe mínimo de aquella garantía especial, puede hacerse de la manera siguiente. El valor de la deuda, después del pago de cada cuota, será siempre el que tiene la renta inmediata pendiente de pago. Cuando cesa de haber aquel desiquilibrio, es decir, cuando la amortización ha de pasar de negativa á positiva, será ya la anualidad suficiente para pagar el interés y comenzar la amortización ó la disminución paulatina de la deuda. Supongamos que esto ocurre después de pagada la cuota $K$. Si conociéramos ese número, la garantía debiera ser $R_k - r$.

Pero el resto $R_k$ tendrá por expresión:

$$R_k = \frac{a+Kb}{r}\left(1-\frac{1}{(1+r)^{u-k}}\right)+\frac{b^2}{r^2}\left(1-\frac{1+(n-K)r}{(1+r)^{n-k}}\right).$$

Aplicando á esta fórmula los procedimientos que apliqué á la de $V$, para establecer que la primera cuota $a+kb$ sea por lo menos igual á $R_k r$, obtendríamos una ecuación que nos dará el valor de $K$. Substituyendo la parte entera del valor de $K$ en la fórmula de $R_k$ y restando $V$ del resultado, tendremos el importe de la garantía necesaria.

Cuando la incógnita es el número de cuotas que deban formar la renta, la solución no es fácil. En el caso de rentas paralelas, era la incógnita un exponente y se reducía fácilmente la ecuación exponencial á ordinaria y de primer grado, tomando logaritmos. En el que ahora examino, aparece la incógnita á la vez como exponente y formando parte de un binomio algebraico; pero como el número de cuotas ha de ser entero en la práctica, lo más cómodo será acudir á procedimientos gráficos para encontrar su valor.

Si la incógnita fuese el tipo del interés no serían aplicables á estas rentas las fórmulas de Bayli y de Charlón, que antes cité; sin embargo, podríamos hallar también para este caso fórmulas que dieran un primer valor bastante aproximado, y acercarnos todavía más al verdadero por el método de Newton.

Las rentas de anualidad creciente ó decreciente con uniformidad, puede tener aplicación útil en muchos casos. Cuando se trata de empréstitos destinados á la cooperación en ciertas industrias, como, por ejemplo, la de transportes y la de riegos, en las que generalmente no se alcanzan en los primeros años los productos que llegan á conseguirse pasado cierto tiempo, resultará más cómodo y menos arriesgado servir los intereses y la amortización por medio de una renta de cuota anual creciente. Lo contrario deberá hacerse cuando los recursos del deudor hayan de disminuir conforme transcurra el tiempo.

Podría ocuparme en el estudio de otras rentas complejas; de todas ellas sólo mencionaré, sin entrar en detalles, las uniformes en cuanto á los vencimientos, y de cuotas variables según la ley parabólica.

Por ejemplo, en las de segundo grado, el término general de la serie que da su valor actual será:

$$\frac{a + (p-1)b + (p-1)(p-2)c}{(1+r)^p},$$

y el valor presente de la renta es:

$$V = \Sigma_o^n \frac{[a + (p-1)b + (p-1)(p-2)c]}{(1+r)^p}$$

Esta serie puede también sumarse por descomposición, y la fórmula que da el valor de $V$ será:

$$V = \frac{a}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] + \frac{b}{r^2}\left[1 - \frac{1+nr}{(1+r)^n}\right] +$$

$$+ 1 . 2 . \frac{c}{r^3}\left[1 - \frac{1 + nr + \frac{n(n-1)}{1 . 2} r^2}{[1+r]^n}\right]$$

Bien clara se ve la ley general, y puede demostrarse que la renta anual parabólica de grado $p$ tendrá por fórmula:

$$V = \frac{a}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] + \frac{b}{r^2}\left[1 - \frac{1+nr}{(1+r)^n}\right] +$$

$$+ 1.2\frac{c^3}{r^3}\left[1 - \frac{1 + nr + \frac{n(n-1)}{1.2}r^2}{(1+r)^n}\right] +$$

$$+ \ldots 12 \ldots p\frac{k}{r^{p+1}}\left[1 - \frac{1 + nr + \frac{n(n-1)\ldots(n-p-1)}{12\ldots p}r^p}{(1+r)^n}\right]$$

Las rentas parabólicas de diferentes grados (siempre el grado es menor que el número de cuotas), introducen en la fórmula general nuevas variables; de ellas se relacionan con la ley de variación de la cuota tantos coeficientes, más uno, como unidades tenga el grado de la ley parabólica adoptada. Esto nos proporciona medios de establecer ecuaciones entre mencionados coeficientes para conseguir que se cumplan determinadas condiciones entre algunos de los valores particulares de cada anualidad.

Acerca de esta clase de rentas de cuota variable, efectuó Lecocq estudios muy curiosos. Fué causa de tales estudios el problema planteado para conseguir que los colonos de Argelia pagaran de una manera cómoda y fácil el importe del capital que se les entregaba al ponerlos en posesión de terrenos y edificios que habían de ser de su exclusiva propiedad, si bien quedaban afectos á responder del pago de las anualidades que se comprometían á satisfacer.

***

La ignorancia de esta rama de las matemáticas está por desgracia bastante generalizada entre los funcionarios de la Administración pública, por lo mismo, los encargados de liquidar los derechos de traslación de dominio han de resolver caprichosamente problemas prácticos que suelen presentarse. Sea, por ejemplo, el siguiente: un testador lega á determinada persona la nuda-propiedad de algunos títulos de obligaciones de un empréstito determinado y á otra persona diferente el usufructo. Claro es que el conjunto de ambos derechos estará representado por el valor nominal de los títulos multiplicado por la fracción correspondiente al precio de cotización oficial en el día del fallecimiento del testador; hasta aquí suelen llegar los conocimientos de los burócratas. ¿Pero qué parte de ese último valor corresponde á la nuda-propiedad y qué parte al usufructo para poder aplicar á cada interesado la tarifa del impuesto que le corresponda? Eso ya no suelen saberlo, y sin embargo, las fórmulas de que me ocupé permiten averiguarlo.

Lo primero que debe hacerse, es calcular el tipo real del interés, teniendo en cuenta la cotización y edad de las obligaciones. La fórmula correspondiente será

$$p\,R_m = \frac{a}{r'}\left(1 - \frac{1}{(1+r')^{n-m}}\right),$$

en la cual $p$ es la fracción por la que ha de multiplicarse el valor nominal para obtener el efectivo del mercado; $a$ la cuota fija del empréstito; $R_m$ el resto emésimo; siendo $m$ la edad de las obligaciones, y $r'$ el tipo efectivo del interés.

Ahora bien; el derecho de la nuda-propiedad es cobrar el valor de los títulos que se amorticen; el del usufructuario cobrar los cupones de interés.

El valor presente de los derechos de la nuda-propiedad será

$$\sum_1^{n-m} \frac{S_{m+k}}{(1+r')^k},$$

llamado $S_{m+k}$ la porción de la cuota $m+k$ que ha de emplearse en amortización y $r'$ el tipo de interés efectivo antes calculado. Determinando previamente $r'$ por la primera de aquellas fórmulas; sustituyéndole en la segunda; poniendo en ésta, en vez de $S_{m+k}$, su valor $\frac{a}{(1+r)^{n+1-(m+k)}}$; llamando para simplificar $i$ á la suma $r+1$, y $i'$ á la suma $r'+1$, y designando por $A$ el valor de la nuda-propiedad de todos los títulos vivos del empréstito, resultará

$$A = \Sigma_1^{n-m} \frac{a}{i^{n+1-(m+k)} i'^{k}} = \frac{\frac{1}{i'^{n-m}} - \frac{1}{i^{n-m}}}{i-i'} a.$$

Calculado así $A$, valor presente de la nuda-propiedad de todas las obligaciones vivas, una sencilla proporción basta para determinar el que tiene la nuda-propiedad de los títulos heredados; la diferencia entre el valor total y el de la nuda-propiedad de aquellos títulos daría el que corresponde á los derechos del usufructuario.

Como véis, ofrece el tema amplios horizontes, y he de omitir en obsequio á la brevedad toda clase de consideraciones acerca de los problemas financieros en que interviene el cálculo de probabilidades *á priori*, como sucede cuando se trata de fijar en cualquier instante, y á determinado tipo de interés, el valor de obligaciones de cierta ***edad***, conociendo la ley de amortización, y las cantidades eventuales que, por sorteo, y en determinadas épocas, se conceden á cierto número de títulos, no amortizados todavía.

***

Prescindiendo ahora de fórmulas y de ecuaciones, séame lícito señalar lo absurda que resulta la ley del interés compuesto á un tipo de rédito constante, que no puede ni debe aceptarse para plazos demasiado largos. Si el valor del capital ha de crecer con el tiempo conforme á la función exponencial, tomará valores enormes para los de la variable suficientemente grandes.

Recuerdo haber leído una divertida disquisición acerca del valor que hoy representaría un modesto centimillo prestado por nuestro padre Adán á interés compuesto. El articulista trataba de contar en oro aquel valor, suponiendo que desde el día en que Adán prestó el centimillo hubieran transcurrido hasta la fecha 6.000 años.

Para no llegar á un número enorme de monedas, imposible de contar, buscaba el tamaño de la que fuera apropiada para el caso. Esferas macizas de oro del tamaño de nuestro planeta resultaban monedillas despreciables para el objeto, y en contar aquel capital, con aquella unidad, se tardaría más tiempo que en contar en las más ínfimas monedas la fortuna reunida por todos los millonarios de la tierra.

Abandonando luego este aspecto de la cuestión, hacía el articulista peregrinas é ingeniosas consideraciones sobre la situación del *heredero* de aquel capital y el resto de la *humanidad*, suponiendo que *ésta hubiera de pagar mancomunadamente* la suma que al primero se debía.

El absurdo de la ley del interés compuesto es evidente; la matemática, ciencia completamente exacta, en lo que hace relación á las consecuencias deducidas de las premisas que se le dan como base, ofrece demostración palmaria del absurdo de tales premisas.

Por eso dice el vulgo que los números demuestran los mayores absurdos, y en cierto modo tiene razón; porque si las bases de cálculo, es decir, las leyes que aquél ha de utilizar, y en cuya determinación no intervino, son absurdas en su esencia, ó *en la generalidad que indebidamente se les atribuya*, la matemática, mediante consecuencias legítimas de tales hipótesis, llega á establecer absurdos evidentes.

En este caso, por ejemplo, podrá cumplirse la ley del interés compuesto en plazos cortos; pero no cabe aceptar la permanencia *indefinida* del tipo de interés, porque el mercado fija en cada instante la cuantía de aquél, según sea la masa de capitales disponibles; esta masa varía con el ahorro social; éste influye á su vez en el crecimiento ó disminución del tipo de interés, y cuando dicho tipo crece ó disminuye, hace más ó menos *necesario* el ahorro, y por consiguiente, más ó menos *ventajoso* para quien lo practica; y no se practicará cuando no resulte ventajoso. De todo ello se deduce, que si obcecadamente persistiera el ahorro, y pudiera persistir, hasta crecer los capitales con arreglo á la ley del interés compuesto en plazos extremadamente largos, nadie los utilizaría porque habrían perdido ya toda su eficacia. Por eso el distinguido matemático Eugenio Catalán propuso reemplazar la fórmula clásica del interés compuesto por otra, que no presentara grandes cambios respecto de la usual y corriente en los primeros años, y que no resultara antisocial é injusta en aquellos contratos que perduran ó toman por cualquier causa cierto carácter de permanencia.

La fórmula que da el valor de un capital $a$ al cabo de $n$ años, según la ley ideada por Catalán, es:

$$A = a\left[1 + p\left[e - \left(1 + \frac{n}{100}\right)^{\frac{100}{n}}\right]\right].$$

En esta fórmula $n$ es el tiempo, variable independiente; $a$ el valor inicial para $n = 0$; $A$ el valor del capital al fin del tiempo $n$; $p$ una constante que define el tipo de interés, y $e$ la base del sistema neperiano de logaritmos. Para que, al fin del primer año, diera para $A$ el valor $a + ar = a(1 + r)$, tipo actual del rédito en el mercado, debería existir entre $r$ y $p$ la relación

$$r = p\left(e - \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}\right).$$

Si para determinar $A$, calculamos previamente por logaritmos el término $\left(1+\frac{n}{100}\right)^{\frac{100}{n}}=z$, la fórmula primera se convertirá en $A=a\,[1+p\,(e-z)]$.

Una renta inmediata de $n$ pagos iguales á $a$ tendrá por valor presente:

$$V=\Sigma_1^n \frac{a}{1+p\left(e-\left(1+\frac{K}{100}\right)^{\frac{100}{K}}\right)}.$$

La fórmula de Catalán no ha prosperado, ni podía prosperar, porque no ofrece condiciones prácticas de aplicación. En efecto; la exponencial convierte en progresiones las rentas paralelas, y en series las rentas lineales ó parabólicas, de vencimientos equidistantes; pero estas últimas pueden sumarse por descomposición. La ley de variación del capital con el tiempo, ideada por Catalán, obligaría á determinar, sea directamente, sea por tablas previamente calculadas, cada uno de los términos de las series que forman las rentas.

***

Con objeto de no abusar demasiado de vuestra paciencia, abandono estas elucubraciones para señalar las dificultades que ofrece el estudio de las operaciones financieras, cuando se necesita aplicar, á todos ó algunos de los cobros futuros, el coeficiente de la *esperanza matemática*, en virtud de que sólo han de hacerse aquéllos efectivos si ocurre un hecho determinado.

El caso á que especialmente me refiero es aquel en que la condicional se relaciona con la circunstancia de vivir ó no personas determinadas cuando los cobros hayan de efectuarse.

La estadística ha de proporcionar los datos que sirven de base al cálculo de aquella *esperanza matemática.*

Forma dicha base el conocimiento de la *tabla de supervivencia*, deducida á su vez de *tablas de mortalidad*, y estas últimas de la consignación exacta de la cifra de población, clasificada por edades, y de las defunciones ocurridas dentro de un plazo determinado, contado á partir de la fecha del censo, y refiriéndose las defunciones á los individuos incluídos en él.

No detallaré, porque seguramente lo sabéis de sobra, cómo se deduce la ley de supervivencia de la tabla de mortalidad; cómo concurre cada grupo de observaciones á determinar el coeficiente medio de mortalidad del período al que aquéllas se refieren; cómo en virtud de la representación gráfica de esos coeficientes se substituye el polígono correspondiente por otro en que desaparezcan las anomalías, que provisionalmente se atribuyen á errores de observación; cómo la multiplicidad de observaciones, correspondientes á períodos distintos, proporcionan los coeficientes medios, confirman ó borran anomalías, nos inducen á sospechar la permanencia ó la variación con el tiempo de las leyes encontradas y nos procuran datos para investigar las causas de la variación, cuando existe.

Aun siendo exactísimos los censos y exactísimas también las estadísticas de natalidad y mortalidad, hay muchas causas de error en las tablas obtenidas de esta manera. Se supone que durante el período en que se van registrando las defunciones y nacimientos, son los mismos los individuos sometidos á la observación, es decir, se acepta que ni salen éstos cambiando de residencia ó emigrando, ni llegan á proporcionar defunciones nuevos individuos no registrados anteriormente; ninguna de estas cosas es verdad: los coeficientes de mortalidad á que lleguemos sólo serán exactos cuando resulten iguales la emigración y la inmigración en el período de las observaciones y cuando los individuos advenedizos substituyan á los que se van, teniendo unos y otros iguales edades.

En general, cuanto mayor amplitud haya tenido el censo previo y cuanto menores hayan sido la emigración é inmigración en el período durante el cual se registraron las defunciones y nacimientos, tanto más dignos de confianza serán los coeficientes de mortalidad deducidos de aquellos datos.

En las tablas de supervivencia calculadas mediante observaciones relativas á grupos de individuos perfectamente definidos, como, por ejemplo, los asegurados ó asociados de las Compañías de seguros sobre la vida, hay menos causas de error; pero de todos modos han de tomarse muchas precauciones para no incurrir en graves equivocaciones. Las tablas de supervivencia determinadas de esta manera tienen el inconveniente de no ser tan crecido el número de personas sometidas á observación, y además el de representar leyes particulares correspondientes á individuos escogidos. Verdad es que la misma estadística demostró que el reconocimiento facultativo á que previamente se someten las personas que contratan con aquellas Compañías y que debiera dar al grupo condiciones de vitalidad excepcionales, sólo influye en los primeros años, no más de cinco; transcurrido ese tiempo, no hay diferencia notable entre la mortalidad general y la de individuos escogidos mediante reconocimiento previo de tener buena salud y no tener lesión orgánica manifiesta.

Es probable que si las personas sometidas á la observación no cambiaran, la influencia del reconocimiento facultativo sería más permanente. En este caso es posible llevar cuenta de la emigración y de la inmigración, representadas la primera, por las rescisiones de contratos, y la segunda, por la admisión de nuevos asegurados. Pero rescinden sus contratos con preferencia los que disfrutan mejor salud, y persisten en ellos más principalmente los que llegan á contraer achaques y enfermedades. Esto explica que al cabo de cinco años resulte aplicable el coeficiente de mortalidad general á grupos de individuos sometidos á selección.

***

La esperanza matemática que debe multiplicar á cada cobro condicional, se evalúa suponiendo que se cumplirá en lo porvenir la ley representada por la tabla de supervivencia. Si la condicional de efectividad es que viva una persona determinada que tenga $a$ años de edad, y el vencimiento del pago ha de llegar cuando transcurran $n$ años, el factor porque ha de multiplicarse el valor presente de aquel pago, considerado como cierto, será la relación de supervivientes á las edades $a + n$ y $a$. Si fuese la condicional el fallecimiento de aquella persona, dicho factor será lo que falta al del caso anterior para valer la unidad. Si depende el pago de que vivan á la vez varias personas, como se trata de una probabilidad compuesta, será dicho coeficiente el producto de las probabilidades simples de que viva en aquella fecha cada una de ellas.

La ecuación general que plantea estos problemas financieros de pagos y cobros condicionales se obtiene, como en el caso de no serlo, igualando los valores matemáticos presentes de los compromisos respectivos. Esos valores serán sumas de términos que contendrán como factores: primero, la cuantía del cobro condicional; segundo, la potencia negativa de la unidad más su rédito, con exponente igual al tiempo que ha de transcurrir hasta su vencimiento, y tercero, cierto número de factores de las formas indicadas anteriormente.

No me ocupo de los problemas en que sólo se trata de buscar el valor presente de un capital pagadero condicionalmente en fecha futura y determinada, por dos razones: la primera, porque lo dicho basta ya para plantear y resolver estas cuestiones, y la segunda, porque al ocuparme de las rentas condicionadas, llamadas también vitalicias, habrán de aparecer los valores que forman las soluciones de aquellos sencillos problemas como términos de las sumas correspondientes que habremos de evaluar.

Paso, desde luego, al estudio de las rentas vitalicias, principiando por el caso más frecuente de estar condicionadas por la circunstancia de vivir, en la fecha del vencimiento de su cuota, *todas las personas designadas en el contrato;* ó dicho de otra manera, *por la de cesar el pago de la renta al ocurrir el fallecimiento de alguna de aquellas personas.* El valor presente de la renta vitalicia será en estas condiciones la recíproca del producto de supervivientes á las edades de los vitalicistas, multiplicada por un factor, formado por la suma de los productos de potencias negativas sucesivas de $(1 + r)$, multiplicadas por los productos de supervivientes á las edades, que sucesivamente irán teniendo aquéllos al vencimiento de cada anualidad, hasta llegar alguno de ellos á la edad límite de la tabla.

Para escribir la fórmula correspondiente se designan las personas de grupo considerado por sus edades $A$, $B$, $C\ldots$, circunstancia que las define é individualiza desde el punto de vista de la tabla de supervivencia; se representan por $a$, $b$, $c\ldots$, los supervivientes á las edades $A$, $B$, $C\ldots$; por $a_k$, $b_k$, $c_k\ldots$, los supervivientes á la edadés $A + K$, $B + K$, $C + K\ldots$; y por $r$, el tipo del interés de la unidad de capital en la unidad de tiempo, tomando por unidad de tiempo el lapso que separa los actos sucesivos de composición de réditos y capitales. El valor presente de la renta vitalicia, que llamaremos $V_{ABC\ldots}$, será:

$$V_{ABC\ldots} = \frac{1}{a\,b\,c\ldots}\left\{\frac{a_1\,b_1\,c_1\ldots}{(1+r)} + \frac{a_2\,b_2\,c_2\ldots}{(1+r)^2} + \ldots \frac{a_n\,b_n\,c_n\ldots}{(1+r)^n}\right\};$$

y en esta fórmula, $n$, exponente y subíndice del último término, será el complemento de edad de la persona más anciana del grupo, llamando complemento de edad de un individuo la diferencia entre la edad más avanzada que figure en la tabla de supervivencia y la edad de aquél.

Para distinguir esta clase de rentas vitalicias de otras diferentes que estudiaré más tarde, las llamaré *de primera clase*. Si la tabla de supervivencia no fuera susceptible de expresión analítica, la suma que forma el valor presente de la renta sólo podrá obtenerse calculando cada término, para sumarlos después.

Estas rentas ofrecen excepcional interés en el estudio general de las operaciones vitalicias condicionadas por ley de supervivencia, porque, según veremos, las series particulares que formen las soluciones de cualquier otro problema de este género, pueden expresarse en función de rentas vitalicias de primera clase.

Cuando se trata de calcular tablas completas de valores de las rentas vitalicias, sobre la base de un tipo de interés determinado y de una tabla de supervivencia definida, suele seguirse otro procedimiento.

Comparando las expresiones de

$$V_{A,B,C\ldots} \text{ y } V_{A+1,B+1,C+1\ldots}$$

se puede establecer la relación siguiente:

$$V_{ABC\ldots} = (1 + V_{A+1,B+1,C+1\ldots})\,(1+r)^{-1} \cdot \frac{a_1\,b_1\,c_1\ldots}{a\,b\,c\ldots}.$$

Esta fórmula nos permite calcular sucesivamente los valores presentes de las rentas vitalicias á las diferentes edades, desde las $A+n$, $B+n$, $C+n$, para las cuales es cero, hasta las $A-K$, $B-K$, $C-K$....., siendo $K$ la edad de la persona más joven del grupo; es decir, para todas las edades posibles en que las diferencias de edad de los vitalicistas fueran las que tienen entre sí los individuos del grupo considerado.

No hay ventaja, al parecer, en aprovechar la última fórmula en vez de la primera, porque los cálculos resultan igualmente laboriosos en ambos casos. El motivo de la preferencia que se da en la práctica á la última fórmula es el siguiente: en ambos procedimientos, al incurrir en una equivocación material, se propaga el error á todos los valores en que habrá de entrar el resultado erróneo, ya sea como sumando, ya como dato; si empleamos la fórmula primera no hay otra comprobación posible que rehacer los cálculos muchas veces; pero en el caso de usar la segunda, encontró Morgán un procedimiento de comprobación que permite averiguar en todo momento si existe algún error en los cálculos efectuados, y en caso de haberle, facilita los medios de buscar donde se cometió.

*
* *

Las rentas vitalicias diferidas pueden expresarse en función de las inmediatas; y las temporales valen siempre la diferencia entre las inmediatas indefinidas y las diferidas, por el plazo durante el cual sean aquéllas temporales. Todo lo dicho hasta ahora se refiere al caso de rentas vitalicias pagaderas mientras vivan *todas* las personas designadas en el contrato.

Sea $V^{(d)}_{ABC...}$ el valor presente de la renta vitalicia de primera clase diferida por $d$ años, ó lo que es lo mismo, el de la renta cuya primera cuota se cobraría á los $d+1$ años; su expresión será:

$$V^{(d)}_{ABC} = \frac{a_{d+1}\, b_{d+1}\, c_{d+1}}{(1+r)^{d+1}\, abc} + \ldots + \frac{a_{d+p}\, b_{d+p}\, c_{d+p}}{(1+r)^{d+p}\, abc}$$

y en ella $d+p$ será el complemento de vida de la más anciana de las personas $A$, $B$, $C$...

Si escribimos el valor de la renta vitalicia, inmediata á las edades $A+d$, $B+d$, $C+d$..., su expresión será:

$$V_{A+d, B+d, C+d, \ldots} = \frac{a_{d+1}\, b_{d+1}\, c_{d+1}}{(1+r)\, a_d\, b_d\, c_d} + \ldots \frac{a_{d+p}\, b_{d+p}\, c_{d+p}}{(1+r)^p . a_d\, b_d\, c_d};$$

multiplicando el segundo miembro de esta igualdad por

$$\frac{1}{(1+r)^d} \cdot \frac{a_d\, b_d\, c_d}{a\, b\, c},$$

se obtiene el segundo miembro de la igualdad anterior; por consiguiente, podemos escribir:

$$V^{(d)}_{ABC\ldots} = V_{A+d, B+d, C+d \ldots} \frac{a_d\, b_d\, c_d}{(1+r)^d . a\, b\, c},$$

y tendremos el valor presente de la renta diferida en función del que tiene una inmediata en que todos los vitalicistas tuvieran $d$ años más de edad que los del grupo de que se trate.

*
* *

La condicional del pago de la renta, puede ser otra; por ejemplo, que sólo deje de cobrarse la cuota anual cuando hayan fallecido *todos* los vitalicistas designados.

Esta clase de rentas pueden expresarse en función racional y entera de las rentas vitalicias de primera clase. Es inútil advertir que si fuera uno solo el vitalista, no podría hacerse esta distinción de clases de renta vitalicia.

Para calcular una renta así condicionada, hemos de hallar la esperanza matemática por la que habrá de multiplicarse $\frac{1}{(1+r)^m}$ para tener el valor presente de la emésima cuota.

Sean como antes $A, B, C\ldots$ las edades de las personas designadas; sólo en caso de fallecer todas se pierde el derecho á cobrar, luego la esperanza matemática corresponderá á la diferencia entre la unidad y la probabilidad de que hayan fallecido en esa fecha todas las personas del grupo; pero esta probabilidad, por ser compuesta, es el producto de las simples correspondientes. La esperanza matemática que pretendo encontrar, será por consiguiente:

$$h_m = 1 - \left(1 - \frac{a_m}{a}\right)\left(1 - \frac{b_m}{b}\right)\left(1 - \frac{c_m}{c}\right)\ldots$$

que desarrollando el producto y reduciendo, será:

$$\frac{a_m}{a} + \frac{b_m}{b} + \frac{c_m}{c} + \ldots - \left[\frac{a_m b_m}{ab} + \frac{a_m c_m}{ac} + \frac{b_m c_m}{bc} + \ldots\right] + \\ + \left[\frac{a_m b_m c_m}{abc} + \ldots\right]\ldots$$

Si formamos la suma total de términos $\frac{1}{(1+r)^m} h_m$, dando á $m$ los diferentes valores desde uno hasta el que corresponda á la edad límite de la tabla de supervivencia, podrá descomponerse aquella suma en otras que evidentemente serán:

$$V_A + V_B + V_C + \ldots [V_{AB} + V_{AC} + V_{BC} + \ldots] + [V_{ABC} + \ldots]\ldots$$

Se demuestra con facilidad que, substituyendo á los símbolos $V$ los $V^{(d)}$ correspondientes, se obtendrá el valor presente de la renta vitalicia diferida por $d$ años, pagadera mientras viva algunos de los vitalicistas. En cuanto á las temporales, de iguales condiciones, es evidente que se obtendrán restando de las inmediatas las diferidas por el plazo durante el cual sean aquéllas temporales.

No detallaré las fórmulas particulares de las rentas vitalicias en las que la condición para extinguirse la renta consiste en que hayan fallecido $m - n$ personas de las $m$ previamente designadas. Basta para mi objeto consignar que tales rentas pueden expresarse siempre en función racional y entera de las de primera clase, y que ello depende de que la probabilidad de que sólo vivan en cualquier época $m - n$ personas de entre $m$ designadas previamente, viene expresada en función de las probabilidades de vivir en esa misma época *todas las personas* que formen algunos grupos parciales, unitarios, binarios, ternarios, etc., de los que pueden constituirse con la $m$ personas designadas.

* * *

Pero todavía cabe establecer condicionales mucho más complicados para las rentas vitalicias. Puede *extinguirse* la renta cuando dejan de vivir todas ó cierto número de personas de un grupo determinado, pero no comenzar el pago, ó *nacer* la renta, hasta que se haya disuelto, total ó parcialmente, otro grupo de personas, mediante el fallecimiento de alguna ó de todas ellas. Estas rentas vitalicias, como las anteriores, pueden expresarse también en función de las rentas vitalicias de primera clase.

* * *

Hay otro problema de la misma índole y mucho más difícil. Si varias personas han de disfrutar colectivamente una renta vitalicia mientras viva cualquiera de ellas, y ese derecho colectivo se reparte entre los supervivientes en proporciones definidas, iguales ó distintas, según quienes sean los que sobrevivan, podemos proponernos el problema de encontrar con qué cantidad debió concurrir cada una de dichas personas al pago del derecho colectivo que adquirieron. Se demuestra que las partes correspondientes á cada una de ellas pueden formularse en polinomios formados con valores presentes de rentas inmediatas de *primera clase* y coeficientes numéricos relativos á las proporciones de los repartos.

*
* *

Hay otras operaciones financieras condicionales en las que sólo existe la promesa de un pago. Si tiene vencimiento *determinado* y se ha de hacer efectivo á condición de que en esa fecha vivan ó hayan fallecido una ó varias personas previamente designadas, se determina el valor matemático presente de aquel pago futuro y condicional, en la forma ya indicada al formular el valor de uno de los términos de una renta vitalicia.

En otros casos, la promesa de pagar cierto capital sólo se hace efectiva al finar el año en que ocurra el fallecimiento de la persona ó personas que el contrato designa. Tales operaciones, llamadas impropiamente, y ya diremos por qué, *seguros sobre la vida para caso de muerte*, pueden calcularse fácilmente en función de las rentas vitalicias.

Como ejemplo me propongo determinar el valor presente de una suma, *s*, que se ha de pagar en el primer aniversario de la fecha del contrato en el cual haya ocurrido la disolución de un grupo de personas, de edades $A$, $B$ y $C$, por consecuencia del fallecimiento de alguna de ellas. La cantidad $s$ puede pagarse en el primer aniversario si hubiese fallecido alguna de aquellas tres personas; el valor presente de tal pago condicional será evidentemente

$$\frac{1}{(1+r)}\left(1-\frac{a_1 b_1 c_1}{abc}\right)=\frac{1}{(1+r)}\left\{\frac{abc-a_1 b_1 c_1}{abc}\right\}.$$

En todos los aniversarios habrá posibilidad de que se cobre la suma $s$; por ejemplo, para el enésimo valdrá

$$\frac{1}{(1+r)^n}\,\varepsilon_n,$$

designando por $\varepsilon_n$ la probabilidad matemática de pago.

La evaluación de esa probabilidad se determina de la manera siguiente: imaginando que en los aniversarios anteriores no se cumplió la condición, la probabilidad de que vivan á la vez los tres individuos en el siguiente será:

$$\frac{a_n b_n c_n}{a_{n-1} b_{n-1} c_{n-1}}$$

y, por consiguiente, la de que no vivan los tres, será:

$$1-\frac{a_n b_n c_n}{a_{n-1} b_{n-1} c_{n-1}}=\frac{a_{n-1} b_{n-1} c_{n-1}-a_n b_n c_n}{a_{n-1} b_{n-1} c_{n-1}},$$

pero esa fracción sólo representará la probabilidad de que el fallecimiento de alguna de las tres personas ocurra entre los aniversarios $n-1$ y $n$ de la fecha del contrato, si se cumplió antes la condición *precisa* de que en el $n-1$ vivieran las tres personas, y la probabilidad de que esto *haya sucedido* es

$$\frac{a_{n-1} b_{n-1} c_{n-1}}{abc};$$

la probabilidad compuesta que busco será, por consiguiente, el producto de las dos, ó sea:

$$\frac{a_{n-1} b_{n-1} c_{n-1} - a_n b_n c_n}{abc},$$

y el valor presente de la esperanza matemática de cobrar en el enésimo aniversario, será:

$$\frac{1}{(1+r)^n}\left(\frac{a_{n-1} b_{n-1} c_{n-1} - a_n b_n c_n}{abc}\right).$$

La suma del valor presente de todas las esperanzas matemáticas correspondientes á todos los aniversarios, hasta el límite de edad de la tabla de supervivencia, es el valor del seguro $S_{ABC}$ y valdrá:

$$S_{ABC\ldots} = S\left[\frac{1}{(1+r)}\left[\frac{abc - a_1 b_1 c_1}{abc}\right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{(1+r)^2}\left[\frac{a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2}{abc}\right] +$$

$$\left. + \ldots \frac{1}{(1+r)^n}\left(\frac{a_{n-1} b_{n-1} c_{n-1} - a_n b_n c_n}{a_n b_n c_n}\right)\right].$$

Ahora, fácil es descomponer esta serie en dos: una que vale

$$\frac{S(1 + V_{ABC})}{(1+r)}$$

y otra que vale $S\,V_{ABC}$, resultando en definitiva:

$$S_{ABC} = S\left[\frac{1 - r\,V_{ABC}}{1+r}\right].$$

Ordinariamente no se cambia aquel derecho por su valor presente pagado al contado, y se permuta por una renta vitalicia inmediata indefinida ó temporal que tenga el mismo valor matemático en el momento de contratar.

Cuando la obligación de pagar eventualmente la suma ofrecida en fin del año en que se realiza aquél primer requisito va acompañada de otra segunda condición, á saber, que se cumpla el primero antes de transcurrir un plazo determinado, se tiene el seguro temporal; y si la segunda condicional exige que se cumpla la primera pasado un plazo fijo, el seguro diferido.

Así como hay rentas vitalicias que duran hasta el fallecimiento de *una cualquiera de las personas designadas*, y hay otras que duran hasta *el de todas ellas,* ó hasta el de $m-n$ de entre ellas, siendo $m$ su número total, así también el *seguro para el caso de muerte* puede ser condicionado por el fallecimiento de cualquiera de las personas designadas, por el de todas ellas ó por el de $m-n$ de entre ellas, siendo $m$ su número total.

Resolviendo la gran variedad de todos estos problemas se llega á demostrar: que el valor presente de capitales ó rentas ofrecidas y condicionadas de cualquier manera, con tal que las condicionales se refieran á la ley de supervivencia, se formulará siempre en función racional y entera de los valores de las rentas vitalicias de primera clase, y de aquí la importancia capital que tiene el disponer de estos últimos valores para facilitar los cálculos.

Como ya dije también, sin deformar la ley numérica de supervivencia, adaptándola á una fórmula analítica, sólo puede calcularse la suma que forma el valor presente de la renta vitalicia, calculando uno á uno todos los términos y sumándolos después. Este sistema, simplificado, ó más bien *ordenado*, por la fórmula que permite calcular $V_A$ en función de $V_{A+1}$ (llamando en general $V_{A+1}$ el valor presente de la renta inmediata pagadera á un vitalicista de $a+1$ años de edad), es el que se emplea cuando se quiere formar una serie ó colección de tablas de rentas vitalicias con las bases de una ley dada de supervivencia y un tipo de interés determinado.

Si razones especiales obligan á tomar como base de cálculo otra tabla de supervivencia y otro tipo de interés, ó si tratamos de calcular una operación determinada y no disponemos de las tablas de rentas vitalicias de primera clase que serían especialmente necesarias para aplicar las fórmulas que resolvieran el problema, ó tendríamos que resolverlo directamente mediante cálculos extremadamente laboriosos, ó tendríamos que formar, cuando no colección completa de tablas, todas aquéllas que comprendan los valores de rentas vitalicias que habríamos de utilizar en el problema particular de que se trate. De esta necesidad nacieron los trabajos emprendidos por matemáticos insignes, principalmente ingleses, porque en ese país, antes que en los otros, tuvieron gran desarrollo esta clase de operaciones financieras.

El objeto que se propusieron fué conseguir fórmulas bastante aproximadas que expresaran los valores presentes de las rentas vitalicias de primera clase, valores que sólo eran representados exactamente por series, sin ley analítica, y rebeldes por lo mismo á toda fórmula sumatoria.

La primera tentativa en este camino se debe á Moivre, que substituyó la tabla de supervivencia por otra ley lineal.

El término general de la serie sería en tal hipótesis $\frac{a - k\delta}{a} \times \frac{1}{(1+r)^k}$; en él habría de recibir $k$ valores enteros y sucesivos; $\delta$ representaría la diferencia constante de supervivientes á las edades $k$ y $k+1$, y cuando la renta vitalicia fuera indefinida, $k$ había de recibir todos los valores enteros desde uno hasta el $\frac{a}{\delta}$ que correspondería al último término de la serie, que sería nulo.

La serie á que da lugar la hipótesis de Moivre, puede sumarse por descomposición como se sumó la que representa el valor actual de rentas incondicionales inmediatas de vencimientos equidistantes y de cuotas que varien uniformemente. Aunque la hipótesis de Moivre es inaceptable, sobre todo para substituir los números de supervivientes en edades extremas, puede prestar servicios muy útiles en algunos casos.

Pero los matemáticos no podían contentarse con tan poco. Substituyeron la tabla numérica y discontinua de supervivencia por una curva continua; la subdividieron en trozos ó regiones; substituyeron á cada trozo otro parabólico que casi se confunde con el que corresponde al polígono proporcionado por las experiencias; imaginaron la composición continua del capital con su rédito infinitesimal, en tiempo infinitamente pequeño; concibieron también la renta como suma de pagos infinitamente pequeños de vencimientos infinitamente próximos y equidistantes; y con todo ello sometieron el problema á la jurisdicción del cálculo integral.

Así pudieron llegar á fórmulas prácticas muy aproximadas, y en vez de formar el valor presente de una renta tantos términos como unidades contiene el complemento de edad del más joven de los vitalicistas del grupo, lo forman sólo dos ó tres términos, que fácilmente se calculan y se suman para encontrar la solución buscada.

*
* *

Lo difícil que es tratar en lenguaje corriente cuestiones matemáticas, mi impericia para vencer esa dificultad, y más todavía, lo desaliñado de mi estilo, han justificado sobradamente la razón con que afirmé que necesitariais sufrir con paciencia la lectura de mi discurso.

Para evitaros mayores molestias lo daría aquí por terminado; no lo hago así, porque he de cumplir mi ofrecimiento de explicar la razón de llamar impropiamente seguros sobre la vida á las operaciones financieras condicionadas por la ley de supervivencia.

Cualquiera que sea el contrato financiero que imaginemos, han de existir en él vencimientos futuros ó pagos aplazados, y por lo mismo, habrá riesgos más ó menos grandes de que no lleguen á efectuarse los cobros en las fechas estipuladas. Si tal circunstancia pudiera sólo presentarse por falta de moralidad ó por insolvencia del deudor, ya dije que en el tipo de interés se tomaba en cuenta aquella probabilidad y que se contrataban á tipo de rédito tanto mayor, cuanto mayores eran las dudas referentes á la seguridad de cobrar las sumas ofrecidas.

Y no hay otra ley en este caso que la apreciación personal de quien acepta el riesgo de la falta de cumplimiento del pacto. En lo referente á los actos de un ser inteligente y libre, regidos por las leyes del Derecho, que deben ser las de la Justicia, y por las coercitivas para que el primero se haga efectivo y se cumpla la segunda, no cabe establecer cálculo matemático ninguno.

Por eso las operaciones financieras de que traté en la primera parte de mi discurso, aunque tengan siempre algún carácter aleatorio en lo que se refiere al posible incumplimiento del contrato, pueden ser y son efectuadas entre particulares, que cuidan de asegurar en lo posible la efectividad de sus respectivos compromisos.

En las operaciones financieras condicionadas por sucesos independientes de la voluntad de los contratantes, subsiste aquel peligro y, además, el *azar* de una eventualidad, apreciada por esperanza matemática correspondiente; pero aquella apreciación sólo establece la equidad del pacto. Aclararé este concepto con un ejemplo.

Imaginemos dos jugadores: uno de los cuales se compromete á pagar desde luego, una pequeña suma que pierde, á condición de percibir otra mucho mayor si acierta el número de una bola que ha de sacar un agente ciego de un bombo donde hay $n$ iguales y con número distinto cada una de ellas. El juego dejará de ser *equitativo* si la suma que cobre al acertar, no es $n$ veces mayor que la pérdida al errar. Y en efecto, el cálculo demuestra que en tales condiciones, repitiendo el número de suertes ó jugadas *indefinidamente*, ni uno ni otro de los jugadores obtendrán ventaja. Pero como no puede admitirse un juego que dure eternamente, será mayor la probabilidad de que exista desequilibrio entre lo ganado y lo perdido por cualquiera de ellos, cuanto menor sea el número de jugadas, relativamente al número de bolas que el bombo contenía.

La esperanza matemática es en este caso $\frac{1}{n}$; pero el riesgo de pérdidas ó ganancias por *incumplimiento de la probabilidad* será grandísimo cuando sean pocas las jugadas y muy pequeña aquella esperanza matemática. Si, por ejemplo, son mil las bolas, el banquero, llamando así al que cobra una peseta en cada jugada y que ha de pagar 1.000 si el otro jugador acierta el número de la bola que salga del bombo, ó gana *uno* ó pierde *999*; no hay término *medio* si es *uno* solo el jugador y *una* sola la jugada.

El que se expone á pagar la cifra mayor, aunque, en cambio, sea menor el riesgo de pagarla, puede eliminar el *azar*; para ello acude al *seguro*, mediante la aceptación simultánea ó sucesiva de un número de riesgos bastante crecido para que pueda considerarse la esperanza matemática como una verdadera realidad.

Esto es en la esencia el seguro: *subdivisión, multiplicidad de riesgos, multiplicidad de contratos.*

Volvamos á nuestro caso. Imaginemos el contrato en que el compromiso de una parte consiste en pagar á los causahabientes de la otra un capital $c$ al fin del año en que ocurra su fallecimiento, y que, en cambio, la segunda ha de pagar á la primera una renta vitalicia anticipada, temporal ó indefinida. La *equidad exige que los valores matemáticos presentes de las respectivas obligaciones sean idénticas*, y nada más.

Pero quien se obligue á entregar el capital, se encontrará en condiciones análogas al banquero de nuestro ejemplo. Si el que ha de pagar la renta vitalicia fallece á poco de contratar, el otro tendrá que entregar un capital bastante crecido, y sólo habrá percibido una pequeña porción de él constituída por la primera cuota de la renta mencionada. El contrato hecho aisladamente, y con un solo individuo, tendrá el carácter de *juego de azar,* aunque resulte equitativo.

La entidad que haya de celebrar aquella clase de contratos tiene que buscar, en lo grande del número de aquellos pactos, el *único medio que existe de convertir las esperanzas matemáticas en casi realidades,* porque de otro modo resultaría la contratación un juego de azar muy peligroso.

El principio fundamental del seguro es por su esencia incompatible con el contrato aleatorio y aislado entre dos partes contratantes, si, por lo menos, una de las dos no realiza á la vez, ó sucesivamente, otros muchos contratos similares con diferentes personas.

Las entidades que se han dedicado á realizar esta clase de negocios, claro es que han practicado el *seguro* mediante la multiplicidad de pactos; se llamaron, con más ó menos razón, "Compañías de seguros sobre la vida"; y al contrato aislado aplicaron ellas también ese mismo nombre con notoria impropiedad.

* * *

A dos patrones diferentes se han ajustado en la práctica esta clase de instituciones: al de las "Sociedades anónimas" y al de las "Asociaciones mutuas".

Las primeras con capital propio y con personalidad jurídica bien definida, hacen suyas las pérdidas ó beneficios; los contratos celebrados con tales Sociedados resultan firmes y valederos como los celebrados entre particulares. Consideran muchos preferible y hasta indispensable tal organización. Lo justifican por la necesidad de un capital que garantice las responsabilidades contraídas, y aducen, además, otro argumento de verdadera importancia. Aunque se cumplan las previsiones de supervivencia, las sumas cobradas sólo alcanzan valor idéntico al de las obligaciones aceptadas, mediante la acumulación de los réditos que las primeras han de producir á interés compuesto y al tipo que se fijó como base de cálculo. Si por torpeza ó mala fe de la gerencia de la institución no llegara á producir el capital aquellos réditos, el desequilibrio podría ser enorme, y natural es que la responsabilidad del hecho corresponda á quien ha tenido la *iniciativa y jurisdicción* de invertir las sumas cobradas.

Los enemigos de la forma anónima para las Sociedades de seguros sobre la vida, ponen de relieve algunos defectos de que necesariamente han de adolecer.

Dicen, en primer lugar, que las responsabilidades no tienen límite definido relativamente á los asegurados, aunque sólo *pueden hacerse efectivas* de una manera limitada, porque los accionistas ó partícipes en las Sociedades anónimas nunca tienen mayor responsabilidad legal que la correspondiente á la pérdida de su capital, y éste suele estar ya perdido en su mayor parte cuando llegan á trance de liquidación.

Por lo mismo, resultan colocadas *legalmente* en las condiciones del banquero que *no tiene límite en su ganancia* y *tiene limitada su pérdida*, y esto peca contra la justicia y la equidad. Dicen, además, que el capital social sólo será necesario de una manera eventual; si se desembolsa, desde luego, queda, sin necesidad, en manos de la Administración de la Compañía; si no se desembolsa inicialmente, ó ha de quedar representado por acciones en cartera, que no podrán hacerse efectivas cuando el capital se ha de entregar para cubrir pérdidas reconocidas, ó ha de quedar representado por obligaciones de pago de dividendos pasivos, que difícilmente se harán efectivos en tales circunstancias.

Otra objección se hace á las Compañías anónimas de seguros sobre la vida que se relaciona con los extraordinarios beneficios que tales Sociedades pueden procurarse á costa de las personas que con ellas contraten. Relativamente á tal aserto, puedo citar un hecho muy curioso. No por mala fe, sí por una crasa ignorancia, pudo estar en trance de quiebra una Sociedad anónima de seguros fundada en España en la primera mitad del siglo pasado.

Trabajaba principalmente en seguros contra los riesgos marítimos y de incendios. Creyó, sin duda, que por llamarse las operaciones financieras condicionadas por la ley de supervivencia *Seguros sobre la vida,* eran estas operaciones semejantes á las otras; emprendió tales negocios, y entendió que era posible aplicar en ellos el mismo sistema que se aplica para el cálculo de beneficios cuando se trata de aquellos otros en que los riesgos son proporcionales al tiempo y se cobran periódicamente, para cubrirlos, cuotas iguales.

Así resultó, que este *ramo de vida,* como ella le llamaba, suministró en los primeros años grandes beneficios á los accionistas. Muy poco duró la aplicación de tan peregrino procedimiento de calcular los beneficios, porque no faltó persona que, dándose cuenta del error, pensara cuerdamente que la conducta seguida se supondría hija de *mala fe* y no se atribuiría á la *ignorancia más absoluta de los principios matemáticos que rigen tales negocios.*

Se puso radical remedio absteniéndose, durante veinte años, de aplicar, ni á beneficio de los accionistas, ni á cubrir la parte correspondiente de gastos generales, nada de lo que por el ramo de vida se recaudaba, ya directamente, ya por réditos del capital obtenido por la acumulación de primas.

Este ejemplo demuestra claramente que, por error ó mala fe, pueden hacer suyas las Compañías, considerándolas indebidamente como beneficios, porciones más ó menos grandes de las cantidades acumuladas, que, en su casi totalidad, equilibran en cada instante, con el valor presente de los cobros futuros, al valor presente de las obligaciones contraídas.

***

El principio de la mutualidad es insustituíble para formar una agrupación de individuos que hayan de prestarse auxilios recíprocos, entrando por mucho en su prestación la caridad de los demás para con los compañeros que resulten víctimas de una desgracia ó de un accidente. Puede utilizarse también, sin tomar excesiva importancia el elemento caritativo ó benéfico, para realizar el principio esencial del seguro, si se trata de riesgos semejantes, sensiblemente proporcionales á los tiempos y á la riqueza expuesta á sufrir merma ó destrucción por accidentes ó siniestros. No me parece tan apropiada la asociación mutua para constituir la entidad jurídica que haya de realizar pactos financieros, condicionados por la ley de supervivencia, con todos aquellos individuos que, como ya dije, sólo desean efectuar los que convengan á sus necesidades y circunstancias, con determinación precisa de las obligaciones que hayan de contraer á cambio de una absoluta seguridad de que serán ciertos y efectivos los derechos eventuales que pretenden adquirir.

Aunque la administración de las Sociedades mutuas no tenga interés notorio en considerar indebidamente como beneficios una parte excesiva de las sumas cobradas, tampoco suele tenerle en economizar gastos generales.

Todas las tarifas consignan primas únicas ó anuales superiores á las netas ó matemáticas, y así es necesario para poder sufragar los gastos de Dirección ó Administracción, y el beneficio de la Sociedad, cuando ésta acepta el riesgo. Y es lo peor que suelen hacerlo modificando arbitrariamente la ley de supervivencia sin que pueda apreciarse fácilmente la importancia del recargo En las Asociaciones mutuas, tienen el abuso de esta práctica la *aparente* justificación de no perjudicar al asociado, porque si paga un cierto exceso, este mismo exceso sigue siendo suyo como partícipe que es en el beneficio que resulta por el *superávit* que lleguen á alcanzar las primas acumuladas respecto de las obligaciones pendientes. Tan recargada suelen resultar las tarifas prácticas, que las Asociaciones mutuas, ó mejor dicho, los que en ellas se reservan la Dirección ó Administración de intereses ajenos, pueden permitirse el lujo de repartir á los asociados, con aparatosa resonancia, y como beneficios extraordinarios, una parte más ó menos grande de lo que pagaron aquéllos indebidamente y que no llegó á consumirse en gastos generales y en comisiones ampliamente repartidas.

Las especialísimas circunstancias que concurren en la contratación de esta clase de operaciones financieras, exigen que los Gobiernos intervengan de una manera eficaz en lo relativo á Sociedades ó entidades encargadas de satisfacer una necesidad social tan importante, porque la legislación general del Código de Comercio, la ley general de Asociaciones y las disposiciones que regulan las fundaciones y patronatos benéficos creados por los particulares, no pueden tener en cuenta las peculiares condiciones y requisitos del caso especial que nos ocupa.

La intervención que consideré precisa al escribir hace algunos meses el párrafo anterior, se ha establecido por la reciente ley que ordena la inscripción en el Registro, que al efecto se establece, de las Compañías, Sociedades, Asociaciones, y en general, de todas las entidades que tengan por fin realizar operaciones de Seguro, á las que exige publicidad y determinadas garantías. Establece también una inspección que en mi sentir deberá tener, ante todo y sobre todo, carácter científico.

Muchos gobiernos han creado en su país el monopolio del papel moneda á favor de una institución de crédito especial, reservándose en ella determinada intervención y algunos derechos, aunque acaso no todos los debidos; han roto así la anticuada tradición de *absoluta libertad económica*, pero no han pensado todavía en la necesidad y conveniencia de crear una entidad *especial* que realice las operaciones financieras de que me ocupé en la segunda parte de mi discurso.

Las condiciones que habría de tener tal Institución deberían ser las siguientes: 1.ª, constituir personalidad jurídica diferente de la que ostentan los que con ella han de contratar; 2.ª, equidad absoluta en los contratos; 3.ª, acumulación del mayor número de ellos para hacer tan pequeña como sea posible la eventualidad de responsabilidades propias de la Institución; 4.ª, limitación de beneficios y pérdidas en relación con el *capital de garantía* de los accionistas partícipes en las responsabilidades de la misma; 5.ª, participación del Estado en los beneficios y en la remotísima, pero posible, responsabilidad subsidiaria; 6.ª, participación directa del Estado y de las personas que contraten con la Institución en las funciones de comprobación de la efectividad del *capital de garantía*, y en la exactitud de las liquidaciones periódicas de los beneficios.

***

Voy á terminar. Confieso que la afición que tenemos los viejos á los recuerdos de tiempos pasados me inclinó á elegir este tema para mi discurso, pero tal vez no fuera la causa determinante de mi elección. Estaba pendiente de estudio en los Cuerpos Colegisladores un proyecto de creación de algo que pretende satisfacer anhelos y aspiraciones de las clases más humildes; mis aficiones me llevaron á leer el proyecto de ley creando un "Instituto nacional de previsión". Este podrá tener por objeto *asegurar los efectos de la previsión*; pero el ejercicio de tal virtud sólo corresponde al individuo que la practica ó á las entidades protectoras que inducen á practicarla y prestan á los individuos los medios de ser previsores cuando no los tienen.

La Institución Nacional para asegurar los resultados de la previsión podrá ser una entidad que á nada se comprometa de hecho, aunque se comprometa en derecho, cuando la masa de contratos sea grande y cuando cobre á cada uno lo que deba pagar según las fórmulas matemáticas que expuse; ese Instituto nacional habría de quedar complementado con aquellos otros de índole protectora á que antes me referí y que deben ser extraños al primero.

Al leer la ley he sentido honda satisfacción porque se inicia el propósito de atender las necesidades de los desvalidos, pero me asaltan temores muy fundados de que su reglamentación y desarrollo se haga prescindiendo de todo lo que la ciencia exige; que se atienda sólo á vanos formulismos; que todo ello pueda acarrear fatales consecuencias; que venga pronto el desengaño, y que se aleje mucho tiempo la posibilidad de satisfacer la apremiante necesidad de muchas familias que sólo dependen del honrado trabajo del padre que las constituyó, y que al morir prematuramente deja la suya en el más horrible desamparo.

¡Quiera Dios iluminar á nuestros gobernantes! Haga su acierto que cesen desigualdades irritantes que permiten á los altos servidores del Estado vivir sin preocupaciones del tiempo futuro y deja huérfanos de toda protección á los humildes, resultando que se obliga á ser previsores y á sacrificar el presente al porvenir á los que no pueden hacerlo por falta de medios, y se libra de tal obligación á los que pueden ejercer la abnegada virtud que llamamos previsión; haga el acierto de nuestros gobiernos que las clases trabajadoras no vean ahora el desamparo y la miseria en su vejez, como premio único de una vida laboriosa; haga también que los muchos millares de huérfanos abandonados puedan recibir el alimento material y moral indispensable para hacerlos en su día ciudadanos útiles á sí mismos, á sus familias y á la patria, madre común y querida de todos nosotros

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. LEONARDO DE TORRES QUEVEDO

*Señores:*

He de excusarme ante todo de mi tardanza en contestar al Sr. Garcini, falta grave, sin duda, cuando tanto deseo teníamos todos de ver á nuestro nuevo compañero auxiliándonos en las tareas académicas. Pudiera disculparme con las muchas ocupaciones que desde hace algún tiempo me agobian; pero las vacilaciones, los temores que me asaltaban cada vez que cogía la pluma, para escribir este discurso, no provenían sólo de mis muchas ocupaciones: ni, en realidad, soy yo el principal culpable de la tardanza. El principal culpable es nuestro insigne Presidente, que me encargó de llevar en este acto la voz de la Academia, sin tener en cuenta mi carencia de condiciones para corresponder, como debiera, á honra tan señalada.

Pensó, sin duda, que tendría yo especial satisfacción en enaltecer la memoria de mi ilustre maestro D. Miguel Martínez Campos, y en dar la bienvenida al Sr. Garcini que tan justificadamente viene á llenar su puesto en esta Academia.

Y en esto acertó; si D. José Echegaray, al encargarme que le represente en este momento, hubiera podido prestarme su brillante pluma, yo os daría noticia clara, aunque fuera en un breve resumen, de la labor de estos dos profesores eminentes; y realizaría con ello un trabajo útil, porque, como las obras científicas no encuentran aquí de ordinario público ni editores, apenas hay quien se decida á escribirlas, y así ocurre que, siendo los Sres. Martínez Campos y Garcini dos hombres de ciencia de indiscutible mérito, no queda de ellos más que un libro en que ambos puede decirse que colaboraron: las «Lecciones del Curso de Máquinas„, explicadas por D. Vicente Garcini, con arreglo al programa del Sr. Martínez Campos, á más de varios apuntes, artículos, memorias, etc.

Y aunque el libro y algunos otros trabajos sean de verdadera importancia, será sensible que se les juzgue únicamente por lo poco que publicaron; su labor principal no está ahí, está en el trabajo diario de la cátedra, labrando en la inteligencia de los alumnos, inculcando las ciencias fundamentales de la carrera, la Mecánica y sus aplicaciones y formando, en una palabra, cerebros de ingenieros. Esa labor tan útil á la ciencia española, tan necesaria para que se conserve el prestigio del Cuerpo de Caminos, apenas si la conoce nadie más que sus alumnos y sus compañeros. De ella os hablaría yo con gusto, pero no tengo competencia para analizarla, ni menos aún autoridad para juzgarla; y por eso me limito á manifestar la simpatía y admiración que á mí me inspira.

Poco os diré de D. Miguel Martínez Campos, cuyos méritos acaba de exponer á grandes rasgos el Sr. Garcini.

Siendo yo aún niño, aprendí á respetar su nombre de mi padre que había sido profesor suyo y mantuvo con él siempre gran amistad. Fué luego él, á su vez, profesor y más tarde amigo mío; le traté durante muchos años, y no he conocido persona más digna de la estimación y el respeto que á él le granjearon siempre y en todas partes su poderosa inteligencia, su nobleza de carácter y su rectitud de conducta.

Era cortés y llano en su trato y servicial con sus amigos y compañeros, aunque la austeridad de su vida, dedicada exclusivamente á la familia y al trabajo, hizo que nunca fueran numerosos los que con intimidad le trataban.

Pero si sus íntimos eran pocos, puede decirse que todos los que le conocían eran amigos suyos y admiradores. En la Escuela, cautivados por su gran dominio de las materias que explicaba y por su estricta imparcialidad no exenta de benevolencia, le profesábamos sus discípulos verdadera veneración. Sus notas tenían para nosotros especial importancia, y sus juicios eran acatados sin protesta. D. Miguel fué siempre indiscutible para nosotros. Lo fué para nosotros en la Escuela, y lo fué para todos los que le trataron en el Parlamento, en el Consejo de Estado, en las Compañías de ferrocarriles, en todos los centros en que se desarrolló la fecunda actividad de aquel sabio maestro. Y solamente su exagerada modestia explica que no llegara á figurar en primera línea entre sus contemporáneos.

Nadie más indicado para ocupar esta vacante que el señor Garcini, que ya ha substituído al Sr. Martínez Campos en diferentes ocasiones, como Profesor de varias asignaturas de la Escuela de Caminos y como Secretario de la misma.

Muy joven, casi niño, empezó para él la lucha por la vida. A los diez y seis años de edad obtuvo una plaza de actuario en una Compañía de seguros, á fin de allegar recursos que le permitieran prepararse para ingresar en la Escuela, y no sólo atiende simultáneamente á estas dos cargas—el empleo y el trabajo del curso preparatorio—cada una de las cuales parece harto pesada para sus pocos años, sino que, al mismo tiempo, dando gallarda muestra de su amor al trabajo y de su precoz inteligencia, hace oposiciones—temeroso quizá de no ingresar en la Escuela—á una plaza de Auxiliar en el Observatorio Astronómico de Madrid, y consigue ser propuesto, con otro de sus coopositores y en igualdad de circunstancias, para ocupar el primer lugar en la terna.

No se realizaron, claro está, los temores que denotaba esta previsión. Entró en la Escuela el año 65, siguió los cursos, sin abandonar su empleo de la Compañía de seguros, y terminó brillantemente su carrera, seis años más tarde, ocupando el número uno en una de las promociones más lucidas que han salido de aquel centro docente.

Era aquella la época de las excedencias forzosas, y el señor Garcini, sin puesto en el escalafón del Cuerpo, ocupó un destino en la Comisión para la división judicial de España y se dedicó al mismo tiempo á la enseñanza privada. Por entonces le conocí yo: primero, formando parte, como Ingeniero externo, de un tribunal que me examinó de Mineralogía y Geología, y luego, como Profesor ayudante, cargo para el cual fué nombrado el año 76, pocos meses antes de terminar yo la carrera.

Desde entonces hasta la fecha, sólo ha faltado de la Escuela seis años. Los que median desde el 91, en que tuvo que pedir licencia para atender al restablecimiento de su salud quebrantada por una grave enfermedad, hasta el 97, en que de nuevo fué nombrado profesor.

Poco ó nada queda de las explicaciones del Sr. Garcini durante su largo profesorado, como no sea el libro de Máquinas á que antes me refería; pero éste basta para darnos una muestra de su valer como expositor y como maestro.

No he de repetir ideas que expuse aquí mismo, en ocasión para mí memorable, acerca de la dificultad que ofrece la definición de las máquinas desde el punto de vista cinemático. Pero todos los que se ocupan de estos estudios saben que la vaguedad de este concepto, el gran número de órganos de distintas clases que entran en la composición de las máquinas y la complejidad de las relaciones que entre ellos existen ó pueden existir, hacen sumamente difícil el formular una teoría de los mecanismos, definiéndolos y clasificándolos sistemáticamente con arreglo á principios racionales. El libro en que el Sr. Garcini (ajustándose, según él dice, al programa del Sr. Martínez Campos) ha procurado formularla, merece lugar distinguido entre los de Sanz y Bethancourt, Willis, Haton de la Gonpillière, Reuleaux, Königs y algunos otros autores eminentes que han tratado el mismo asunto.

La teoría de los pares y cadenas cinemáticos, inspirada quizá en Reuleaux, pero desarrollada con completa originalidad, en forma clara y concisa, perfectamente adecuada á las necesidades de la Escuela, pudiera servir de base para un estudio sistemático y completo de los mecanismos. De sentir es que el Sr. Garcini no le haya desarrollado y más sensible aún es que no se hayan recogido las lecciones que sobre diferentes asignaturas *(Máquinas, Mecánica racional, Economía política* y *Derecho administrativo, Motores* y *Mecanismos Hidráulica teórica* y *Máquinas hidráulicas)* ha explicado en sus ventiséis años de profesorado.

Es D. Vicente Garcini, sin duda, ante todo y sobre todo, un profesor eminente, un hombre de ciencia distinguidísimo, pero ni el ejercicio del profesorado le ha impedido prestar su valiosa cooperación de ingeniero á diferentes empresas que la han solicitado, ni su decidida vocación científica le ha estorbado cuando se ha visto envuelto en una tragedia, para mostrarse hombre de acción, resuelto y decidido, dispuesto á cumplir su deber con exceso, sin rendirse á la fatiga, ni vacilar ante el peligro.

Fué en Septiembre de 1891.

Una gravísima enfermedad le había obligado á dejar la Escuela, y desde hacía algunos meses estaba destinado á la segunda División de ferrocarriles.

El primer viaje detenido para la inspección detallada de la vía y de los servicios en la línea de Madrid á Alicante, le emprendió, á poco de regresar de Panticosa, y todavía no bien restablecido, el día de la terrible inundación de Consuegra. Salió de Madrid á las once de la mañana y quedó detenido el tren en Castillejo por inundación y destrozos en la vía cerca de Villasequilla. Dejando el tren y los viajeros en aquella estación, marchó á reconocer la vía, convenciéndose de la imposibilidad de continuar.

Regresó á Castillejo y evitó que, bajo la presión tumultuosa de los viajeros, emprendiera el tren la marcha á buscar por Algodor y Ciudad Real el camino de Alicante, sin conocimiento previo de lo que ocurriese en este trayecto, ni de las órdenes que dictaran en Madrid.

Después de llegar el correo de la tarde, se recibió la orden de fusionar los dos trenes y marchar por Algodor á Ciudad Real; y en ese tren fué Garcini, sufriendo los efectos de un descarrilamiento que ocasionó un muerto y varios heridos.

" La confusión y el espanto que se produjeron — escribe „ un testigo presencial — fueron indescriptibles.

„ Ni una luz, ni un médico, ni un guardia civil; ningún „ socorro.

„ Voces, ayes, lamentos, el barro que llegaba hasta las „ rodillas á los que se lanzaron fuera de los coches, la lluvia „ y la obscuridad más completa. „

Garcini envió un propio á Castillejo pidiendo un tren de socorro, y dando á todos ejemplo de abnegación, se adelantó, en medio de la tempestad, á cubrir personalmente el que estaba descarrilado, porque se creía que venía otro detrás. Cuando llegó el tren enviado de Castillejo, los viajeros aterrorizados por la tempestad, temiendo una nueva catástrofe, no querían montar en él. Garcini venció su resistencia ordenando la marcha á paso de hombre y marchando él delante de la locomotora; de este modo pudo conseguir que en las altas horas de la noche se atendiera á los heridos graves.

Al ser de día, á pie, pasando por las catenarias que carriles y traviesas formaban en las cortaduras, reconoció el trayecto y dispuso, con el Jefe de sección de la Compañía, la preparación de los pasos hasta el kilómetro 58, para que los viajeros pudieran ir á él y regresar á Madrid aprovechando un tren enviado desde Aranjuez.

Á Madrid llegó, con los viajeros, á las seis de la tarde, después de treinta y seis horas de ayuno, de angustia, de fatigas y de peligros, y allí pudo descansar... hasta la madrugada del día siguiente, que volvió á tomar el tren para ir con el personal de la Compañía al lugar de la catástrofe y recorrer, en su mayor parte á pie, las líneas inundadas.

Es, en suma, el Sr. Garcini, profesor eminente é ingeniero meritísimo, uno de los más ilustres representantes del insigne Cuerpo de Caminos, que seguramente hace suya esta fiesta de la Academia. Y ya que tan inmerecidamente he sido honrado por vosotros para representaros en estos momentos, no vacilo en asumir también la representación de mis compañeros, amigos y admiradores todos de Garcini, para asociarlos á la Academia al dirigir la más cordial enhorabuena al nuevo académico.

***

Y ahora, siguiendo la costumbre establecida, he de disertar brevemente acerca de algún punto relacionado con el bien pensado y bien escrito discurso que acabais de oir. Trata éste, como dice su autor, de la aplicación de las matemáticas á «operaciones financieras que, además de estar »regidas por la ley del interés compuesto, quedan sometidas á la determinación de probabilidades de sucesos que »constituyen las condicionales de efectividad de los derechos y obligaciones de los contratantes».

De algo relacionado con este tema he de hablar; pero deseando evitaros la molestia de oirme discurrir trabajosamente acerca de las mismas cuestiones que con tanta maestría ha tratado el Sr. Garcini, me limitaré á exponer algunas consideraciones acerca de la confianza que inspira el Cálculo de probabilidades, cuyas previsiones se toman como base sólida para fundar en ellas negocios de grandísima importancia. Asunto poco nuevo en verdad, pero que siempre ofrece interés, porque parece que ha de haber diferencias esenciales entre las leyes científicas, que afirman rotundamente, y las previsiones más ó menos aleatorias del Cálculo de probabilidades.

¿Existen realmente esas diferencias? Acerca de este punto haré breves consideraciones, pero antes diré algunas palabras sobre la diferencia entre las verdades racionales y las verdades experimentales, y sobre el carácter contingente de las últimas. Perdonadme esta digresión, que procuraré hacer lo más breve posible y que me es necesaria para contestar á la pregunta que acabo de formular.

Dejando á un lado problemas metafísicos, acerca de la existencia de la realidad objetiva, que no son ahora del caso, podremos decir que el principal objeto de la ciencia experimental es estudiar el mundo exterior; determinar por medio de la observación y la experiencia las leyes de los fenómenos é imaginar hipótesis ó teorías que los expliquen. Pero ni las leyes se determinan con exactitud absoluta, ni puede razonablemente creerse que las hipótesis científicas sean fiel representación del mundo exterior.

El hombre de ciencia que imagina una teoría procede como el mecánico que construye un autómata.

Recuerdo haber visto de niño un juguete que me produjo impresión profunda: era un canario entre unas ramas, que cantaba, movía la cabeza y las alas y aun saltaba de una rama á otra. ¡Parecía un pájaro vivo! Gran entusiasmo me produjo aquella que yo reputaba maravilla de mecánica, y mi mayor satisfacción hubiera consistido en ser dueño del pájaro, para deshacerle y ver lo que tenía dentro. No conseguí realizar tan ambicioso deseo, y por lo mismo pensaba con frecuencia en aquel prodigio y en las dificultades que habría encontrado su constructor, el cual, á mi juicio, habría estudiado con todo detalle el organismo de los canarios vivos y le habría copiado con gran exactitud en el autómata.

Desvaríos infantiles, sin duda. Bien se me alcanza ahora que dentro de aquella máquina sólo hubiera encontrado ruedas dentadas, resortes, palancas y otros mecanismos que en nada se parecen á los órganos de un sér vivo. Pero, ¿mostraría más reflexión quien pensara que los átomos ponderables ó imponderables, las fuerzas á distancia, el éter, los torbellinos y todas las demás abstracciones ideadas por los hombres de ciencia, tienen existencia objetiva?

"Probablemente, dice Echegaray, todas las construcciones científicas no pasan de construcciones simbólicas del entendimiento."

Y poco después añade que, "á los grandes decubrimientos del análisis debe acompañar constantemente la comprobación experimental, para ver en cada momento si las dos series, la de los fenómenos naturales y la de sus imágenes; la de las realidades y la de sus esquemas; la del mundo exterior y la del mundo racional, marchan paralela y armónicamente adaptándose una á otra con absoluta exactitud; ó si, por el contrario, los nuevos términos se rechazan y se alejan, los moldes se rompen y su conformidad y concordancia se turban".

La imposibilidad de conocer la naturaleza de las cosas salta en verdad á la vista, si se considera la manera de establecer las leyes y las teorías de la ciencia experimental.

El físico que establece una ley, por ejemplo, la relación entre la presión y el volumen de un gas á temperatura constante, realiza una serie de experimentos y en cada uno de ellos determina dos valores numéricos correspondientes el uno á la presión y al volumen el otro. Si se propone representar la ley por medio de una curva, dirá que ha determinado un punto; pero no le ha determinado con entera exactitud, porque al medir sus coordenadas—los dos valores numéricos á que antes me refería — habrá cometido algún error; no hay ni se puede concebir que haya nunca aparatos enteramente libres de él. Así no podrá decir que la curva ha de pasar por un punto determinado; sólo le será lícito afirmar que pasará cerca de él á una distancia, cuyo límite máximo depende de los errores de observación. En resumen: nuestro experimentador ha determinado un cierto número de puntos y quiere hallar una curva que pase por cerca de todos ellos.

El problema es indeterminado; hay un número infinito de curvas que satisfacen á esa condición; ¿cómo elegir entre ellas, si todas son igualmente probables? La cuestión se resuelve eligiendo la más sencilla, la que menos dificultades ofrezca en las aplicaciones prácticas. Y la más sencilla elegimos, á veces, aun á sabiendas de que no es la más exacta. Aunque sabemos desde la época de Newton que la atracción entre dos masas varía en razón inversa del cuadrado de la distancia que las separa, suponemos que el peso de un cuerpo (atracción entre él y la tierra) es el mismo á diferentes alturas (es decir, á diferentes distancias). Y si algún día se confirmaran las hipótesis que suponen esta ley mucho más complicada, hasta el extremo de que á distancias sumamente pequeñas la atracción se cambia en repulsión; admitiríamos esta nueva ley para los fenómenos de orden molecular, pero seguiríamos diciendo en la mecánica terrestre que el peso de los cuerpos no varía con su posición, y en la mecánica celeste que la atracción entre dos astros varía en razón inversa de su distancia.

No es posible, fundándose en estudios experimentales fragmentarios é inexactos, imaginar un mundo racional que corresponda exactamente al mundo real, y aunque le imagináramos no sería esta correspondencia garantía de la realidad de nuestra hipótesis, porque, según ha demostrado M. Poincaré, siempre que haya una hipótesis mecánica que explique un cierto orden de fenómenos, habrá una infinidad de hipótesis distintas que los expliquen igualmente, y no será posible determinar cuál de ellas es la verdadera. Las realidades son cosa completamente distinta de los esquemas con que nosotros las representamos. La comprobación de que habla Echegaray indicará—cuando haya concordancia entre la serie del mundo racional y la del mundo exterior—que las leyes experimentales comprobadas son por el momento suficientemente aproximadas. Nunca demostrará que sean absolutamente exactas y menos aún que sean necesarias.

Todo esto lo pone de relieve Poincaré diciendo que un astrónomo que ha calculado las coordenadas de Saturno para un momento determinado, no debería en rigor asegurar que el astro ha de encontrarse á tal hora en tal lugar del Cielo; debería limitarse á decir: Saturno estará *probablemente* á tal hora *cerca* de tal lugar del Cielo. Y así, con dos adverbios, expresa los caracteres de las leyes experimentales que son únicamente verdades aproximadas y *probables*.

Las verdades de las ciencias abstractas, al contrario, aparecen como necesarias y rigurosamente exactas, pero esto proviene de que no se refieren á los fenómenos del mundo exterior, sino á las relaciones que existen entre ciertos entes de razón que no tienen realidad ninguna, que fueron imaginados y definidos por nosotros y cuyas propiedades nos son perfectamente conocidas, sin error posible, porque son precisamente aquéllas que nosotros les atribuímos al definirlos.

De estas propiedades, que son ciertas por definición, deducimos por métodos puramente racionales leyes que necesariamente hemos de tener por ciertas, si no nos rebelamos contra los dictados de la razón.

Pueden equivocarse y se han equivocado con frecuencia los matemáticos, que, desgraciadamente, nunca fueron infalibles; pero estos errores—puramente lógicos—han de achacarse á los hombres de ciencia y no al método que emplean, porque éste se reduce en último término á sacar conclusiones—deducidas con arreglo á las leyes de la lógica—de ciertas premisas aceptadas como verdaderas.

No cabe duda, á mi juicio, acerca del carácter de una ciencia determinada; depende del alcance de sus afirmaciones; será una ciencia racional y abstracta si sus afirmaciones se refieren únicamente á puras abstracciones; será necesariamente una ciencia experimental si sus afirmaciones trascienden al mundo real.

Un cantero, que conocí hace muchos años, había aprendido á trazar un círculo que pasara por tres puntos; no tenía noción ninguna de Geometría; le llamó la atención aquella construcción tan sencilla, la repitió formando con los tres puntos triángulos muy diferentes y siempre obtenía el resultado apetecido. Si alguna vez no sale—decía con gran convicción—es que me he equivocado en el dibujo.

Para aquel hombre que no sabía qué cosa fueran las abstracciones geométricas, ni tenía noticia de ellas, aquélla era una verdad experimental; él afirmaba que, por tres puntos señalados con un puntero en la cara plana de una piedra ó en el terreno, que eran sus tableros de dibujo, se puede hacer pasar una raya de forma circular. Y esto lo afirmaba, como afirmaba que una piedra cae, porque lo había comprobado muchas veces.

Con experimentos análogos, convenientemente dirigidos, hubiera podido formular una Geometría experimental y rudimentaria.

De muy distinta manera enunciará la misma verdad un estudiante de matemáticas. Le han definido el punto, la recta, el plano, el círculo y otras abstracciones geométricas; le han hecho comprender que sólo á esas abstracciones se aplica la ciencia que estudia, que las figuras que traza en el encerado sirven para ayudar á la memoria y hacer más clara la explicación, pero que no puede buscar en ellas la demostración de los teoremas; le han demostrado de una vez para todas, en una forma absolutamente general, que por tres puntos de un plano, que no están en línea recta, puede pasar una circunferencia, y para él ésta es una verdad exacta y necesaria. No necesita, ni puede hacer experimento ninguno, porque con abstracciones no es posible experimentar. Pero debe tener en cuenta que no puede aplicar al mundo real esta verdad con esos caracteres de certidumbre y exactitud. Para aplicarla, necesitará primero demostrar la concordancia entre los cuerpos á los cuales ha de aplicarse, y las abstracciones á que se refiere la demostración matemática y esta concordancia nunca pasará de ser una verdad experimental.

En la observación y la experiencia han de fundarse necesariamente todas las leyes relativas al mundo real, y ya hemos visto que sobre tal fundamento sólo pueden asentarse verdades aproximadas y probables. A una probabilidad más ó menos grande se reducen, en definitiva, todas nuestras afirmaciones acerca de los fenómenos naturales; lo que hay es que en la mayoría de los casos, al formular una afirmación experimental, sabemos que la probabilidad de acertar es muy grande, pero no tenemos medio ninguno de someterla al cálculo.

En el cálculo de probabilidades sucede todo lo contrario: esta ciencia estudia precisamente aquellos casos en que es posible calcular matemáticamente el valor de una probabilidad. No se contenta con afirmar la probabilidad de que en una ruleta bien construída salgan el mismo número de *rojos* y de *negros* aproximadamente; calcula las probabilidades de que la relación entre los dos colores difiera más ó menos de la unidad, y afirma, por ejemplo, que en un millón de jugadas hay cien probabilidades contra una de que esa relación esté comprendida entre 1,0014 y 0,9986.

Esta es una verdad matemática que no puede comprobarse ni desmentirse por la experiencia. Un experimento sólo serviría para dar indicaciones acerca de la construcción de la ruleta. Si se realizase el millón de jugadas y la relación entre los *negros* y los *rojos* no estuviera comprendida entre 1,0014 y 0,9986, la ruleta podría parecer sospechosa; pero si saliera uno de los colores un millón de veces seguidas, afirmaríamos con entera seguridad que eso consistía en la construcción de la ruleta, no nos pararíamos á examinarla, ni aunque nos mostraran que la construcción era perfecta nos daríamos por satisfechos. Nunca nos resignaremos á admitir que este hecho se produzca por pura casualidad, y, sin embargo, no podemos, en rigor, negar la posibilidad del caso. La cantidad de combinaciones en un millón de jugadas es enorme: el número que la expresa tiene más de trescientas mil cifras; en la gran mayoría de las combinaciones los *rojos* y los *negros* alternan sin ley ninguna, pero hay dos combinaciones en que sólo figura un color. ¿Por qué negamos á la casualidad el derecho á elegir una de ellas?

Para hablar con rigor matemático no diríamos que es *imposible* que el hecho ocurra, diríamos que es *improbable*, lo mismo que el astrónomo de Poincaré debería limitarse á decir que es *probable* que Saturno esté en tal punto del cielo á tal hora; pero en uno y otro caso la probabilidad es tan grande que equivale para nosotros á la certidumbre. La diferencia está, según dije antes, en que el cálculo de probabilidades pone siempre de manifiesto la posibilidad de que sus predicciones resulten equivocadas, sin que se infrinjan las leyes que sirvieron para establecerlas; mientras que las ciencias experimentales admiten en todos sus razonamientos la exactitud de las leyes que aplican y no pueden, de ordinario, admitir la posibilidad de equivocarse, sin ponerse en contradicción con estas leyes. Por eso sus afirmaciones son necesariamente más rotundas en la forma, aunque no siempre tengan más sólido fundamento.

Pero aun esta diferencia desaparece en algunos casos. Permitidme citar lo que dice á este propósito M. Poincaré en uno de sus últimos libros: "Es sabido que en esta teoría „(la teoría cinética de los gases) se explican todas las pro- „piedades de los gases por una hipótesis sencilla: se supone „que todas las moléculas gaseosas se mueven en todos sen- „tidos con grandes velocidades y que siguen trayectorias „rectilíneas que sólo se alteran cuando una molécula pasa „muy cerca de las paredes del vaso ó de otra molécula. Los „efectos que nuestros sentidos groseros nos permiten apre- „ciar son los efectos *medios*, y en éstos, las grandes desvia- „ciones se compensan, ó por lo menos es muy improbable „que se compensen; de suerte que los fenómenos obser- „vables siguen leyes sencillas como la de Mariotte y Gay- „Lussac. Pero esta compensación de las desviaciones no es „más que probable. Las moléculas cambian constantemente „de lugar, y en estos desplazamientos continuos las figuras „que forman pasan por todas las combinaciones posibles. „Sólo que estas combinaciones son muy numerosas, casi to- „das conformes á la ley de Mariotte, algunas únicamente se „separan de ella. Estas se realizarán, pero será necesario „esperarlas mucho tiempo; si se observara un gas durante „un tiempo bastante largo, se le vería separarse, durante „un tiempo muy corto, de la ley de Mariotte. ¿Cuánto „tiempo sería necesario esperar? Si quisiéramos calcular „el número probable de años, encontraríamos que este nú- „mero es tan grande que necesitaríamos diez guarismos „sólo para escribir el número de cifras que habían de com-

„ponerle; poco importa, nos basta que ese número sea finito.

"No quiero discutir aquí el valor de esta teoría. Es claro „que si se adopta la ley de Mariotte se nos aparecerá ya „sólo con el carácter de contingente, puesto que ha de llegar „un día que en que no será verdadera.„

En estos renglones muestra M. Poincaré con entera evidencia la analogía, la identidad que presentan el cálculo de probabilidades y algunas teorías físicas, y por eso el insigne matemático francés dice de ellas, en otra ocasión, que "están fundadas en las leyes de los grandes números, y el „cálculo de probabilidades las arrastraría seguramente en „su caída.„

Cierto es que la aplicación de este cálculo presenta á veces dudas y dificultades, sea porque no se han determinado con suficiente exactitud las probabilidades á *posteriori* en cada caso, sea porque el número de casos considerados es demasiado pequeño, ó sea por otro motivo cualquiera; pero éstas son dificultades inherentes á todo estudio práctico.

El ingeniero que proyecta una obra fundado en fórmulas y datos numéricos, de aproximación á veces muy dudosa, no obtendrá de ordinario más aproximación en sus cálculos que el actuario que proyecta una Compañía de seguros fundado en estadísticas fidedignas.

El cálculo de probabilidades es un guía útil y seguro en el cual puede depositarse absoluta confianza, siempre que se cuide de aplicarle en condiciones razonables.

No necesitaba ciertamente, para continuar aplicándose, que yo le otorgara este certificado; pero, en fin, yo necesitaba hablaros de algo, y estas disquisiciones, inútiles en sí, habrán tenido á lo menos una utilidad: la de permitirme cumplir bien ó mal, más mal que bien, de seguro, el deber para mí gratísimo de abrir las puertas de esta Academia á nuestro nuevo é ilustre compañero.