DISCURSO

LEÍDO ANTE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

EN SU RECEPCIÓN PÚBLICA

POR EL

SR. D. LUIS OCTAVIO DE TOLEDO Y ZULUETA

Y CONTESTACIÓN DEL

SR. D. MIGUEL VEGAS Y PUEBLA-COLLADO

El día 15 de Marzo de 1914.

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO EDITORIAL
Calle de San Marcos, núm. 42.
—
1914

DISCURSO

DEL

SR. D. LUIS OCTAVIO DE TOLEDO Y ZULUETA

Señores Académicos:

Desde el momento en que llegó á mi noticia os habíais dignado elegirme para ocupar un sillón en esta doctísima Academia, acudió á mi mente el título de aquella ingeniosa composición del insigne Campoamor: *¡Quién supiera escribir!...* pues desde aquel instante me encuentro más necesitado que nunca de *saber* hacerlo, y en no pocas ocasiones he exclamado: ¡si yo supiera escribir, cuán bien sabría expresar el agradecimiento que mi alma encierra para todos y cada uno de vosotros por haberme concedido honra tan señalada como la de ocupar un sitio á vuestro lado! Pero *no sé escribir*, ni tampoco *hablar* con tanta expresión y elocuencia como la protagonista de la poesía mencionada, y por eso no puedo ofreceros otra manifestación de mi gratitud que esta escueta y simple afirmación de su existencia, y con ella una afirmación no menos firme y sincera del propósito de poner toda mi voluntad al servicio de la Academia, ya que el ofrecimiento de mi inteligencia sea de tan escasa valía.

Acrecienta mi temor y mi pequeñez, en este para mí solemnísimo instante, el pensar en los dos ilustres varones que me han precedido en el lugar que, por vuestra benevolencia, voy á ocupar: los Excmos. Sres. D. Miguel Merino y Melchor y D. Manuel Benítez y Parodi, porque, recordad, señores, lo que ellos fueron, y fácilmente caeréis en la cuenta de lo difícil que es llenar el vacío que dejaron. Comenzó el primero su vida científica explicando una cátedra de Cálculos y Mecánica en la antigua Escuela preparatoria de Ingenieros y Arquitectos; pasó después al Cuerpo de Telégrafos, y poco más tarde ingresó en el Observatorio Astronómico, dedicando su vida casi por entero al cultivo de la Astronomía y la Meteorología. Era de carácter poco abierto y nada expansivo; reconcentrado y recogido en su gabinete de trabajo, era, como su ciencia predilecta, poco amigo de grandes y aparatosas exhibiciones, y aunque pródigo de sus consejos y de sus múltiples y muy variados conocimientos, gustaba más de las conversaciones íntimas y de los coloquios entre amigos, que de brillar en Juntas y Asambleas, donde su voz hubiera sido siempre oída con la atención y el respeto á que por su profundo saber y su honradez acrisolada era acreedor. Del casticismo de sus escritos y de su dominio del idioma patrio nada he de decir, ya que autoridad tan respetada por todos como la del llorado Menéndez y Pelayo (1) le prodigó justos elogios.

De carácter abierto y acometedor, muy en armonía con su profesión militar; de una actividad verdaderamente prodigiosa, que le permitía atender á ocupaciones de géneros y caracteres muy diversos, el general Benítez, como en sus últimos años le llamábamos cuantos tuvimos el honor de tratarle, era de genio tan distinto y diferenciado del de don Miguel Merino, cuanto diversos eran en su aspecto físico. El general Benítez trabajaba en el Estado Mayor del Ejército, en la Sociedad Geográfica, en un centenar de Juntas y Centros informadores; y en medio de estas atenciones encontraba tiempo para escribir y publicar obras de materias varias, asistir á Congresos y conferencias, y para dedicar tiempo á la enseñanza de las matemáticas elementales, labor en la cual muy pocos le habrán igualado, y dudo le haya superado nadie, ya que su mismo carácter y su ingenio agudísimo le servían para atraer á sus discípulos y para hacer amena y atractiva la exposición de las más abstrusas y difíciles teorías.

Sin embargo, á pesar de estas diferencias, en más de un punto coincidían los Sres. Merino y Benítez: era uno de ellos su espíritu crítico, delicado y sensible, y su prodigiosa percepción de los más tenues defectos deslizados en obra ó trabajo de cualquiera índole que con atención examinasen; rígidos, pero justos censores, fueron mis ilustres predecesores. Leed los varios informes que en vuestros archivos conservaréis escritos por D. Miguel Merino; recordad vuestras conversaciones científicas con D. Manuel Benítez, ya que informes por él redactados no podéis conservar por no haber llegado á tomar posesión de su sillón en esta Academia, y veréis confirmadas mis palabras anteriores.

Era otro punto común su afición y predilección por los estudios referentes á la teoría y resolución de las ecuaciones algébricas, especialmente en la parte referente á la solución numérica. Don Miguel Merino tradujo, ó adaptó al castellano, mejor dicho, la célebre Memoria de Encke relativa al método de Gräffe, y él fué quien en nuestra patria lo dió á conocer, en unión del de Horner; métodos que es de lamentar no hayan salido de las aulas de nuestras Facultades de Ciencias, donde hace largos años se enseñan; y en las obras de Algebra de D. Manuel Benítez han iniciado sus estudios en estas teorías la mayoría de los cultivadores de la Matemática en nuestro país, especialmente aquellos que aún no han traspasado los linderos de la edad madura, y desde luego la casi totalidad de cuantos proceden de los diversos Cuerpos militares.

Y al llegar á este punto me habéis de permitir dedique un recuerdo en este momento, el más solemne de mi vida, á quien me enseñó los primeros principios de las Ciencias Exactas y despertó en mi alma la afición á este género de estudios y trabajos, á mi querido padre, cuya memoria es para mí tan sagrada. Dedicado gran parte de su vida á la enseñanza de las Matemáticas elementales preparatorias para las Escuelas civiles y militares, él guió mis primeros pasos en estos estudios y él me aficionó á la teoría de las ecuaciones, objeto predilecto de sus meditaciones, estudios y enseñanza, coincidiendo en este punto con mis ilustres predecesores. ¡Dejad que un hijo amante y respetuoso invoque la memoria de su padre idolatrado en momentos en que la más profunda emoción embarga su ánimo!

Con estos antecedentes no ha de llamaros la atención que al tratar de elegir un tema para cumplir el precepto reglamentario que me obliga á disertar ante vosotros acerca de un tema científico en éste momento solemne de posesionarme de la plaza para la cual me designasteis, en esa teoría de la resolución de ecuaciones me haya fijado con especial atención. Pero esta elección se encuentra limitada y condicionada por multitud de consideraciones que voy á exponeros rápidamente y que fácilmente os explicarán que estos párrafos lleven el título de: *Algunos de los descubrimientos realizados en la teoría y resolución de ecuaciones durante el siglo XIX.*

Pretender historiar en un solo discurso la totalidad de los descubrimientos realizados en el pasado siglo en esta teoría, y aun en cualquiera otra de la Matemática, es sencillamente imposible, á menos que se le dé proporciones desmesuradas ó que la noticia sea tan escueta y rápida que ,más que un examen de los adelantos realizados, se convierta en un sencillo índice, mejor ó peor ordenado, de todos ó la mayor parte de ellos. Yo tengo la seguridad de que al hablar de los trabajos de los Fourier, Sturm, Lagrange, Cauchy, Abel, Galois, Horner, Gräffe, Cayley, Sylvester, Kronecker, Weiersstras, y tantos y tantos otros, no haré mas que recordaros nombres por todos vosotros conocidos, y que comprenden simplemente unos cuantos de aquellos que más se han distinguido por su talento y por el avance tan valioso que sus investigaciones y descubrimientos han dado á la teoría en que nos vamos á ocupar. Pero al lado de estos nombres pudieran, y debieran citarse, en una historia detenida y minuciosa, los de una pléyade inmensa de beneméritos trabajadores que perfeccionaron con su labor algún punto secundario, algún detalle, que aunque sencillo y, al parecer, de escaso valor, desbrozó el camino tal vez y facilitó la conquista de algún descubrimiento notable.

Plenamente convencido de esta imposibilidad, traté de limitar mi trabajo á los puntos que me parecieron más culminantes, de mayor relieve: á aquellos que han marcado época en la teoría, imprimiéndole caracteres diferentes á los que anteriormente tenía, haciéndola seguir rumbos antes no sospechados; y cuando traté de esta limitación se presentaron á mi imaginación cuatro nombres destacándose sobre todos los demás: los de Abel y Galois en la teoría pura de las ecuaciones algébricas, y los de Sturm y Gräffe en la resolución de las numéricas. Abel cierra con alguno de sus descubrimientos un período del estudio de esta teoría, que, comenzando en los más antiguos matemáticos, tiene su expresión más acabada y perfecta en la obra de Lagrange, y con otros inicia uno nuevo con el estudio de las ecuaciones que llevan su nombre: Galois abre otro nuevo período con su aplicación á la teoría de ecuaciones de los descubrimientos que realiza ó inicia, al menos, en la teoría interesantísima de los grupos de sustituciones; Sturm, con el descubrimiento del teorema famoso que lleva su nombre resuelve de una manera definitiva, teóricamente, al menos, el problema de la determinación del número de raíces reales de una ecuación numérica comprendidas en un intervalo dado, y Gräffe, abandonando los antiguos métodos de lentos y laboriosos tanteos, acomete de frente el de la aproximación inmediata y rápida de los valores numéricos de todas las raíces de una ecuación. Examinemos la labor de estos insignes matemáticos, sin perjucio de dedicar un recuerdo á algunos otros no menos eximios.

Mas antes habéis de permitirme os recuerde el estado de estas diversas teorías al finalizar el siglo XVIII, ya que sólo de esta manera es posible darse cuenta exacta de los pasos gigantescos que en el siglo XIX han dado los geómetras antes citados. Imposible es fijar la época en que fueron descubiertas las fórmulas de solución de las ecuaciones de los dos primeros grados; es probable que la resolución de las de primer grado se presentase espontáneamente á los primeros geómetras; tan sencilla y natural es, que casi desde los primeros pasos que se dan en el estudio de la Aritmética, sobre todo en el de las operaciones inversas, sustracción y división, se están resolviendo, más ó menos conscientemente, ecuaciones sencillas de este primer grado. Casos particulares de la resolución de las de segundo grado aparecen en los más antiguos escritos matemáticos, especialmente en los de Diofanto (siglo IV de nuestra era); y, desde luego, los matemáticos indios y árabes del siglo XII, por no remontarnos á algunos anteriores, pero algo más inciertos, conocían las fórmulas de solución en forma idéntica, en el fondo, á la actual; hoy mismo se emplea en la exposición de esta teoría el elegantísimo y sencillo método atribuído á Bhascara, que vivió en el referido siglo XII (2).

Los italianos Escipión Ferreo y Nicolás Fontana (Tartalea) y el francés Jerónimo Cardano dieron á conocer en la primera mitad del siglo XVI las fórmulas de resolución de las ecuaciones de tercer grado que llevan el nombre de este último geómetra; y poco después Luis Ferrari, discípulo de

Cardano, da las relativas á la ecuación de cuarto grado; pero las fórmulas obtenidas, aunque siempre exactas y verdaderas, son tan complejas y de tan difícil aplicación para la resolución práctica de ecuaciones, que ya Lacroix (3), al sospechar la imposibilidad de la solución de ecuaciones de grado superior por un número limitado de operaciones aritméticas, coincide con Lagrange en la idea de que, aunque se obtuviese esta resolución, las fórmulas á que se llegase serían prácticamente inútiles.

Bien conocido es el objeto de la resolución algébrica de una ecuación; muchos matemáticos lo han definido, aunque tal vez ninguno con tanta precisión como Lagrange: determinar una función de los coeficientes literales y del grado de la ecuación propuesta que, sustituída en lugar de la incógnita, la deje idénticamente satisfecha. La primera idea que se ofreció á los matemáticos para resolver este problema fué, indudablemente, la de buscar artificios en virtud de los cuales se pudiese dejar aislada la incógnita en un miembro de la ecuación y en el otro los coeficientes ó funciones de ellos; se trató después de encontrar transformaciones de la incógnita que hiciesen la ecuación semejante á otra que ya se supiese resolver ó, al menos, descomponer en otras de grados inferiores. Á estas soluciones deben referirse, no sólo las citadas en el párrafo anterior, sino también el método de Descartes para la descomposición de la ecuación de cuarto grado en otras de segundo; el de Tschirnhausen para reducir á binomia la ecuación dada; el de Euler, que consiste en fingir de antemano la forma de la expresión general de la raíz y buscar en seguida las formas que es preciso colocar bajo los radicales que se suponen, y aun el de Bézout, en el cual, aunque fundado en principio análogo, comienza, sin embargo, á dibujarse la ley de elevación sucesiva del grado de las reducidas.

Vandermonde, en una excelente Memoria, publicada entre las de la Academia de Ciencias, de París, correspondientes al año 1771 (4), intentó resolver el problema planteado, estudiándolo con verdadera precisión y profundidad. El procedimiento de Vandermonde se funda en que si la fórmula de resolución de una ecuación fuese conocida y se pusieran en ella, en lugar de los coeficientes, sus valores en función de las raíces, la fórmula debería producir indistintamente una cualquiera de estas raíces; y partiendo de esta observación toma varias letras, que representan las raíces, y trata de componer una expresión que por la combinación de signos se reduzca indiferentemente á una ú otra de las raíces, según se desee, y que satisfaga idénticamente á la ecuación dada, como es natural. Claro es que la dificultad reaparece al tratar de expresar estas funciones de las raíces por medio de los coeficientes de la propuesta, ó al tratar de hacerlas depender de otras ecuaciones cuya solución sea conocida. Y aunque es cierto que Vandermonde da reglas para la formación de ciertas formas abreviadas, que llama *tipos de combinación*, ó simplemente *tipos*, estas formas no son, en resumen, mas que funciones simétricas de las raíces; pero su cálculo es tan largo y laborioso, que algunas páginas de su Memoria no se leen sin gran trabajo y sin grandísimo esfuerzo mental. Además, que el método, aceptable, si no excelente, para las ecuaciones de los cuatro primeros grados conduce, al llegar á la ecuación del quinto, á la solución de una del grado sexto, y es, por tanto, inaplicable. En la Memoria de Vandermonde se encuentra también una solución muy aceptable de la ecuación binomia del grado once, obteniendo un resultado no conocido anteriormente (5).

Si todas las tentativas anteriores son dignas de aprecio y de consideración, hay que reconocer y confesar que ninguna de ellas tiene el interés ni la profundidad que José Luis Lagrange supo llevar á la solución que da de este problema en sus trabajos (6). Comenzó Lagrange haciendo un detenido estudio crítico de los métodos utilizados por sus antecesores para deducir que cualesquiera que sean las ecuaciones de cuya solución se hace depender la de la propuesta, ecuaciones que se han llamado *reducidas* ó *resolventes*, sus coeficientes son funciones de los de la dada, y, por consiguiente, y en último resumen, funciones de las raíces de ésta; por consecuencia, cada reducida será de un grado igual al número de valores que pueda adquirir la función de las raíces que se considere; número que, en general, es igual al de permutaciones sin repetición que pueden formarse con las raíces. La cuestión se reduce después á buscar la forma más conveniente de esta función para que el grado de la reducida se rebaje cuanto sea posible.

Hecho este estudio, Lagrange expone su método, uniforme, idéntico en el fondo, para todas las ecuaciones cuyo grado sea un número primo; método que consiste en elegir una función lineal de las raíces de la ecuación cuyos coeficientes sean números conocidos, construir la resolvente cuyo grado se determina *a priori* por el número de permutaciones que pueden formarse con todas las raíces de la ecuación dada, y disponer de los coeficientes de la función elegida de manera que, siendo iguales entre sí varios de los valores adquiridos por esa función, el grado de la resolvente pueda reducirse ó rebajarse cuanto sea dable. En sus diversos escritos demuestra que si los coeficientes de la función lineal elegida son las raíces de la unidad de orden ó grado igual al de la propuesta, se consigue el objeto propuesto, al menos, en las ecuaciones de segundo y tercer grado. La función lineal así formada se suele designar actualmente con el nombre de *función de Lagrange.*

Como acabo de indicar, el método es excelente aplicado á las ecuaciones de segundo y tercer grado, ya resueltas, según hemos dicho, en tiempos muy anteriores á los de Lagrange; pero veamos lo que ocurre al llegar á la del quinto grado. La ecuación resolvente que da el valor de la función lineal de las cinco raíces se eleva al grado $5! = 120$; pero siendo los coeficientes de esta función las raíces quintas de la unidad, puede observarse que, si multiplicamos la función sucesivamente por cada una de estas cinco raíces, se obtendrán otras tantas funciones semejantes donde las raíces de la propuesta no habrán hecho mas que cambiar de lugar; por consiguiente, la agrupación de estos cinco productos equivale á la de cinco de los valores obtenidos aplicando todas las sustituciones de las raíces á la función de Lagrange. De aquí se deduce que si la función lineal tiene 120 valores, su quinta potencia tiene la quinta parte de ellos, ó sean 24 solamente. Y aun estos 24 se dividen en seis grupos, porque por la naturaleza misma de las raíces imaginarias de la unidad, cada una de las llamadas primitivas, con sus potencias sucesivas, da todas las demás. Ahora bien; como en este caso hay cuatro de estas raíces, la misma función en que se empleen sucesivamente y de la misma manera estas cuatro raíces responderá á cuatro valores, como si hubiesen sido permutadas cuatro veces las raíces de la propuesta. Toda expresión simétrica de estas cuatro funciones, suma, producto, suma de productos binarios, ternarios, etcétera, no tendrá mas que la cuarta parte del total de valores, ó sean *seis* diferentes; luego la función podrá mirarse como la raíz de una ecuación del cuarto grado, cuyos coeficientes estarán dados por una del grado sexto, cayéndose así en la imposibilidad de aplicar este método á la resolución de las ecuaciones de quinto grado. Y algo peor sucede todavía en las del grado séptimo, pues el de la resolvente, que es primitivamente igual á $7! = 5040$, se rebaja nada más al orden 120.

El método que Lagrange aplicaba á las ecuaciones cuyo grado es un número compuesto difiere algo del empleado en las de grado primo, pues la naturaleza de este grado ó exponente permite reducciones y simplificaciones en multitud de cálculos y transformaciones auxiliares; pero aun así, para las ecuaciones de orden superior al cuarto, el grado de la resolvente no es nunca inferior al de la propuesta, y el problema se presenta como insoluble.

No fué éste el único fruto que la inteligencia asombrosa de Lagrange dió en esta rama de la ciencia, sino que, volviendo á acometer el problema de la resolución de las ecuaciones binomias, ya atacado por Gauss (7) con tanta energía como brillantez, dió de él una solución tan completa y perfecta como pueda apetecerse. Y más adelante veremos que el problema de la resolución numérica de ecuaciones le debe también soluciones muy dignas de consideración, aprecio y admiración.

Esta era la situación del problema enunciado en párrafos anteriores al comenzar el siglo XIX, cuando aparece Nicolás Enrique Abel, cuya labor científica es verdaderamente asombrosa en conjunto y en detalle, y todavía más digna de admiración si se atiende á lo corto de su vida y á las condiciones en que la realizó. Nacido Abel en Finoe (Noruega), en 5 de Agosto de 1802, de una familia de muy escasos recursos, educado en la Escuela catedral y después en la Universidad de Cristianía, su afición á los estudios matemáticos se desarrolla bajo la inspiración de Holmboë que había de ser su constante y, en algunas ocasiones, casi único protector. Sigue sus estudios en medio de dificultades económicas sin cuento; viaja por el centro de Europa, y aunque en Berlín le atiende Crelle y en París le oye con benevolencia Legendre, la mayoría de los matemáticos de renombre no hacen gran caso de aquel joven, pálido, enfermizo, de aspecto de pobreza, que se les presenta armado de Memorias y trabajos que unos no leen y otros no entienden, ó, al menos, no se dan cuenta exacta de la verdadera importancia é interés que encierran. Vuelve á su patria, después de algunos meses de viaje, y en ella muere extenuado en 6 de Abril de 1829, es decir, cuando aún no había cumplido los veintisiete años, después de haber sufrido grandes penalidades, casi hambre en algunas ocasiones, y cuando parecía que su situación económica iba á llegar á una solución satisfactoria.

Cuatro son las Memorias fundamentales que acerca de la teoría de ecuaciones dejó escritas Abel; á ellas parece que precedió otra, hoy perdida ó no encontrada, al menos, si existió. Según los datos adquiridos por uno de sus biógrafos, Lucas de Pesluan (8), esta Memoria, escrita en 1821, ¡á los diez y nueve años!, se refería á la resolución algébrica de ecuaciones, y atacando las de quinto grado, creyó haber encontrado su solución; aprobada la Memoria por Holmboë y Hansteen, maestros de Abel, la remitió al examen de otro matemático noruego residente en Dinamarca, Degen, y aunque éste no señaló ni descubrió el error que la Memoria debía contener no se convence por completo de la bondad del trabajo y pide le envíen aplicaciones numéricas que confirmen los resultados teóricamente obtenidos y expuestos.

De las cuatro Memorias antes citadas, las dos primeras y la cuarta se refieren concretamente á la demostración de la siguiente interesantísima proposición: *es imposible resolver algébricamente la ecuación general de quinto grado,* y á deducir, como consecuencia de esta demostración, la imposibilidad de hallar fórmula algébrica que resuelva las ecuaciones de grado superior al cuarto. La primera de estas Memorias la publicó Abel en Cristianía el año 1824; la segunda apareció en el primer tomo del *Journal de Crelle* el año 1826 (9), y la cuarta no vió la luz hasta el año 1839, en la edición de sus obras que publicó Holmboë. De todas ellas, la más completa y concluyente es la segunda; pues la última, escrita tal vez en los últimos meses de su vida, aparece en los manuscritos de Abel como incompleta é in-acabada. No es posible, sin entrar en enojosas demostraciones y en enfadosos cálculos, incompatibles con la índole de este solemne acto, dar una idea exacta del contenido de esos admirables trabajos. Las proposiciones á que en su análisis llega y le sirven de base á la demostración son las tres siguientes:

Primera. Toda función algébrica v de orden p y grado m puede representarse por la fórmula

$$v = q_o + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots\ldots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

en donde n es un número primo, q_o, $q_2 \ldots\ldots q_{n-1}$ funciones de orden n y de grado $m - 1$ á lo más, y p una función algébrica de orden $\mu - 1$, y tal, que es imposible expresar $p^{\frac{1}{n}}$ por una función racional de q_o, $q_2 \ldots\ldots q_{n-1}$.

Segunda. Si una ecuación algébrica es resoluble algébricamente, se puede siempre dar á la raíz una forma tal que todas las expresiones algébricas que la constituyen puedan expresarse por funciones racionales de las raíces de la ecuación propuesta.

Tercera. Si una función racional de varias cantidades, x_1, $x_2, \ldots\ldots$, tiene m valores diferentes, se podrá siempre hallar una ecuación del grado m en la cual todos los coeficientes sean funciones simétricas de x_1, $x_2 \ldots\ldots$, y que tenga por raíces los m valores de la función; pero es imposible hallar una ecuación de la misma forma de grado menos elevado y que tenga por raíces uno ó varios de estos valores.

La proposición fundamental antes citada, que había sido enunciada anteriormente por el matemático y médico italiano de fines del siglo XVIII, Pablo Ruffini; que después ha sido objeto de multitud de trabajos sumamente interesantes, como los de Wantzel y Hamilton, y de alguno tan notable, por la sencilla demostración que contiene, como el publicado por Carlos Hermite cuando aún era estudiante (10), en el que, después de probar que la ecuación de sexto grado, de que depende la solución de la de quinto, no admite factores racionales de segundo ni de tercer grado, demuestra que las raíces de la reducida de Lagrange no pueden expresarse en radicales cuadráticos ni cúbicos, que es esencialmente irreducible, y, como consecuencia, que la resolución algébrica de la ecuación de quinto grado es irrealizable, cierra por completo el período histórico durante el cual se trataba por los geómetras de resolver el problema de hallar fórmulas algébricas de resolución de las ecuaciones generales de un grado cualquiera, y por esa razón el nombre de Abel culmina y se destaca sobre cuantos se dedican al estudio de la misma cuestión.

No se limita la labor de Abel en esta teoría á este descubrimiento, tan interesante y concluyente, sino que en una tercera Memoria, publicada el año 1829 en el *Journal de Crelle*, y titulada: *Sobre una clase particular de ecuaciones resolubles algébricamente* (11), se propuso averiguar la existencia ó no existencia de clases especiales de ecuaciones de grados superiores que fuesen resolubles algébricamente, consiguiendo en ella demostrar la proposición siguiente: *Si las raíces de una ecuación de grado cualquiera están ligadas entre sí de tal manera que todas estas raíces pueden expresarse racionalmente por medio de una de ellas, que designaremos por x; si, además, designando por θx y $\theta_1 x$ otras dos raíces cualesquiera, se tiene $\theta . \theta_1 x = \theta_1 . \theta x$, la ecuación de que se trata será siempre resoluble algébricamente. Del mismo modo, si se supone la ecuación irreducible y su grado expresado por $\alpha_1^{v_1} \alpha_2^{v_2} \ldots\ldots \alpha_w^{v_w}$*, en donde α_1, α_2, ... α_w *son números primos diferentes, se podrá referir la resolución de esta ecuación á la de v_1 ecuaciones de grado α_1, de v_2 del grado α_2*, ..., etc., creando así un nuevo campo de investigaciones con el estudio de este género de ecuaciones, que en honor suyo, y á propuesta de Kronecker, han recibido el nombre de *ecuaciones abelianas* y son objeto de estudio predilecto de multitud de analistas contemporáneos.

Vida tan corta como accidentada y tormentosa fué la de Evaristo Galois (12). Nació en Bourg-la-Reine en 25 de Octubre de 1811; educado en un Colegio que allí tenía establecido su familia, ejerce sobre esta educación una influencia preponderante su madre, que poseía una cultura clásica nada vulgar. El año 1823 ingresa como interno en el Colegio Louis-le-Grand (París) y allí prosigue sus estudios con muy varios resultados, pues si bien alguno de sus profesores, como Richard, dice en sus notas (conservadas en los archivos del Colegio): *Este alumno tiene una superioridad notable sobre todos sus condiscípulos; no trabaja mas que en las partes superiores de las Matemáticas*, otros, como el profesor de Física y Química Thillage, niegan esta superioridad. En lo que convienen todos sus biógrafos es en que los tratados de Matemáticas corrientes en aquella época, especialmente los de Algebra, no satisfacen los anhelos de aprender y saber de Galois y busca las obras clásicas de Lagrange, la *Resolución de las ecuaciones numéricas*, la *Teoría de funciones analíticas* y las *Lecciones sobre el cálculo de las funciones*, y las Memorias de los Gauss, Cauchy, etc., para beber en ellas los fundamentos de su ciencia predilecta.

Por dos veces se presenta al ingreso en la Escuela Politécnica y las dos veces es rechazado; hecho que mereció el siguiente juicio durísimo de Terquem, al afirmar *que un candidato de una inteligencia superior está perdido ante un examinador de inteligencia inferior* (13); la segunda de ellas, en un arrebatado movimiento de desesperación arroja al rostro de uno de los examinadores, Binet y Lefeburc de Fourcy, el trapo de limpiar la pizarra. En 1829 ingresó en la llamada *Escuela preparatoria*, copia y sucesora de la antigua *Escuela normal,* cuyo nombre recobra al poco tiempo, y por su participación en sucesos políticos, en los cuales se distingue por sus exaltadas y avanzadas ideas y por su espíritu rebelde, que le conduce á insubordinaciones evidentes, es expulsado de la referida Escuela en Enero de 1831. Poco tiempo después, en 30 de Mayo de 1832, en un duelo, cuyas causas no son conocidas con certeza absoluta, recibió un balazo en el vientre que le condujo al sepulcro en pocas horas.

El conjunto de las obras de Galois se encierra en un cuaderno de bien pocas páginas (14), unas sesenta y dos, y se compone de varios artículos publicados en los *Anales de Gergonne* y en el *Boletín de Férussac;* de la célebre carta dirigida á Augusto Chevalier, escrita la noche anterior á su funesto desafío; de una *Memoria sobre las condiciones de resolubilidad de las ecuaciones por radicales*, y de un fragmento titulado: *De las ecuaciones primitivas que son solubles por radicales*. Posteriormente, el historiógrafo Jules Tannery ha publicado, con el título de *Manuscritos de Evaristo Galois* (15), algunos fragmentos y notas inéditas que añaden interés á los trabajos de este malogrado sabio.

Si las obras de Galois no son muy extensas, son, en cambio, muy intensas, de lectura muy difícil y no fácil comprensión; razones que explican, en parte, el abandono en que yacieron durante largos años; pero en esas pocas páginas se encuentra el germen de toda el Algebra moderna y han sido la base de los trabajos interesantísimos de multitud de matemáticos contemporáneos. Oigamos al mismo Galois definir el problema que acomete (16), porque, aparte la forma brillante con que lo hace, todas sus palabras encierran enseñanzas profundas:

"La Memoria que sigue ha sido dirigida hace, próximamente, siete meses á la Academia de Ciencias, de París, y extraviada por los comisarios que debían examinarla. Esta obra no ha adquirido, por tanto, ninguna autoridad para hacerse leer, y no es esta razón la última que ha detenido al autor en su publicación. Si al fin se ha decidido, es por esperar que geómetras más hábiles, apoderándose del mismo campo, no le hagan perder los frutos de un largo trabajo.„

"El objeto que se ha propuesto es determinar los caracteres para la resolubilidad de las ecuaciones por radicales. Podemos afirmar que no existe en el análisis puro materia más obscura y más aislada, tal vez, de todo el resto. La novedad de esta materia ha exigido el empleo de nuevas denominaciones, de nuevos caracteres. No dudamos que este inconveniente no desanimará desde los primeros pasos al lector, que perdona apenas á los autores de gran crédito que le hablen un lenguaje nuevo. Pero, en fin, nos ha sido forzoso conformarnos á la necesidad del asunto, cuya importancia merece, sin duda, alguna atención.„

"Dada una ecuación algébrica, de coeficientes cualesquiera, numéricos ó literales, reconocer si sus raíces pueden expresarse por radicales; tal es la cuestión de la cual ofrecemos una solución completa.„

"Si ahora me dais una ecuación que hayáis elegido á vuestro capricho y deseáis conocer si es ó no soluble por radicales, yo no tendré nada más que hacer que indicaros el medio de responder á vuestra pregunta, sin querer encargar ni á otra persona ni á mí de hacerlo. En una palabra: los cálculos son impracticables.„

"Parecerá, según esto, que no puede deducirse ningún fruto de la solución que proponemos.„

"En efecto; esto sucedería si la cuestión se presentase ordinariamente bajo este punto de vista. Pero la mayoría de las veces, en las aplicaciones del análisis algébrico se llega á ecuaciones de las cuales se conocen con antelación todas las propiedades; propiedades por medio de las cuales será fácil responder á la pregunta por las reglas que expondremos. Existe, en efecto, para estas clases de ecuaciones un cierto orden de consideraciones Metafísicas que se elevan sobre todos los cálculos y que frecuentemente los hacen inútiles. Citaré, por ejemplo, las ecuaciones que dan la división de las funciones elípticas y que el célebre Abel ha resuelto. Y no es ciertamente por su forma numérica por lo que este geómetra llegó á la solución. Todo lo que forma la belleza, y á la vez la dificultad de esta teoría, es que sin cesar se indica la marcha de los cálculos y se prevén los resultados sin poderlos nunca efectuar. Citaré todavía las ecuaciones modulares.„

Los descubrimientos capitales de Galois son el del *grupo* de una ecuación y el de *los subgrupos invariantes.* Para definir el grupo de una ecuación comenzó por definir el concepto de *dominio de racionalidad*, llamando *racional* á toda cantidad que puede expresarse racionalmente, en el sentido ordinario de esta palabra, en función de un determinado conjunto de cantidades (cuerpo de números) que constituyen el *dominio*; en particular, el conjunto formado por los coeficientes de la ecuación algébrica dada y un cierto número de cantidades, que llama *adjuntas*, y se suponen conocidas, constituyen un dominio de racionalidad. Después de muy sutiles razonamientos, Galois llega á demostrar la siguiente proposición fundamental:

Dada una ecuación algébrica cuyas raíces se suponen desiguales, existe siempre un grupo de sustituciones de estas raíces tal, que toda función de estas raíces invariable por las sustituciones del grupo es racionalmente conocida; y, recíprocamente, toda función de las raíces determinable racionalmente, queda invariable por la aplicación de esas sustituciones. El grupo de sustituciones que goza *de esa propiedad se denomina* GRUPO DE LA ECUACIÓN.

El tan sabio cuan desdichado geómetra cuya labor vamos reseñando llega en su Memoria antes citada á establecer las condiciones á que debe satisfacer una ecuación para que sea soluble por radicales, aquilatando estas condiciones para las irreducibles de grado primo, para las cuales establece la siguiente conclusión: *Para que una ecuación irreducible, de grado primo, sea soluble por radicales es necesario y suficiente que, conocidas dos cualesquiera de sus raíces, las demás puedan expresarse racionalmente en función de ellas.*

En la segunda mitad del siglo pasado la teoría de Galois ha experimentado adiciones y modificaciones de importancia extraordinaria, por haberse dedicado á laborar en ella matemáticos tan insignes como Jordán y Picard en Francia, Klein, Netto y Weber en Alemania, Betti y Bianchi en Italia, y tantos otros cuyos nombres no me sería difícil reunir acudiendo á cualquiera bibliografía. Pero el descubridor de la teoría, y con ella horizontes extensísimos y campos de investigación vastísimos, casi inagotables, fué Galois, y por eso he querido llamaros la atención sobre esta extraña y asombrosa figura, cuyo paso por la vida, aunque tan rápido y fugaz, dejó en la Ciencia estela tan profunda y luminosa.

Si en la resolución algébrica de ecuaciones se han dado en el siglo XIX los dos pasos gigantescos que en los párrafos anteriores he reseñado, siquiera sea someramente, en la resolución puramente numérica de las mismas se han hecho descubrimientos de no menor valía é importancia. Demos cuenta de algunos de los más interesantes.

Ya en otro trabajo (17) he tenido ocasión de afirmar, de completo acuerdo con la opinión manifestada hace largos años por D. Miguel Merino (18), que el problema general de la resolución numérica de las ecuaciones no lo ha enunciado nadie con la precisión, sencillez y elegancia que lo hizo

Lagrange en su *Tratado de la resolución de las ecuaciones numéricas*, al concretarlo en las siguientes palabras: *Dada una ecuación numérica sin noción alguna preliminar relativa á la especie ni magnitud de sus raíces, hallar los valores numéricos de éstas, exactos, si es posible, ó tan aproximados á los verdaderos cuanto pueda desearse.*

De tres clases diferentes pueden ser las raíces de una ecuación numérica, reales conmensurables, reales inconmensurables é imaginarias. La determinación de las reales conmensurables, tanto enteras como fraccionarias, es tan sencilla, y pudiéramos decir que tan natural, exige cálculos tan fáciles y poco complicados, que los geómetras del siglo XVI, especialmente Cardano, Stifel, Pelletier y sus discípulos y sucesores, los conocían ya y sabían calcular este género de raíces. Prescindiré de los perfeccionamientos que estos procedimientos hayan podido adquirir en el siglo XIX, perfeccionamientos puramente de detalle que nada nuevo ni verdaderamente interesante han añadido, en el fondo, á los métodos, de antiguo conocidos, y pasaré á las otras partes del problema.

El problema de la determinación de los valores numéricos de las raíces no conmensurables de una ecuación comprende varias partes que, aunque íntimamente ligadas entre sí, han sido objeto de estudio diverso y de investigaciones parciales por los matemáticos, á causa de que la dificultad que encontraban en la solución del problema, al acometerlo de frente y en su totalidad, les obligó á dividirlo y subdividirlo para tratar de conseguir victorias parciales sobre enemigo que tales resistencias presentaba á dejarse vencer en conjunto. Las diversas partes en que el problema se ha dividido pueden reducirse á las dos fundamentales que siguen: primera, conocimiento exacto del número de raíces reales ó imaginarias contenidas en un intervalo ó en un recinto dado; y segunda, determinación del valor de cada una de las raíces con la aproximación que en cada caso pueda desearse. Ya veremos que en el método de Gräffe puede prescindirse de la primera de estas cuestiones.

Muy reducido es el inventario de los conocimientos relativos á la determinación del número de raíces reales contenidas en un intervalo determinado anteriores á los trabajos de Lagrange; se reducen, en realidad, al conocimiento de la paridad del número de ellas contenidas entre dos números dados deducida de la igualdad ó desigualdad de signos de los resultados obtenidos al sustituir en la ecuación los valores extremos del intervalo; á la regla de Descartes, hallada y publicada hacia el año 1637, que hace conocer un número superior, en general, al de raíces reales que la ecuación contiene; regla que, sin fundamento serio, se ha atribuído á Harriot en alguna ocasión; al teorema de Rolle, publicado en su *Tratado de Algebra*, en 1690, que hace conocer el número de raíces reales de una ecuación y permite separarlas unas de otras si se sabe resolver su derivada; y al método de las diferencias, atribuído á Collins, y de uso absolutamente impracticable, á pesar de los años que ha estado en auge y de los partidarios y defensores que en algunas épocas ha tenido. Y respecto á las raíces imaginarias, nada, ó poco más de nada: unas condiciones halladas por Waring (19), hacia 1757, acerca de las relaciones necesarias y suficientes que deben existir entre los coeficientes de una cuártica ó de una quíntica para que tengan dos ó cuatro raíces imaginarias.

Algo más extenso que el anterior, aunque no mucho, es el catálogo de los métodos empleados en la aproximación de los valores de las raíces inconmensurables: el método de interpolación por sustituciones sucesivas empleando los valores medios aritméticos; la *Regula falsi*, empleada por Cardano, llamada por él *Regula aurea*, que no es, en resumen, mas que una forma de aplicación de la regla de falsa posición doble, procedimiento muy ensalzado y propagado en nuestra patria por el profesor y publicista español de mediados del pasado siglo D. José Mariano Vallejo (20); el empleo de las diferencias, de que antes hice mención; la regla de Newton, en su primera y dudosa forma de aplicación; regla que en su más breve forma y notación atribuyen algunos historiógrafos modernos (21) á un desconocido matemático inglés, José Raphson, que la publicó en Londres en 1690; un método del astrónomo inglés Halley, que gozó de bastante crédito en alguna época, y que difiere del de Newton en que para determinar la corrección de cada valor de la raíz emplea una ecuación de segundo grado, en lugar de la de primero, utilizada por éste. Si á lo anterior añadimos un método inventado por Daniel Bernouilli en 1728, perfeccionado después por Euler y Lagrange, en que emplea las series recurrentes (22) y en que utiliza, para hallar las raíces de mayor y menor módulo, el cociente de las sumas de potencias $\pm m$ de las raíces de la ecuación por las de las potencias de grado inferior, supuesto que m crece indefinidamente, y en cuyo método han creído ver algunos el origen y base del método de Gräffe y uno de Waring (23) para el cálculo de raíces imaginarias, muy parecido á la regla de Newton, muy poco de interés verdadero habremos dejado de mencionar.

Muchos son los títulos que puede ostentar Lagrange para ser mirado y considerado como uno de los matemáticos de mayor potencia intelectual que han existido; su *Mecánica analítica* es un monumento científico tan admirable como imperecedero, y sería suficiente esa obra para justificar mi aserto; pero si se hace abstracción de todos sus restantes trabajos y sólo se tienen en cuenta los que dedicó á la teoría y resolución de ecuaciones, su nombre aún sería imborrable en la Historia de la Matemática. Ya anteriormente hemos visto el valor é interés de sus trabajos en la resolución algébrica de ecuaciones; veamos ahora los relativos á la numérica. Después de realizar Lagrange una crítica severa, pero justa, de los conocimientos relativos á esta cuestión existentes en su época, propone el método siguiente, que, aunque algunos atribuyen en principio á Waring, él es quien lo explana y desarrolla. El método consiste, en substancia, en formar la ecuación que tiene por raíces las diferencias ó, mejor, los cuadrados de las diferencias de las raíces de la propuesta; determinar un límite inferior de las raíces de esta ecuación, y sustituir en el primer miembro de la dada números en progresión aritmética que tenga por razón este límite hallado y por extremos los límites inferior y superior de las raíces de la propuesta, con cuyo método consigue evidentemente la absoluta separación de las raíces reales de esta ecuación. Para su aproximación determina el desarrollo de cada raíz en fracción continua, hallando sucesivamente los diversos cocientes incompletos por transformaciones, que se realizan en la ecuación casi automáticamente y por procedimientos de tanteo muy sencillos.

Tanto el método de separación como el de aproximación propuestos por Lagrange son teóricamente irreprochables, y desde este punto de vista, cuantos elogios se les tributen son pequeños; pero desde el punto de vista práctico ya no es lo mismo; la formación de la ecuación de las diferencias de las raíces ó de sus cuadrados, exige cálculos tan largos y penosos que detienen al más experto y valiente calculador en muchas ocasiones; y aunque es verdad que, según una nota de Cauchy (24), es suficiente para el objeto que se persigue formar solamente el término independiente de esta ecuación, que no es otra cosa mas que el discriminante de la dada, esta formación no es en muchas ocasiones tan fácil y hacedera como á primera vista parece. Y esto sin contar con que si la diferencia entre dos raíces de la ecuación propuesta es muy pequeña y el intervalo entre límites algo extenso, hay que realizar un número enorme de sustituciones y el trabajo aumenta de modo considerable. A pesar de estos inconvenientes, si las raíces están ya separadas ó sólo quiere evaluarse una determinada, el método de Lagrange puede emplearse, y de hecho se emplea aún hoy día con bastante fruto.

Utilizó Lagrange la ecuación de los cuadrados de las diferencias para determinar los pares de raíces imaginarias conjugadas que posee la propuesta, ya que cada par de raíces de esta índole produce en ella una raíz negativa; método que, aun cuando hoy no debe emplearse nunca, es indudablemente superior á cuanto en su época se conocía.

Uno de los grandes matemáticos que dedicaron mayor atención y mayor suma de energías y talento al problema de la resolución de las ecuaciones numéricas fué José Fourier, aunque no fuera éste el campo único ni el en que más se distinguió sabio tan eminente; pero sus trabajos y descubrimientos en esta teoría no van acompañados de gran fortuna. La prioridad en el descubrimiento de su conocido teorema acerca del empleo de la serie de derivadas sucesivas de la función obtenida agrupando en un miembro todos los términos de la ecuación dada para determinar el número de raíces reales contenidas en un intervalo, sobre no resolver por completo el problema, pues sólo da un límite superior de este número, como la regla de Descartes que puede mirarse como caso particular del teorema en cuestión, se la disputa con pruebas fundadas Budan, y casi más con este nombre que con el de Fourier se conoce esta regla, que por la sencillez y facilidad de aplicación se emplea aún con frecuencia, á pesar de los descubrimientos posteriores.

Y algo análogo le sucede con el perfeccionamiento que lleva á la regla de aproximación de Newton; perfeccionamiento que permite al operador trabajar con una confianza y seguridad en el éxito de que antes carecía, pero cuyo descubrimiento atribuyen algunos historiadores modernos (25), fundados en documentos dotados de bastante fuerza, á un modesto y casi desconocido matemático, J. Raimundo Mourraille, que vivió en Marsella, y fué secretario de la clase de Ciencias de la Academia de aquella ciudad en los últimos años del siglo XVIII.

A pesar de esto, multitud de pequeños detalles en los métodos de separación de raíces y en otros muchos puntos de la teoría hacen acreedor al inmortal autor de la *Teoría analítica del calor*, á la admiración de cuantos en el estudio de estas cuestiones se ocupan.

De muy escaso relieve y poco pródiga en incidentes de interés la vida de Carlos Sturm, forma contraste con las de Abel y Galois. Nació Sturm en Ginebra en 29 de Septiembre de 1803, en una familia oriunda de Strasburgo; hizo sus estudios con brillantez, primero en un colegio y después en la Academia de su ciudad natal, contando entre sus maestros á Simón Lhuilier. Desgracias de familia le obligan á dirigirse á París en 1823; allí se asocia, de 1825 á 1829, al físico Daniel Colladon, y obtienen juntos en 1827 el gran premio de Matemáticas propuesto por la Academia para la mejor memoria relativa á la compresión de los líquidos. En 1834 vuelve la misma Academia á concederle otro gran premio de Matemáticas; le llama á su seno en 1836, ocupando el sillón de Ampère; sucede á Poisson en la cátedra de Mecánica de la Sorbona, y su vida se desliza tranquila hasta que entrega su alma al Creador en 18 de Diciembre de 1855.

En los años de 1825 á 1830 se unió á Fourier, el cual le inició en sus trabajos de Análisis algébrico, especialmente en los relativos á la teoría de ecuaciones, llegando Sturm al descubrimiento del teorema que hoy lleva su nombre al estudiar las propiedades de algunas ecuaciones diferenciales que se presentan en gran número de cuestiones de Física matemática. El enunciado de esta famosa proposición apareció en el tomo XI del *Bulletin des Sciences de Férussac*, en una memoria que lleva por título *Análisis de una Memoria sobre la resolución de las ecuaciones numéricas* (leída en la Academia de Ciencias el 13 de Mayo de 1829) (26); y la demostración completa apareció por vez primera en el *Algebra* de Choquet y Mayer (1.ª edición, 1832). Veamos en qué consiste y qué valor científico tiene esta importante proposición.

A la serie de funciones empleadas en su teorema por Budan y Fourier sustituye Sturm otra formada por la función primer miembro de la ecuación propuesta, su primera derivada, y los restos que se obtienen al aplicar á esas dos funciones el algoritmo del máximo común divisor, sin más alteración que el cambiar de signo cada uno de los restos sucesivos que en la aplicación de ese algoritmo aparecen. Demuestra después que esta serie de funciones, que para entendernos designaremos por

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x) \ldots\ldots f_m(x),$$

posee las cuatro propiedades características que siguen:

I. Dos funciones consecutivas no se anulan para un mismo valor de la variable comprendido en un intervalo.

II. La última función de la serie no se anula para ningún valor del intervalo, y conserva, por consiguiente, un signo constante para todos los valores comprendidos en éste.

III. Cuando una función intermedia se anula para un valor del intervalo, las funciones anterior y posterior adquieren valores iguales y de signos contrarios.

IV. Cuando $f(x)$ se anula para un valor del intervalo, $f_1(x)$ adquiere el mismo signo que la derivada $f'(x)$, y, por consiguiente, la razón $\dfrac{f(x)}{f_1(x)}$ pasa de negativa á positiva al anularse.

Apoyado en estas propiedades demuestra Sturm que el número de raíces reales de la ecuación propuesta comprendidas en un intervalo (a, b), $b > a$, es igual al número de variaciones perdidas en la serie antes mencionada cuando en las funciones que la forman se sustituyen en lugar de x los valores a y b sucesivamente

Con esta proposición el problema de la determinación del número de raíces reales de una ecuación comprendidas en un intervalo, y, como consecuencia, el de su separación, queda resuelto por completo de una manera irreprochable é inatacable, de un modo concluyente y definitivo, teóricamente al menos. Y digo teóricamente porque la aplicación del teorema de Sturm, como el de todo algoritmo que exija el empleo del de el máximo común divisor de expresiones literales, lleva consigo cálculos tan penosos y tan laboriosos en gran número de casos, que el calculador diestro y experimentado los rehuye siempre que le es posible. En muchos Manuales de Algebra se cita como ejemplo de los cálculos á que puede conducir la proposición que nos ocupa el de una ecuación de sexto grado de aspecto inocente, pues sus coeficientes son todos iguales á la unidad en valor absoluto (27), y en la cual la cuarta función de la serie de Sturm tiene coeficientes de siete y ocho cifras significativas, y la última se calcula los posee de cuarenta y cuatro al menos, haciéndose el cálculo inabordable.

Para obviar estos inconvenientes se han intentado muchos medios y recursos: Hermite (28) utilizó una forma especial que empleaba en la aplicación de la transformación llamada de Tschirnhaussen, y que también se aplica en la transformación, de una forma binaria en suma de cuadrados; pero su empleo tampoco tiene nada de sencillo ni cómodo y por eso se utiliza raras veces.

Fijándose Sylvester en que lo verdaderamente interesante en la serie de Sturm son las propiedades características de las funciones que la forman, construyó una serie de funciones en forma de determinantes simétricos cuyos elementos son las funciones simétricas simples de las raíces de la ecuación dada, sumas de potencias semejantes de estas raíces, demostró que estas funciones poseen esas propiedades y probó que puede en consecuencia aplicárseles el teorema de Sturm, reemplazando á las que éste propuso. El cálculo de estas funciones es en muchas ocasiones menos difícil que el de las de Sturm, pero en otras en muy poco le aventaja, pues el empleo de las funciones simétricas, bellísimo en teoría, no deja en la práctica de presentar dificultades y no pequeñas.

Estudiando Hurwitz (29) las condiciones á que deben satisfacer los coeficientes de una ecuación que los tiene todos reales para que no admita más que raíces de parte real negativa, llegó á la misma forma de aplicación del teorema de Sturm ya propuesto por Sylvester: su trabajo, á pesar de esto, es muy digno de aprecio y no puede dejar de mencionarse al tratar de estas cuestiones.

Ya en otra ocasión, en 1869, Leopoldo Kronecker (30) trató de generalizar el teorema de Sturm refiriéndolo á sistemas de ecuaciones con varias incógnitas, inventando su *Teoría de las características;* reducida, ó mejor dicho, aplicada al caso más sencillo, dos ecuaciones con dos incógnitas, puede servir para la determinación del número de raíces imaginarias de una ecuación contenidas en un recinto cerrado, si bien este método no supera, á mi humilde juicio, al que suministra el teorema de Cauchy, de que luego hablaré.

La mejor prueba de que á pesar de las excelencias teóricas del teorema de Sturm, la parte práctica y de aplicación inmediata no está vencida por completo, la suministran las constantes investigaciones y los intentos incesantes de obtener reglas, procedimientos, métodos que permitan obtener el fin deseado, sin la fatiga, ó al menos, atenuando mucho la fatiga que la aplicación del referido teorema produce. Merecen especial mención entre estas investigaciones las de Sylvester (31), que resucitando una regla enunciada sin demostración por Newton, demuestra que uniendo á la serie de funciones empleada por Budan y Fourier otra formada, restando del cuadrado de cada función el producto de la que le antecede y la que le sigue (multiplicadas por factores puramente numéricos); y contando el número de variaciones y permanencias que se conservan, se ganan ó se pierden en el conjunto de ambas series, el de variaciones-permanencias que pierde la doble serie cuando se sustituyen dos números es igual, ó superior en un número par, al de raíces contenidas en el intervalo; y también se obtiene un resultado análogo, no siempre el mismo, si se cuenta el número de permanencias-variaciones que con esa sustitución se ganan en la misma doble serie.

También merece mención especial una regla deducida por Jacobi (32) de la de Descartes: realiza Jacobi una sustitución lineal en el primer miembro de la ecuación propuesta [$x = \frac{a + by}{1 + y}$, siendo el intervalo *(a, b)*], forma una serie con los coeficientes de la transformada, que son funciones de los de la propuesta y de los extremos del intervalo, y contando el número de variaciones de esta serie, deduce un límite superior del número de raíces que el intervalo contiene. De manera análoga puede transformarse la forma de aplicación del teorema de Fourier.

Más sencilla en su formación, y de aplicación más cómoda y fácil, es la serie empleada por Laguerre (33) en su sencillo y utilísimo teorema, como que los elementos de esta serie se obtienen por la supresión sucesiva de uno, dos, tres, etc., términos de grado inferior de la ecuación dada, y división de los conservados por la potencia de la incógnita que tienen por factor común; y en el teorema prueba Laguerre que el número de raíces de la ecuación propuesta, superiores á un cierto número, no excede al de variaciones que presenta la serie para la sustitución de este número en lugar de la incógnita; y que, en todo caso, la diferencia entre estos números es un número par; y claro es que pudiendo deducir así un límite del número de raíces contenidas en un cierto intervalo. Por la sencillez de su aplicación, á mi juicio superior, bajo ese concepto, á todos los demás conocidos, el teorema de Laguerre es digno de una difusión que hasta ahora no ha tenido.

De algunos de estos procedimientos ha dado Klein unas ingeniosas representaciones geométricas que permiten comparar casi instintivamente los resultados que por su aplicación se obtienen. El estudio de Klein (34), aplicado á las ecuaciones de segundo grado, y no sé si después extendido á las de algún otro grado, es muy bello, ingenioso y elegante; pero sobre aplicarse á un caso en que ninguno de los teoremas que venimos mencionando son necesarios, no hace avanzar un solo paso la solución del problema enunciado, dicho sea con todos los respetos que tan eximio y eminente matemático me merece.

A todos estos estudios debe ir unido el gran teorema de Cauchy, que, además de permitir determinar el número de raíces reales ó imaginarias de una ecuación contenidas, no ya en un intervalo, sino en un recinto cerrado cualesquiera, en función del llamado *exceso* de una cierta fracción que se deduce de la ecuación propuesta con gran facilidad, permite realizar su separación de un modo relativamente sencillo, y suministra, además, una prueba concluyente del teorema de Gauss acerca del número total de raíces reales ó imaginarias de una ecuación algébrica.

Como veis, á pesar del descubrimiento de Sturm, el problema de la delimitación del número de raíces reales de una ecuación sigue en pie, en su parte práctica al menos, y es éste un campo de estudio que ofrece aún algunos sabrosos frutos á los que poseen inteligencia y aptitud suficiente para ocuparse en esas arduas investigaciones.

En 1819 Guillermo Jorge Horner publicó en Londres (35) un método de aproximación de las raíces incomensurables de una ecuación, que merece ser citado con encomio; y aunque parece que Ruffini, en diversos trabajos, había indicado un procedimiento que tiene muchos puntos de contacto con el del matemático inglés, más en las transformaciones que utiliza que en el método en sí, y aun cuando los fundamentos se remonten á los tiempos de Vieta (36), es lo cierto que Horner es quien le da forma práctica y quien lo extiende y propaga. El método consiste, en esencia, en ir calculando una por una, en orden descendente, las diversas cifras significativas de la raíz cuyo valor aproximado desea hallarse, utilizando para conseguirlo cálculos que permiten transformar la ecuación propuesta en otra cuyas raíces sean las de la dada, disminuídas en un cierto número, y después en otra cuyas raíces sean múltiplos de las de esta última. Y, precisamente, lo verdaderamente nuevo é interesante del método de Horner son las observaciones que introduce al realizar esas transformaciones, pues al convertir la ecuación dada en otra cuyas raíces sean décuplas de las de la propuesta, se consigue operar siempre con números enteros, sustituir números de una sola cifra, limitando extraordinariamente el número de tanteos; suprimir sucesivamente los términos de mayor grado de la ecuación, llegando á tomar como cifra de tanteo el cociente, con signo contrario, de los coeficientes de los términos independiente y de primer grado de la transformada, si bien en algunos casos conviene conservar los tres, en vez de los dos últimos términos de esta ecuación, para hallar la referida cifra de tanteo. En expedición y rapidez en los cálculos y, por consiguiente, en facilidad para resolver el problema propuesto, el método de Horner es muy superior al de Lagrange, aunque ambos tengan fundamentos teóricos casi idénticos. Una adecuada combinación del método de Horner y de la regla de Newton constituyen, á mi juicio, un método de cálculo de las raíces que tal vez no es superado por ningún otro de los conocidos en un gran número de casos.

Pocos y no muy buenos procedimientos se poseían al promediar el pasado siglo para la determinación del número de raíces imaginarias de una ecuación y para su cálculo. Para resolver el primero de estos problemas, el teorema de Cauchy, antes citado, una regla de Sturm, de no muy fácil aplicación, y casi nada más; y respecto á su aproximación, la extensión de la regla de Newton, que lleva consigo la necesidad de un examen y discusión difícil y muy entretenida, en la mayoría de los casos, acerca del grado de certeza de aproximación que cada corrección puede suministrar. Esto en cuanto á métodos directos, porque todos los restantes, basados en el empleo de la eliminación, y que hacen depender la determinación de las raíces imaginarias de una ecuación de la de las reales de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, son excelentes teóricamente hablando, pero sus excelencias desaparecen al llevarlos á la práctica. Cierto es que Lagrange, con el empleo adecuado de la ecuación de los cuadrados de las diferencias, facilita al parecer algo la solución del problema, y que más tarde Rutherford (37) lo simplifica más todavía; pero aun así, la cuestión presenta serias dificultades de cálculo y pone á prueba la habilidad y paciencia del más diestro calculista.

Como habéis podido ver por las notas que preceden, cuantos métodos hemos reseñado se reducen en último análisis á procedimientos de tanteo mejor ó peor dirigido, con mayores ó menores facilidades de cálculo, y con garantías de éxito cada vez mayores á medida que los procedimientos se completan y perfeccionan; y todo ello, tratando siempre por separado las raíces de la ecuación y teniendo que emprender nuevos cálculos para cada una de las que deseamos ó necesitamos calcular: método directo que permita determinarlas todas sin pérdida de tiempo y sin desaprovechar ninguno de los cálculos efectuados, no aparece hasta que llegamos al dado á conocer por el profesor de Zurich, Carlos Enrique Gräffe, perfeccionado después por el astrónomo alemán Juan F. Encke y por el francés Emmanuel Carvallo, que lleva el nombre del primero de estos matemáticos, aunque tal vez en estricta justicia debiera llamarse método de Dandelin, según más adelante veremos.

El método de Gräffe está fundado en el principio siguiente, ya utilizado por Daniel Bernouilli en el método de que hicimos mención en páginas anteriores; dada una serie de cantidades reales, crecientes ó decrecientes, si se elevan todos los términos de esta serie á una misma potencia, las diferencias entre los términos de la nueva serie son tanto mayores cuanto más elevado es el exponente de la potencia. Basado en esta observación, hizo ver Gräffe que si la ecuación propuesta, supuestas todas sus raíces reales y desiguales, se transforma en otra cuyas raíces sean potencias de exponente suficientemente elevado de las de la propuesta, los coeficientes de la transformada irán tendiendo sensiblemente á ser iguales á la potencia de igual grado de la raíz de mayor módulo de la dada, y á los productos de las potencias respectivas de las dos, tres, cuatro... raíces de mayor valor absoluto de las de la propuesta y, por consiguiente, podremos calcular valores aproximados de estas raíces directamente y con relativa facilidad. De modo análogo é igualmente sencillo puede procederse cuando la ecuación posee raíces iguales, y cuando se quieren calcular los módulos de las imaginarias conjugadas que pueda poseer.

Este es, en esencia, el procedimiento de Gräffe; los cálculos para transformar la ecuación dada, conforme el método exige, son sencillísimos cuando la potencia tiene por exponente una potencia de 2; el perfeccionamiento de detalles y la extensión al cálculo, no sólo de los módulos, sino de los valores de las raíces imaginarias y la combinación del método con la regla de Newton, debido todo ello á Encke, avaloran aún más las ventajas prácticas, según se desprende con claridad meridiana de la magistral memoria que á su difusión en España dedicó D. Miguel Merino (38).

Y observad, señores, que en este método se procede directamente sin conocimiento previo del número de raíces reales ó imaginarias que la ecuación pueda poseer en este ó en aquel intervalo ó recinto, y, por tanto, sin pérdida alguna de tiempo, sin escribir ni efectuar más cálculos que los pura y estrictamente indispensables, y hallando á la vez los valores de todas las raíces. Por todas estas razones, y por la relativa sencillez de los cálculos que exige, este método es, sin disputa alguna, superior á todos los precedentes, aunque no deje de presentar dificultades y obstáculos propios de la magnitud del problema, y es de difícil explicación los muchos años que ha permanecido en el olvido y el escaso entusiasmo con que, salvo algunas excepciones, es acogido aún hoy día. Aun sin participar en absoluto de los entusiasmos del Sr. Merino, soy acérrimo partidario de este método, al cual hoy no encuentro sustitución posible.

Gräffe dió á conocer este método en una Memoria premiada por la Real Academia de Ciencias, de Berlín, en 1839 (39). Encke lo perfeccionó y dió á conocer en otra Memoria publicada en el Anuario del Observatorio, de Berlín, para el año 1841 (40). Más adelante, en 1896, el profesor de París, E. Carvallo (41), volvió á perfeccionar el método, estudiando el número de transformadas necesarias para conseguir la separación de raíces, entendiendo en este caso por separación el llegar á cumplir las exigencias del principio fundamental de suponer despreciable la potencia de una raíz al lado de la de valor inmediato superior; aquilatando las condiciones y caracteres de las transformadas cuando todas las raíces de la propuesta no son reales, y llegando á una notable proposición que permite fragmentar la última transformada en diversas partes, cada una de las cuales tiene tantos términos consecutivos de la ecuación dada como raíces más una existen de igual módulo, y permite obtenerlas con facilidad verdaderamente extraordinaria. El procedimiento de Carvallo puede aplicarse á las ecuaciones de coeficientes imaginarios y á algunas clases de ecuaciones transcendentales.

Aunque el método en que nos estamos ocupando lleva el nombre del matemático suizo varias veces citado, en realidad debiera conocerse con el de un modesto y poco nombrado matemático belga del siglo XIX: G. Dandelin. Este sabio publicó en el tomo III de Memorias de la Real Academia de Ciencias y Bellas Letras, de Bruselas, año 1826, una memoria titulada *Investigaciones acerca de la resolución de las ecuaciones numéricas* (43), en la cual hace un estudio crítico muy detenido de los procedimientos más en uso en su época, falsa posición, regla de Newton, Lagrange, etcétera, y después explica un procedimiento para transformar la ecuación propuesta en otra cuyas raíces sean los cuadrados de los de la dada, y llega por muy sutiles consideraciones al teorema siguiente, del que no da demostración concluyente: *Si de las* m + n *raíces de una ecuación,* m *tienen sus eficientes* (llama eficientes á los módulos) *infinitos con relación á los de las otras* n, *estas* m *primeras serán raíces de la ecuación formada con los* m + 1, *primeros términos de la ecuación, y las* n *más pequeñas serán raíces de la formada con los* m + 1 *últimos términos.* Como veis, en esa proposición está el principio que ha servido á Carvallo para conseguir la fragmentación de la ecuación, último perfeccionamiento á que se ha llevado el método de Gräffe. Algunos historiadores contemporáneos, como el norteamericano Florian Cajori, comienzan á sacar á luz el ignorado trabajo de Dandelin, y en este continuo aquilatamiento de los méritos de cada hombre de ciencia se le va confiriendo el puesto á que por su labor se hizo acreedor.

Varios otros procedimientos se han propuesto para la solución de la cuestión que nos ocupa, como el de Tomás Wedde (44), en 1842, muy parecido al de Horner; uno de Emory Mc Clintock (45) en 1895, basado en el uso de las series y de un cálculo especial que denomina *cálculo de extensión,* y algunos otros menos interesantes; pero no quiero abrumaros más de lo que ya estaréis al oir esta pesada enumeración de nombres, métodos y fechas.

Hubiera deseado llamar vuestra atención sobre algunos procedimientos gráficos de uso relativamente frecuente, y sobre todo, sobre la gran variedad de máquinas algébricas construídas con el fin de resolver ecuaciones; pero habéis de dispensarme el que no lo haga ya que en ocasión memorable os dió sobre este último punto noticias concretas voz tan autorizada y de competencia tan extraordinaria como la de nuestro admirado compañero el Sr. D. Leonardo Torres Quevedo (46).

He llegado al final de mi labor, y al hacerlo, réstame solamente consignar, después de solicitar una vez más vuestra benevolencia, que el problema de la resolución de ecuaciones algébricas, bajo uno cualquiera de los dos aspectos que se le mire, continúa en pie desafiando la perspicacia y la tenacidad de los matemáticos: bajo el aspecto de la resolución algébrica, porque á pesar de los trabajos de Galois y de los proseguidores de su obra, no son aún conocidas todas las clases de ecuaciones que pueden ser solubles empleando un número finito de operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación, división, elevación á potencias y extracción de raíces; ni se ha ensayado más que en muy limitado número de casos la aplicación á la cuestión de algoritmos transcendentes, tales como el de las funciones elípticas, y son estos campos donde los geómatras pueden realizar descubrimientos de verdadero interés. Y bajo el punto de vista de la solución numérica, porque á pesar de los descubrimientos realizados, aquel método que presentía Bordas Démoulin al decir: *el alma abriga cierto misterioso presentimiento de que, para llegar al deseado término, existe algún otro camino más breve y expedito que el desbrozado y franqueado por Fourier y Sturm* (47), no ha sido hallado todavía, y espera al ingenio que más potente y certero, ó más afortunado que sus predecesores logre descubrirlo y dar cima á la solución sencilla y verdaderamente práctica y completa del problema tantas veces enunciado.

REFERENCIAS

(1) Véase la "Biografía de D. Miguel Merino", redactada por D. Miguel Aguilar y publicada en el núm. 10 de la *Revista de la Sociedad Matemática Española.*

(2) Colebrook (H. T.): *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.*—Translated by Henry Thomas Colebrooke.—1 vol. 4.°.—London, 1817.—Pág. 207 y sig.

(3) Lacroix (S. F.): *Compléments des Eléments d'Algèbre.*—3.eme ed. 1 volumen 8.°—Paris, 1804.—Pág. 124 y sig.

(4) Vandermonde (A.-Th.): *Mémoire sur la résolution des équations.—Histoire de l'Academie Royale des Sciences de Paris.*—Mémoirs.—1771.—Pág. 365 á 416.—1 vol. 4.°—Paris, 1774.

(5) Véase el párrafo XXXV de la Memoria citada en la nota 4.

(6) Para el estudio de estos trabajos se ha tenido á la vista la obra: Lagrange (J. L.): *Traité de la résolution des équations numériques de toutes les degrés.*—3.eme ed.—1 vol. 4.°—Bachelier, successeur de M.eme V.e Courcier.—Paris, 1826.

(7) Gaus (C. J.): *Disquisitiones Arithmeticæ.*—Sectio VII.—Werke.—Vol. I.—1 vol. 4.°—Gottingen, 1870.

(8) Lucas de Pesluan (Ch.): *N. H. Abel.—Sa vie et son œuvre.*—1 volumen 8.°—Paris, 1906.

(9) El título de esta Memoria es: *Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufunlösen.*—Todas ellas se encuentran en las páginas 28 á 33 y 66 á 87 del tomo I, y 217 á 247 del II de la colección.—Abel (N. H.): *Œuvres complètes.*—Nouvelle édition publié aux frais de l'Etat Norvégien par MM. L. Sylow et S. Lie.—2 volúmenes 4.°.—Cristiania, 1881.—De las dos primeras Memorias publicó una versión española, esmeradamente hecha é impresa, mi malogrado amigo y compañero D. Luis Gonzaga Gascó con el título: *Memorias sobre la resolución de las ecuaciones algébricas.*—I y II.—*Sobre la imposibilidad de la resolución algébrica de las ecuaciones.*—1 foll. en 8.° de 40 pág.—Valencia, 1896.

(10) Hermite (Ch.): *Considerations sur la résolutión algébrique de l'équa-*

tion da cinquiéme degré. — (Nouvelles Annales de Mathématiques. — Tome I.er).—*Œuvres de Ch. Hermite.*—I.—Pág. 3 á 9.

(11) Abel (N. H.): *Mémoire sur une classe particulière d'équations resolubles algébriquement.*—Véase la obra citada en la nota 9.—I.—Pág. 478 á 507.

(12) Estas notas están extractadas de la siguiente documentada biografía: Dupuy (P.): *La vie d'Evariste Galois.*—Annales scientifiques de l'Ecole Normole Superiéure.—3.eme série.—Tome Treiziéme.—1 vol. 4.°—Paris, 1896.

(13) Terquem (O.): *Richard, Professeur.*—Nouvelles Annales de Mathématiques.—Biographie.—Vol. 8.°—1849.—Pág. 448.

(14) Picard (E.): *Œuvres mathématiques d'Evariste Galois.*— 1 foll. en 8.° myr. de X-62 pág.—Paris, 1897.

(15) Tannery (J): *Manuscrits d'Evariste Galois.*— 1 foll. en 8.° myr. de 68 pág.—Paris, 1908.

(16) *Discours préliminaire.*—Fragmento destinado á ser colocado al frente de su Memoria sobre la teoría de ecuaciones.—Véase la obra citada en la nota 15, pág. 21.

(17) Octavio de Toledo (L,): *Tratado de Algebra.*—Tomo I.—"Parte elemental,,.—1 vol. 4.°—Madrid, 1905.—Pág. 54.

(18) Merino(M.): *Resolución general de las ecuaciones numéricas por el método de Graffe.*—Memoria escrita en alemán por J. F. Enche.—Traducida por D. Miguel Merino.—1 vol. 4.° mr.—Madrid, 1879.—Introducción, pág. 14.

(19) Waring (E.): *Miscellanea analytica.*—1762.

(20) Vallejo (J. M.): *Tratado elemental de Matemáticas.*—4.a ed.—Tomo I.—Parte primera, que contiene la Aritmética y el Algebra.—1 vol. 4.° menor.—Madrid, 1841.—Pág. 368 y sig.

(21) Cajori (J.): *A History of the Arithmetical Methods of Aproximation to the Roots of Numerical Equations of one Unknown Quantity.*—Colorado College Publication.—Sciencie Series.—Vol. XII.—Núm. 7.—Pág. 171-215. Oct.-Nov., 1910.

(22) Petersen (J.): *Théorie des équations algébriques.*—Trad. por H. Laurent.—1 vol. 8.°—Paris, 1897.—Pág. 219.

(23) Waring (E.): *Meditationes algebricæ.*—1770.—Pág. 268 (?)

(24) Serret (J. A.): *Cours d'Algèbre superiéure.*—5.eme éd.—2 vol. 8.°—Paris, 1877.—Tomo I.—Pag. 291.

(25) Véase la obra citada en la nota 21.

(26) Las noticias anteriores están tomadas del siguiente artículo: Prouhet(E): *Notice sur la vie et les travaux de M. Ch. Sturm.*—Nouvelles Annales de Mathématiques.—Vol. 15°—1856.—Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie mathématiques.—Pág. 72.

(27) La ecuación á que se hace referencia es la

$$x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0.$$

Véase la obra citada en la nota 24.—Tomo I.—Pág. 304.

(28) Hermite (Ch.): *Sur quelques théoremes d'Algèbre et la resolution ae l'équation de 4.eme degré.*—(Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences.—1858).—Œuvres.—II.—Pág. 30-37.

Remarques sur le théoreme de M. Sturm.—(Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences.—1853).—Œuvres.—I.—Pág. 284-287.

(29) Hurwitz (A.): *Ueber die Bedengungen unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt.*—Mathematische Annalen.—46 Band.—Pág. 273-284.—Leipzig. 1895.

(30) Kronecker (L.): *Uber systeme von Functionem mehrer Variabeln.*—2 Memorias.—Werke.—I.—Pág. 175-227.

Uber die Verschiedenen Sturm'schen Reihen und ihre gegensestigen Beziehungen.—Werke.—I.—Pág. 303 á 348.

(31) Sylvester (J. J.): *On an elementary Proof of Sir Isaac Newton's hitherto undemonstrated Rule, given in the Arithmetica Universalis, for the Discovery of Imaginary Roots in Algebraical Equations.*—The Transactions of the Royal Irish Academy.—Vol. XXIV.—Science.—Pág. 247 á 252.—Dublin, 1871.

On a remarkable Modification of Sturm's Theoiem.

Note on a remarkable Modification of Sturm's Theorem ana on a New Rule for finding Superior and Inferior Limits to the Roots of an Equution.

On the explicit Values of Sturm's Quotiens.

The London, Edinburg and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.—Fourth series.—Vol. V; pág. 446 á 456.—Vol. VI; pág. 14 á 17 y 293 á 296.—London, 1853.

(32) Jacobi (C. G. J.): *Observatiunculæ ad theoriam æquationem pertinentes.*—Journal de Crelle; tomo 13.—Gesammelte Werke.- III.—Pág. 271 á 284.—Berlin, 1884.

(33) Laguevre (*E.*): *Sur la détermination d'une limite supérieure des racines.*—Nouvelles Annales de Mathématiques.—2.ª serie.—Tomo XIX.—1880. Œuvres.—I.—Pág, 72 á 86.

(34) Klein (F.): *Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzelln algebraischer.*—Dyck (W.): Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente.—1. vol. 4.°—Pág. 3 á 15.—München, 1892.

(35). Horner (G. J.): *A new method of solving numerical equations of all orders, by continuous aproximations.*—Philosophical Transactions of the Royal Society of London.—1819.—Pág. 308 á 335.—1 vol. 4.°—Londón, 1819.

(36) Cajori (F.): *A History of Mathematics.* — 1 vol. 8.° — New-York, 1909.—Pág. 147.

(37) Puede verse el método de Rutherford en la pág. 235 de la obra citada en la nota 18.

(38) Véase nota 18.

(39) La Memoria de Gräffe se publicó en Zurich con el título *Die Auflö-*

sung aer höheren numerischen Gleichungen, y aunque es probable que el premio de la Real Academia de Berlín le fuese concedido en fecha anterior, en 1835 como dice Cajori (nota núm. 21), conservo en el texto la fecha consignada por el Sr. Merino en su obra (18).

(40) Encke (J. F.): *Allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen.*—Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1841.—Pág. 281 á 338.—1 volumen 8.°—Berlin, 1839.

(41) Carvallo (E.): *Méthoae pratique pour la résolution numérique complète des équations algèbriques ou transcendantes.*—1 foll. en 4.° de 32 pág.—París, 1896.

(42) Este teorema fundamental dice así: "Para que las raices consecutivas x_p y x_{p+1} del polimonio

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_p x^{m-p} + \dots + A_m$$

estén separadas, es necesario y suficiente que $\left(\frac{A_{p+k}}{A_p}\right)^{\frac{1}{k}}$ sea despreciable al lado de $\left(\frac{A_p}{A_{p+b}}\right)^{\frac{1}{b}}$ para todos los valores de k y de b. El polinomio $f(x)$ se separa entonces en dos fragmentos. El primero, obtenido despreciando los términos que siquen á A_p, de las p primeras raíces. El segundo fragmento, obtenido despreciando los términos que proceden á A_p, da las $m-p$ últimas raices.,,

(43) Dandelin (G.): *Recherches sur la résolution des équations numériques.* Nouveaux Mémoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles.—Tome III.—Pág. 1 á 71.—Bruxelles, 1826.

(44) Véase la pág. 259 de la obra citada en la nota 21.

(45) Mc Clintoch (Emory): *A Method for Calculating simultaneousey all the Roots of an Equation.*—American Journal of Mathematics.—Vol XVII.—Pág. 89 á 110.

(46) Torres Quevedo (L.) y Arrillaga (F. de P.): *Máquinas algébricas.*—Discursos leidos ante la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en la recepción pública del Sr. D. Leonardo Torres Quevedo, el dia 19 de Mayo de 1901.—1 foll. en 4.°—Madrid, 1901.

(47) Véase la pág. 11 de la obra citada en la nota 18.

CONTESTACIÓN

DEL

SR. D. MIGUEL VEGAS Y PUEBLA-COLLADO

Señores:

También yo tengo que manifestar mi agradecimiento por el alto honor que se me ha conferido al encargarme de la honrosa, y para mí gratísima misión, de llevar vuestra autorizada voz en esta solemnidad y de ser intérprete de nuestros sentimientos de la más alta estima y consideración hacia nuestro nuevo compañero. Porque los múltiples y estrechos vínculos que me unen al Sr. Octavio de Toledo me impulsaban á solicitar este puesto; pero nuestro insigne Presidente, acostumbrado á escudriñar los secretos más recónditos de las ciencias físicomatemáticas y á sorprender las leyes que regulan los fenómenos que se presentan en las diversas manifestaciones de la actividad, hubo de adivinar, sin duda, mis recónditos deseos, con su natural perspicacia, y se anticipó á satisfacerlos, con aquella discreción y exquisitez con que siempre procede cuando se trata de delicadezas del alma.

El Sr. Octavio, con un rasgo delicadísimo de su modestia suma, propia de los que como él alcanzan las alturas más elevadas del pensamiento y de la ciencia y contemplan desde aquellas regiones puras y diáfanas los límites que abarcan el horizonte científico actual; estrechos, ciertamente, si se compara con la inmensidad del espacio ocupado por la ciencia, recordaba hace poco el notable poema de Campoamor *¡Quién supiera escribir!*, porque temía que su pluma no fuese lo suficientemente clara y expresiva para manifestar sus sentimientos de cariño y de reconocimiento. Mas estos escrúpulos injustificados, como lo demuestra el hermosísimo discurso que acabamos de saborear, en el que rivalizan la sagacidad más fina de concepto y la más exuberante galanura de la forma, tienen verdadera justificación en quien, como el que os dirige la palabra en estos momentos, no posee las condiciones del bien decir, que son necesarias en esta clase de solemnidades, y que ha aceptado este puesto atendiendo sólo á las voces y requerimientos de la amistad y del compañerismo, que nunca supo desoir.

Por eso yo recuerdo también la mencionada poesía, porque temo defraudar las esperanzas de todos, y hasta no corresponder á las exigencias de la justicia, si no acierto á ponderar cual se merecen las preeminentes cualidades que adornan al nuevo académico y la importancia de su labor científica y verdaderamente trascendental, tanto en el orden teóricopráctico como en el pedagógico, y que constituye la más excelente ejecutoria para su ingreso en el Colegio de la Nobleza Científica, al que ha llegado por sus grandes merecimientos y por su propio valer. Tan es así, que si no hubiera yo de rendir tributo á la costumbre constantemente seguida en estas ocasiones de presentaros al recipiendario, y una relación de sus méritos que informaran á la Academia para elevarle á este alto sitial, yo excusaría por superfluo el cumplimiento de misión tan grata y halagüeña. Porque la personalidad y el renombre adquirido por el Sr. Octavio en el mundo científico es de aquellas que no necesitan de presentación ni de encomio.

Por uno de esos contrastes tan frecuentes en la vida, se presentan mezclados la alegría y el dolor, y esto constituye una ley impuesta á la Humanidad por el Hacedor Supremo, sin duda para que adquiramos el convencimiento de que la felicidad es planta que no puede florecer en esta heredad terrena, por oponerse á ello los terribles y devastadores ciclones de las más turbulentas é insanas pasiones que constantemente la conmueven. Por eso la natural y alegre satisfacción que nos embarga al abrir las puertas de la Academia al Sr. Octavio, y al darle la más cordial y efusiva bienvenida, aparece velada por la tristeza ha tiempo sentida por esta docta Corporación, y renovada en los actuales momentos, por la falta de dos personalidades tan eminentes, de vuelos científicos tan elevados, de tan vasta cultura como los Excmos. Sres. D. Miguel Merino y D. Manuel Benítez. Pues sus cualidades poco comunes y la intensa labor científica por ellos realizada, que de manera tan sentida como elocuente acaba de enumerar el nuevo académico, hicieron brillar á nuestros llorados compañeros como estrellas de primera magnitud en una de las constelaciones más hermosas que componen el cielo sereno de las concepciones humanas, en la ciencia de la cantidad y del espacio. Recuérdense, en efecto, los trabajos del Sr. Merino en la Academia de Ingenieros y Arquitectos, en el Cuerpo de Telégrafos, en el Observatorio Astronómico, en esta Academia, de la que fué secretario durante tantos años, y sus múltiples publicaciones acerca de cuestiones astronómicas, meteorológicas y de análisis matemático; ténganse en cuenta las obras de Matemáticas publicadas por el Sr. Benítez y su labor fructífera en las muchas Corporaciones de que formó parte, en la política y en el Ejército, en donde llegó á alcanzar una de sus más elevadas jerarquías, y se comprenderá el vacío que dejaron en el mundo intelectual, donde tan necesitados estamos de hombres de verdadera cultura científica y de caracteres enérgicos y varoniles.

Mas si grande y dolorosa ha sido la pérdida de estas dos personalidades insignes, el dolor de esa falta irreparable resulta mitigado por la elección que hicisteis del que viene á ocupar la silla que ocupara el primero, y en que, por desgracia, no llegó á sentarse el segundo, en cuya designación brilla vuestro tacto, y hay que admirar, como siempre, vuestros aciertos.

Pues el Sr. Octavio es un benemérito cultivador de la ciencia matemática en su rama más abstrusa, un obrero inteligente é infatigable que, con la esplendorosa luz de su elevado entendimiento, como base; la enseñanza y difusión de la ciencia, como norte y guía, y el saber y la cultura adquirida, como medios y elementos propios, ha enriquecido nuestro caudal científico con la publicación de multitud de libros y trabajos, que acreditan su erudición y competencia, trayéndole por derecho propio al seno de esta Corporación. Así, que la investidura académica que en este solemne momento imponemos al Sr. Octavio no significa otra cosa que la consagración de un mérito reconocido y de los servicios prestados durante su vida, dedicada por entero, con incesante empeño y con viriles entusiasmos, al cultivo de la matemática en uno de los dos grandes pilares en que se apoya; el Análisis matemático, y á infundir en las inteligencias juveniles, que constituyen la esperanza del porvenir, á la vez que los fundamentales conceptos que pueden servirles de guía en el estudio, la afición, la adhesión entusiasta á la ciencia de la cantidad y del espacio, que tanto y de manera tan poderosa ha contribuído y contribuye al bienestar material y, sobre todo, al progreso intelectual de la Humanidad.

Tras de los estudios de la segunda enseñanza, efectuados con gran aprovechamiento por el Sr. Octavio en el Colegio Hispano-Romano de Nuestra Señora de la Esperanza y en el Instituto de San Isidro, de esta corte, cursó desde el año 1872 á 1878, en la Universidad Central, los estudios de la Facultad de Ciencias, en su Sección de Exactas.

Mas en todas las carreras se observa que la mayoría de los que las siguen, una vez obtenido el título ó empleo para que habilitan, dan de mano á los libros, como desquite de los malos ratos sufridos cuando las lecciones y exámenes apremiaban. Los menos toman amor al estudio, y comprendiendo que para valer algo no basta marchar por la trillada senda por donde todos pisan, buscan estímulo y energías para apartarse de la corriente general y alcanzar puesto más elevado y seguir camino desprovisto de estorbos que permita correr con mayor velocidad. Este es el camino de la ciencia y del trabajo intelectual, y fué en el que entró resueltamente el Sr. Octavio desde el momento en que terminó sus estudios universitarios.

La enseñanza, el ejercicio del profesorado, ese resorte eficacísimo que imprime activo movimiento á todas las facultades del espíritu, y que mediante el esfuerzo así desarrollado toman mayor virtud potencial, y se adquieren, se conservan y acrecen la suma de conocimientos y las especiales aptitudes necesarias para enseñar mucho y enseñar bien, ha sido también otro objetivo del nuevo académico desde su juventud. Así es que dirigió desde luego sus esfuerzos hacia el profesorado oficial, y en Marzo de 1882 obtuvo en reñida oposición la cátedra de Matemáticas del Instituto de León, en la cual nuestro respetado y querido Presidente, que lo fué á la sazón del Tribunal calificador, pudo apreciar ya las excepcionales dotes de inteligencia del recipiendario y las condiciones que reunía para la útil y trascendental labor de la enseñanza.

La atmósfera que envolvió al Sr. Octavio durante los seis años que permaneció en la capital leonesa tenía, permitidme la frase, poca dosis de oxígeno científico; el círculo en que su prodigiosa actividad tenía que desenvolverse era de radio demasiado pequeño; el caudal ya abundante de sus conocimientos necesitaba, para manifestarse, un sitio de mucha mayor capacidad que una cátedra de Instituto.

Así que en 1890 pasó á ocupar la cátedra de Geometría y Geometría Analítica de la Universidad de Sevilla, en 1893 fué nombrado catedrático de Análisis Matemático de la Universidad de Zaragoza, y, finalmente, en 1898, y por nueva oposición, no menos brillante que la primera, obtuvo la cátedra de Análisis Matemático de la Universidad Central, y conjuntamente con esta cátedra desempeña hoy la de Análisis Superior desde que se efectuó la reforma de la Facultad de Ciencias en el año 1900.

En la imposibilidad, á que me constriñen los límites de la contestación, de citar una á una todas las producciones que constituyen la paciente, intensa y fructuosa labor científica de nuestro nuevo compañero, de quien puede afirmarse que su ocupación es el trabajo constante, su recreo la lectura y el estudio, y el lugar predilecto de sus aficiones la cátedra; ya que no me sea dado enumerar los escritos publicados por el Sr. Octavio, habréis de permitirme que no omita el recuerdo, aunque rápido y somero, de aquellas obras que por la trascendencia ó importancia del asunto merecen especial mención y señalada memoria.

En 1889 publicó el recipiendario los *Elementos de la Teoría de las Formas*, primera obra con que se enriqueció nuestra Literatura científica, en orden á esta clase de conocimientos, en la que se encuentra contenida una de las más bellas é importantes teorías del alto Análisis, y que constituye un auxiliar eficaz y poderoso de la investigación geométrica. ¿Quién no ve, en efecto, en la teoría de las transformaciones ó sustituciones lineales, tan bien expuestas por el señor Octavio, el estudio analítico de la relación proyectiva entre dos figuras, ya sean fundamentales, planas, radiadas ó en el espacio, y cuando son cogredientes las variables que en la sustitución intervienen, la relación homográfica, con todos los importantísimos casos particulares de la homología y de los sistemas en involución? Y si las variables son contragredientes, ¿no aparece de una manera clara toda la teoría de la correlación y la demostración de la ley de la dualidad, venero verdaderamente fecundo é instrumento vigoroso de investigación en la ciencia del espacio? Y esto, prescindiendo de los invariantes, de los covariantes, eventantes, intermutantes, que tanta aplicación tienen en todas las Matemáticas; de los contravariantes, que tanto intervienen en el paso de un sistema de coordenadas de puntos á otro tangencial, y de los emanantes, por cuyo medio se establece, con tanta elegancia como sencillez, la polaridad, no sólo en las figuras de segundo orden, sino en las de orden superior, de cuya teoría se deduce todo lo referente á centros, diámetros, ejes, planos diametrales y principales, ó, más general, á líneas y superficies centrales y diametrales, que tanta importancia tienen en el terreno teórico y también en el de las aplicaciones.

Pocos han sabido exponer con tanta claridad la teoría de las operaciones de cálculo como lo efectúa el Sr. Octavio en su *Calculatoria*, obra muy alabada por el público inteligente y de la que se han tirado ya tres ediciones, lo que prueba de un modo concluyente la aceptación que ha tenido en el mundo científico.

A pesar de la aridez de la materia que comprende la obra mencionada y de lo trillado del camino, constreñido á la parte elemental, como demanda la índole del público á que se dedica, nuestro compañero ha sabido presentar algunas de las teorías con verdadera novedad y ha procurado hacer descender al terreno de los elementos cuestiones que figuran en regiones más elevadas, cumpliendo así la misión verdaderamente trascendental encomendada á los que, además de ser cultivadores de la ciencia en toda su amplitud, se consagran á su difusión, vulgarización y enseñanza. Tal acontece á la teoría de los números inconmensurables, presentada por primera vez en España por el Sr. Octavio, con el recurso de los campos ó conjuntos; teoría de gran importancia en el Análisis y en la que han dado pruebas de perspicacia é ingenio Dedekind, Cantor, Weierstrass, Cesaro Tannery y otros. Este modo de considerar los números incomensurables ha suscitado discusiones, principalmente entre los que se dedican á la enseñanza; pues tal modo de considerar la incomensurabilidad va encaminado á esquivar la noción del límite, y no puede asegurarse que se haya realizado tal propósito, puesto que considerar el número inmensurable como la separación de dos series abiertas y contiguas, estando constituída una de ellas por un conjunto de valores crecientes, pero inferiores á los valores que forman la otra, mientras que éstos forman una serie decreciente, siendo todos ellos superiores á los de la primera, ¿no revela la consideración de dos cantidades variables, constantemente creciente la una y constantemente decreciente la otra, y que ambas tienen un límite por conservarse la primera inferior á una cantidad fija, y la otra superior á otra también fija, y que ambos límites son iguales, por diferir las citadas variables en un infinitamente pequeño? Por otra parte, la noción de límite se presenta casi en los umbrales de la ciencia, y su importancia es escepcional, por cuanto este concepto se encuentra íntimamente enlazado con los de infinitamente pequeño é infinitamente grande, y con la noción de la continuidad analítica, siendo tan necesarias las nociones de todos estos conceptos, que sin ellos es imposible seguir una marcha tan racional como la índole de la matemática requiere. Más aún: sin la noción de límite no pueden concebirse ni la teoría de las series, ni el cálculo infinitesimal, que es el instrumento más potente de investigación analítica, hasta el punto de que viene á ser como la filosofía de la Matemática. Por eso es, si no necesario, por lo menos, conveniente, introducir desde los primeros momentos, en la exposición de la Matemática, esta importantísima noción, merced á la cual se establece el paso de lo comensurable á lo incomensurable y se relaciona ideas tan distintas como la de función algébrica y función trascendente.

Es también digna de loanza y de estimación la *Introducción al estudio de las funciones de variable compleja*, cuyo libro pone de relieve lo bien orientado que se halla el señor Octavio en las cuestiones de más importancia relativas al Análisis superior y el dominio que posee en las más abstrusas teorías concernientes á esta rama de la matemática. Pues en esta obra ha conseguido presentar compendiados los fundamentos y las propiedades más principales de esta clase de funciones, que de un modo tan frecuente se presentan en las investigaciones analíticas; ocupando así un puesto en nuestra escasa bibliografía científica relativa á esta materia. En esta obra, en efecto, expone el nuevo académico, con su habitual maestría, las proposiciones más fundamentales de las series de términos imaginarios y de términos variables; extiende los conceptos de función elemental y de diferencial é integral; da una idea clara de la bellísima teoría de los residuos, en la que lució su peregrino y vigoroso ingenio el eminente Cauchy; de las series de Laurent, Cauchy, Lagrange, Fourier y Burmann; y después de tratar de las funciones holomorfas y meroformas, hace un resumen admirable de la notable teoría de Weierstrass, acerca de las funciones que él llamó *transcendentes enteras*, y que no son más que funciones uniformes y monogenas, pero sin ser holomorfas ni meromorfas.

Si no temiera molestaros demasiado, os hablaría de los tratados de Algebra elemental y de Trigonometría rectilínea y esférica, unánimemente elogiados; del proyecto de papeletas para el Diccionario matemático, presentado por el Sr. Octavio al Congreso celebrado en Valencia por la

Asociación española para el progreso de las Ciencias; del elocuente discurso que leyó en la inauguración de la Sección de Matemáticas del mismo Congreso; de los artículos y trabajos publicados en diferentes periódicos, como *El Progreso Matemático, La Gaceta de Matemáticas*, la *Revista de la Sociedad Matemática Española,* etc., etc.

Y si esta copiosa producción científica, de cuya riqueza apenas por lo dicho podéis formar una idea incompleta, os parece extraordinaria, todavía crecerán vuestra admiración y vuestro aplauso al considerar que todo este caudal ha sido adquirido compartiendo el tiempo con el cumplimiento de sus deberes profesionales, con el desempeño de los trabajos que llevan consigo la ocupación de diferentes puestos, como vocal de una infinidad de tribunales de oposición á cátedras y como los de Secretario, que con tanto celo é inteligencia desempeñó en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, y hasta hace poco en la Universidad Central.

De que sólo otorgo al Sr. Octavio justicia merecida en mis elogios, bien lo habréis podido confirmar vosotros mismos en la erudita disertación que há escrito para este acto solemne, y que habéis acogido con verdadero deleite y aplauso unánime.

Nos ha presentado un cuadro acabado de la teoría y resolución de las ecuaciones en la anterior centuria, verdadero siglo de oro de la Matemática, muy especialmente en su rama geométrica, pintando de mano maestra los paisajes más salientes de dicha teoría y señalando los personajes de más relieve entre la pléyade inmensa de los que han contribuído al estado actual y floreciente de esta rama tan fecunda é interesante de análisis algébrico. En los dos aspectos que presenta el problema de la resolución de las ecuaciones, á saber, la resolución algébrica y la resolución numérica, han sido gigantescos los progresos obtenidos, merced á los titánicos esfuerzos que han realizado hombres de tanta mentalidad como Abel y Galois en lo relativo al primer aspecto, y Sturm y Gräffe respecto del segundo. Mas á pesar de esto, y aunque á este problema capital han dirigido sus esfuerzos los entendimientos vigorosos de Horner, Kronecker, Hermite, Laguerre, Sylverter, Picard, Klein, Encke, Carvallo, Peterson, Betti, Bianchi y tantos otros matemáticos, queda mucho que andar para solucionar de un modo completo el problema, mucho más si se tiene en cuenta que el principio fundamental de toda la teoría de ecuaciones, el teorema D'Alembert, no se ha conseguido demostrar con verdadero rigor, pues si bien es cierto que se han dado una multitud de demostraciones del llamado *punto transcendente de la teoría de las ecuaciones,* ninguna de ellas puede resistir el examen de una crítica severa.

La excursión que de modo tan admirable ha verificado el Sr. Octavio á través de la Historia de la Matemática, durante el siglo que antecede, en la parte importantísima de la resolución de las ecuaciones, deja cierta amargura en el alma al no ver figurar ningún compatriota en la lista de los hombres de ciencia que, de un modo ú otro, han contribuído á que el mencionado problema haya llegado á la situación actual. ¿Consiste esto en que los españoles no somos aptos para el cultivo de la Matemática? ¿Consiste en que nuestra constitución cerebral es distinta de la de los demás hombres? Ciertamente que no. ¿Cuales son entonces las causas de este fenómeno extraño y singular? ¿Cuáles los procedimientos que deben emplearse para evitar su continuación? No he de entrar ahora en el examen de estas cuestiones de tan excepcional importancia y de interés tan vital; porque no considero oportuna la ocasión y porque estimo que es llegada la hora de que termine, ya que leo en vuestros semblantes la legítima impaciencia, apenas contenida por vuestra refinada cortesía, de estrechar la mano y dar vuestros plácemes al Sr. Octavio de Toledo.

Unicamente os diré, que uno de los procedimientos más eficaces para poner término á la debilidad científica que nos aniquila, es imitar el ejemplo que nos da el Sr. Octavio; como él luchar sin femeniles desmayos, dando de mano al pesimismo y descorazonamiento, hoy tan en moda, que deprimen y rebajan; como él trabajar con fe en el porvenir de nuestra querida España, abriendo el pecho á la esperanza que eleva y enaltece; recordando constantemente que Dios tiene muchos caminos, no conocidos de los hombres, por donde á hombres y pueblos lleva de muertos á la vida cuando así le place según su providencia y misericordia. Sírvanos de ejemplo el recuerdo del hecho, que más parece sueño que realidad, de que aquella España fuerte y robusta que realizó el sueño secular de la unidad nacional con la toma de Granada, la que impusiera su voluntad y gobernara casi al mundo entero con los dos grandes austrias Carlos V y Felipe II; se levantó en un breve espacio de tiempo, sobre las ruinas de aquella Castilla casi expirante, devorada por las más violentas facciones, empobrecida y vilipendiada por la ausencia de la justicia, de la autoridad y del buen gobierno, y que amenazaba sucumbir y sucumbir sin gloria en las débiles y desdichadas manos del rey Enrique IV.

Cierto que nosotros no hemos aportado á la Historia de la Matemática nombres de tanto relieve como los de Newton, Gauss, Cauchy y Jacobí; mas en los demás órdenes de la cultura, España ha figurado siempre entre las naciones más adelantadas. En efecto; en ninguna nación ha habido filósofo que supere al eminente Vives; historiadores tan renombrados como el P. Mariana; teólogos tan profundos como Melchor Cano; médicos tan afamados como Miguel Servet y el divino Vallés; novelistas de tal celebridad como el príncipe de los ingenios, el insigne Cervantes; capitanes como D. Juan de Austria y el Gran Capitán; políticos tan expertos como Fernando el Católico y el Cardenal Cisneros; y en el orden artístico, las obras del insigne Herrera y de Jordán, Montañés, Velázquez y Murillo, han sido y serán la admiración de la humanidad. Y en medio de esta pléyade de sabios ilustres y de genios en el Arte, aparecen las figuras de aquellas dos mujeres incomparables que no tienen superior, ni casi igual en la historia, que se llamaron Isabel la Católica y santa Teresa de Jesús, gloria y prodigio de su sexo, que tan alto pensaron y tan hondo sintieron y cuyos rasgos fisonómicos presentan tal semejanza, no obstante ser tan distintas las órbitas en que se movieron, que bien podemos afirmar con el venerable Palafox: "A vivir doña Isabel en el claustro, fuera una santa Teresa de Jesús. A ser reina santa Teresa de Jesús, fuera otra doña Isabel".

Y en la época moderna, la ciencia mundial se descubre con respeto ante los nombres del gran Aparisi, de Balmes, del general Ibáñez, que honró esta Academia al pertenecer á ella, y del gran Menéndez Pelayo, polígrafo insigne, en cuya serie casi innumerable de producciones se puede admirar una erudición extraordinaria envuelta en el más acendrado patriotismo. Y entre los que viven, existen dos figuras eminentes que son honra de esta docta Corporación, que su fama traspasó las fronteras, y cuyas producciones so nde tal valía que merecieron ser premiadas por la Real Academia de Stokolmo con el premio Nobel; las altas personalidades de nuestro insigne y respetado Presidente Sr. Echegaray, y la del profundo histólogo Sr. Ramón y Cajal.

Pensemos, finalmente, que si España no ha enriquecido á lá ciencia matemática con ninguna de sus importantes ramas, ni con ninguna teoría, ni siquiera con uno de sus teoremas fundamentales, ha dado á la humanidad algo que vale más, mucho más, incomparablemente más: la ha hecho dueña del Nuevo Mundo.