DISCURSOS

LEÍDOS ANTE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

EN LA RECEPCIÓN PÚBLICA

DEL

SR. D. MIGUEL VEGAS Y PUEBLA-COLLADO

el día 13 de Junio de 1909.

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8
1909

DISCURSO

DEL

SR. D. MIGUEL VEGAS Y PUEBLA-COLLADO

Señores Académicos:

Desde el momento en que, por un exceso de vuestra benevolencia, me elegisteis para que me sentase entre vosotros y tomase parte en las arduas tareas encomendadas á esta ilustre Corporación, se desarrolló en mi espíritu una lucha, con tenacidad sostenida, entre dos aspiraciones ó tendencias diametralmente opuestas.

De una parte, mi deseo de hacer, en plazo breve, pública y solemne manifestación de mi profundo agradecimiento por la merced recibida, era vehementísimo, porque entendía y sigo entendiendo que, á falta de méritos propios que justificase vuestra conducta, no me quedaba otro medio de corresponder, aunque de una manera incompleta, á vuestro proceder, harto desacertado en la ocasión presente, que acudir cuanto antes me fuese posible á vuestro llamamiento.

Pero, por otro lado, me inspiraba temor el acto de hoy, en que mi voz desautorizada ha de resonar en este recinto y dirigirse á un concurso tan escogido como competente en todas las cuestiones de las ciencias físico-matemáticas, químicas y naturales, para cumplir con un inflexible precepto reglamentario. Y ¡cómo no había de encontrarse temeroso quien tiene la alta honra de dirigiros la palabra, obscuro catedrático, modesto peón del gigantesco edificio constituído por las ciencias matemáticas, cuando varones preclaros, adornados de cualidades preeminentes y dotados de caudal abundante de conocimientos científicos, se han sentido embargados en solemnidades de esta índole!

Y si á la falta de conocimientos se une la carencia absoluta de aquellas condiciones del bien decir que tan convenientes son siempre y tan necesarias en circunstancias como las presentes, comprenderéis que sería en mí temeridad grande presentarme aquí, si no contase con vuestra benevolencia, patrimonio de todos aquellos que, como vosotros, á la aureola científica que os rodea unen la nobleza del corazón.

Vengo á ocupar un puesto, no á llenar el vacío que dejara entre vosotros mi predecesor el Excmo. Sr. D. Javier de los Arcos y Miranda, cuya cultura científica pudisteis apreciar en su rápido paso por la Academia: cultura que le elevó á un puesto preeminente en la milicia y en la política y que demostró sobradamente durante el tiempo que fué profesor de la Academia de Ingenieros militares.

La circunstancia de que al cabo de algunos años venga á ocupar la vacante que dejara D. Simón Archilla, uno de mis maestros más respetados, con quien me unían estrechos vínculos de gratitud y de amistad, justifica, á mi entender, que aproveche la ocasión presente, no para encomiar su labor científica, sus talentos valiosísimos y sus virtudes privadas y públicas, tan presentes en la memoria de todos y que en otras ocasiones ensalzaron plumas más autorizadas que la mía, sino para hacer pública manifestación de mi profunda gratitud y del dolor que me causa ver privada á la ciencia española de uno de sus cultivadores más eminentes, á esta ilustre Corporación de uno de sus miembros más distinguidos, á la Universidad de uno de sus profesores más eximios, á sus hijos de un padre ejemplar y á los que tuvimos la dicha de conocerle y tratarle de un verdadero y cariñoso amigo.

Y permitidme, finalmente, que también envíe la expresión de mi agradecimiento á todos mis maestros, á quienes debo lo poco que mi inteligencia haya adquirido en orden á las ciencias físico-matemáticas, algunos de los cuales, cuyos nombres no cito por no herir su excesiva modestia, figuran en primera línea en la lista de los que por modo diverso han contribuído al adelantamiento de la ciencia y á la difusión de la misma en nuestra patria.

Aficionado desde mi juventud á la Geometría y dedicado desde hace veinte años á su cultivo y enseñanza, en la rama que se relaciona con el Análisis matemático, me ha parecido como un deber elegir un tema que estuviese incluído en el campo de la Geometría Analítica; y, entre los muchos que pudieran proponerse, he creído conveniente el que se refiere á la *Interpretación geométrica del imaginarismo:* asunto de gran importancia, que aparece en los umbrales del edificio matemático, sobre el que se ha escrito mucho y errado no poco, y acerca del cual aún queda bastante por decir y por explorar.

I

Dependiendo toda cantidad imaginaria compleja de una de segundo grado, á éstas se dirigirán nuestras observaciones. En el terreno algébrico, toda imaginaria de segundo grado aparece como raíz de una ecuación también de segundo grado en el caso de que no se satisface por números reales, es decir, cuando acusa una verdadera imposibilidad, aunque de índole diversa que la que se presenta en el caso de que, siendo los coeficientes de la ecuación funciones de cantidades variables, para valores particulares de estas cantidades se anulan el primero ó los dos primeros de dichos coeficientes, supuesta ordenada la ecuación por las potencias descendentes de la incógnita. Ahora bien, mientras el binomio subradical que entra en la constitución de la expresión de las raíces de la citada ecuación no es negativo, ésta representa en una figura fundamental ó de primera categoría en cualquier sistema de coordenadas proyectivas, dos elementos distintos ó confundidos, uno de los cuales es el elemento límite del sistema cuando es nulo el primer coeficiente de la ecuación y, cuando se anulan los dos primeros coeficientes, aquellos elementos se conconfunden con dicho elemento límite; es decir, que una ecuación de segundo grado con una incógnita, cuando el citado binomio subradical no es negativo, representa siempre dos elementos distintos ó confundidos de una serie rectilínea, de un haz de rectas ó de un haz de planos, aun cuando dicha ecuación sea imposible.

¿Ocurrirá algo análogo, cuando la ecuación sea imposible porque sea negativo el mencionado binomio, ó, en otros términos, cuando sean imaginarias sus raíces?

Pregunta es ésta que apareció en el momento mismo en que el genio de Descartes, dando á conocer su sistema de coordenadas, transformó de una manera profunda el modo de ser de la Geometría y estableció las bases de la llamada Geometría Analítica, y á contestarla se dedicaron muchos de los matemáticos posteriores; pero sus investigaciones no tuvieron otro resultado que dar la contestación negativa de que dicha ecuación no podía representar ningún elemento de una figura fundamental, toda vez que entre estos elementos y los números reales existía una correspondencia unívoca.

Que las soluciones imaginarias de las ecuaciones con una incógnita representan elementos imaginarios de una figura de primera categoría, era, pues, un modo convencional de expresar sencillamente que dichas soluciones no tenían representación real objetiva, ni tampoco la tenían las ecuaciones de coeficientes imaginarios en cualquiera de las figuras geométricas; y las figuras imaginarias se admitieron en el campo de la Geometría con el exclusivo objeto de dar sabor geométrico á las cuestiones analíticas en que intervenía el imaginarismo, de igual modo que en el siglo pasado se ideó el espacio de más de tres dimensiones para poder dar interpretación geométrica á todas las cuestiones algébricas que dependen de ecuaciones de más de tres variables independientes.

Al eminente geómetra Staudt cupo la gloria de ser el primero que diera una contestación afirmativa á la pregunta anterior, manifestando que los números imaginarios, si bien no representan elementos de una figura fundamental, representan *algo* que á dicha figura pertenece; y puesto que este algo podrá reemplazar á un elemento en muchas cuestiones geométricas, desde luego en todas las sujetas á la ley importantísima de la correlación ó de la dualidad, era lógico denominarle elemento imaginario, es decir, punto, recta ó plano imaginario, según que se trate de una serie rectilínea, de un haz de rectas ó de uno de planos.

Observando el ilustre Profesor de la Universidad de Erlangen que en una multitud de cuestiones relativas á cónicas y á cuádricas el conocimiento de una involución de puntos conjugados respecto de una de estas figuras, equivale al de dos de sus puntos, que el conocimiento de un haz de rectas en involución cuyos pares de rayos correspondientes son conjugados respecto de una cónica, equivale al de dos de sus tangentes, y que el conocimiento de un haz de planos en involución equivale á una pareja de planos tangentes á una cuádrica, estableció que una involución podía tomarse como equivalente al conjunto de sus elementos dobles, y de aquí que, cuando éstos no eran reales, dijera que lo eran imaginarios, es decir, que una involución elíptica representa el conjunto de dos elementos imaginarios conjugados.

Faltaba distinguir entre sí los elementos conjugados, y para ello unió á la involución cada uno de los dos sentidos en que podía ser recorrida, y de este modo definió un elemento geométrico imaginario como una involución elíptica unida á un sentido sobre la misma, y con la misma involución, tomada en sentido contrario, definió el elemento imaginario conjugado.

Y como para determinar una involución bastan dos pares de elementos conjugados, de aquí que una figura simple ordenada determine una involución en la cual son conjugados el primer elemento con el tercero y el segundo con el cuarto, y también un sentido definido por los tres primeros elementos; y, por consiguiente, dicha figura simple puede tomarse como representante de un número imaginario.

Y, efectivamente; estando representada una involución de primer orden por una ecuación bilineal simétrica, en cualquier sistema de abscisas proyectivas, la ecuación de segundo grado que se obtiene al suponer iguales los valores de las variables está tan íntimamente enlazada con aquélla, que puede afirmarse que el conocimiento de una de estas dos ecuaciones implica el de la otra, y, por tanto, es lógico asegurar que una involución contenida en una figura geométrica fundamental equivale al conjunto de los dos elementos representados por una ecuación de segundo grado con una incógnita, elementos que son necesariamente distintos, toda vez que el binomio subradical de que dependen los valores de las raíces no puede ser nulo, á causa de ser unívoca la correspondencia existente entre los elementos constitutivos de cada una de las parejas que componen la involución. Si, pues, las raíces de esta ecuación de segundo grado son imaginarias, ¿no es racional admitir que su conocimiento implica el de dicha involución, ó, en otros términos, que una pareja de números imaginarios conjugados es representante de una involución elíptica? Y habiéndose representado los dos sentidos opuestos contenidos en una figura de primera categoría por los signos opuestos más y menos, y diferenciándose entre sí dos cantidades complejas conjugadas por el signo que afecta al coeficiente de la parte imaginaria, ¿no es asimismo lógico tomar como representación geométrica de una de estas cantidades, la involución elíptica que determina la ecuación de segundo grado, de donde procede, unida al sentido que la figura á que esta involución pertenece, representa el signo del coeficiente dicha parte imaginaria?

Si consideramos representados los elementos de una figura de segunda categoría por sus coordenadas en un sistema binario cualquiera de coordenadas proyectivas, y para fijar las ideas nos referimos á una figura plana en coordenadas tangenciales, una ecuación lineal representa un punto real cuando los coeficientes son números reales, y cuando son imaginarios fácil es demostrar que determina una serie rectilínea en involución definida por los puntos que representan las ecuaciones obtenidas igualando á cero la parte real, el coeficiente de la parte imaginaria y por las que se deducen sumando y restando estas dos ecuaciones, siendo conjugados los puntos representados por las dos primeras y los que representan las dos últimas; y si á esta involución se une el sentido que corresponde al signo que en la citada ecuación afecta al coeficiente de la parte imaginaria, ó sea el determinado por el tercer punto de los anteriores, el primero y el cuarto, se obtiene un punto imaginario, que debe considerarse representado por la citada ecuación de coeficientes complejos.

Dados dos números imaginarios, de ellos se deducen tres parejas de números reales, á saber: la formada por las partes reales, la obtenida sumando las dos partes que componen cada uno de ellos y la que se deduce de restarlas. Y como estas tres parejas representan tres rectas concurrentes, estando las dos últimas armónicamente separadas por la primera y por la que une su punto de concurso con el punto límite del sistema, se obtiene así una representación armónica de una recta imaginaria, ó sea un haz de rectas en involución definido por estos dos pares de rectas. Pero las coordenadas homónimas de estas parejas de rectas son soluciones de una ecuación bilineal representante de una involución contenida en el eje de coordenadas respectivo, y el número imaginario dado relativo á este eje, es raiz de la ecuación de segundo grado que representa los puntos dobles de dicha involución. Luego dos números imaginarios son las coordenadas de una recta imaginaria perteneciente á una figura plana.

Asimismo, un número real y otro imaginario son las coordenadas de una recta imaginaria definida por el haz en involución que proyecta la involución rectilínea que el número imaginario dado determina en el eje coordenado respectivo, desde el punto real que en el otro eje determina el número real.

Por consiguiente, puede asentarse de un modo general que en toda figura plana ó radiada, dos números representan un elemento en un sistema cualquiera de coordenadas binarias proyectivas, elemento que es real si aquellos números son ambos reales, é imaginario en los demás casos; y que una ecuación lineal cualquiera con una ó dos variables representa una figura fundamental, cuya base sólo es real cuando los coeficientes de dicha ecuación son todos reales.

Siendo el espacio un conjunto de puntos, por consideraciones análogas á las anteriores se patentiza que tres números representan un punto en un sistema cualquiera de coordenadas ternarias proyectivas, punto que es real cuando aquellos tres números son reales, é imaginario en los demás casos, siendo la base de la involución que lo define una recta que pasa por uno de los puntos de intersección del plano límite del sistema de coordenadas adoptado (el del infinito en coordenadas cartesianas) con los ejes coordenados, y situado en uno de los planos de los haces generadores del espacio, ó exterior á todos estos planos, según que sean reales dos coordenadas, una sola ó ninguna. Y correlativamente en un sistema ternario de coordenadas tangenciales, tres números representan un plano que solamente es real cuando son reales; estando la recta, base de la involución que le define, en uno de los planos coordenados, cortando dicha recta á uno de los ejes, ó cruzándose con ellos, según que sean reales, dos coordenadas, una sola ó ninguna.

Asimismo, una ecuación lineal, con una, dos ó tres variables, representa un plano ó un punto, según que se trate de coordenadas de puntos ó tangenciales, el cual es real cuando los coeficientes de la ecuación son todos reales, é imaginario cuando esta circunstancia no se verifica.

El sistema formado por dos ecuaciones lineales de coeficientes reales, representa una recta real, intersección de los dos planos representados por dichas ecuaciones, si se trata de coordenadas de puntos. Cuando uno de estos planos es real y el otro imaginario, podrá ocurrir que aquél pase ó no por la arista del haz de planos en involución que define éste: en el primer caso los dos planos determinan dicha arista, que está, por tanto, representada por el sistema de ecuaciones considerado; y en el segundo, este sistema representa una recta imaginaria definida por el haz en involución que el plano real dado determina en el haz de planos en involución que define el plano imaginario.

Cuando las dos ecuaciones lineales tienen imaginarios sus coeficientes y representan, por tanto, dos planos imaginarios, puede suceder que las bases de las involuciones que definen estos planos se confundan, estén en un plano ó se crucen: en el primer caso la base común es la recta representada por el sistema formado por las dos ecuaciones dadas, y en el segundo, dichos planos pertenecen á una radiación, y, por tanto, dan lugar á una recta imaginaria, definida por un haz de rectas de primer orden en involución.

En el tercer caso, las dos involuciones que definen los dos planos imaginarios son proyectivas y engendran un haz alabeado en involución, perspectivo con ellas, haz que no tiene rayos dobles y que se halla recorrido en un sentido determinado, toda vez que á cada una de las involuciones de planos que le han engendrado ha de unirse un sentido. Un haz alabeado en involución con un sentido contenido en él, debe, pues, llamarse recta imaginaria, por estar determinado por dos planos imaginarios y representado por un sistema de dos ecuaciones lineales de coeficientes complejos, recta que es esencialmente distinta de las hasta aquí consideradas, ó sea de las pertenecientes á una figura plana ó radiada, y que, para distinguirlas de éstas, se dice que son de *segunda especie*, y que las contenidas en una figura de segunda categoría son de *primera especie*.

Ahora bien, como un haz alabeado en involución define un sistema en involución constituído por dos figuras no homológicas, que tiene como ejes los rayos dobles de aquel haz, cuando existen, y sin ningún punto ni plano doble real cuando dichos rayos dobles son imaginarios; y como en este último caso todos los haces alabeados en involución contenidos en el sistema determinan unos mismos sentidos en cada una de sus directrices ó rectas dobles, puede afirmarse, con todo rigor, que un sistema en involución de tercera categoría sin ningún punto ni plano doble real define dos rectas imaginarias de segunda especie, conjugadas entre sí, que se distinguen por los dos sentidos contenidos en una cualquiera de las directrices del sistema.

El conjunto de un sistema en involución de tercera categoría sin puntos ni planos dobles reales con un sentido en el mismo, viene, pues, representado por un sistema de dos ecuaciones lineales de coeficientes imaginarios, lo cual puede verse de un modo directo observando que los puntos dobles de uno de estos sistemas tienen coordenadas que verifican á dos grupos de dos ecuaciones de esta especie, y que lo mismo acontece á las coordenadas de los planos dobles.

El concepto de recta imaginaria de segunda especie puede establecerse también de un modo directo análogo al seguido para definir los puntos, los planos y las rectas imaginarias de primera especie, observando que los rayos de un haz alabeado de segundo orden, ó sea las rectas de uno de los dos sistemas de generatrices rectilíneas contenidas en un hiperboloide ó paraboloide alabeado, pueden determinarse por una cualquiera de las series que determinan en los rayos de su haz director, es decir, en las generatrices del otro sistema; con lo cual queda determinado un sistema de abscisas proyectivas fijando el rayo de origen y los rayos límite y unidad; y como en él una ecuación bilineal y simétrica representa una involución contenida en el haz, cuyos rayos dobles tienen por abscisas las raíces de una ecuación de segundo grado con una incógnita, el conocimiento de cada una de ellas entraña el de la ecuación de donde procede, y, por tanto, el de una ecuación bilineal representante de una involución.

Cuando las coordenadas de un elemento de una figura de segunda ó de tercera categoría satisfacen á una ecuación, se dice que aquel elemento pertenece á la figura que la ecuación representa; definición que es evidente cuando se trata de elementos reales, pero cuya significación no aparece tan clara cuando los elementos son imaginarios.

Veamos, pues, la significación geométrica del hecho analítico de que un sistema de dos números verifican una ecuación lineal, en el caso de ser dichos números imaginarios, ó cuando son imaginarios los coeficientes, ó cuando se verifican á la vez estas dos circunstancias.

Si, para fijar las ideas, nos referimos á una figura plana considerada como conjunto de puntos, la parte real y el coeficiente de la parte imaginaria de las cantidades complejas que constituyen una solución de una ecuación lineal de coeficientes reales, verifican las dos ecuaciones lineales en que la propuesta se descompone, las cuales ponen de manifiesto que la recta real representada por esta ecuación es la base de la involución que define el punto imaginario cuyas coordenadas componen aquella solución imaginaria; la solución real única de una ecuación lineal de coeficientes imaginarios es común á las dos ecuaciones obtenidas igualando á cero la parte real y el coeficiente de la parte imaginaria, y, por tanto, representa el vértice del haz de rectas en involución que define la recta imaginaria de primera especie representada por la ecuación propuesta; finalmente, las partes reales y los coeficientes de las partes imaginarias de las dos cantidades complejas que constituyen una solución de una ecuación lineal de coeficientes imaginarios, verifican las dos ecuaciones de coeficientes reales en que ésta se descompone, y aparece claro que la involución que define la recta imaginaria representada por la ecuación dada es perspectiva con la que define el punto imaginario correspondiente á la citada solución (1).

Decir, pues, que un elemento real de una figura plana ó radiada contiene á otro imaginario ó que aquél está contenido en éste, quiere decir que el elemento real es la base de la involución que define el imaginario; y cuando se dice que un elemento imaginario contiene á otro también imaginario, quiere expresarse que son perspectivas las involuciones que definen estos elementos.

De donde se concluye que si un elemento real contiene á otro imaginario, contiene también á su conjugado; y que si un elemento imaginario contiene á otro imaginario, el conjugado del primero contiene asimismo el conjugado del segundo.

De cuanto llevamos dicho se deduce que todos cuantos

---

(1) Efectivamente, si $(x_1 + i x_2, y_1 + i y_2)$ es una solución de la ecuación

$$(A + A'i)\,x + (B + B'i)\,y + (C + C'i) = 0, \qquad [\alpha]$$

ó sea, $P + iQ = 0$, designando por P y Q los polinomios

$$Ax + By + C \quad \text{y} \quad A'x + B'y + C',$$

se debe verificar la condición

$$(A + A'i)(x_1 + i x_2) + (B + B'i)(y_1 + i y_2) + C + C'i = 0$$

que da lugar á las dos siguientes:

$$A\,x_1 + B\,y_1 + C - (A'x_2 + B'y_2) = 0,$$
$$A'x_1 + B'y_1 + C' + (A\,x_2 + B\,y_2) = 0.$$

Pero el punto imaginario considerado está definido por la involución $MM_1\,NN_1\ldots\ldots$, cuyos puntos M, M_1, N y N_1 tienen las coordenadas homogéneas $(x_1, y_1\ 1)$, $(x_2, y_2, 0)$, $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, 1)$ y $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, 1)$; y, si designamos por P_1, Q_1, P_2 y Q_2 los resultados de sustituir en los polinomios P y Q, en lugar de las variables las coordenadas de los dos primeros puntos, las igualdades últimas se transforman en las

$$P_1 - Q_2 = 0, \quad Q_1 + P_2 = 0, \qquad [\beta]$$

y las rectas m, m_1, n y n_1 que unen aquellos cuatro puntos con el problemas y cuestiones sujetos á la ley de correlación puedan proponerse con elementos reales de una figura de segunda categoría, se presentan también cuando algunos ó todos ellos se sustituyen por otros imaginarios, dando lugar á relaciones geométricas entre las involuciones y los sentidos que definen estos elementos, y enlazándose así íntimamente proposiciones que en la apariencia no tienen conexión alguna, pero que al traducirlas al lenguaje algébrico conducen á una misma cuestión sobre ecuaciones.

Con objeto de aclarar esto, citaremos sólo un ejemplo de todos los que respecto de esta materia pueden proporcionarse, que tan admirablemente expone el nunca bien ponderado Staudt en sus *Beiträge zur Geometrie der Lage* y de los que mi muy querido amigo, compañero y respetado maestro D. Eduardo Torroja da á conocer en su notable

---

punto real de la recta representada por la ecuación [α], tienen por ecuaciones las

$$P - \frac{P_1}{Q_1} Q = 0, \quad P - \frac{P_2}{Q_2} Q = 0,$$

$$P - \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2} Q = 0 \quad \text{y} \quad P - \frac{P_1 - P_2}{Q_1 - Q_2} Q = 0;$$

por tanto, la ecuación de la involución $m m_1 . n n_1 .....$ es

$$\left(P - \frac{P_1}{Q_1} Q\right) \left(P - \frac{P_2}{Q_2} Q\right)$$

$$+ \mu \left(P - \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2} Q\right) \left(P - \frac{P_1 - P_2}{Q_1 - Q_2} Q\right) = 0,$$

la cual, en virtud de las relaciones [β] y designando por λ al parámetro determinado por la igualdad

$$2\lambda = \frac{(Q_1^2 - Q_2^2)^2 - 4\mu Q_1^2 Q_2^2}{(1+\mu) Q_1 Q_2 (Q_1^2 - Q_2^2)},$$

se transforma en la

$$P^2 - Q^2 + 2\lambda P Q = 0$$

que representa la involución que define la recta imaginaria representada por la ecuación [α].

Tratado de Geometría de la Posición. La proposición de álgebra que dice que una ecuación lineal con dos variables, ya tengan ó no reales sus coeficientes, queda terminada cuando se conocen dos de sus soluciones, conduce á la siguiente proposición geométrica: á su correlativa en el plano y á las correspondientes con ellas en las radiaciones:

Dos puntos determinan un recta, que es real cuando dichos puntos son reales, ó uno real y el otro imaginario situado en una recta real que pasa por el primero, ó los dos imaginarios siendo común la base de las involuciones que los definen; y en los demás casos dicha racta es imaginaria.

Que dos puntos imaginarios determinan una recta imaginaria, quiere decir, según lo antes manifestado, que suponiendo recorrida cada una de dos involuciones rectilíneas de un plano en un sentido determinado, existe un sólo haz de rectas en involución perspectivo con las dos, el cual se confunde con el obtenido considerando los sentidos contrarios de aquéllos; y como á un sentido tomado en una de dichas involuciones rectilíneas se puede hacer corresponder dos opuestos en la otra, puede sentarse que: dos involuciones rectilíneas de bases distintas de un plano son perspectivas desde dos centros distintos; teorema que puede enunciarse también diciendo que: un cuadrivértice plano completo de vértices imaginarios, siendo dos de ellos conjugados de los otros dos, tiene real el triángulo formado por sus puntos diagonales.

Cuando se estudia una figura en el espacio en un sistema cualquiera de coordenadas rectilíneas ternarias proyectivas, ya sean tangenciales ó no, el hecho analítico de satisfacerse una ecuación lineal por tres números, quiere decir en el terreno geométrico: que un punto está en un plano ó que un punto está en la arista de un haz de planos en involución, cuando aquellos números son reales y la ecuación tiene sus coeficientes reales ó imaginarios; que la base de una serie rectilínea en involución está en un plano, cuando siendo reales los coeficientes de la ecuación, alguno de dichos números es imaginario; y que la arista de un haz de planos en involución contiene una serie rectilínea en involución, ó que estas dos involuciones son perspectivas, cuando tanto los citados números como los coeficientes de dicha ecuación lineal son imaginarios: é interpretaciones correlativas pueden hacerse empleando coordenadas tangenciales.

La solución real de un sistema de dos ecuaciones lineales de coeficientes imaginarios da lugar al vértice ó al plano de un haz de rectas de primer orden en involución; una solución imaginaria de un sistema de dos ecuaciones lineales de coeficientes reales indica que la recta representada por este sistema es base de la serie ó del haz de planos en involución que determinan dicha solución; y una solución imaginaria de un sistema de dos ecuaciones lineales de coeficientes imaginarios indica que una serie rectilínea ó un haz de planos en involución es perspectivo con un haz de rectas de primer orden, también en involución, ó que los elementos conjugados de aquella serie ó de aquel haz de planos son asimismo conjugados en un sistema en involución sin puntos ni planos dobles reales, según que la recta imaginaria representada por el citado sistema de ecuaciones sea de primera ó de segunda especie.

II

Establecidos estos conceptos, cabe ya dar interpretación geométrica á toda cuestión algébrica referente á ecuaciones lineales y á números, ya sean ó no reales éstos ó los coeficientes de aquéllas; con lo cual aparecen agrupadas proposiciones geométricas de índole tan diversa como las que se refieren á puntos, rectas y planos, con otras en que intervienen figuras fundamentales en involución y sistemas en involución en el espacio, y que mediante la consideración de los elementos imaginarios pueden sintetizarse en una sola; resultado de verdadera importancia, toda vez que la mayor perfección de una ciencia está en razón inversa del número de principios que le sirven de fundamento, y que su ideal se reduce á condensar en una sola proposición todas las verdades que la constituyen.

Antes de que el genio de Staudt hubiera dado á conocer el concepto geométrico de los elementos imaginarios, nadie hubiera sospechado que existiera relación alguna entre la proposición que establece que dos puntos determinan una recta, y la que da á conocer que dos series rectilíneas en involución, cuyas bases se cruzan, tomadas cada una de ellas en un sentido determinado, definen un sistema en involución en el espacio y un sentido en el mismo; y, sin embargo, ambas proposiciones conducen á la de Algebra, que dice que todo sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas queda determinado por el conocimiento de dos soluciones, ya sean éstas reales ó no. Por tanto, en todas las cuestiones sujetas á la ley de correlación puede reemplazarse un elemento real por otro imaginario.

Respecto de una cónica ó superficie cónica de segundo orden representada por una ecuación de segundo grado de coeficientes reales, es decir, que sea directriz de un sistema polar real plano ó radiado, un elemento imaginario está en ella ó la es tangente cuando los elementos conjugados de la involución que define el imaginario son también conjugados respecto de dicha curva ó superficie, y asimismo un punto imaginario está en una cuádrica, directriz de un sistema polar real, ó un plano imaginario la es tangente cuando los puntos ó los planos conjugados de la involución que define aquel punto ó plano imaginario son también conjugados respecto de dicha cuádrica. Es decir, que el hecho analítico de que las coordenadas de un plano imaginario, por ejemplo, verifican á la ecuación de coeficientes reales representante de una superficie cónica, se traduce en Geometría en ser conjugados, respecto de esta superficie, los planos conjugados de la involución que define el plano imaginario (1).

De donde se concluye: 1.°, que si una recta real corta á una cónica ó cuádrica en un punto imaginario, contiene una involución de puntos conjugados respecto de dicha curva ó superficie; 2.°, que si por una recta real pasa un plano imaginario tangente á una cuádrica, ya sea ó no superficie cónica, dicha recta es arista de un haz de planos en involución, cuyos planos correspondientes son conjugados respecto de la superficie; 3.°, que si por un punto real pasa una recta imaginaria tangente á una cónica, aquel punto es vértice de un haz de rectas en involución, cuyos rayos correspondientes son conjugados respecto de dicha

---

(1) Pues, si $Au^2 + Bv^2 + 2Huv + 2Gu + Fu + C = 0$ es la ecuación de una superficie cónica en coordenadas tangenciales radiadas, y $(u_1 + u_2 i, v_1 + v_2 i)$ son las coordenadas de un plano imaginario tangente á la superficie, se verifica la condición

$$A(u_1 + i u_2)^2 + B(v_1 + i v_2)^2 + 2H(u_1 + i u_2)(v_1 + i v_2)$$
$$+ 2G(u_1 + i u_2) + 2F(v_1 + i v_2) + C = 0,$$

la cual se descompone en las

$$A(u_1^2 - u_2)^2 + B(v_1^2 - v_2^2) + 2H(u_1 u_2 - v_1 v_2)$$
$$+ 2Gu_1 + 2Fv_1 + C = 0,$$
$$Au_1 u_2 + Bv_1 v_2 + H(u_1 v_2 + v_2 u_1) + Gu_2 + Fv_2 = 0,$$

que manifiestan: la primera, que son conjugados los planos cuyas coordenadas son $(u_1 - u_2, v_1 - v_2)$ y $(u_1 + u_2, v_1 + v_2)$, y la segunda, que lo son también los planos cuyas coordenadas homogéneas son $(u_1, v_1, 1)$ y $(u_2, v_2, 0)$; y estos dos pares de planos dterminan la involución que define el plano imaginario antes citado.

cónica; 4.°, que cuando un plano real que pasa por el vértice de un cono de segundo orden le corta en una recta imaginaria, este plano contiene una involución de rectas conjugadas respecto del cono; 5.°, que cuando un elemento imaginario está en una cónica ó cono de segundo orden ó es tangente á esta curva ó superficie, y cuando ese punto imaginario está en una cuádrica ó un plano imaginario es tangente, el elemento imaginario conjugado con aquél pertenece también ó es tangente á dicha curva ó superficie; y 6.°, que si dos cónicas tienen común un punto imaginario, también tienen común su conjugado, y ambas curvas tienen común la involución de puntos conjugados que definen aquellos dos imaginarios, y correlativamente.

Estableciendo las condiciones analíticas que expresan que toda solución de un sistema de dos ecuaciones lineales de coeficientes imaginarios es también solución de una ecuación de segundo grado con tres variables de coeficientes reales, ó, dicho en lenguaje geométrico, cuando una recta imaginaria está contenida en una superficie de segundo orden, directriz de un sistema polar real, se deduce que, si el sistema de aquellas ecuaciones lineales tienen una solución real, el discriminente de la ecuación de segundo grado es negativo ó nulo, mientras que es positivo cuando aquel sistema de ecuaciones tiene imaginarias todas sus soluciones. Por tanto, las rectas imaginarias contenidas en una superficie cónica ú ordinaria de segundo orden son de primera especie, mientras que las contenidas en las cuádricas imaginarias ó alabeadas son todas de segunda especie.

Más aún: la interpretación geométrica de las citadas condiciones conduce á establecer que, cuando una recta imaginaria de primera especie está contenida en una cuádrica, también lo está su conjugada; y que la involución de rectas que define á las dos se confunde con la involución de rectas polares, que tiene como base la de aquélla; y que si una recta imaginaria de segunda especie pertenece á una cuádrica imaginaria ó alabeada, toda directriz del sistema en involución que define dicha recta es base de una involución de puntos y de otra de planos conjugados comunes á este sistema y á la citada superficie.

Establecidos así los conceptos fundamentales acerca de las relaciones entre los elementos imaginarios y las ecuaciones de segundo grado de coeficientes reales, fácil es deducir la proposición geométrica en que se traduce toda cuestión analítica en la que entren estas ecuaciones y otras lineales que tengan imaginarios los coeficientes, dando lugar á relaciones entre cónicas ó cuádricas con involuciones y sistemas en involución, que se demuestran con sencillez utilizando las cantidades imaginarias, pero cuya demostración directa es en muchos casos difícil y en casi todos laboriosa.

Aclararemos esto con algunos ejemplos. Una recta imaginaria situada en el plano de una cónica sin serle tangente, la corta en un punto real y otro imaginario, ó en dos imaginarios no conjugados respecto de la curva; lo cual, en el lenguaje ordinario, quiere decir que existe una sola recta del plano de una cónica que contiene una involución de puntos conjugados respecto de esta curva, involución que es perspectiva con otra dada de rectas cuyo vértice se encuentra en dicha curva, ó que existen sólo dos rectas que son bases de involuciones de puntos conjugados, respecto de la cónica, perspectivas con un mismo haz de primer orden en involución cuyo vértice no está sobre la curva. Asimismo se encuentran fácilmente demostradas las proposiciones siguientes:

1.ª Existe un sólo punto del plano de una cónica que es vértice de un haz en involución de rectas conjugadas respecto de la curva, perspectivo con una involución dada contenida en una tangente, y cuando la base de esta involución rectilínea no es tangente á la cónica, existen dos puntos que cumplen con las mismas condiciones;

2.ª Existe un sólo plano que pasa por el vértice de una superficie cónica de segundo orden y que contiene un haz en involución de rectas conjugadas respecto de la superficie, perspectivo con un haz de planos en involución dado cuya arista está en la superficie; y cuando esta última circunstancia no se verifica, existen dos planos que cumplen con aquella condición, y correlativamente existen una ó dos rectas de una radiación que son aristas de haces en involución de planos conjugados, respecto de un cono de segundo orden contenido en dicha radiación, que son perspectivos con un haz de rectas también en involución, cuyo plano es ó no tangente al cono;

3.ª Existe una sola recta ó dos que son bases de involuciones de puntos ó de planos conjugados respecto de una cuádrica y perspectivas con un haz de rectas en involución dado cuyo vértice está ó no en la superficie, ó cuyo plano sea ó no tangente;

4.ª Una recta imaginaria de segunda especie puede ocupar respecto de una cuádrica las posiciones siguientes: estar en la superficie, ser tangente ó cortarla en dos puntos imaginarios no conjugados; ó en otros términos, un sistema en involución en el espacio y una cuádrica puede encontrarse en uno de los siguientes casos: contener cada directriz del sistema una involución de puntos conjugados común al mismo y á la cuádrica, ó existir una sola directriz, ó dos que cumplan con esta condición.

De la consideración de las soluciones comunes á dos ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas, se deducen las diferentes posiciones que dos cónicas de un plano ó dos conos de segundo orden con el mismo vértice, pueden ocupar. Así, concretándonos á las curvas, pues lo mismo puede repetirse en los conos, podemos afirmar que pueden tener comunes: cuatro puntos y cuatro tangentes; tres puntos y tres tangentes, siendo tangentes entre sí las dos curvas en uno de estos puntos; dos puntos y dos tangentes, siendo tangentes en cada uno de ellos; dos puntos y dos tangentes, teniendo un contacto de segundo orden en uno de ellos, ó un solo punto y la tangente que le corresponde, siendo osculatrices en él.

Cuando las dos cónicas tienen cuatro puntos imaginarios ó cuatro tangentes imaginarias comunes, estos elementos son conjugados, y, por tanto, las dos curvas tienen comunes dos involuciones de puntos conjugados en el primer caso y dos involuciones de rectas conjugadas en el segundo, y en los dos existe un triángulo único real autopolar respecto de las dos curvas, siendo reales ó imaginarios á la vez los cuatro puntos y las cuatro tangentes cuando un vértice de este triángulo es interior á las dos curvas, y en caso contrario, son reales los puntos é imaginarias las tangentes, ó reales éstas é imaginarias aquéllas.

Cuando las dos cónicas tienen comunes dos puntos reales y dos imaginarias y, por consiguiente, dos tangentes reales y dos imaginarias, las dos curvas tienen comunes dos involuciones de puntos y otras dos de rectas conjugadas, una con elementos dobles y la otra sin ellos; y como el cuadrivértice inscrito común y el cuadrilátero circunscrito también común tiene dos vértices ó dos lados reales y los otros dos imaginarios conjugados, el triángulo formado por sus elementos diagonales, el cual tiene un vértice y el lado opuesto reales y los otros dos vértices y lados imaginarios, es autopolar respecto de ambas curvas; es decir, que existe un solo punto real y una sola recta real, que son polares entre sí respecto de dichas curvas.

Si las dos cónicas se tocan en un punto y se cortan en otros dos imaginarios conjugados, tienen común una sola involución de puntos conjugados y otra de rectas conjugadas; y cuando las dos cónicas tienen un doble contacto imaginario, tienen común una serie rectilínea y el haz de sus polares, siendo también polares entre sí las bases de las dos figuras.

III

La consideración de los elementos imaginarios permite ampliar el concepto de las figuras geométricas, ya considerando como formando parte de ellas, no sólo sus elementos reales, sino también los imaginarios, ya suponiendo que la base respectiva sea imaginaria.

Una figura cualquiera de base real es, según esto, el conjunto de todos sus elementos reales y de todas las involuciones elípticas determinadas por ellos.

Una serie de puntos situados en una recta imaginaria de primera especie se compone de un punto real, el vértice del haz de rectas en involución que la define y de todas las involuciones elípticas rectilíneas perspectivas con aquel haz, tomadas en el mismo sentido que él; un haz de planos cuya arista es una recta imaginaria de primera especie se compone de un plano real, el que contiene el haz de rectas en involución que le define y de todos los haces en involución sin planos dobles perspectivos con aquél, tomados en nu mismo sentido; una serie de puntos ó un haz de planos cuya base es una recta imaginaria de segunda especie es el conjunto de todas las involuciones de primer orden de puntos ó de planos conjugados contenidas en un sistema en involución en el espacio sin puntos ni planos dobles, tomadas en un mismo sentido; un haz de rectas de plano real y vértice imaginario tiene un rayo real, la base de la serie en involución que define dicho vértice, y todos los demás son imaginarios de primera especie, y, por tanto, se compone de aquella recta real y de todos los haces de rectas en involución obtenidos proyectando dicha serie rectilínea tomada en un sentido desde los diferentes puntos del plano exteriores á su base; un haz de rectas de vértice real y plano imaginario se compone de la recta real, arista del haz de planos en involución que define el plano, y de todos los haces de rectas en involución, secciones de aquel haz de planos por todos los que pasan por dicho vértice sin contener á aquella recta real; y un haz de rectas de vértice imaginario y plano imaginario tiene todos sus rayos imaginarios de segunda especie ó una infinidad de rayos de primera especie y otra infinidad de segunda especie, según que la base de la serie rectilínea en involución que define el vértice y la arista del haz de planos en involución que define el plano del haz de rectas se confundan ó se crucen, componiéndose, en el primer caso, de todos los sistemas en involución en el espacio que contienen ambas involuciones, y en el segundo, de todos los haces de rectas en involución perspectivos de dichas dos involuciones y de todos los sistemas en involución que las contienen.

Una figura plana de plano imaginario contiene: una serie rectilínea de base real situada en la arista del haz de planos en involución que define aquel plano; todos los puntos imaginarios definidos por las involuciones elípticas contenidas en dicha arista, y los definidos por las involuciones perspectivas con aquel haz, tomadas en el mismo sentido que él; las rectas imaginarias de primera especie definidas por los haces de rectas en involución perspectivos en dicho haz de planos, y todas las rectas imaginarias de segunda especie definidas por todos los sistemas en involución en el espacio que contienen al mismo haz de planos antes citado.

Finalmente, una radiación de vértice imaginario se compone: de todos los planos reales que pasan por la base de la serie rectilínea en involución que define dicho punto; de esta misma base, única recta real contenida en la radiación; de los planos imaginarios definidos por todas las involuciones elípticas de planos cuya arista común es dicha base, y de todos los definidos por las involuciones perspectivas con la rectilínea que define el vértice, tomadas en el mismo sentido que ésta; de todas las rectas imaginarias de primera especie definidas por los haces de rectas en involución que proyectan aquella involución rectilínea desde todos los demás puntos reales del espacio, y de todas las rectas imaginarias de segunda especie definidas por los sistemas en involución en el espacio que contienen la citada involución rectilínea, tomados en el mismo sentido que ésta.

El concepto de figura simple, ó sea, de la constituída por cuatro elementos de una figura fundamental, se generaliza asimismo, y como el estudio de una figura fundamental cualquiera puede reducirse al de otra perspectiva con ella de base real, pueden también generalizarse los sistemas de abscisas, y el concepto de valor de una figura simple, ó sea de razón doble ó anarmónica, diciendo que es el cociente de las razones de las diferencias entre las abscisas de los dos primeros elementos y las de los otros dos, valor que está, por tanto, enlazado con la abscisa de uno cualquiera de los cuatro elementos mediante una ecuación bilineal, y, por consiguiente, un elemento de una figura simple queda determinado cuando se conoce el valor de esta figura y los otros tres elementos.

Ahora bien, si consideramos tres elementos de una figura fundamental cualquiera, y obtenemos las razones dobles de las figuras simples constituídas por dichos elementos y cada uno de los demás, habrá razones dobles imaginarias siendo positiva la parte imaginaria, razones dobles imaginarias con su parte imaginaria negativa y razones dobles reales. De aquí que, con relación á tres elementos de una figura fundamental, todos los demás estén distribuídos en dos campos, uno compuesto de todos los elementos cuya abscisa, en el sistema definido por aquellos tres, es imaginaria con su parte imaginaria positiva, y el otro constituído por todos los elementos de abscisa imaginaria, siendo negativa la parte imaginaria respectiva. El límite de separación de ambos campos está constituído por los elementos cuyas abscisas son reales, los cuales tienen entre sí un enlace análogo al que poseen los elementos reales de una serie de puntos, de un haz de rectas ó de un haz de planos de primer orden de base real, y presentan la misma continuidad que éstos, y por esta razón diremos con Staudt que dichos elementos constituyen una cadena.

Y como los signos más y menos representan en el terreno geométrico los dos sentidos opuestos contenidos en una figura fundamental cualquiera, podemos decir que, cuando se refieren los elementos de una de estas figuras á tres de ellos, los contenidos en uno mismo de los dos campos están en un mismo sentido respecto de aquellas tres, sentido que es contrario del correspondiente á los elementos del otro campo. Los elementos de la cadena que separa los dos campos, no están en ninguno de dichos sentidos respecto de los tres elementos de referencia, y se dice que son neutrales. De aquí que pueda definirse una cadena como el conjunto de todos los elementos de una figura fundamental que son neutrales con relación á tres de ellos, definición dada por Staudt, en la que fundamenta su bella teoría acerca de las cadenas y de los sentidos, teoría que sirve de base á la generalización de la relación proyectiva entre dos figuras (1).

---

(1) *Beiträge zur Geometrie der Lage.* - Zweites Heft.—§ 15.—página 137 á 142.

Siendo el coeficiente de la parte imaginaria de la razón doble de una figura simple cualquiera, el cociente de dos funciones de segundo grado de la parte real y del coeficiente de la parte imaginaria de la abscisa del cuarto elemento (1), y siendo el divisor esencialmente positivo, por ser la suma de dos cuadrados, el signo del cociente es el de la función dividendo, la cual carece del término rectangular y tiene los coeficientes de los cuadrados de las variables iguales al determinante formado por la unidad, los coeficientes de las partes imaginarias y las partes reales de las abscisas de los tres primeros elementos de la figura simple. De donde se deduce que, según que esta función sea positiva, negativa ó nula, así el cuarto elemento de dicha figura simple está en uno de los dos campos separados por la cadena definida por los tres primeros elementos, en el otro

---

(1) Si $\alpha_1 + \beta_1 i$, $\alpha_2 + \beta_2 i$, $\alpha_3 + \beta_3 i$ y $x + iy$ son las abscisas de los cuatro elementos de una figura simple, su razón doble es

$$r = \frac{\alpha_1 + \beta_1 i - \alpha_3 - \beta_3 i}{\alpha_1 + \beta_1 i - x - yi} : \frac{\alpha_2 + \beta_2 i - \alpha_3 - \beta_3 i}{\alpha_2 + \beta_2 i - x - yi},$$

ó sea,

$$r = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha' - x) - (\beta_1 - \beta_3)(\beta_2 - y) + [(\alpha_1 - \alpha_3)(\beta_2 - y) + (\beta_1 - \beta_3)(\alpha_2 - x)]i}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - x) - (\beta_2 - \beta_3)(\beta_1 - y) + [(\alpha_2 - \alpha_3)(\beta_1 - y) + (\beta_2 - \beta_3)(\alpha_1 - x)]i};$$

y designando, P, R, Q y S las partes reales de los términos de este quebrado y los coeficientes de i, se tiene

$$r = \frac{P + Qi}{R + Si} = \frac{PR + QS + (QR - PS)i}{R^2 + S^2}.$$

Mas por ser el denominador $R^2 + S^2$ esencialmente positivo, el signo de la parte imaginaria es el del polinomio

$$\varphi(x, y) = QR - PS = Ax^2 + Ay^2 + Gx + Fy + C,$$

siendo los coeficientes A, G, F y C funciones de α_1, β_1, α_2, β_2, α_3 y β_3, y

$$A = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & 1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_3 & \alpha_3 & 1 \end{vmatrix},$$

ó en esta cadena; ó, en otros términos: el citado cuarto elemento está con relación á los otros tres en un sentido, en el contrario ó es neutral; y puesto que el signo de esta función caracteriza el sentido á que pertenece el elemento correspondiente respecto de otros tres, la designaremos, para abreviar, con el nombre de *característica*. Todos los elementos pertenecientes á una cadena tienen nula su característica respectiva, y, por tanto, la ecuación obtenida igualando á cero dicha característica, puede considerarse como representante de la cadena. Y como esta ecuación es de segundo grado y se reduce á una de primer grado sólo cuando es nulo el coeficiente común de los cuadrados de las variables, he aquí que se dividan las cadenas contenidas en una figura fundamental en cadenas lineales y de segundo orden.

Cuando las características de los cuatro elementos de dos figuras simples tienen el mismo signo, las dos figuras se dice que son de la misma especie. Por tanto, una figura simple y la que se obtiene permutando dos elementos y también los otros dos, son de la misma especie, mientras que cambia la especie de una figura simple cuando se permutan los dos primeros ó los dos últimos elementos, y también cuando se substituyen los elementos por sus conjugados.

Las figuras simples neutrales gozan de las mismas propiedades que las constituídas por elementos reales, y, por tanto, cuando la razón doble de una figura simple es la unidad negativa, dos unidades ó media unidad, la figura debe llamarse armónica.

Como los elementos reales se prestan con más claridad y sencillez á la consideración de nuestra inteligencia, es indudable que la manera más clara y sencilla de distinguir entre sí los diversos elementos constitutivos de una figura fundamental, de relacionarlos y de abarcar su conjunto, consiste en establecer una representación real de estos elementos, es decir, buscar elementos reales tan íntimamente ligados á aquéllos, que el conocimiento de unos entrañe el de los otros. Y esto se consigue, evidentemente, observando que la parte real y el coeficiente de la parte imaginaria de la abscisa de un elemento perteneciente á una serie ó á un haz, ya sea de rectas ó de planos, puede considerarse como coordenadas binarias de un elemento de una figura de segunda categoría; y, por tanto, que pueden establecerse representaciones reales planas y radiadas de las figuras fundamentales, representaciones que serán tan diversas como diversos son los sistemas de coordenadas binarias que pueden considerarse en una figura de segunda categoría, y que permiten estudiar é investigar propiedades y relaciones entre los elementos que integran aquellas primeras figuras por medio de los que componen las segundas.

Si nos concretamos á las representaciones planas, pueden ser puntuales ó tangenciales, según que el sistema de coordenadas adoptado para representar los elementos de la figura plana sea puntual ó tangencial. Y si para concretar más tomamos una representación puntual, resulta que, dada una figura fundamental cualquiera, existe siempre en un plano cualquiera otra figura real relacionada con aquélla de tal modo que, á cada elemento de la primera, ya sea ó no real, corresponde un punto real de la segunda; á los elementos de aquélla cuya abscisa es real, corresponden los situados en uno de los ejes coordenados; á los que tienen su abscisa imaginaria pura, corresponden los situados en el otro eje de referencia; y á los demás que tienen su abscisa compleja, corresponden los puntos del plano de representación no situados en ninguno de los ejes coordenados. A los elementos de una cadena corresponde una recta ó una cónica, según que la cadena sea lineal ó de segundo orden, recta ó cónica cuya ecuación se obtiene igualando á cero la función característica de los elementos de dicha cadena. Y como la forma de esta ecuación indica que todas las cónicas representantes de las diversas cadenas determinan en la recta límite del sistema de coordenadas adoptado unos mismos puntos imaginarios conjugados, se deduce que todas las cadenas constituídas por los elementos de una figura fundamental tienen como correspondientes las cónicas de un complejo de segunda especie, cuyo eje es la citada recta límite.

Pero una cónica perteneciente á un complejo, queda determinada por tres de sus puntos, dos puntos determinan un haz de cónicas del complejo, y todas las cónicas del complejo que pasan por un punto forman una red de segunda especie, cuyo eje es el mismo del complejo; luego pueden establecerse las proposiciones siguientes:

Tres elementos cualesquiera de una figura fundamental determinan una cadena; por dos elementos pasan una infinidad de cadenas, cuyo conjunto simplemente indefinido se denomina haz de cadenas, y todas las cadenas que tienen un sólo elemento común constituyen un sistema doblemente indefinido que debe llamarse red de cadenas.

Hemos visto que un elemento de una figura fundamental pertenece á uno ú otro de los dos campos en que queda dividida por una cadena contenida en ella, según que sea positiva ó negativa su característica, es decir, según que la parte real y la imaginaria de su abscisa respectiva haga positivo ó negativo al primer miembro de la ecuación que represente la cónica correspondiente á dicha cadena.
Luego aquellos dos campos tienen como correspondientes en el plano de representación, las dos porciones de este plano separadas por dicha cónica. De aquí que cuando dos elementos pertenecen á un mismo campo, se diga que están á un mismo lado de la cadena que lo limita, y que están á distintos lados de esta cadena, ó que están separados por ella cuando dichos elementos pertenecen á campos distintos.

Cuando la cadena es lineal, los campos separados por ella corresponden á los dos ángulos completos en que queda dividido el plano de representación por la recta correspondiente con dicha cadena y la recta límite.

Como dos puntos de una cónica la dividen en dos porciones separadàs, de aquí que dos elementos de una figura de primera categoría dividan á cada una de las cadenas que los contienen en dos porciones, que deben llamarse segmentos rectilíneos cuando la figura que se considera es una serie rectilínea, y ángulos rectilíneos ó diedros cuando nos referimos á un haz de rectas ó de planos.

Conclúyese de esto la siguiente proposición, que parece paradógica: dos puntos de una serie rectilínea son extremos de un número indefinido de segmentos, y dos rayos de un haz de rectas ó de planos limitan asimismo una infinidad de ángulos rectilíneos ó diedros, siendo preciso para determinar uno de estos segmentos ó ángulos, fijar la cadena á que ha de referirse, ó un elemento contenido en el mismo.

Siendo elipses, todas las cónicas representantes de las cadenas contenidas en una figura fundamental, en una representación cartesiana, puesto que todas ellas determinan en la recta del infinito del plano de representación unos mismos puntos imaginarios, se deduce que cuando dos de estos curvas se corten en dos puntos, éstas dividen á cada una de ellas en dos porciones separadas por la otra; por tanto, cuando dos cadenas tienen dos elementos comunes, éstos dividen á cada una de ellas en dos porciones separadas por la otra.

En fin; toda propiedad relativa á rectas, cónicas, haces de rectas ó de cónicas, redes y complejos de líneas de segundo orden, da lugar á otra relativa á cadenas lineales ó de segundo orden, haces, redes y complejos de cadenas.

Si para la representación plana de los elementos de una figura fundamental se emplean coordenadas cartesianas rectangulares, las cónicas representantes de las cadenas curvilíneas son circunferencias, y, por tanto, todas las propiedades de las cadenas se pueden deducir de las relativas á las rectas y circunferencias de un plano.

Para formarse idea del conjunto de las cadenas contenidas en una figura de primera categoría, y aun para estudiar las relaciones que las enlazan y las propiedades que poseen, puede establecerse una representación puntual ó tangencial de las mismas, y, por consiguiente, de las cónicas correspondientes de una cualquiera de las representaciones planas de la figura respectiva. Efectivamente, todas las cónicas pertenecientes á un complejo vienen representadas por ecuaciones en las que entran sólo tres coeficientes arbitrarios; y si estos coeficientes se consideran como coordenadas ternarias de un punto ó de un plano en el espacio, se obtiene así una figura de tercera categoría relacionada con el complejo de tal modo, que á cada cónica de éste corresponde un punto ó un plano de aquélla; á cada haz de cónicas corresponde una serie rectilínea ó un haz de planos, y á toda red de cónicas corresponde una figura plana ó radiada. Por tanto, cada propiedad de una figura en el espacio da lugar á otra relativa á las cónicas pertenecientes á un complejo y otra correspondiente de las cadenas contenidas en una serie rectilínea ó en un haz de rectas ó de planos, tomados en el sentido más amplio y general.

Quizá la representación real más natural de los elementos constitutivos de una figura fundamental sea aquella en la que se toma como representante de cada uno de ellos el elemento real que contiene la involución que le sirve de base. Así, una serie de puntos ó un haz de planos cuya base respectiva es una recta imaginaria de segunda especie, viene representada por la congruencia lineal constituída por todas las directrices de un sistema en involución en el espacio; y, por tanto, de las propiedades de estas figuras pueden deducirse las de todas las figuras fundamentales, toda vez que, bien sea por proyección, bien por sección, puede substituirse una figura fundamental por una serie de puntos ó por un haz de planos cuya base sea una recta imaginaria de segunda especie. En esta representación á toda cadena corresponde un haz alabeado de segundo orden, y á los dos campos separados por la cadena corresponden los dos sistemas en que quedan divididas las rectas de aquella congruencia por dicho haz.

Los rayos de un haz de rectas de vértice imaginario y plano real, son uno real, base de la involución que define el vértice, y los demás imaginarios, correspondiendo uno á cada uno de los puntos reales del plano. Y si buscamos la relación que enlaza las coordenadas cartesianas del punto real de cada uno de los rayos pertenecientes á la cadena que determinan tres cualesquiera, vemos que dichas coordenadas verifican una ecuación lineal ó una de segundo grado sin término rectángulo y con iguales coeficientes enlos términos que dependen de los cuadrados de las variables, es decir, que los citados puntos reales están en una recta ó en una cónica, que es circunferencia en el caso de ser perpendiculares los ejes coordenados. Más aún: siempre puede reducirse el estudio de una figura fundamental cualquiera al de una serie rectilínea de base real, y ésta á la del haz que la proyecta desde uno de los puntos del infinito definidos por las direcciones de los ejes coordenados cartesianos como conjugadas y por las direcciones de las bisectrices de los ángulos formados por estos ejes, ó sea desde uno de los puntos normales ó circulares del plano en el caso de ser rectangulares las coordenadas empleadas. Pero, entonces, tomando la base real de aquélla serie como eje de abscisas, se deduce que las coordenadas del punto real del rayo proyectante de un punto cualquiera de una serie, son la parte real y la imaginaria de su abscisa respectiva, con lo cual aparece de nuevo la representación plana real de los elementos de una figura fundamental obtenida anteriormente, y las usuales representaciones del imaginarismo.

Resulta, pues, que la representación involutiva de las cantidades imaginarias, no sólo es la que responde mejor á las condiciones del problema, sino que de ella se deriva la representación plana puntual, y, por consiguiente, la vectorial ó módulo-argumental; en suma, todas las demás representaciónes, ya sean planas ó radiadas, puntuales ó tangenciales.

IV

Generalizado el concepto de figura geométrica mediante la consideración de los elementos imaginarios, no es difícil generalizar también las relaciones entre dos figuras. Y empezando por el caso más sencillo, ó sea por el caso en que las relaciones analíticas que enlazan las coordenadas de dos elementos homólogos, son de tal naturaleza que hacen que las coordenadas de uno de ellos sean funciones lineales de las del otro, es decir, cuando las dos figuras son proyectivas, observemos que, siendo reales los coeficientes que entran en dichas relaciones, se corresponden no sólo las soluciones reales, sino también las imaginarias; es decir, que hay correspondencia unívoca entre los elementos reales de dichas figuras y también entre los imaginarios, presentándose la particularidad de que si son homólogos dos elementos imaginarios, también lo son sus conjugados. En esta relación, llamada por esta circunstancia relación real-proyectiva, las ecuaciones que expresan que son homólogos dos elementos imaginarios, expresan también que los elementos conjugados de aquéllos se corresponden, y, por tanto, el conocimiento de dos elementos imaginarios homólogos supone, en realidad, el de otro par de elementos también homólogos, por lo cual estos dos pares de elementos reemplazan á dos pares de elementos homólogos reales.

Así, la relación real-preyectiva entre dos figuras fundamentales queda determinada por una pareja de elementos homólogos reales y otra de elementos homólogos imaginarios, siendo digno de notar que si estos últimos son conjugados entre sí, las dos figuras constituyen una involución con elementos dobles reales (1).

Del mismo modo puede sentarse: 1.°, que la relación homográfica ó correlativa entre dos figuras de segunda categoría, queda determinada por dos parejas de elementos reales homólogos y una pareja de elementos imaginarios, ó por dos parejas de éstos, y 2.°, que asimismo queda determinada la relación real-proyectiva entre dos figuras en el espacio por tres pares de elementos homólogos, reales y un par de elementos imaginarios, también homólogos, ó por dos pares de estos últimos y uno de los primeros. Y como en las ecuaciones de coeficientes reales, las soluciones

---

(1) En efecto; si $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ y $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ son las abscisas de dichos elementos, han de verificar la ecuación bilineal

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0,$$

y deben, por tanto, verificarse las relaciones

$$A(\alpha^2 + \beta^2) + (B + C)\alpha + D = 0,$$
$$B\beta - C\beta = 0;$$

de las cuales, la segunda prueba que son iguales los coeficientes B y C, y, por tanto, que las dos figuras están en involución, y de la primera se deduce la

$$B^2 - AD = (A\alpha + B)^2 + A^2\beta^2,$$

que manifiesta que en esta involución son reales los elementos dobles.

imaginarias vienen siempre á pares, los elementos dobles de dos figuras relacionadas real-proyectivamente, vienen siempre por parejas cuando son imaginarios.

Siendo bilineal la ecuación que enlaza las abscisas de los elementos homólogos de dos figuras de primera categoría relacionadas real-proyectivamente, los valores de las figuras simples homólogas, es decir, las razones dobles correspondientes son iguales entre sí, ya sean ó no reales los elementos constitutivos de dichas figuras simples, y, por tanto, estas figuras son, en cuanto al sentido, de la misma especie, y, por consiguiente, si una es neutral, también lo es la otra; á una cadena en la primera corresponde otra cadena en la segunda, y la cadena constituída por los elementos reales se corresponde consigo misma, ó, si se quiere, es doble, si bien sólo puede tener dobles dos elementos.

Cuando los elementos homólogos se corresponden doblemente en dos figuras relacionadas real-proyectivamente aparecen los sistemas en involución, ya sean homográficas ó correlativas dichas figuras, y en el último caso, el sistema es polar, y goza de todas las propiedades características de estos sistemas, tanto en lo relativo á los elementos reales como á los imaginarios. En particular, los puntos dobles constituyen una cónica ó una cuádrica, que puede ser real ó imaginaria, pero representada siempre por una ecuación de segundo grado de coeficientes reales.

En el caso en que todas las soluciones de una ecuación de segundo grado, con dos ó tres variables, son imaginarias, se dice que es imaginaria la cónica ó cuádrica que representa, expresión que tiene ahora un sentido claro y preciso, puesto que no quiere decir otra cosa sino que, en el sistema polar de donde ha provenido dicha ecuación, todas las involuciones de elementos conjugados contenidas en él tienen imaginarios sus elementos dobles, y como los puntos del plano del infinito contenidos en dicha curva ó superficie son imaginarios, de aquí que las cónicas imaginarias se consideren incluídas en el grupo de las elipses y las cuádricas imaginarias en el de los elipsoides, y las generatrices rectilíneas que una cualquiera de estas cuádricas contiene son rectas imaginarias de segunda especie.

Así como de una ecuación de segundo grado con una incógnita se deduce una ecuación bilineal simétrica, representante de una involución cuyos elementos dobles tienen por abscisas las raíces de la primera ecuación, así una ecuación de segundo grado, con dos ó tres variables, da lugar á un sistema de dos ó tres ecuaciones bilineales, cuyo módulo es simétrico, y que representa, por tanto, un sistema polar plano, radiado ó en el espacio. Con lo cual puede establecerse un concepto de elipse ó de elipsoide imaginario, análogo al establecido respecto de los elementos imaginarios, diciendo que una cónica ó cuádrica imaginaria no es otra cosa que la directriz de un sistema polar plano, radiado ó en el espacio, con lo cual todas las propiedades relativas á las cónicas ó cuádricas imaginarias darán lugar á otras relativas á sistemas polares en que intervienen elementos reales é involuciones de primer orden; teniendo presente que, á una involución elíptica de puntos conjugados en uno de estos sistemas polares, corresponde otra involución elíptica de rectas ó de planos conjugados con aquélla, y que á un sentido determinado en la primera corresponde otro sentido en la segunda, que no otra cosa quiere decir que es imaginario un punto, un plano ó una recta doble.

Para establecer la relación proyectiva en su aspecto más general, es decir, suponiendo que los elementos constitutivos de las dos figuras que se relacionan sean reales ó imaginarios todos ellos ó algunos, y que se consideran como homólogos dos elementos cualesquiera, ya sean los dos reales ó los dos imaginarios, ó uno real y otro imaginario, basta suponer que las ecuaciones bilineales que enlazan las coordenadas de dos elementos homólogos cualesquiera no tienen reales todos sus coeficientes.

Todas las propiedades de estas ecuaciones que sean independientes de la naturaleza de los coeficientes, tendrá como correspondiente en la Geometría otra relativa á figuras proyectivas en su concepto más general. Así, los elementos dobles son uno ó dos en las figuras de primera categoría; en las figuras de segunda categoría no pueden existir un cuadrivértice ni un cuadrilátero plano completo doble, si se trata de figuras planas; ni un cuadriarista ni tetraedro radiado completo doble en las radiaciones; y en las figuras proyectivas en el espacio no puede existir un quinquevértice ni un pentaedro completo que sea doble.

El número de parejas de elementos homólogos necesario y suficiente para determinar la relación proyectiva entre dos figuras cualesquiera, es el mismo que en el caso de la relación real-proyectiva, y las razones dobles de las figuras simples homólogas son iguales entre sí, y, por tanto, estas figuras simples son de la misma especie en cuanto al sentido.

Y aquí parece llegado el momento de poner de manifiesto lo erróneo de la proposición admitida por muchos, en la que se afirma que la correspondencia unívoca entre los elementos de dos figuras cualesquiera de la misma categoría basta para determinar la relación proyectiva entre ellas. Pues si relacionamos, por ejemplo, dos series cuyas bases sean dos rectas imaginarias de segunda especie, conjugadas entre sí, de modo que á todo punto de una de ellas corresponde su conjugado en la otra, la correspondencia entre los elementos de las dos series es unívoca; más aún: á toda figura armónica de la una corresponde otra figura armónica en la otra, y á toda cadena de la primera corresponde en la segunda otra cadena; pero las dos series no pueden ser proyectivas, porque las razones dobles de las figuras simples homólogas no son iguales, puesto que en cuanto al sentido son de especie diferente. Más aún: si relacionamos dos series contenidas en una recta real, de modo que á todo punto de una de ellas corresponda su conjugado, la correspondencia entre los puntos de ambas series es unívoca, y, como en el caso anterior, se corresponden las cadenas y las figuras armónicas; pero tampoco son proyectivas estas series, por no ser iguales las razones dobles de todas las figuras simples homólogas; y la verdad de esta afirmación se pone más en evidencia observando que todo punto real se corresponde consigo mismo, y, por tanto, que las dos figuras tienen dobles todos los elementos de una cadena, cosa absurda á todas luces en dos figuras proyectivas.

Idénticas consideraciones pueden hacerse respecto de dos figuras de segunda categoría, cuyas bases sean elementos imaginarios conjugados, y también cuando se relacionan dos figuras en el espacio de tal modo que á todo elemento de una de ellas corresponda su conjugado, sólo que, en este caso, son dobles todos los elementos reales del espacio.

Si suponemos que no son reales todos los coeficientes de las ecuaciones bilineales que enlazan las coordenadas de los elementos homólogos de dos figuras correlativas de la misma base y que el módulo de la transformación es simétrico, dichas figuras constituyen un sistema polar en el concepto más amplio, en el cual se corresponden doblemente los elementos homólogos, sistema que tiene idénticas propiedades que los polares reales, y cuyas directrices son imaginarias. Pero estas cónicas y cuádricas imaginarias son de índole bien distinta de las hasta ahora consideradas, ó sea de las que proceden de los sistemas polares reales, puesto que las ecuaciones que las representan, si bien son cuadráticas como las de estas últimas, no tienen reales todos sus coeficientes.

Toda recta del plano de una cónica directriz de un sistema polar general, es tangente á esta curva ó tiene con ella dos pnntos comunes; y los puntos reales que pueden contener dicha cónica pueden ser cuatro, tres, dos ó uno sólo, según sea la posición relativa que ocupen las dos cónicas reales que representan las ecuaciones obtenidas igualando á cero la parte real, y el coeficiente de la parte imaginaria del primer miembro de la ecuación que representa la citada cónica.

Una cosa análoga puede repetirse para las superficies cónicas directrices de los sistemas polares radiados generales; y, respecto de una cuádrica directriz de un sistema polar en el espacio, una recta está en ella, es tangente ó la corta en dos puntos; un plano la corta en dos rectas, ó según una curva de segundo orden; un punto está en ella ó es vértice de un cono circunscrito de segundo orden de la misma, y los puntos reales que dicha cuádrica puede contener son los comunes á las dos cuádricas reales, representadas por las ecuaciones obtenidas, igualando á cero los dos polinomios reales de segundo grado que constituyen la parte real, y el coeficiente de la parte imaginaria del primer miembro de la ecuación que representa la primera superficie.

La forma compleja de las ecuaciones que representan las cónicas y las cuádricas, tomadas en el sentido más general, es la misma que la que tienen las ecuaciones que representan los puntos, rectas y planos imaginarios, lo cual permite establecer el concepto geométrico de estas figuras por un procedimiento análogo al seguido para explicar el concepto de los elementos de primer orden.

Efectivamente, toda ecuación de segundo grado, de coeficientes complejos, representa una línea ó superficie doble de un haz ó de una serie de cónicas ó de cuádricas en involución; y, por tanto, una cónica ó cuádrica imaginaria, puede considerarse como un sistema simple de cónicas ó cuádricas en involución, unido á un sentido en el mismo; pudiéndose determinar éste en una involución de primer orden, ó en una figura elemental proyectiva con aquélla. De otro modo, como la ecuación que representa un sistema simple de cónicas ó de cuádricas, depende de un parámetro variable, cuyos diferentes valores determinan las diferentes líneas ó superficies que constituyen el sistema, estos valores pueden considerarse como las abscisas de las líneas ó superficies correspondientes en dicho sistema; con lo cual aparece patente la analogía de los mismos con las figuras de primer orden, y, por tanto, pueden definirse las cónicas y las cuádricas imaginarias como acabamos de hacerlo, es decir, por una involución unida á un sentido.

Generalizado el concepto de cónica y de cuádrica, se generalizan también los de los sistemas formados por ellas, y, en particular, los de haces, series, redes y complejos de cónicas, y asimismo los de haces, series, redes y complejos de cuádricas.

En efecto, puesto que la ecuación de una red depende sólo de dos parámetros arbitrarios, cuyos valores determinan cada una de las líneas ó superficies que la constituyen, estos parámetros pueden considerarse como las coordenadas de cada una de dichas cónicas ó cuádricas en la red; cónicas ó cuádricas que son reales cuando son reales sus coordenadas respectivas, é imaginarias en los demás casos. La analogía de las redes con las figuras de segunda categoría aparece así con una claridad evidente, y, por tanto, todo cuanto de estas figuras se establezca, da lugar á proposiciones referentes á dichas redes, sustituyendo los elementos de aquellas figuras por cónicas ó cuádricas y las figuras de primera categoría de las primeras por sistemas simples de las segundas.

Esta analogía se manifiesta aún más observando que si, por ejemplo, en una red de cónicas se consideran las polares de un punto respecto de cada una de estas líneas, se obtiene una figura plana, y que todas las figuras planas derivadas así de la red son proyectivas entre sí; con lo cual se generaliza el concepto de relación proyectiva, considerando como tales dos redes ó una red y una figura plana ó radiada, cuando son proyectivas dos figuras de segunda categoría derivadas de las dos redes, ó una figura de segunda categoría derivada de la red y dicha figura plana ó radiada; es decir, que deben considerarse como proyectivas dos redes ó una red y una figura plana ó radiada cuando las coordenadas de los elementos homólogos de las dos figuras están relacionadas por dos ecuaciones bilineales, cuyos coeficientes pueden ser reales ó no, dando así lugar á la relación proyectiva, ya siendo real-proyectiva, ya en su concepto más general.

Del mismo modo se generaliza el concepto de complejo de cónicas y de cuádricas, se patentiza la analogía de estas figuras con las figuras en el espacio y se extiende el concepto de relación proyectiva entre dos complejos y entre uno de éstos y las figuras de tercera categoría; y también los sistemas de orden superior de cuádricas se relacionan con las congruencias y con los complejos lineales, pudiéndose por este medio estudiar las propiedades de una de estas figuras por medio de las otras y generalizar los conceptos.

En los sistemas simples há lugar á considerar, por tanto, las figuras simples y las cadenas lo mismo que en las figuras de primer orden, y hasta cuanto se ha dicho relativo á la representación plana ó radiada de estas figuras puede repetirse para aquéllas, cosa que se reduce, á sustituir dichos sistemas simples por figuras de primera categoría proyectivas con ellos.

Mas como la relación proyectiva entre una figura de segunda categoría y una red de cónicas no es otra cosa, en el fondo, que la transformación cuadrática, de aquí que el concepto geométrico del imaginarismo generaliza las propiedades de estas transformaciones y hasta puedan reducirse todas las involutivas á dos de ellas: la inversión y la polaridad respecto de un triángulo; pues si bien existe también la inversión respecto de una cónica, esta transformación se reduce, mediante lo imaginario, á una inversión respecto de un triángulo con dos lados imaginarios conjugados, y entonces la cónica directriz de aquella inversión es la línea analagmática de ésta, que tiene dobles todos sus puntos.

Finalmente: las figuras de tercero y de cuarto orden experimentan también gran generalización, toda vez que estas figuras se derivan de las de segundo orden por transformaciones lineales ó cuadrátricas; actuando sobre estas figuras y las de primero ó segundo orden, se obtienen y generalizan las propiedades de otras de orden superior, y así sucesivamente.

Pero la teoría del imaginarismo, perfectamente establecida y desarrollada en las figuras de primero y de segundo orden por el insigne Staudt, no ha llegado á establecerse de igual modo en las figuras de orden superior al segundo; pues si bien son muchos los esfuerzos realizados con este objeto y muchas las cuestiones relacionadas con esta materia que todos los matemáticos han suscitado (1), puede

---

(1) *Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven;* Ernest Kötter, Berlín 1887.

Die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme; Zeitschrift für Mathematik und Physik; vol 24, página 221.

afirmarse que, en la actualidad, unos y otras no son más que hechos, importantes sin duda, pero que no llegan á constituir un edificio científico asentado sobre bases sólidas capaces de resistir los ataques de una crítica severa.

V

Resta sólo examinar si las operaciones calculatorias tienen significación en el sistema de representación de Staudt. Me limitaré á establecer el concepto de la sumación y multiplicación; pues de la primera se deducirá la sustracción, y de la segunda la división, la elevación á potencias de exponente numérico y la extracción de raices (1), conceptos que se derivan de un modo natural de la ecuación de la involución.

En efecto, siendo esta ecuación bilineal y simétrica con dos variables, que representan elementos de dos figuras fundamentales cualesquiera, si se supone nulo el coeficien-

---

Généralisation de la Théorie de l'involution; Annali di matemática pura ed applicata; serie I, vol. 2, pág. 86.

Ueber Involutionen höherer Grade; Weyr, Journal für die reine und angewandte Mathematik; vol. 72, pág. 285.

Die höhere Projectivität und Perspectivität in der Ebene, dargestellt durch geometrischer Analyse; Grassmann, Journal für Math; vol. 42, pág. 193.

Eine geometrische Ableitung der Polareigenschaften ebener Curven; Zeitschrift, vol. 22, pág. 220.

(1) *Beiträge zur Geometrie der Lage;* Staudt, zweites Hef, páginas 166 á 182.

Tratado de Geometria de la Posición; Torroja, páginas 257 á 271. Madrid, 1899.

Ueber die von Staudt'schen Würfe; Sturm, Math. Ann. Vol. 9, página 333.

Ueber von Staudt's Rechnung mit Würfen und verwandte Procescse; Schröder, Manh. Ann. Vol. 10, pág. 289.

te del producto de las variables, se obtiene una ecuación en la cual entra la suma de éstas y un término independiente; y si se anula el coeficiente de la suma de las variables, resulta una ecuación compuesta del producto de éstas y de un término conocido; término que se hace igual á una de dichas variables cuando la otra se anula, en el primer caso, y cuando es igual á la unidad, en el segundo (1).

En el caso de la suma, el elemento límite del sistema es doble de la involución, y la figura simple correspondiente á la suma de otras dos costituídas por los tres elementos de referencia y dos conjugados, es la que corresponde al elemento conjugado del origen.

De cuya definición se deduce que esta operación cumple con todas las leyes formales de las operaciones calculatorias, y de ella se deduce la de la operación inversa, ó sea la substración, si bien ésta se reduce fácilmente á la suma, con sólo añadir al minuendo la contraria del sustraendo, figuras simples contrarias que son las que corresponden á dos elementos conjugados de la involución que tiene como elementos dobles el origen y el elemento límite del sistema.

Pues dos abscisas contrarias están enlazadas por la ecuación $x + x' = 0$ que define una involución, cuyos elementos dobles son el origen y el elemento límite del sistema de abscisas.

Si en la ecuación de la involución se anula el coeficiente

---

(1) En efecto; siendo $\alpha x x' + \beta (x + x') + \gamma = 0$ la ecuación de la involución, cuando es doble el elemento límite A del sistema (ABC) de abscisas adoptado, se reduce á la $\beta (x + x') + \gamma = 0$, ó sea á la $x + x' = k$, en la que k es evidentemente al valor de x correspondiente al $x' = 0$.

Asimismo, siendo $x x' = k$ la ecuación de la involución que tiene conjugados el origen y el elemento límite, k es el valor de x correspondiente al $x' = 1$.

de la suma de las variables, queda reducida á otra que da el producto de las dos figuras simples correspondientes á las abscisas de dos elementos conjugados. El producto de dos figuras simples que tienen comunes los tres primeros elementos, es, pues, otra figura simple con los mismos tres primeros elementos, y el cuarto es el conjugado con el tercero en la involución definida por los dos primeros elementos como conjugados y por los dos últimos elementos de los factores como conjugados también; definición que fácilmente se transforma en la ordinariamente aceptada, en la cual el producto de dos figuras simples que tienen comunes los dos primeros elementos, siendo el cuarto de la primera el tercero de la segunda, es otra figura simple que tiene comunes con ellas dichos primeros elementos, y para tercero y cuarto los que ocupan estos lugares en el multiplicando y en el multiplicador (1).

Fácilmente se deduce que en la operación así definida se cumplen también las leyes formales de las operaciones de cálculo, así como la definición del cociente, si bien éste se reduce á la multiplicación del dividendo por la figura inversa del divisor, siendo inversas dos figuras correspondientes á dos elementos conjugados de una involución que tiene como elemento doble el elemento unidad del sistema y como conjugados el origen y el elemento límite.

---

(1) De modo que si (ABC) es un sistema de abscisas, y $D - D_1$ un par de elementos conjugados de la involución $AB \,.\, CC_1$, se tiene la igualdad

$$ABCD \times ABCD_1 = ABCC_1,$$

la cual se transforma en la

$$ABCD \times ABDC_1 = ABCC_1,$$

por ser proyectivas las figuras simples $ABCD_1$ y $ABDC_1$, por serlo ambas con la BAC_1D homóloga de la primera en la citada involución.

Y voy á concluir, pues bastante he abusado ya de vuestra indulgencia al obligaros á seguirme en esta excursión por las altas y áridas regiones de la Geometría, más áridas por la torpeza de mi pluma, que lo son ellas en sí mismas; y aunque puede decirse que mi misión se ha reducido á esbozar el cuadro del imaginarismo en la ciencia de la extensión, pues un desarrollo más amplio daría materia para muchos libros, temo, sin embargo, haberme extendido demasiado, y provocado en vuestro espíritu el cansancio y desfallecimiento; que en la esfera de la inteligencia sucede algo parecido á lo que ocurre en el mundo físico cuando ascendemos á sitios elevados y en ellos permanecemos demasiado tiempo, á saber, que cansada nuestra vista de contemplar la profundidad, parece como se debilita y desfallece, sobreviniendo el vértigo, que en el orden inmaterial se traduce en el aburrimiento.

Mas antes de terminar, permitidme que llame vuestra atención por última vez sobre lo que acontece con la cuestión que nos ocupa, exactamente idéntico á lo que sucede en gran parte de las cuestiones de las diversas ramas de la Ciencia. Cuando se considera que, merced á los esfuerzos realizados por la inteligencia humana, del hecho, al parecer aislado, de que es aritméticamente imposible la extracción de toda raíz de grado par de una cantidad negativa, se ha llegado á establecer una multitud de proposiciones que, á emejanza de sillares, constituyen en la actualidad, si no un edificio terminado y completo, al menos una parte no pequeña del mismo, nuestro espíritu, lleno de entusiasmo ante la labor realizada, no puede por menos de reconocer lo grande que es la inteligencia del hombre. Pero cuando se considera que para llegar á estos resultados ha sido precisa una labor de continuo martilleo durante cerca de ochenta siglos; cuando se examina lo deleznable y movedizo de los cimientos sobre que descansa el cuerpo del edificio científico construído, merced á las hipótesis en que se apoya; y, en suma, cuando, vuelta la vista hacia adelante, se contempla lo muchísimo que falta por recorrer en el camino emprendido y para terminar la construcción de dicho edificio, todo espíritu bien equilibrado se verá precisado á exclamar: ¡Cuán insignificante es la potencia intelectual del hombre y la cantidad de materias conocidas por el mismo! ¡Cuán inmensa es la inteligencia y la infinita sabiduría del Creador!

DISCURSO

DEL

SR. D. EDUARDO TORROJA

Señores:

A nadie, que á D. Miguel Vegas y á mí trate ó conozca, causará extrañeza la profunda satisfacción con que en nombre de la Academia vengo hoy á festejar su ingreso y darle la bienvenida.

Va ya para veinticinco años en que, sin ser adivino, descubrí sus altas cualidades de inteligencia y de carácter, dichosamente reveladas en mi entonces joven discípulo de Geometría Descriptiva por su sostenida atención en la clase y por los abundantes frutos que de su asidua aplicación sacaba.

Habíame yo propuesto desde que de aquella asignatura y de su enseñanza me había encargado, exponerla y explicarla por los fecundísimos procedimientos de la Geometría pura; y alterando el plan tradicional, hasta entonces seguido en las Facultades de ciencias y Escuelas de España, resolví hacer preceder su estudio de unas nociones de Geometría de la Posición tomadas de la fundamental obra de Staudt, y que no pude hasta mediados de 1884 publicar.

Mis discípulos primeros viéronse forzados á recoger en apuntes mis lecciones, muy difíciles de otro modo de reteñer y aun de entender; y puse con esto á severa prueba sus dotes de inteligencia y de voluntad.

Así pude apreciar las muy sobresalientes de nuestro nuevo compañero, no desmentidas en lo más mínimo, sino más y más acrecentadas en el estudio de las otras asignaturas de la carrera.

Su tesis doctoral fué prueba de la persistente preferencia que en mi clase había mostrado por la Geometría de la Posición, y constituyó un notable estudio geométrico de las curvas alabeadas de tercer orden y de las formas de ellas derivadas, así como los sobresalientes ejercicios de oposición con que ganó, bien poco después de doctorarse, la Cátedra de Análisis Matemático de la Facultad de Zaragoza, fueron muestra de que aquella preferencia no había sido exclusiva, sino perfectamente llevadera para su clarísimo entendimiento con el dominio de las demás disciplinas de la Matemática.

No estuvo desempeñando aquella Cátedra mucho tiempo. La muerte del veterano y meritísimo Catedrático don Ignacio Sánchez Solís ofreció pronto á Vegas ocasión de lucir en nueva palestra sus excepcionales conocimientos de Geometría Analítica, logrando la Cátedra de esta asignatura en la Universidad Central, para en ella poder acertadamente hermanar el magisterio del Análisis con el de la Geometría de Posición y responder cumplidamente á sus gustos, á sus aficiones, á sus aptitudes, á lo que puede llamarse su vocación.

De cómo profesa desde 1891 la Geometría Analítica, es elocuente testimonio su texto de esta ciencia.

Data su primera edición de 1894 en un nutrido tomo de 596 páginas, de las cuales en las treinta primeras, rompiendo ya los moldes antiguos, expone la parte elemental de la asignatura, haciendo el estudio de las series rectilíneas y de los haces de rectas y de planos; figuras en las que no considera solamente los segmentos ó los ángulos que limitan dos de sus elementos, dados por sus abscisas referidas á dos ó tres de ellos, sino también los cambios de estas abscisas en razón con las variaciones de los elementos de referencia y la relación proyectiva entre cada dos de tales figuras, de la cual son caso particular tan interesante y tan para fijar la atención las series y los haces en involución.

Sobre preparación tan adecuada fácil le es desarrollar con gran generalidad la materia propia de la Geometría Analítica de dos ó tres dimensiones, empleando no sólo las coordenadas cartesianas y las pluckerianas, sino además las trilineales y las tangenciales ternarias en el plano y las cuaternarias en la Geometría de tres dimensiones.

No se atrevió aún en esta primera edición, sin duda por no creerse con suficiente autoridad, á estudiar, á la par de las figuras planas las radiadas, privándose con esto de abarcar las relaciones proyectivas entre las radiaciones, al igual de las de las figuras planas y las del espacio homográficas ó correlativas entre sí, y en particular las involuciones y los sistemas polares planos y los de tres dimensiones.

En cambio, en la segunda edición (1907), la transformación es ya completa: estudia, á continuación unas de otras, las figuras planas y las radiadas del mismo orden, y en cada una de ellas las que son correlativas, apareciendo idénticas las ecuaciones que expresan propiedades correlativas que se refieren á puntos y rectas de un plano y á rectas y planos de una radiación, y las que resuelven los problemas correspondientes á las mismas.

Casi simultáneamente hace la discusión de la ecuación general de segundo grado con dos variables, ya represente una línea plana ó una superficie cónica, ya un haz plano de rectas ó uno radiado de planos; puesto que los mismos son los caracteres que distinguen los casos en que dichas figuras sean de segundo orden propiamente tales ó se compongan de dos de primero.

A la vez también estudia la polaridad respecto á una curva ó á una superficie cónica, ambas de segundo orden, y, en general, todas las cuestiones que se refieren á propiedades proyectivas.

Esta forma de exposición permite simplificar el estudio de las figuras en el espacio, y, en particular, el de las cuádricas propiamente tales.

En todas las cuestiones antepone las de carácter proyectivo, dejando para el segundo lugar las métricas, que se refieren á cada uno de los casos particulares más interesantes; y esto no sólo en las figuras de primero y segundo orden, sino también en las de orden superior, como ocurre al estudiar la curvatura de las líneas y superficies en general.

En muchos capítulos, y especialmente en la teoría general de las superficies, ha necesitado el Sr. Vegas recurrir á las propiedades analíticas que van incluídas en el cálculo infinitesimal; y no ha temido esta intromisión, con objeto de no dejar truncada la exposición y de presentarla completa, á fin de que los alumnos, que no pueden en el segundo curso de su carrera estudiar más que la parte elemental, tengan donde completar más adelante sus conocimientos, cuando hayan terminado el curso de Cálculo diferencial é integral.

Siendo tal y tan importante la obra del Sr. Vegas, profesando y propagando éste la Geometría desde los generalísimos puntos de vista que desde los primeros años de mi profesorado yo tuve y adopté por los mejores, viendo al que fué mi discípulo gozar de la merecidísima autoridad de que entre los que al estudio de las matemáticas se consagran goza, no ha de causaros extrañeza, como he dicho, que al recibirle en esta casa sienta yo singularísima satisfacción, y que por causa de tan estrecho parentesco científico haya tenido que ser quien hoy se adelante á darle sentido parabién y cariñosa salutación.

I

En el discurso, macizo y substancioso, que acabáis de oir, hay una afirmación sincera y oportuna que tengo yo, con tanta ó más razón que el Sr. Vegas, que tomar por mía, por cuanto se refiere á las grandes dificultades que se ofrecen á quien no sea maestro del buen decir, para tratar, en ocasiones como la presente, de materias verdaderamente áridas y abstrusas, tales cuales son las que de nuevo, por natural corespondencia, he de volver á considerar ante vosotros.

A tal punto llegan, que sólo el sentimiento hondo del deber y el vivísimo afecto, que á nuestro nuevo compañero profeso, han podido vencer mi repugnancia á disertar en público y en forma que me es imposible hacer amena, sobre las teorías más culminantes de la Geometría pura, en que el imaginarismo ha encontrado propia y adecuada correspondencia geométrica.

Y reduciré mi contestación á los más breves términos posibles, limitándome á un extracto ó resumen de cuanto ha dicho, que permita por condensación apreciar mejor la unidad de su magistral exposición y la sólida trabazón y enlace, que no es sólo carácter distintivo de la nueva Geometría, sino signo y prueba del dominio con que el señor Vegas abarca lo mismo para analizar que para sintetizar el vasto campo de las ciencias de la cantidad y del espacio.

Mas permitidme que antes de tal resumen ó compendio de la doctrina del imaginarismo diga algo de lo que antes de Staudt había llegado á ser la representación geométrica de las cantidades complejas, ampliando una indicación, que habréis sin duda notado, del discurso del Sr. Vegas.

Es indudable que dicha representación fué una consecuencia inmediata del establecimiento de los sistemas de coordenadas debidos al genio del insigne Descartes, que con su introducción en el campo de las ciencias matemáticas cambió de una manera profunda el modo de ser de las dos ramas que constituyen la Matemática pura, enlazándolas y completándolas entre sí y dando nacimiento á una nueva ciencia, la Geometría Analítica.

Efectivamente; siendo la forma más general de la cantidad la forma compleja, y constando toda compleja binomia de una parte real y de otra imaginaria, producto de una cantidad real por la unidad imaginaria, es claro que á toda cantidad imaginaria corresponde un punto cuyas coordenadas cartesianas son: la abscisa la parte real, y la ordenada el coeficiente de la parte imaginaria, y recíprocamente. De donde se concluye que así como existe una correspondencia unívoca entre los números reales y los puntos de una recta, así también es unívoca la correspondencia entre las cantidades complejas y los puntos de un plano. De este modo toda cantidad real tiene como representante un punto del eje de las abscisas, toda imaginaria pura está representada por un punto del eje de las ordenadas, y las demás cantidades se representan por los restantes puntos del plano.

Acerca de la importancia que tiene este concepto geométrico del imaginarismo, no he de insistir por ser sobradamente conocidos los extraordinarios progresos realizados por las teorías de las funciones y de las ecuaciones merced á su influjo, y en las cuales desplegaron sus geniales facultades Gauss, Cauchy, Weierstrass y otra multitud de insignes matemáticos.

Sólo voy á llamar la atención sobre un concepto á todas luces erróneo, que se repite con frecuencia en los libros elementales y aun en obras de carácter más superior. Me refiero á la afirmación de que *la unidad imaginaria es símbolo de perpendicularidad.*

Pues es claro que, estando representada una imaginaria pura por un punto situado en el eje de las ordenadas del sistema de representación adoptado, la unidad imaginaria lo está por el punto de abscisa nula y ordenada unidad; y como el sistema de coordenadas cartesianas que se adopte puede ser cualquiera, dicha unidad podrá contarse en cualquier dirección; y sólo en el caso de que los ejes coordenados sean perpendiculares entre sí, la citada unidad deberá contarse en la dirección perpendicular al eje de las abscisas.

Más aún, en el estado actual de la ciencia se han establecido una multitud de sistemas binarios de coordenadas, rectilíneos unos y curvilíneos otros, en todos los cuales los puntos de un plano vienen representados por dos números, y, por tanto, las cantidades reales vendrán representadas por puntos del rayo de origen del haz de rectas ó de curvas representado por los valores de la coordenada x, mientras que las imaginarias puras lo están por los del rayo de origen del haz representado por las coordenadas y. Y, si en lugar de considerar el plano como conjunto de puntos, se le considera como conjunto de rectas, toda cantidad compleja vendrá representada por una recta, que será tangente á una ú otra de las líneas de origen de las dos series de líneas coordenadas, según que dicha cantidad sea real ó imaginaria pura.

Y como las radiaciones son figuras de segunda categoría, lo mismo que las figuras planas, es indudable que también pueden hacerse representaciones radiadas del imaginarismo, dando lugar á tantas representaciones como sistemas binarios de coordenadas puedan imaginarse, ya se considere como elemento generador de la radiación la recta ó el plano.

Pero si decir que la unidad imaginaria es símbolo de perpendicularidad no es exacto de un modo absoluto, lo es en el caso de que se establece una representación plana del imaginarismo y en ella se adopta un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares.

Lo que en ningún caso puede admitirse es la pretendida demostración que suele darse de aquella afirmación. En efecto; para demostrarlo dicen «que la unidad imaginaria es la media geométrica entre la unidad positiva y la negativa, y, por tanto, que aplicando la construcción de la media geométrica entre dos segmentos rectilíneos, establecida en la Geometría, la citada media geométrica es el segmento que en el eje de las ordenadas determina la semicircunferencia que tiene como diámetro el segmento del eje de las abscisas, limitado por los dos puntos que las tienen iguales, uno á la unidad positiva y el otro á la negativa».

Ahora bien; si la media geométrica entre dos cantidades es el término medio de una proporción continua, y así debe ser considerada en la proposición anterior al hacer aplicación de la Geometría métrica, ¿es posible que exista una media geométrica entre dos cantidades de signos opuestos?

Si la demostración citada fuese cierta, habría que reconocer que existía una contradicción palmaria entre el Análisis y la Geometría. Mas, si nos fijamos un poco, observaremos que la construcción empleada no es la de la media geométrica entre los dos segmentos más uno y menos uno, sino la que hay entre más uno y más uno, y que por eso existe dicha media; pues si se aplica bien dicha construcción geométrica, resulta imposibilidad. En efecto; para construir la media geométrica entre dos segmentos a y b, se construye sobre el segmento $a+b$, suma de los dos, como diámetro, una semicircunferencia, y el segmento que determine en la perpendicular al $+a+b$, en el extremo común de los dos segmentos dados, es el medio geométrico entre ellos. Ahora bien; si dichos segmentos a y b son de signos contrarios, es evidente que el extremo común á los mismos, cuando se ha determinado su suma, es exterior á esta suma, y, por tanto, que la perpendicular á la recta $a+b$, en el citado extremo, no puede encontrar á la circunferencia descrita sobre dicha suma como diámetro: resultado que pone de manifiesto que, lejos de existir contradicción alguna entre las dos ramas constitutivas de las ciencias matemáticas, hay entre ellas una admirable armonía, sin la cual, por otra parte, no podría subsistir una ú otra; en cuyo caso, el gigantesco edificio de la Matemática, falto de base, por la destrucción de una de las dos columnas que le sostenían, se derrumbaría con estrépito, cubriendo con sus escombros no sólo la multitud de fenómenos mecánicos, que tanto contribuyen al bienestar material, fenómenos que palpamos y que constituyen los progresos admirables realizados por la humanidad en el orden de la materia, sino lo que es más transcendental, todas las admirables concepciones, todos los razonamientos, todas las teorías, tan penosamente adquiridas por la inteligencia humana en setenta siglos de continuado y persistente combate con lo desconocido.

Otra forma de representación plana de las imaginarias es la derivada de la consideración de estas expresiones bajo su forma trigonométrica ó módulo-argumental, en la cual toda imaginaria se representa por un vector situado en un plano y tomado en un sentido determinado, vector cuya longitud absoluta, medida con determinada unidad, da el módulo, y el ángulo que su dirección forma con una determinada y fija del plano, un ángulo igual al argumento de la imaginaria.

Esta representación, íntimamente enlazada con la cartesiana de ejes rectangulares antes expuesta, y más aún con el sistema polar, permite representar todas las cantidades por los diversos vectores coplanares, que tienen como origen común un punto del plano de representación; las cantidades reales están representadas por vectores contados en el eje de las abscisas, las imaginarias puras lo están por vectores contados en el eje de las ordenadas, y las demás por los restantes vectores del plano.

Concepción de verdadera importancia, merced á la que tan grande número de matemáticos pudieron formular tantas y tantas proposiciones de Algebra y de Geometría, como las que se contienen en las obras de Cauchy (1), Argand (2), Mourey (3), Briot y Bouquet (4), Hoüel (5), Laisant (6), y más particularmente en las del insigne profesor de la Universidad de Padua, Giusto Bellavitis (7), cuya teoría de las equipolencias constituye una verdadera joya científica, y un nuevo método de investigación que, generalizado por Hamilton (8) al espacio, dió origen á la

---

(1) *Mémoire sur les quantités géométriques* (Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, t. IV, pág. 157, 1847.)

(2) *Essai sur une manière de representer les quantités imaginaires dans les constructions géométriques,* 1868.

(3) *Vraie théorie des quantités negatives et des quantités pretendues imaginaires,* 1828.

(4) *Fonctions doublement périódiques.*

(5) *Théorie elementaire des quantités complexes.*

(6) *Théorie et applications des Equipollences*, París, 1897.

(7) *Cálculo de las equipolencias* (Anales de Fusinieri, t. V. página 244.)

Memoria sobre el método de las equipolencias (Anales de Fusinieri, t. XVII.)

Soluciones gráficas de algunos problemas de Geometría por el método de las equipolencias (Memoria del Instituto de Venecia, t. I, página 225.)

Exposición del método de las equipolencias (Memoria de la Sociedad italiana, 1854.)

Exposición de los nuevos métodos de Geometría Analítica (Memorias del Instituto de Venecia, 1860.)

(8) *Eléments des Quaternions*, Londres, 1866.

teoría de los cuaterniones, cuyas aplicaciones á la Mecánica y á la Física matemática ponen fuera de duda su excepcional importancia.

No hace á mi propósito exponer, ni aun á grandes rasgos, la esencia del método vectorial, que, sin dejar de tener la importancia que la interpretación anterior del imaginarismo, tiene sobre ella la ventaja de dar una representación geométrica, clara y definida, de las operaciones fundamentales del Cálculo, porque estas teorías han traspasado los límites de lo elemental y van vulgarizándose más cada día.

Apoyado en este cálculo geométrico, Bellavitis (1), considerando determinado un vector por su longitud y su argumento, ó sea el ángulo que forma con el eje de las abscisas, establece la proposición que antes mencionábamos relativa á la unidad imaginaria como símbolo de perpendicularidad, y la demostración que presenta es casi la misma que la que acabamos de analizar.

¿Creyó, pues, este gran geómetra en los groseros absurdos antes mencionados? De ningún modo; pues no dice de una manera absoluta que la unidad imaginaria sea símbolo de perpendicularidad, sino que hace esta afirmación en los supuestos que sienta acerca de la representación vectorial de las cantidades imaginarias y de las definiciones de las operaciones con ellas efectuadas, en virtud de cuyos supuestos se extiende el concepto de media geométrica, considerándose como medio geométrico entre dos vectores, el término medio de una equipolencia continua, cuyos extremos son éstos.

De este modo, como el argumento de dicho vector medio es la media aritmética entre los argumentos de los vectores extremos y la longitud del mismo la medida geomé-

---

(1) *Saggio sull'Algebra degli Immaginarii;* Venezia, 1852; pág. 19.

trica propiamente dicha entre las de los citados extremos, el vector medio geométrico entre otros dos está dirigido, según la bisectriz, del ángulo formado por ellos; y, por tanto, el vector imaginario unitario debe contarse en la región positiva del eje perpendicular al de las abscisas. Pero, téngase bien entendido que más bien que demostración, es este resultado una comprobación de que las hipótesis hechas acerca de las operaciones calculatorias con vectores, y que los razonamientos hechos á partir de ellas, son lógicos y legítimos, toda vez que llega á obtener un resultado que está de acuerdo con el convenio de que una cantidad imaginaria se represente por un vector con su argumento.

II

Sin desconocer la transcendental importancia que en la ciencia tienen las representaciones geométricas del imaginarismo, sobre todo la vectorial, ninguna de ellas es, á mi juicio, la que verdaderamente generaliza todas las proposiciones sobre elementos y cantidades reales, ni la que dá contestación satisfactoria á una multitud de hechos analíticos. En efecto; toda propiedad relativa á puntos de una recta se representa en el terreno algébrico por una ecuación de la que son soluciones las abscisas que les corresponden. Ahora bien; si algunas de las soluciones de esta ecuación son imaginarias, ó si son imaginarios los coeficientes, ¿qué significación gométrica tendrá este hecho en todos los casos antes citados? Para dar contestación á esta pregunta, hay que salirse de la recta, siendo así que, dando lugar las relaciones algébricas de coeficientes reales entre cantidades reales á una propiedad relativa á puntos de la recta, cuando estas cantidades ó aquellos coeficientes son imaginarios, ó cuando se verifican á la vez estas dos circunstancias, deberá existir una propiedad que se refiera también á la recta, la cual será la generalización verdadera de aquélla.

Y, si consideramos los rayos de un haz de rectas ó los planos de un haz de planos, y más aún, los elementos de una figura de segunda ó tercera categoría, el hecho de admitir una ecuación soluciones imaginarias no tiene interpretación alguna en todos los citados sistemas de representación del imaginarismo.

Staudt dió á conocer en el año 1856 (1) una teoría geométrica de las imaginarias, sobre la cual tan acabada disertación acabáis de oir de labios del Sr. Vegas, que creo también yo es la que verdaderamente responde á la cuestión que nos ocupa en todos sus aspectos, y de la cual paso á hacer el extracto que os anuncié, con el doble objeto que os he manifestado.

III

Empieza por definir los elementos imaginarios por medio de involuciones elípticas, ó sea, sin elementos dobles reales, en unión con los sentidos opuestos en que un elemento puede recorrer la figura que le contiene, haciendo ver que dos números cualesquiera reales ó imaginarios son raíces de una ecuación de segundo grado de coeficientes reales, de la cual se deriva una ecuación bilineal y simétrica con dos variables, que representa una involución. El conocimiento de esta involución implica el de aquellos números ó inversamente, resultando así representada algébricamente una involución elíptica por dos números imaginarios

(1) *Beiträge zur Geometrie der Lage;* Erstes Heft, S., 76.

conjugados; y diferenciándose éstos por el signo de la parte imaginaria, y por este signo uno de los dos sentidos contenidos en la involución.

Demuestra después que, en las figuras de segunda categoría, toda ecuación lineal de coeficientes imaginarios representa lo que hemos llamado elemento imaginario, reduciendo este caso á las figuras fundamentales. Por ejemplo, si se trata de la ecuación

$$(A + A'i)x + (B + B'i)y + (C + C'i) = 0,$$

en coordenadas cartesianas, la ecuación

$$Ax + By + C + \alpha(A'x + B'y + C') = 0,$$

representa, para cada valor de α, una recta de un haz cuyo vértice es el punto de encuentro de las rectas representadas por las ecuaciones

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{y} \quad A'x + B'y + C' = 0,$$

y, por tanto, el valor de α puede considerarse como la abscisa de dicha recta en el citado haz. Luego si á α damos los valores correspondientes á cada solución de la ecuación

$$\lambda\lambda' + 1 = 0,$$

se hallarán pares de rectas de una involución, cuyos rayos dobles se obtienen dando á α los valores de las raíces de la ecuación

$$\lambda^2 + 1 = 0, \quad \text{ó sea} \quad \pm i = \pm\sqrt{-1}.$$

Y una cosa análoga se hace en la figuras de tercera categoría. Pero en éstas, al considerar lo que representa el sistema de ecuaciones

$$x = (a + a'i)z + (p + p'i)$$
$$y = (b + b'i)z + (q + q'i)$$

se ofrecen los dos casos distintos, según sean ó no compatibles las cuatro ecuaciones

$$x = az + p,\ y = bz + q,\ a'z + p' = 0 \quad \text{y} \quad b'z + q' = 0,$$

representando en el primer caso una recta imaginaria de primera especie, definida por un haz de rectas de primer orden en involución; puesto que las dos ecuaciones

$$x - az - p + \alpha(a'z + p') = 0 \text{ y } x - bz - q + \alpha(b'z + q') = 0,$$

corresponden, para los diferentes valores de α, á dos haces perspectivos, ya que son equivalentes las ecuaciones

$$a'z + p' = 0 \quad \text{y} \quad b'z + q' = 0;$$

y en el segundo caso, cruzándose las aristas de estos haces, al dar á α los pares de valores que satisfacen á la ecuación

$$\lambda\lambda' + 1 = 0,$$

se obtienen dos involuciones proyectivas de planos, que engendra un haz alabeado en involución con su sentido en él; y, por consiguiente, las dos ecuaciones propuestas representan una recta imaginaria de segunda especie.

Investiga á continuación la interpretación geométrica propia de las coordenadas de un elemento de una figura de segunda ó de tercera categoría que satisfagan á una ecuación lineal, ya sean reales ó imaginarios los coeficientes de esta ecuación ó aquellas coordenadas, deduciéndose como consecuencia los principios siguientes, base de la ley de correlación, aplicables á elementos de naturaleza cualquiera:

1.° Dos puntos determinan una recta.

2.° Dos planos determinan una recta.

3.° Un punto y una recta exterior á él determinan un plano; y

4.° Un plano y una recta, no situada en él, determinan un punto.

Finalmente; se establecen las posiciones que respecto de una cónica, representada por una ecuación de coeficientes reales, ocupa un punto ó una recta de su plano, ya sean reales ó imaginarios estos elementos, y las cuestiones análogas en las cuádricas, para deducir, por último, la interpretación geométrica de las soluciones imaginarias de los sistemas formados por dos ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas, haciendo ver que una solución de esta clase representa una involución de elementos que son conjugados á la par respecto de las dos figuras de segundo orden representadas por dichas ecuaciones.

Generalizado el concepto de punto, pasa á generalizar el concepto de figura geométrica, ya sea de primera ó de segunda categoría, considerando como tal el conjunto de todos los elementos reales é imaginarios que á ella pertenecen. Así, la ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

en coordenadas binarias de puntos representa las diferentes rectas que pasan por el punto (x_1, y_1), supuesto variable el parámetro m, y tomando este parámetro todos los valores posibles reales ó imaginarios, y siendo también reales ó imaginarias las coordenadas x_1 é y_1.

Al considerar la razón doble

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4} = (ABCD)$$

de la figura simple $ABCD$ constituída por cuatro elementos cualesquiera de una figura fundamental, podrá ocurrir que sea real, que dicha razón doble sea imaginaria con la parte imaginaria positiva ó que, siendo imaginaria, tenga negativa su parte imaginaria; y de aquí que cuando se fijan los elementos A, B y C para definir un sistema de abscisas, los demás elementos de la figura fundamental determinada por dos cualesquiera de ellos, se dividan en tres grupos, á saber: el formado por los elementos cuyas abscisas son complejas con el coeficiente de la parte imaginaria positivo, el formado por los que tienen complejas sus abscisas y negativos dichos coeficientes, y el formado por los elementos que tienen sus abscisas reales. Los elementos del primer grupo forman un *campo* y las del segundo otro *campo*, separado del anterior por los elementos del tercer grupo, los cuales se dice que son *neutrales* respecto de los A, B y C y que con ellos forma una *cadena*. De aquí resulta que las propiedades de los elementos de una cadena son análogas á las de los elementos reales de una serie ó de un haz, existiendo en aquéllos la misma continuidad que en éstos.

Para ver con más claridad los elementos de una figura fundamental establece en un plano una representación puntual de las abscisas complejas de los mismos, con lo cual resultan relacionadas las figuras propuestas y la situada en el plano de representación, de tal modo que á cada elemento de aquélla corresponde un punto real de ésta, á cada cadena de la primera, una cónica en la segunda, al conjunto de todas las cadenas de la primera un complejo de cónicas que tiene como eje la recta límite del sistema de coordenadas adoptado para dicha representación; cada uno de los dos campos en que queda dividida la figura fundamental por una cualquiera de sus cadenas, corresponde con una de las dos porciones del plano de representación en que lo divide la cónica relativa á dicha cadena.

De aquí resulta la analogía de las propiedades de las cadenas y las relativas á las cónicas de un complejo de segunda especie, pudiéndose deducir de este modo todas las propiedades de las cadenas, que el gran ingenio de Staudt dió á conocer.

Estas consideraciones permiten generalizar los conceptos de segmento rectilíneo y de ángulo rectilíneo ó diedro, considerando como tales á las dos porciones en que una cadena queda dividida por dos de sus elementos. Y como por dos elementos pasan infinitas cadenas, correspondientes á las cónicas del citado complejo, que contienen los dos puntos correspondientes á dichos elementos, se deduce la siguiente proposición, que parece una paradoja: Dos puntos de una serie rectilínea son extremos de infinitos pares de segmentos, y dos rayos de un haz son lados ó caras de infinitos pares de ángulos rectilíneos ó diedros.

Entre la multitud de representaciones reales de los elementos de una figura fundamental, existe una digna de especial mención; aquella en que se toma como representante de cada elemento el real que es base de la involución que sirve para definirlo. De este modo los puntos de una serie rectilínea y los haces de un haz de planos, cuya base es una recta imaginaria de segunda especie, están representados por la congruencia que forman las directrices del sistema en involución que define dicha recta, con lo cual las propiedades de las figuras fundamentales se reducen á las de las congruencias de rectas, puesto que toda figura fundamental puede considerarse como perspectiva con otra cuya base sea una recta imaginaria de segunda especie.

Como por proyección ó sección puede reducirse el estudio de una figura fundamental al de una serie de base real, y el de ésta al del haz que la proyecta desde uno de los puntos circulares del plano, se deduce que, tomando como eje de las abscisas de un sistema cartesiano la base de la serie, las coordenadas del punto real, representante de un rayo del citado haz, son precisamente la parte real y el coeficiente de la imaginaria de la abscisa respectiva, apareciendo así como natural consecuencia de la representación involutiva de los números imaginarios las demás representaciones de que nos ocupamos en la primera parte.

A seguida emprende el Sr. Vegas el examen de las relaciones entre las figuras fundamentales que se deducen de las transformaciones lineales, ó sea la relación proyectiva, ya en el caso de ser reales las coeficientes de las fórmulas de transformación, es decir, la relación llamada real proyectiva, porque con ella á elementos reales corresponden otros reales, ya en el caso más general, en que los citados coeficientes son imaginarios. Y al buscar en este caso la directriz de un sistema polar, aparece representada por una ecuación de segundo grado con dos ó tres variables de coeficientes imaginarios, estableciéndose de este modo la representación geométrica de dichas ecuaciones. Mas como estas ecuaciones pueden ponerse en la forma $P \pm i\, Q = 0$, análoga á la de las rectas imaginarias en un sistema de coordenadas de puntos, puede darse de esta ecuación una representación análoga á la dada de las ecuaciones lineales, extendiendo el concepto de relación proyectiva á los sistemas simples de cónicas y de cuádricas.

Los conceptos de cónicas y de cuádricas así generalizados, permiten generalizar también las transformaciones cuadráticas y, por consiguiente, las figuras de tercero y cuarto orden, y reducir las transformaciones cuadráticas involutivas á dos, á saber: la inversión y la polaridad respecto de un triángulo.

De las consideraciones establecidas se deduce esta importante proposición, acerca de la cual se ha discutido no poco.

La correspondencia unívoca entre los elementos de dos figuras no basta para que estén relacionados proyectivamente.

Esto se ve claramente, considerando en una recta real relacionados sus puntos de modo que á todo punto imaginario corresponda su conjugado, pues entonces existe correspondencia unívoca entre los elementos; más aún, se corresponden las cadenas y hasta las figuras armónicas, y, sin embargo, las dos series no son proyectivas, puesto que todo punto real es doble, y en dos figuras fundamentales proyectivas de la misma base no puede haber más de dos elementos dobles sin que lo sean todos.

Finalmente, de la ecuación de la involución

$$Axx' + B(x + x') - C = 0$$

se deduce la significación geométrica de las operaciones calculatorias; pues si $A = 0$, se obtiene $x + x' = \frac{C}{B}$, que define la suma; y si $B = 0$, se obtiene $xx' = \frac{C}{A}$, que permite definir la multiplicación, de las cuales se deducen las demás. Todas las operaciones así definidas están sujetas á las leyes formales de las operaciones calculatorias que se establecen en la Aritmética Universal.

De este compendio del discurso del Sr. Vegas se desprende el carácter eminentemente lógico de la doctrina de Staudt y la inquebrantable fuerza de sus sucesivas generalizaciones y consecuencias; y resalta por lo mismo con natural vigor aquella cualidad que más acredita una doctrina matemática en particular y científica en general: la de ser casi exclusivamente deductiva á partir de pocos, pero muy fecundos principios.

Si no creyera yo que no me es lícito seguir discurriendo más tiempo ante vosotros, aún me permitiría, en apoyo de tal tésis, añadir algo acerca del principio de la proyectividad en Geometría, que es como el primordial de los que informan los modernos desarrollos de la ciencia del espacio.

Y os le presentaría como medio de generalizar las propiedades particulares de algunas figuras estudiadas por la Geometría métrica ó por la analítica, deduciendo de ellas otras aplicables á grandes familias de líneas ó de superficies, en las que se transforma la simetría en involución en sus varios aspectos, de lo cual he mostrado dos ejemplos, elegidos entre otros muchos, de estudio de las superficies doblemente proyectivas y de una alabeada de cuarto orden, en el último Congreso de Ciencias de Zaragoza.

Pero la impaciencia general que todos sentimos por dar al nuevo Académico el fraternal abrazo y la cordial enhorabuena, me aconseja asimismo dar por terminada mi contestación á su discurso.

Venga sin más dilación á ocupar el puesto que ha conquistado por sólo su propio esfuerzo; y desde él, con el prestigio y la autoridad con que ejerce su magisterio, haga prosélitos y funde en España escuela de la nueva Geometría, que tan vastos y esplendorosos horizontes ofrece á la inteligencia humana.