REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

PROCESOS DE DECISION

DISCURSO LEIDO

EL DIA 21 DE JUNIO DE 1961

POR EL

EXCMO. SR. D. SIXTO RIOS GARCIA

Y

DISCURSO DE CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. JULIO REY PASTOR

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA: VALVERDE, 22
TELEFONO 2-21-25-29
1961

INDUSTRIAS GRÁFICAS ESPAÑA, S. L.—Tels. 2547634 - 2347134.—MADRID-20

D I S C U R S O

DEL

EXCMO. SR. D. SIXTO RIOS GARCIA

Excmo. Sr,
Excmos. Señores Académicos,
Señoras. Señores:

Sean las primeras palabras para expresaros mi sincera gratitud por haberme llamado a colaborar en vuestras tareas científicas. Siento una gran emoción al ocupar un puesto de trabajo al lado de los que fueron mis maestros, y creo continúan siéndolo, y recordar en estos momentos a aquellos otros Académicos ya desaparecidos, como Plans, Terradas, Alvarez Ude y el Padre Rafael, a los que tanto debo en mi formación científica y espiritual. De un modo especial debo señalar el sentimiento que me produce no encontrar aquí al que fué mi primero y permanente maestro de Matemáticas, don Pedro Puig Adam. Desde que en 1926 recibí sus primeras lecciones en el Instituto de San Isidro, sentí por él esa admiración profunda y total que sólo inspiran los grandes maestros. Año tras año, le he sido deudor de constantes consejos y apoyos científicos. Toda su vida ejemplar de austeridad y entrega absoluta a sus discípulos y a su obra, es y será siempre el mejor modelo para mi conducta y mis acciones. Descanse en paz el maestro inolvidable.

Si en un acto de introspección quisiera buscar mi rasgo personal más característico, desearía encontrar el respeto a las opiniones de los demás. Al menos esto conscientemente he tratado siempre de imponerme como norma de convivencia social. Por ello, cuando conocí el resultado de vuestra votación, acepté con respeto y entusiasmo, haciendo propósito, que ahora publico, de compensar con mi voluntad de trabajo mi falta de sabiduría.

Tuve breves relaciones personales con mi antecesor el excelentísimo señor don Pedro M. González Quijano (q. e. p. d.), pero sí las suficientes para admirar su fuerte personalidad como Ingeniero y Matemático. Conservo especialmente el recuerdo de una conferencia suya sobre Probabilidades, en el Seminario Matemático de Rey Pastor, cuando yo era aún un adolescente y don Pedro una figura venerable. Poseía, sin duda, un cerebro de primera calidad que aplicaba el método científico de la experimentación, observación y formulación matemática con extraordinario ingenio y profundidad. Y esto resulta tanto más notable, ya que el ambiente matemático y técnico de la época en que se movía era más propicio a las conferencias brillantes con extensas anécdotas y recargada erudición que al estudio profundo y original de los problemas concretos. En este aspecto, como en su postura filosófica, Quijano fué un precursor de la época actual, en que al menos se ha aprendido a valorar perfectamente lo que es un trabajo científico serio.

No es este el momento de extenderme en detalles sobre la obra de don Pedro González Quijano, para lo que por otra parte me considero incompetente, pero sí quiero consignar uno singularmente interesante que creo no ha sido recogido en biografías y homenajes anteriores y que prueba su fina sensibilidad para adivinar los cauces del desarrollo científico futuro en el campo de la técnica. Me refiero a su explicación, en 1922, en la Escuela de Ingenieros de Caminos, de un curso de Cálculo de Probabilidades, lo que constituye, sin duda, una fecha histórica a tener en cuenta en el desarrollo de la Estadística Matemática en España. El tema de la probabilidad fué de las mayores preocupaciones de Quijano a lo largo de toda su vida y, si bien no hizo floridas conferencias, agregó algunas contribuciones originales que Terradas citaba en sus Cursos e hizo aplicaciones a la Hidrología de un interés práctico efectivo. De ellas precisamente me habló pocos meses antes de su fallecimiento cuando le visité y encontré manejando números con el mismo espíritu entusiasta y lucidez de toda su vida.

* * *

Sinceramente he de deciros que me ha preocupado seriamente el tema y el modo de desarrollo de mi discurso.

El tema que he elegido, después de sentir la tentación de otros, es de actualidad en la Ciencia y en la Técnica y, en cuanto a su expresión, confío plenamente en vuestra benévola comprensión.

Descripción de procesos de decisión

En la vida corriente nos enfrentamos a cada paso con situaciones en que se nos presentan varios cursos de acción posibles y, de la elección apropiada de uno de ellos o decisión acertada, depende el éxito posterior. Puede decirse que cualquier acción humana implica una elección y que el medio ambiente limita las posibilidades de variación; pero rara vez se reducen a uno los caminos posibles. Tales situaciones complejas tienen una importancia singular en el Director de una empresa, de un ejército o de una gran administración, cuyas decisiones pueden tener consecuencias trascendentales. Se trata, en definitiva, de partir de un conocimiento generalmente imperfecto del futuro, y de una valoración de las consecuencias de los distintos actos posibles, para llegar a elegir un curso de acción particular. Puede decirse que la decisión será óptima si conduce a las consecuencias que consideramos como más deseables, de acuerdo con el sistema de valoración adoptado.

Con esto no hemos tratado de dar una definición de decisión, sino una primera descripción superficial de lo que es un proceso de decisión.

Ejemplos de procesos de decisión

He aquí un ejemplo: la administración de un periódico diario sabe que tiene cada día un cierto número de clientes seguros y otro número de clientes inseguros. Los periódicos no vendidos suponen una pérdida. Si un día imprime menos de los que le son necesarios no tiene pérdida por aquel motivo; pero deja de vender y puede, además, perder por esta causa clientes para el futuro. Cada día ha de tomar una decisión sobre el número de ejemplares a imprimir.

Este es un problema típico de los que se llaman de inventario, no tan simple como a primera vista parece, y que se presenta en mil formas, más o menos complicadas, a cualquier empresa de producción o de venta.

Un ejemplo, técnicamente más complicado, nos lo da el estudio realizado por Massé y Gibrat en la «Electricité de France» sobre el plan de inversiones en el campo de las industrias eléctricas.

Se trata de construir nuevas centrales para hacer frente a un incremento futuro de la demanda de electricidad, determinando el plan de inversiones de costos actualizados mínimos entre los diferentes planes que permiten lograr el objetivo de una demanda futura dada.

Los estudios de los ingenieros han probado que la curva de demanda anual de electricidad puede caracterizarse en primera aproximación por tres magnitudes: A) la energía anual suministrada; B) la potencia máxima de los días más cargados, y C) la potencia media garantida en las 1.200 horas de días de invierno. Fijadas las cantidades A, B, C para una fecha futura como consecuencia de estudios estadísticos, se trata de considerar los distintos programas posibles de inversiones que puedan darnos al menos A, B, C. Se consideran los diversos tipos de fábricas (térmicas clásicas, turbinas de gas, nucleares, hidroeléctricas de varios tipos, maremotrices). El problema del plan óptimo de inversiones estudiado por Massé y Gibrat es determinar entre todos los planes que nos dan cantidades mayores que A, B, C, aquél que representa costos descontados mínimos.

El primer estudio realizado por Massé y Gibrat con la programación lineal utilizaba un modelo con cinco incógnitas principales y cuatro ecuaciones de condición y el más reciente, que tiene en cuenta las posibilidades de las fábricas nucleares, utiliza un modelo con 265 incógnitas y 229 inecuaciones. En rigor, muchas de las variables que entran en el estudio tienen un carácter aleatorio y éste será tenido en cuenta en estudios posteriores de los mismos autores.

Clasificación

Si nos fijamos un poco podemos separar al menos los siguientes elementos constitutivos de un proceso de decisión tal como se presenta en la moderna teoría de la decisión (véase el cuadro de la página siguiente).

1.° El sujeto o los sujetos que toman la decisión.

2.° El conjunto de acciones posibles.

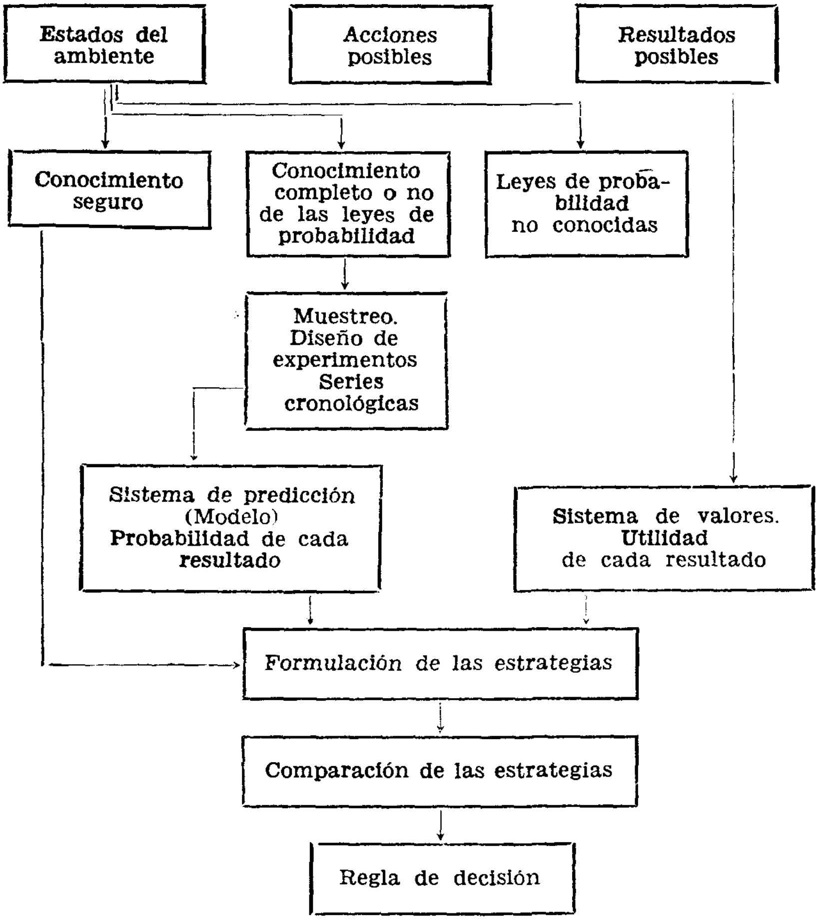
3.° El conjunto de consecuencias, eventualidades o resultados posibles.

4.° La valoración según un criterio de estas consecuencias.

5.° El modelo matemático que idealiza las relaciones empíricas entre las acciones y los resultados.

6.° El conocimiento de este modelo por la observación o la experimentación; y

7.° Los métodos de cálculo por los que se elige la decisión entre las posibles.



Puede decirse que los cuatro primeros aspectos pertenecen al área tecnológica o científica en que se presenta el problema, y los siguientes entran de lleno en la teoría de la decisión. A este campo corresponde, desde luego, el método matemático para llegar a la solución. Tal solución es lo que se llama un *programa* o *plan óptimo* de la decisión, y de aquí que sea corriente designar tales métodos como *métodos de programación* o *de planeamiento.*

En relación con los sujetos que tomen la decisión, podemos hacer una primera clasificación de los procesos de decisión en: A) Decisiones individuales. B) Decisiones de grupo. La distinción tiene un carácter funcional; las decisiones de una empresa, formada por un conjunto de individuos, deben ser clasificadas entre las individuales. Las decisiones de un Parlamento, de un Comité directivo o de un país en una votación tienen carácter de grupo.

Una segunda clasificación se refiere al campo de variabilidad o medio en que varían las eventualidades o resultados de la decisión. Podemos clasificar éste en: α) conocido con seguridad; β) conocido con probabilidad; γ) parcialmente conocido con probabilidad; δ) desconocido. Por otra parte, esta incertidumbre respecto del ambiente de las consecuencias de una decisión, puede ser debida total o parcialmente a la existencia de otro u *otros individuos o grupos concurrentes interesados* en las mismas cuestiones y, en sus consecuencias, que pueden resolver por competencia o por compromiso, etc.

Es decir, que podemos considerar:

ϵ) no hay concurrencia; φ) sí hay concurrencia.

Otro aspecto muy interesante a considerar es la sucesión de las decisiones en el tiempo y su influencia mutua, que nos conduciría a otra clasificación en: ω) situaciones estáticas, y ρ) situaciones dinámicas.

Un gran número de problemas de decisión queda encuadrado en esta múltiple clasificación, que no pretendemos sea exhaustiva; pero que puede tener, quizá, la utilidad de hacernos ver algunos campos de problemas de decisión, poco o nada estudiados.

Así, la teoría de juegos de von Neumman corresponde a problemas de decisión individual en que hay concurrencia, que crea un ambiente de leyes de probabilidad desconocidas en situaciones estáticas; la programación estocástica estudia problemas de decisión individual en un ambiente con leyes de probabilidad conocidas o desconocidas y situación estática, etc.

Los problemas análogos en situaciones dinámicas o en decisiones colectivas, apenas han sido consideradas y constituyen campos de gran interés en las aplicaciones y en la investigación.

Renunciando a una exposición enciclopédica de los distintos tipos y aspectos de los problemas de decisión, vamos a hacer una breve excursión por este campo, procurando situarnos rápidamente en algunos collados para reconocer más fácilmente las tierras limítrofes.

Decisiones individuales en ambiente conocido con seguridad. Teoría de la programación

Comencemos por el caso de decisiones individuales en ambiente conocido con seguridad y situación estática. Un ejemplo típico es el siguiente problema de mezclas: una factoría de acero pone en los hornos chatarra, lingote y otras materias para producir acero, que después se lamina, dando lugar a muy diversos productos terminados. Son conocidos los costes de producción y los costes de materias primas y los precios de venta del acero, tanto en mercado libre como en cupos oficiales. Ello permite formar la función de beneficios de venta de los distintos laminados producidos, que es una función

$$G\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

de un gran número de variables.

El problema es obtener el máximo de esta función, condicionada por una serie de inecuaciones

$$f_i\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) > O \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

que expresan limitaciones de la cantidad que se puede producir por la capacidad de los hornos y la duración de las coladas, por las proporciones en que deben mantenerse las cantidades de chatarra, lingote, etc., ingresadas en los hornos, por las capacidades de los trenes de laminación, por la demanda y preferencias del mercado, etc.

Este es un ejemplo de problema de programación, cuya solución hemos desarrollado en colaboración con los señores Béjar y García (*).

En términos generales, un problema de *programación* se formula así: Dado un conjunto X de actos posibles, que han de pertenecer a un conjunto F de actos factibles y, fijado un índice de preferencia f (X), elegir aquel acto factible $X_o \subset F$ que hace máximo el índice, es decir, el X_o tal que $f\ (X_o) \geq f\ (X)$ para todo $X \subset F$.

La elección del índice de preferencia o criterio de valoración puede ser en economía el beneficio. Sin embargo, el criterio para la decisión final será una mezcla compleja de consideraciones técnicas, económicas, psicológicas, morales, políticas, etc. Por ejemplo, un director de empresa tendrá en cuenta en sus decisiones no sólo el provecho económico inmediato de las mismas, sino consideraciones de perfección técnica, de repercusión social o política. Pero en todo caso, la decisión final puede ser facilitada si se conoce su valor de acuerdo con un cierto criterio económico. Tal criterio nos conducirá a unas ciertas cifras, y aunque los otros criterios no económicos no serán generalmente cifrables, tendremos una idea del coste de las consecuencias sociales, psicológicas, etc., de la decisión, sea o no la económicamente óptima.

Prescindiendo ahora de las dificultades de la elección del índice de preferencia, en casos en que la naturaleza económica de la cuestión no lo impone de una manera natural, podemos decir que una vez elegido un sistema de valoración mediante el índice f (X), el problema es matemático.

(*) Presentado al Congreso Internacional de TIMS (The Institute of Management Sciences) (París, septiembre 1959) con el título «Un problème de programation non linéaire de la production dans une usine d'acier».

En el caso particular e importante de *programación lineal*, se trata de encontrar un vector X de componentes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que haga mínima (o máxima) una cierta forma lineal con una serie de restricciones que se traducen en ecuaciones o inecuaciones también lineales.

La propiedad fundamental de las soluciones llamadas factibles es que forman un conjunto convexo y que la función objetivo toma el máximo en un punto extremal de dicho conjunto. Tal estudio encuentra sus antecedentes matemáticos en la teoría de Fourier (1823) sobre los sistemas de inecuaciones lineales, que ya señaló la relación de sus soluciones con la teoría de los poliedros convexos (*).

Desde el punto de vista del cálculo numérico son conocidos varios métodos llamados del simplex (al que ha aportado importantes modificaciones nuestro eminente compañero R. San Juan), del primal-dual, de las variables principales, del transporte, del multiplex, del potencial, el de Saaty, el reciente de Gomory para soluciones enteras, etc. (**) Ante esta variedad de métodos y el enorme número de variables de muchas situaciones prácticas, el problema no bien resuelto es saber qué análisis y cálculos preliminares deben realizarse para reducir a un mínimo los cálculos necesarios para llegar a la solución óptima.

Variadísimos problemas de la economía (de transporte, de planeamiento de la producción, de stocks, etc.), entran en este amplio marco de la programación lineal, que son resueltos ya, en forma sistemática en las empresas bien organizadas. Prescindiendo de su enumeración, recordaré uno señalado por nosotros como no resuelto en el reciente coloquio de Cálculo de Probabilidades de París (***) y que, pocos meses después, fué parcialmente resuelto por Dantzig y Ramser (****). Se trata de una fábrica que dispone de un equipo de camiones para distribuir una mercancía p. ej., cerveza o gasolina) a los clientes de una gran ciudad, conociendo cada mañana cuáles son las demandas de cada uno de los clientes. Cada camión parte de la fábrica y va sirviendo a clientes hasta que agota la mercancía y vuelve a la fábrica. El problema es organizar el servicio de transporte de modo que la suma de los recorridos de los camiones sea mínima.

Este problema es bastante más complicado que el clásico problema del viajante: es decir, un corredor que parte de Ma-

---

(*) El estudio de problemas de transporte por Kantorovich (1942) precede a los trabajos de Dantzig (1951).

(**) Señalemos también el método de Lasala para el problema del transporte (V. *Trabajos de Estadística*).

(***) S. Ríos: *Quelques exemples de Recherche Operationelle.* (Colloque Internationaux del CNRS, París, julio 1950.)

(****) Dantzig y Ramser: *The truck Dispatching Problem* (Management Science, 1959).

drid y debe regresar al punto de partida, después de haber pasado por las restantes 47 capitales de provincia, haciendo *mínimo el camino recorrido.* Teóricamente este problema es muy sencillo. No hay más que calcular los 47! caminos posibles y ver cuál es el más corto.

Sin embargo, el número de caminos posibles es tan fantásticamente grande (tiene más de 60 cifras) que ninguna calculadora electrónica podría practicar este procedimiento, que se le ocurriría a cualquier estudiante de Bachillerato. Una vez más vemos la impotencia de los cerebros electrónicos sin los cerebros matemáticos.

En el campo militar se utilizan los métodos de programación lineal en U. S. A., especialmente a partir de 1947, en que se organizó el SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programing), cuya finalidad es la elaboración de planes militares extensos (en hombres, tiempo, material), cuya complejidad rebasa las posibilidades humanas. Un ejemplo bien conocido es el del puente aéreo de Berlín.

Al nivel de la economía nacional los trabajos de Koopmans, Leontief y von Neumann, sobre las matrices de estructura y el equilibrio económico impulsaron en gran medida el estudio de la programación lineal que hoy se aplica en muchos países en el planteamiento de los grandes planes de inversión y desarrollo económico (*).

Nos hemos limitado hasta aquí a problemas en que el número de variables es finito; pero hay problemas reales en que se impone la consideración de infinitas variables. Tal es el caso considerado por Koopmans de producción de m bienes, mediante r factores de producción y n actividades en infinitos períodos de tiempo sucesivos. Ello ha conducido a Hurwicz y otros economistas matemáticos a estudiar la teoría de la programación lineal en el marco general de los espacios de Banach y los espacios topológicos. Esta formulación tan general del problema de la programación lineal permite ver el alcance de los resultados conocidos como problema dual, teorema de Kuhn-Tucker, etc.

Hasta aquí nos hemos referido a la programación lineal que se aplica a casos en que puede decirse que no hay en el proceso de producción economía o deseconomía interna. En caso contrario, la función objetivo no es lineal y el problema de programación no lineal puede formularse así:

Encontrar un vector n-dimensional X que haga máxima f (X) sujeto a las restricciones

$$X \geq O \qquad g\,(X) \geq O$$

en que f (X) y g (X) son funciones definidas para el vector n-dimensional $X > O$.

(*) Véanse especialmente los trabajos de Frisch y la Escuela de Oslo.

La idea directriz de un método matemático clásico de multiplicadores de Lagrange ha conducido a Kuhn-Tucker a la reducción del llamado problema cóncavo (en que f (X) y g (X) son cóncavas) a la determinación del punto de silla para la función de Lagrange

$$\varphi (X, U) = f (X) + U g (X)$$

y a establecer notables relaciones con la teoría de juegos, aún no completamente estudiados.

Desde el punto de vista de las aplicaciones, un problema interesante estudiado por programación cuadrática, es el llamado de la selección de la cartera (*), problema antiguo, consistente en repartir un capital entre unas posibles inversiones en acciones, obligaciones, bonos, de modo que se obtenga una renta máxima, con riesgo prefijado. Si la renta se mide por la esperanza matemática y el riesgo por la varianza, lo cual es plausible en una Bolsa estable, sin especulación, el problema se plantea como de máximo de una forma lineal bajo una ecuación de condición cuadrática y, para su resolución numérica, se han aplicado modificaciones adecuadas del método del simplex y otros de la programación lineal.

En realidad se trata de un problema de programación estocástica, en que la introducción de la varianza como medida del riesgo nos lo reduce a un problema de programación cuadrática.

DECISIONES INDIVIDUALES EN AMBIENTE ALEATCRIO (LEYES DE PROBABILIDAD CONOCIDAS)

Los problemas más antiguos relativos a toma de decisiones en ambiente aleatorio, de leyes de probabilidad conocida, son los juegos de azar y los seguros.

El juego de azar es un ejemplo de preferencia, de una pequeña pérdida con una fuerte probabilidad, asociada con una pequeña probabilidad de un gran premio, respecto de la seguridad de poseer una cantidad superior a la esperanza matemática del juego.

El seguro, en cambio, significa preferencia de una pequeña pérdida segura a una fuerte pérdida con pequeña probabilidad.

En uno y otro caso la decisión de actuar representa una esperanza matemática de pérdida (**); pero siglos de comportamiento humano demuestran que se trata de decisiones perfectamente razonables y compatibles con un sano juicio.

(*) Véase el trabajo de nuestro discípulo J. M. García, «La Selección de la Cartera, Trabajos de Estadística», 1950, y H. M. MARKOVITZ, «Portfolio Selection».

(**) Algunos autores, como Hardy, observan que el seguro representa una esperanza positiva para ambas partes, si se tienen en cuenta para el asegurado las pérdidas indirectas derivadas de no estar asegurado.

No hay contradicción con la ley de los grandes números que nos indicaría no tomar una decisión en que tuviéramos una esperanza matemática negativa, pues cada individuo razonable hace cortas series de jugadas o una sola.

Daniel Bernoulli consideraba el ejemplo de un pobre diablo, poseedor de un billete de lotería, que le da probabilidad 1/2 de ganar 20.000 ptas. y la misma de no ganar nada. El valor matemático de su esperanza es 10.000 ptas. Parece, sin embargo, que su conducta sería razonable si vendiera su billete a un potentado en 9.000 ptas.

La explicación de la paradoja según Bernoulli, es que hay que distinguir la cantidad en moneda (pretium) y la utilidad (emolumentum) porque «pretium ex re ipsa aestimatur omnibusque idem est, emolumentum ex conditione personae». O dicho en lenguaje corriente: «una bolsa llena no es tan buena para un rico como mala es una bolsa vacía para un pobre».

La famosa paradoja de San Petersburgo (1730) que presenta un juego con esperanza matemática infinita y que, a pesar de lo cual, raras personas estarían dispuestas a jugar, pone definitivamente en claro que la esperanza matemática de la ganancia no es un criterio general para regular el comportamiento frente al riesgo.

Dos siglos más tarde, el genial matemático Von Neumann, con la colaboración del economista Morgenstern, aportan una contribución fundamental a este problema al publicar en su libro magistral «Theory of Games and economic behaviour» una original teoría de la utilidad.

La teoría parte de una serie de axiomas que pretenden traducir el comportamiento racional de elección entre situaciones aleatorias o distribuciones de probabilidad: la idea es, en resumen, admitir que un individuo es capaz de ordenar sus preferencias respecto a cada par de situaciones aleatorias definidas sobre un conjunto básico de alternativas, y los restantes axiomas definen un modo operatorio con estos juegos, que llevan a la introducción de la noción de utilidad, de modo que si el individuo se guía únicamente por el valor esperado de la utilidad, está actuando de acuerdo con su sistema básico de preferencia. Es decir, que como consecuencia de la ordenación de las preferencias y de las operaciones con distribuciones aleatorias y sus utilidades, se regula mediante la función utilidad, el comportamiento ante situaciones complejas a partir del comportamiento ante situaciones muy simples.

Análogamente a como sucede en la teoría matemática de probabilidades, introducida a partir de los axiomas de Kolmogoroff, tenemos el problema de asignar utilidades a los actos elementales de partida. La determinación experimental de la utilidad y la comparación interpersonal de utilidades es un problema más arduo que el que, análogamente, se presenta en cálculo de probabilidades. A pesar de los trabajos iniciados por Mosteller, Suppes, etcétera, el problema está aún insuficientemente estudiado.

Diversas objeciones han sido hechas, no al desarrollo y estructura matemática de la teoría de Von Neumann, pero sí a su adecuación a la realidad de la toma de decisiones. Recordemos que esta teoría va ligada a la teoría de la probabilidad en su interpretación objetiva como idealización de la noción de frecuencia. Ramsey, Savage, Finetti, consideran que la noción de probabilidad subjetiva, cuyos valores numéricos pueden variar de un individuo a otro, pero cuyo sistema operatorio es general, se impone en tipos de problemas en que se trata de tomar una decisión ante una única situación de incertidumbre, cuya novedad es tal que ninguna serie estadística permite asignarle una probabilidad objetiva. Knight, Schackle y otros van más lejos y afirman que no todas las situaciones inciertas son reducibles a probabilidades (objetivas ni subjetivas); pero teorías como la de la «sorpresa potencial», desarrollada totalmente al margen de la teoría de probabilidades no han tenido apenas aceptación.

Podemos decir, en definitiva, que la utilidad de Von Neumann como teoría del comportamiento racional frente a la incertidumbre ha sido criticada, modificada o perfeccionada por varios autores (Allais, Milnor, Hausner, Luce, Chernoff, Barankin, etc.), para adaptarla a situaciones más reales, pero conserva en líneas generales su validez y su interés a pesar de las dificultades del problema de la valoración de utilidades elementales y las comparaciones interpersonales.

Muchos de los problemas que hemos planteado, al tratar de la programación lineal encuentran un planteo más real, si se consideran aleatorios los coeficientes de la función lineal a extremar o de las ecuaciones de condición.

En esto consiste la llamada *programación estocástica,* de que ya dimos un ejemplo con el problema de la cartera.

A pesar de las dificultades de cálculo que implica esta situación más compleja, se han hecho aplicaciones muy interesantes. P. ej., Dantzig ha resuelto la programación del transporte por aviones de m aeropuertos de partida a n de llegada con una demanda aleatoria. Tintner lo ha aplicado a la solución de problemas de economía agraria, consistentes en repartir una cierta extensión de tierra entre varios cultivos, de modo que se obtenga el máximo beneficio. Las condiciones altamente variables de los rendimientos hacen que en problemas de este tipo sea necesaria la programación estocástica.

Un hecho evidente, respecto de cualquier forma de decisión o de actuación humana es su desarrollo en tiempos sucesivos. Ello implica, como cosa natural, acumulación de nueva información con el paso del tiempo, es decir, un fenómeno aleatorio, en un cierto momento puede ser un suceso realizado en un instante posterior. De aquí el gran interés del aspecto secuencial o dinámico de la teoría de la decisión que ha sido introducida por Bellman (*) con el llamado *programa dinámico*.

Un problema típico es el de las minas de oro: suponemos que una empresa posee dos minas de oro: Anaconda y Bonanza; la primera, que tiene una cantidad x de oro y la segunda una cantidad y. Dispone de una sola máquina y sabe que si la usa en Anaconda hay una probabilidad p_1 de que obtenga una cantidad r_1x de oro, sin que la máquina se deteriore y una probabilidad $1\text{-}p_1$ de que se deteriore sin haber obtenido ningún oro. Para Bonanza las probabilidades análogas son p_2 *y* $1\text{-}p_2$ y la cantidad de oro r_2y. La empresa emplea la máquina durante un cierto tiempo en una de las dos minas, después durante otro lapso de tiempo en la misma o en la otra mina, etc. El problema es establecer un plan de decisiones sucesivas que nos dé un rendimiento esperado máximo antes de que la máquina se deteriore.

Bellman ha utilizado con éxito su potente método de las ecuaciones funcionales en éste y en otros problemas de colas, de congestión, de inventario, etc. Otros métodos han sido dados para estos problemas de decisiones sucesivas por Zoroa (**), Koopmans, Dantzig, etc. Tales métodos podrían permitir prolongar el notable trabajo de Allais (***) relativo al plan de explotación de las riquezas mineras del Sahara francés.

Decisiones individuales en ambiente incierto creado por individuos concurrentes: Teoría de juegos de estrategia

En muchas situaciones económicas, sociales, militares, políticas concurren varios individuos con intereses encontrados y cada participante ha de tomar una decisión de la que depende el resultado final de la competición.

El origen de la teoría de juegos de estrategia fué precisamente buscar un planteo más satisfactorio a problemas antiguos de la teoría económica. Un individuo dentro de un medio económico social tendrá como objetivo hacer máxima su ganancia o provecho, pero es fácil ver que el planteo adecuado del problema es fundamentalmente diferente de un problema clásico de máximos y mínimos. P. ej., la ganancia de un vendedor de una cierta mercancía depende del precio de ésta y de la cantidad vendida, pero mientras el precio lo fija el vendedor, la cantidad vendida depende de los compradores. Puesto que cada vendedor aspira a hacer máximos sus beneficios, se establece una competencia o juego de estrategia entre ellos en que la ganancia final de cada uno depende de él mismo y de los demás.

(*) *Dynamic Programming* (Princeton, 1957).

(**) Véase «Trabajos de Estadística», 1958.

(***) «Method of appraising economic prospects of mining exploration over large territories» (Management Science 1956).

Así como los iniciadores del cálculo de probabilidades partieron del estudio de los más sencillos juegos de azar, Von Neumann y su escuela comenzaron por estudiar juegos de sociedad como póker, damas, ajedrez, etc., en algunos de los cuales entra un elemento de azar, pero en que tiene un valor decisivo la inteligencia de los jugadores, ya sea en forma de reflexión o de farol (bluff).

Los primeros matemáticos, preocupados en buscar modelos teóricos aplicables a tales situaciones, parecen haber sido Zermelo (*) y Borel (C. R. 1921); pero se debe a Von Neumann el desarrollo de una teoría satisfactoria a partir de su Memoria de Mathematische Annalen (1928), cuyo resultado clave es el famoso teorema mínimax.

El problema fundamental de la teoría de juegos es establecer métodos por los cuales un jugador puede obtener el resultado más favorable. En su memoria de 1928, Von Neumann utiliza la idea de hacer máximo el valor monetario esperado, dejando a un lado el tratamiento a fondo de tal cuestión hasta que se ocupa nuevamente de la misma en su libro en colaboración con Morgenstern, dando una contribución fundamental a la Economía con la introducción del nuevo concepto de utilidad que hemos analizado anteriormente.

La primera preocupación de Von Neumann es la axiomatización de la noción de juego, comenzando por caracterizar los juegos de estrategia a fin de que su estudio no sea una colección de juegos sino una verdadera teoría. Comienza por los *juegos en forma extensiva* que define como un conjunto de reglas que no son otra cosa que una formalización matemática de las reglas usuales de los juegos. Así aisla las nociones de partida, movimiento personal y de azar, pago, información y participación, con las que constituye toda la estructura de cualquier juego complicado.

Estas reglas establecen los posibles movimientos o pasos de los jugadores, que pueden ser personales (en los cuales interviene la inteligencia del jugador), o de azar.

Cada realización de un juego se llamará una partida y cada movimiento en una partida particular se llamará una jugada. Así, en el lenguaje corriente distinguiremos el «juego de damas», de «una partida de damas» y un «paso o movimiento en el juego», de «una jugada hecha por un jugador en una cierta partida».

La estructura de las reglas de un juego es la siguiente: El primer movimiento puede ser personal o de azar. En el primer caso, las reglas establecen cuál es el jugador que debe hacerlo y las alternativas posibles, y si es de azar, especifican las alternativas posibles y sus probabilidades. Hecho el primer movimiento, viene el segundo, en que las reglas son función de los resultados po-

(*) B. ZERMELO (*Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie der Sachspiels*; Proc. Fifth Int. Congress, Cambridge, 1912, vol. II.

sibles del primero, que pueden ser conocidos o no (según las reglas), para el jugador correspondiente. Análogamente, los movimientos 3.° y 4.°, etc. Y finalmente, las reglas especifican cuándo termina el juego y las ganancias, según los casos, para cada jugador. Cada juego se representa así por un árbol o grafo conexo sin lazos en el que aparecen claras las distintas posibilidades del jugador en cada paso, mediante los correspondientes conjuntos de información.

La noción de *estrategia pura* resulta de la especificación de los distintos movimientos que debe hacer un jugador, dentro de los posibles, tras cada movimiento eventual del oponente. Así podríamos imaginar que un jugador de ajedrez que no pudiera estar presente en una partida teóricamente sería capaz de dar una serie de normas completamente unívocas para que un colega le sustituyese y actuase de una manera automática según ellas.

La introducción de la noción de estrategia pura le conduce a la noción de *juego rectangular* o *juego en forma normalizada,* que representa una simplificación conceptual de importancia enorme. Es el paso del árbol, que simboliza el juego en forma extensiva, a la enumeración de todas y cada una de las estrategias simples o puras de los jugadores que dan nacimiento a la *matriz de pagos*. Desde el punto de vista práctico no podemos ocultar la dificultad, a veces insuperable con las técnicas de cálculo actuales, del paso de un juego en forma extensiva a la formulación explícita de la matriz de pago normal. P. ej., en cualquier juego de cartas, en que se empieza por barajar, el movimiento primero, que es de azar, da lugar a $52! \simeq 8{,}07 \times 10^{67}$ posibles ramas, lo cual pone de manifiesto la imposibilidad de la realización práctica de tal reducción. Sin embargo, esto no quita interés al estudio, ya que se puede llegar por el mismo a un conocimiento del comportamiento general, que es suficiente para muchos propósitos, incluso desde el punto de vista práctico.

Por otra parte, situaciones reales de interés admiten una formulación directa en forma normalizada. Citaremos algún ejemplo, que tuvo lugar durante la segunda guerra mundial en que se hicieron aplicaciones de los métodos de la teoría de juegos a diversas situaciones de incertidumbre que se presentaban. De ésta y otras formas colaboraron los matemáticos, estadísticos y científicos de diversas procedencias en la preparación científica de las decisiones de los Estados Mayores, actividad conocida como Investigación Operativa.

En la batalla del Mar de Bismark, los japoneses tenían, según los servicios de información, dos alternativas para abastecer a Lao desde el puerto de Rabaul. Podían viajar por el norte de Nueva Bretaña, en que la visibilidad sería casi seguramente mala, o por el sur, en que la visibilidad sería buena. El general americano Kenney tenía la opción entre concentrar la mayor parte de sus fuerzas de reconocimiento y bombardeo en una ruta o en la otra. Una vez visados los convoyes, podían ser bombardeados hasta su llegada a Lao, cuyo viaje duraba tres días. El equipo de Investigación Operativa del Estado Mayor americano estableció como matriz de pago en días de bombardeo en este juego bipersonal de suma nula, la siguiente:

		ESTRATEGIAS JAPONESAS	
		Ruta Norte	Ruta Sur
Estrategias de Kenney	Ruta Norte	2	2
	Ruta Sur	1	3

En esta matriz los números indican los días de bombardeo esperados en que habría ganancia para los americanos y pérdida para los japoneses. La matriz tiene un punto de equilibrio o puerto que es el que corresponde a ruta Norte para uno y otro ejército. Tal elección, que fué hecha, efectivamente, por uno y otro bando, correspondía a la solución óptima para cada uno, ya que si los japoneses elegían la ruta Sur podían perder más y si los americanos elegían la ruta Sur podían ganar menos.

Estos juegos rectangulares de suma nula, en que hay una estrategia simple óptima para cada jugador, se llaman estrictamente determinados y presentan una gran sencillez desde el punto de vista conceptual.

Conviene subrayar que la teoría de juegos trata la cuestión de cual es el mejor procedimiento para cada jugador mediante una norma de conducta general, que puede aceptarse o no; pero que, una vez aceptada, da lugar a interesantes resultados, tanto desde el punto de vista matemático como de las aplicaciones. Esta norma se resume así: el jugador P_1 piensa que P_2 elige aquella jugada que hace mínima la utilidad esperada por P_1 y por consiguiente P_1 elige de modo que este mínimo sea lo mayor posible.

Esta idea directriz es, en resumen, lo que constituye el criterio minimax (no el único posible (*)), que en el caso de los juegos rectangulares en que la matriz tenga un puerto o punto de silla como ocurre en el ejemplo que acabamos de ver, conduce a una solución o estrategia simple óptima para cada jugador.

Si la matriz carece de punto de silla, el juego no es estrictamente determinado y la situación es conceptualmente más compleja e interesante como se ve en el ejemplo siguiente.

El problema típico de ataque aéreo a submarinos, cuyo esquema es el cuadro adjunto, se presentó frecuentemente en la segunda guerra como consecuencias de las medidas y contramedidas debidas a diversos progresos técnicos. tácticos, etc. Aunque

(*) Hay otros debido a Savage, Hurwicz, etc.

las cifras que se dan no son reales, lo interesante es la comprensión del problema.

Antes del empleo del radar para localizar submarinos, el porcentaje de submarinos hundidos era, según múltiples estadísticas, el 40 por 100.

AVION CONTRA SUBMARINO

(Proporción de submarinos vistos que son hundidos)

		SUBMARINOS	
		No usa receptor de radar	Usa receptor de radar
AVION	No usa radar	40 %	70 %
	Utiliza radar	80 %	20 %

Cuando los aviones empezaron a usar radar, el número de submarinos hundidos se elevó a 80 % de los visados. Pero pronto los submarinos comenzaron a usar receptores de radar y pudieron percibir con mucha antelación la proximidad de aviones equipados con radar, con lo que el porcentaje de submarinos hundidos descendió al 20 %. Viendo esto, el mando de los aviones, dejó de usar radar, esperando volver al porcentaje del 40 %; sin embargo, el porcentaje de submarinos hundidos fué el 70 %. Una información demostró que los submarinos continuaban utilizando los receptores de radar, lo cual representaba una desventaja para los submarinos, ya que tenían que desmontar el aparato y ponerlo bajo cubierta, lo cual suponía una pérdida de tiempo, para iniciar la inmersión. Después de algún tiempo, el mando de los submarinos se dió cuenta de que al no usar los aviones radar, era contraproducente usar receptores y, en efecto, se comprobó que al suprimirlos, el porcentaje de submarinos hundidos volvió a ser el cuarenta por ciento.

El problema es saber para cada mando cuál es la estrategia más ventajosa. Si ambos emplean radar, tiene ventaja el mando submarino; si el uno lo emplea y el otro no, tiene ventaja el mando de los aviones.

He aquí, sin entrar en detalles técnicos, brevemente expuesta la solución del problema, según la teoría de Von Neumann: cada mando debe utilizar el radar ocasionalmente en una cierta proporción, pero dentro de esta proporción, completamente al azar. Evidentemente, esto último es necesario, pues si el mando de los submarinos conociera la ley con que el mando de los aviones utiliza el radar, tendría una ventaja efectiva utilizando los receptores en las mismas ocasiones.

Si llamamos x e y las probabilidades respectivas de no usar radar (que se pueden tomar aproximadamente iguales a las frecuencias), el valor esperado de submarinos hundidos es:

$$E(x, y) = 40xy + 70x(1 - y) + 80y(1 - x) +$$
$$+ 20(1 - x)(1 - y) = -10(9xy - 5x - 6y - 2) =$$
$$= -90(x - 6/9)(y - 5/9) + 53\ 1/3$$

Hecha esta descomposición, se ve que el mando de aviones puede hacer máximo su valor esperado, haciendo $x = 6/9 = 2/3$, independientemente de lo que haga el mando submarino, y, análogamente el mando del submarino puede hacer mínima $E(x, y)$, si hace $y = 5/9$.

Estas estrategias, llamadas mixtas, son óptimas desde el punto de vista de cada mando en el sentido de que si A no utiliza su estrategia óptima, B puede obtener una ventaja utilizando la suya, es decir:

$$E(x, 5/9) \leq E(2/3, 5/9) \leq E(2/3, y)$$

Si ambos mandos utilizan sus respectivas estrategias óptimas, la proporción de submarinos hundidos a la larga será de 53 1/3%, y el mando submarino no logrará con otra estrategia disminuir esta proporción, si el mando de aviones utiliza su estrategia óptima, ni el mando de aviones logrará incrementar dicho tanto por ciento, a menos que el mando de submarinos deje de utilizar su estrategia óptima.

La estrategia aleatoria o mixta de avión es el conjunto de probabilidades (2/3, 1/3) con que debe no utilizar y utilizar el arma. Pero esta estrategia aleatoria debe interpretarse en el sentido de que no ha de seguirse ninguna ley, si no se quiere correr el riesgo de que sea descubierta por el servicio de información enemigo. Cuando entre en una zona donde puedan existir submarinos, por ejemplo, lanzando un dado, si obtiene 1, 2, 3 ó 4, no utilizarán radar, y si obtienen 5 ó 6, sí lo utilizarán, y análogamente el submarino.

El resultado fundamental de que en todo juego normalizado bipersonal de suma nula hay una estrategia mixta para cada jugador que es óptima en el sentido minimax, es decir, que no puede mejorar su utilidad esperada representada por el valor del juego cambiando su estrategia, si el otro jugador no modifica la suya, constituye el famoso *teorema minimax* demostrado por primera vez por Von Neumann en su memoria de 1928 (*), utilizando el teorema del punto fijo de Brouwer.

Otras muchas demostraciones y generalizaciones se han dado posteriormente por el propio Von Neumann, Weyl, Ville y otros. Cada una de ellas puede transformarse en un algoritmo de re-

(*) Este teorema fué demostrado en dos casos particulares por Borel en 1921 (Comptes Rendus), pero conjeturó que era falso en general.

solución de un juego y, desde el punto de vista del cálculo numérico, interesa dar una acotación del número de operaciones necesarias para llegar a la solución de un juego rectangular. Una conjetura de Von Neumann, basada en la relación que estableció con los sistemas de ecuaciones lineales, es que debe llegarse a métodos en que el número de operaciones es del orden de n^3, si n es la mayor de las dos dimensiones de la matriz. Para un método *iterativo que ideó en sus últimos años*, llegó a obtener como cota del tiempo necesario para resolver un juego de 100 por 200 unos 400 días, suponiendo que se tardara una milésima de segundo en cada multiplicación. Una conclusión como ésta, que dejará escépticos a muchos, no resta interés, a nuestro juicio, a la teoría de juegos, sino que únicamente nos hace ver la necesidad de avanzar más y más en los métodos de cálculo numérico.

La construcción de un modelo matemático tiene un gran valor, aún cuando en el estado actual de la ciencia tal modelo no sea calculable. En todo caso, permite descubrir nuevas relaciones entre las variables consideradas y otras posibles y también sobre la evolución futura. Estas relaciones pueden ser sólo cualitativas, pero aún así tienen un gran interés.

A pesar de las dificultades del cálculo numérico, las aplicaciones prácticas de la teoría de juegos a situaciones reales son cada día más numerosas como puede verse en las Revistas especializadas y aun en los libros de texto militares (*). En el campo industrial una aplicación interesante ha sido desarrollada por Charnes y Cooper, del Instituto Tecnológico Carnegie, en relación con la eficacia de la propaganda. En un mercado en que la demanda se puede considerar estable, bien por los hábitos de los consumidores o por régimen administrativo, puede decirse que si una empresa gana nuevos consumidores de sus productos, otra los pierde, y nos encontramos ante una situación típica de juego de estrategia de suma nula.

Un problema de interés económico para una refinería de petróleo ha sido resuelto por G. Symons, de la Esso Standard Oil Company en 1954. Se trata de una refinería X, que produce insuficientes cantidades de gasolina y combustible destilado para satisfacer la demanda y, en cambio, un exceso de combustible residual. La refinería debe pagar grandes cantidades por transporte de dicho combustible residual, a fin de encontrar mercado para el mismo. Se han establecido cuatro programas diferentes, que darían lugar a ciertos incrementos en los beneficios. Otra refinería Y, competidora de la X, se encuentra en condiciones análogas. Los beneficios para cada una de ellas dependen del propio programa de producción y del de la otra refinería. Se trata, pues, de una situación cuyo planteo matemático es un juego bipersonal de

(*) Véase «Naval Manual of Operational Planning» (Naval War College). Haywood Military Decission and Camo Theory (Operations Research, 1954).

suma cero, cuya solución numérica fué lograda por el método del simplex.

G. Brigham, matemático de la «Boeing Airplane Corporation», de Washington, en su trabajo del Congreso de Tims (París, 1959) aplicó con éxito los métodos de teoría de juegos al estudio del precio óptimo de venta de los Boeing 707, que se encontraban en competencia en el mercado con los Douglas DC-8, problema bastante complicado por las circunstancias muy especiales de este mercado y la diversidad de estrategias posibles de las empresas concurrentes.

Estos juegos de suma nula o estrictamente competitivos, no son siempre el modelo más apropiado a la realidad. Es frecuente que haya al menos un par de resultados L, L′, tales que si el primer jugador prefiere L a L′, también el segundo prefiere L a L′. Entonces el juego no es estrictamente competitivo. En tales juegos puede considerarse la posibilidad o no de comunicación entre los jugadores antes de la partida para establecer una cooperación beneficiosa a ambos. Tenemos así dos tipos de juegos de suma no nula distinguidos por Nash: los *cooperativos* y los no *cooperativos*.

En los juegos cooperativos en que hay una ganancia para ambos jugadores, resultante del hecho de cooperar, se presenta el problema difícil del reparto de tal ganancia. Una idea de la dificultad matemática de tal problema nos la da la dificultad práctica de resolver tales problemas en la vida real: así, consideremos la lucha que se establece entre unos operarios que quieren que se eleve su salario y unos empresarios que se oponen. La actitud no cooperativa es la huelga y la cooperativa es firmar un nuevo contrato.

Por otra parte, se han estudiado juegos en que entran más de dos personas. Tales juegos se pueden considerar como bipersonales en que cada jugador juega contra todos los demás por separado. Más real es admitir la idea de cooperación que puede adoptar la forma de coaliciones entre grupos de jugadores. Se trata de considerar todas las particiones posibles de los jugadores en dos coaliciones de n_1 y n_2 ($n_1 + n_2 = n$) jugadores y comparar los valores de los juegos bipersonales de suma nula que resulten. Se introducen nuevas nociones para el reparto y la comparación de las ganancias entre las coaliciones, función característica de Von Neumann, núcleo del juego, estabilidad, etc.

Pero en cuanto se pasa de los juegos no estrictamente competitivos, la situación es menos satisfactoria a pesar de las 400 páginas que les dedica Von Neumann en la última edición de su tratado, y de los trabajos posteriores de su Escuela.

Múltiples y difíciles problemas de carácter matemático y de abstracción adecuada de las intuiciones de la realidad aguardan para el desarrollo apropiado de esta teoría de los juegos n-personales, cuyas aplicaciones son prometedoras especialmente en el campo económico-social. Citemos como ejemplo la teoría del oligopolio recientemente desarrollada por Shubik en su libro (*).

En época reciente, la teoría de juegos ha sido objeto de generalizaciones que tratan de adaptarse a situaciones reales más y más complicadas. Así se han estudiado juegos con continuos de estrategias, juegos en espacios abstractos, juegos sucesionales, juegos dinámicos, juegos estocásticos, etc. Su sólo enunciado pone de manifiesto el progreso impresionante de esta teoría, tanto en el aspecto de nuevas conceptualizaciones de intuiciones correspondientes a situaciones reales cada vez más complejas y próximas a la realidad, como en la técnica y algoritmos matemáticos más apropiados al desarrollo de los mismos.

Decisiones individuales en ambiente aleatorio (Leyes de probabilidad desconocidas o parcialmente conocidas)

El problema de decisión en un ambiente aleatorio con ley de probabilidad desconocida es el siguiente: hay unos estados de la naturaleza o del ambiente posibles, pero desconocemos (total o parcialmente) cuál es el verdadero.

Tenemos una serie de actos entre los que podemos elegir, pero cuyas consecuencias dependen de cual sea el verdadero estado de la Naturaleza y se trata de establecer criterios racionales de elección.

Dentro de este amplio marco se encuadran los problemas estadísticos de estimación y contraste de hipótesis y a tal punto ha trascendido este enfoque más acertado conceptualmente y más eficaz desde el punto de vista de las aplicaciones, que los libros recientes de Estadística Matemática llevan el título de Teoría de la Decisión (**). Esta óptica en el desarrollo de la Estadística, debida fundamentalmente a Wald, es el resultado de dos corrientes de influencia: la teoría de los juegos de estrategia y las aplicaciones industriales de la Estadística iniciadas por Shewhart y los ingenieros de la Bell Telephone.

He aquí un ejemplo sencillo: una fábrica ha producido un lote de 10.000 fusibles que considera defectuosos si se funden al paso de una corriente de 20 amperios. Se supone que el proceso de fabricación se ha desarrollado en condiciones estables y que la probabilidad de que un fusible sea defectuoso es una constante w desconocida, pero fija. El fabricante se ha comprometido con los clientes a vender los fusibles a 0,50 ptas. y garantiza una peseta por cada fusible defectuoso. El problema es determinar cuál es la decisión óptima para el fabricante.

El primer enfoque del problema es considerarlo como un juego

(*) *Competition, Oligopoly and the Theory of Games* (Jhon Wiley, 1959).
(**) Ver, p. e., *Chernoff, Elementary Decission Theory* (New York, 1959).

bipersonal de suma nula del fabricante contra la Naturaleza. La Naturaleza tiene como estrategia el valor de la probabilidad *w*, que es desconocido para el fabricante. Este puede elegir entre enviar o no los fusibles al mercado, ya que si *w* fuera grande podría incluso perder dinero a causa de la garantía que ha dado. Enfocado de este modo el problema, nos da una solución el criterio minimax de Von Neumann, introducido por Wald en los juegos estadísticos. Otros criterios de Savage, Hurwizc, Laplace son bien conocidos. Pero el problema se plantea en forma más real si observamos que el fabricante puede lograr información sobre el valor de *w*, obteniendo una muestra aleatoria y calculando la frecuencia de defectuosos. Si esta muestra comprendiera el lote entero, habríamos determinado exactamente *w* y no habría problema de incertidumbre al tratar de vender el lote; pero la inspección de la muestra tiene un coste función de su extensión. El problema del estadístico es, pues, teniendo en cuenta el coste de la inspección y la información que nos puede dar sobre el valor de *w*, elegir la extensión de la muestra a inspeccionar y la estrategia óptima.

En algunos problemas la información que se puede lograr sobre los estados de la Naturaleza carece del rigor estadístico de un muestreo bien planeado y realizado. No es siquiera posible pensar en tal captura sistemática de datos de observación. A tal situación más amplia pretenden dar una solución Savage (*), de Finetti y su escuela asignando una distribución de probabilidad personal o subjetiva de los estados de la Naturaleza, con lo que se reduce el problema de decisión bajo incertidumbre a un problema de decisión con ley de probabilidad conocida que entra en la teoría de la utilidad.

Elevándonos a un plano más alto podemos decir que en los problemas de decisión frente a la incertidumbre entran los de inferencia inductiva en el sentido más amplio: se trata de elegir entre las innumerables leyes concebibles de un fenómeno natural una de ellas y esto, con la información necesariamente limitada que suministran los experimentos realizados. Es sabido que la historia de las tentativas de reducir el método científico a sistemas se extiende de Aristóteles a nuestros días: El primer intento serio de implicar en tales problemas la teoría de la probabilidad se encuentra en el Ars Conjectandi de J. Bernoulli y puede decirse que un éxito definitivo en un aspecto parcial de tan amplio problema se debe a los trabajos de los estadísticos matemáticos de nuestros días: Fisher Neymann, Wald, Carnap.

Tal aspecto parcial puede formularse así: se admite que una entre cierto número de hipótesis bien definidas relativas a una cierta situación es verdadera. Se pueden diseñar y realizar ex-

(*) SAVAGE: *Foundations of statistics* (New York, 1954).

perimentos u observaciones, el resultado de los cuales es una variable aleatoria, con una distribución de probabilidad que depende de cual de las hipótesis iniciales es correcta. Realizados estos experimentos el estadístico puede decidir cuál es la acción óptima a tomar como consecuencia de la hipótesis aceptada.

Consideraciones finales

Varios aspectos y teorías relacionados con los problemas de decisión no han sido analizados en esta ocasión por no alargar más este discurso. No hemos hablado de la teoría de la elección de Arrow, que se refiere a la toma de decisiones por votación, restringida o no, en un amplio medio social, con su curioso teorema de incompatibilidad de decisiones, ni de la teoría del aprendizaje con sus relaciones con la teoría de juegos, ni de la teoría de la información de Wiener en íntima relación con la teoría de la estimación y los procesos estocásticos, ni de la teoría de los equipos de Marschack, que ha de ser una de las bases de la moderna teoría de la organización, ni de los métodos de simulación o Montecarlo, juegos simulados, etc.

Constituyen todas estas teorías ataques de la Matemática a problemas del comportamiento humano del campo de las ciencias sociales.

Pero cuidado, dirán algunos, ¿es que se pretende una «teoría del comportamiento humano»?

Parece a muchos que, a pesar de las conquistas de la Física probabilista, la aplicabilidad de las Matemáticas al comportamiento humano implica un cierto determinismo que chocaría con esa idea clara que todos tenemos de que podemos hacer lo que queremos en cada momento, e incluso hacer cosas diferentes ante situaciones aparentemente iguales (salvo su orden en el tiempo); pero no se trata de negar una evidencia, sino simplemente de matematizar o construir modelos abstractos de algunas relaciones sencillas como hemos visto en los ejemplos expuestos.

Según Herman Weyl (*): «No hay razón para que las construcciones teorético-simbólicas hagan un alto delante de las realidades de la vida y de la psiche. Puede ser que las ciencias respectivas no hayan alcanzado el nivel requerido. Pero que tal limitación no es ni fundamental ni permanente lo ha demostrado, en mi opinión, el psicoanálisis. El hecho de que en la Naturaleza todo está entretejido de la totalidad, que el espacio,

(*) H. Weyl: *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences*, Princeton University Press, 1949.

la materia, la gravitación, las fuerzas derivadas de los campos electromagnéticos, los seres animados e inanimados están todos indisolublemente relacionados, apoya frecuentemente la creencia en la unidad de la Naturaleza y, por consiguiente, en la unidad del método científico. No hay razón para desconfiar de ello.»

La situación actual es bien clara; matemáticos de primera fila, al lado de economistas, sociólogos e ingenieros han buscado trajes flexibles, hechos a medida, para los nuevos y complejos problemas del comportamiento humano individual y colectivo y la cosecha empieza a ser óptima.

Sus raíces científicas profundas se encuentran muy lejos de las Matemáticas que manejaban los economistas del siglo XIX. Son la teoría de la probabilidad, el Algebra abstracta, la teoría de conjuntos, el cálculo operacional, los espacios abstractos, que representan un conjunto de ideas nuevas cuya fecundidad hemos podido entrever a lo largo de esta exposición.

Un argumento opuesto, que aún oímos a veces a economistas y sociólogos, es que no hay dos seres humanos iguales y, por consiguiente, que no es posible la aplicación de los métodos matemáticos a las ciencias sociales. La tradición matemática de los siglos XVIII y XIX, con sus éxitos rotundos en el campo de la Mecánica, la Física y la Ingeniería fué, sin duda, perjudicial para las ciencias sociales, ya que al tratar de aplicar en estos campos modelos rígidos similares a los de la Mecánica newtoniana, algo así como vestir a un futbolista con una armadura medieval, sólo se logró una mayor desconfianza e incredulidad de los cultivadores de dichos campos.

Tres aportaciones del rigor científico y de las consecuencias prácticas, como la Teoría de Juegos de von Neumann, la Cibernética de Wiener y la Teoría de la decisión de Wald, son suficientes para que estemos seguros de que la Matemática es un instrumento tan útil en el estudio del comportamiento humano y en la organización de las actividades humanas como lo ha sido en el conocimiento del mundo físico.

Con estas y otras figuras relevantes y sus aportaciones matemáticas a las ciencias sociales y naturales desaparece en gran parte en nuestros días el divorcio entre el matemático puro y el que aplica la matemática. El ejemplo de Gauss, que al mismo tiempo que creaba la teoría de números y el álgebra moderna hacía prolijos cálculos geodésicos y establecía las bases matemáticas y de organización para una mutualidad de las viudas y huérfanos de sus colegas de Facultad, conviene recordarlo y acostumbrarnos a no considerarlo como raro y excepcional.

Aunque hay que reconocer que el desarrollo del proceso de investigación matemática está profundamente influído por valores lógicos y estéticos, creemos que la Matemática adquiere todo su enorme poder creativo si el matemático bebe directamente de las fuentes de carácter empírico. Así, desde comienzos de siglo la Física, más tarde la Biología y, desde hace un par de décadas, las Ciencias humanas, han hecho que en la Matemática del siglo XX florezcan ideas nuevas y fecundas, que le dan un influjo sobre el resto de la Ciencia comparable al que tuvo en la época de Newton y Leibnitz.

DISCURSO DE CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. JULIO REY PASTOR

Señores académicos:

Gran placer ha sido para mí atravesar el océano que me separa de vosotros, para atender el requerimiento de la Academia apadrinando esta solemne recepción de mi querido discípulo Sixto Ríos, gran propulsor de la Matemática aplicada, que bien merece el título de Ciencia Exacta de nuestros días.

Desde la fecha nada remota de mi visita anterior, realizada con el grato motivo de contestar al discurso de mi discípulo y sucesor universitario Ricardo San Juan para su ingreso en esta misma cofradía, la Academia ha sido duramente castigada por el Hado adverso, quedando en cuadro la sección dedicada a cultivo de las ciencias exactas, que nominalmente presido.

No fué sorpresa, pero sí acerbo dolor, el tránsito de mi gran amigo y gran maestro D. José Gabriel Alvarez Ude, la mejor cabeza matemática que en mi larga vida he conocido; cuya vida de sacrificio para la educación de su numerosa familia, golpeada por la fatalidad, impidió que produjese los magníficos frutos de que era capaz. Además del ambiente cultural adverso a la investigación, que sólo héroes como Cajal lograron superar, el hiperestesiado sentido crítico de Alvarez Ude y su conocimiento profundo de la Matemática moderna, que le inclinaba a desvalorar sus propias ideas originales (a pesar de los triunfos ganados en sus polémicas mantenidas en mi época estudiantil con algunos matemáticos franceses), fueron frenos para la exhibición de sus originales puntos de vista, en general contrarios a los circulantes; y así se justifica su santo horror a la publicidad, en agudo contraste con la fiebre editorial que aqueja a los jóvenes investigadores actuales y la parquedad de sus publicaciones, que emitía con prudencia, con parsimonia, casi con avaricia.

Don Pedro González Quijano, figura prócer de nuestra ingeniería, era mucho más que el inspirado creador y director de grandes obras públicas; era un investigador científico de raza, cuya vocación le acompañó hasta la consumación de su laboriosa vida. Confinado como anacoreta en su modesto cuarto de trabajo, repleto de libros y revistas, dedicaba los últimos años de su ancianidad a hacer pruebas experimentales sobre probabilidades, que siempre le apasionaron, cosechando resultados novedosos que escaparon a los tratadistas del misterioso *ars conjectandi*. Tal, por ejemplo, la distinta probabilidad de los diversos números en los sorteos de la lotería nacional; ley de monotonía que por mi parte he comprobado comparando las listas oficiales de muchos sorteos, aquí y en Buenos Aires. Antes del advenimiento de Ríos, fueron Terradas, Alvarez Ude, Fernández Baños, Quijano y Artigas los pioneros y propagandistas del Cálculo de probabilidades y la Estadística matemática, cuyo más destacado teórico es Sixto Cámara, nuestro eminente y alejado colega de valía sólo comparable a su modestia.

Mi entrañable amigo y colaborador Pedro Puig Adam nos abandonó inesperadamente en plena madurez, cuando abordaba problemas de Cibernética y de Cálculo numérico en los múltiples capítulos de esta novísima disciplina de la Matemática aplicada que le apasionaban, varios de los cuales analizó con originalidad, contemplándolos bajo el doble ángulo de la ingeniería y de la matemática abstracta. Por encima del valor de sus aportaciones científicas hay que colocar el muy alto de la persona, toda espíritu, a la que es aplicable el verso de Lope de Vega: «un hombre que todo es alma, está cautivo en su cuerpo». Su innata vocación pedagógica orientó su fructífera vida hacia el sacerdocio de la enseñanza, que ejerció con arte y con amor, captando el cariño filial de sus discípulos. Homenaje póstumo emocionante fué el que éstos le rindieron poniendo en evidencia sus excelsas cualidades, insólitas en nuestro tiempo de miope especialismo, que elevan al llorado colega a jerarquía desacostumbrada, con nimbo renacentista.

Que era inspirado escritor saltó a la vista en sus discursos aquí leídos, a pesar de la aridez de los temas; y el lenguaje poético que se complacía en usar, con imágenes plásticas expresivas para dar metafórico relieve a sus ideas, velaba la auténtica vena de poeta que yacía oculta en su intimidad, y que sus nostálgicos escolares sacaron a luz recitando sus magníficos versos, dignos de cualquier antología, a la vez que ejecutaron algunas de sus composiciones musicales. Hubieran sido expuestos a la par los óleos que pintó para retrato de sus padres, y habría quedado integrada la polifacética personalidad artística de este egregio español que hemos perdido.

En la novísima Matemática de aproximación que cultivaba con fruición, lejos de hacerse prisionero de los problemas, los trataba como artista, jugando con ellos para divertirse, como hacía Quijano con los suyos. *Juguete* denominó Puig a su *analizador eléctrico* para resolver los problemas de cálculo proposicional que plantea la Lógica formal, gracias al isomorfismo entre ese cálculo y el de las «funciones de conmutación» ; como juguete estudió Puig la rotación de las palas del autogiro de La Cierva, demostrando su estabilidad ; y un *gran juguete* es el famoso *sifón que se sostiene a sí mismo,* ideado por Quijano y exitosamente construído en su tierra andaluza.

Ambos eximios ingenieros tenían de común su férvido amor a la ciencia pura ; ambos eran *diletantes* de la Matemática, como lo fueron todos los creadores de ciencias, tránsfugas de técnicas variadas y distantes ; palabra que lejos de tener el sentido peyorativo que los especialistas suelen atribuirle, encierra el más noble y más excelso ; porque *diletare* significa *amar* y *deleitarse.*

Al mismo Cuerpo técnico que Puig pertenecía nuestro colega de sección don Manuel Velasco de Pando, cuya vocación para las tareas académicas lo hacían insustituíble para el cargo. De gran cultura literaria, y muy especializado en Elasticidad y Plasticidad, era espíritu abierto a todo problema científico, pedagógico o histórico ; y mucho notaremos su vacío en nuestro doble plan del vocabulario técnico y la valoración de la Ciencia Española, que habrán de ocuparnos en nuestras sesiones.

Muy especialmente se consagró a la Historia de la Matemática el bondadoso Sánchez Pérez, incansable escudriñador de archivos, cuya sustancia elaboraba en multitud de obras de recopilación. La más importante fué la dedicada a la biblioteca de El Escorial, trabajo de benedictino en que pudo aprovechar sus conocimientos de lengua árabe, que había aprendido del gran maestro Asín, su buen amigo y coterráneo.

* * *

Cumplido así el triste deber de recordar a los colegas que lloramos (es decir, de *traerlos* de nuevo a nuestro *corazón*) (1), réstame la grata cortesía de presentar al neófito.

Dentro de la modestia que en la jerarquía científica universal corresponde a los países en desarrollo, Sixto Ríos ha alcanzado la línea epónima entre los hispanohablantes. Paso por alto la monótona enumeración de sus numerosas publicaciones cuyo elenco puede verse en este mismo folleto, lista en que saltan a la vista las dos épocas que dividen su producción: la designada por (A) con contribuciones importantes en los campos del análisis en que yo lo inicié: series divergentes, series de Dirichlet, Hiperconvergencia o Ultraconvergencia, Integrales de Laplace-Stieltjes y *reordenación* de series (nombre que introdujo desde 1943, muy preferible al de series *desordenadas* que yo usaba). Fué en este capítulo donde cosechó su máximo triunfo epónimo, demostrando el teorema fundamental publicado en Hamburgo y Roma y que, por iniciativa del profesor suizo Hadwiger, ha recibido desde 1944 la denominación de *Teorema de reordenación de Ríos*.

Desde esa fecha viró hacia la estadística matemática, como consecuencia de su cambio de cátedra, y a esta disciplina están consagrados sus trabajos de estos tres lustros.

Se reparte ahora la actividad de nuestro compañero entre la cátedra, la dirección de la Escuela de Estadística y la investigación en el Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Con su demostrada capacidad de organización desempeña cumplidamente sus diversas misiones y dedica una parte sustancial de su tiempo a la investigación científica, como lo prueban los trabajos sobre la *Teoría de la estimación*, sobre *programación* no lineal, sobre *investigación operativa*, aplicaciones *biométricas* de la estadística, presentados por Sixto Ríos en varios Congresos internacionales, trabajos que han sido citados en memorias de Kendall Savage, Anscombe. Especialmente merece señalarse la aplicación hecha por el italiano *Brambilla* en su reciente obra sobre la distribución de las rentas, de los resultados de Sixto Ríos sobre los máximos y mínimos en las poblaciones finitas, publicados en las actas del Congreso Internacional de Río de Janeiro.

(1) Al entrar en máquina este original, la radio nos comunica la súbita muerte del muy eminente ingeniero don Eduardo Torroja Miret.

Pero estoy seguro de que el elogio que él agradecerá más, es que se haga honor a la verdad señalando cómo un grupo de sus discípulos: Zoroa, Béjar, Azorín, Cansado, Yáñez, García, Romaní, forman una escuela activa y coherente, cuyos trabajos publicados en su Revista *Trabajos de Estadística,* fundada por Ríos hace más de diez años, y en otras revista europeas y americanas, son bien apreciados en otros países y estudiados con respeto e interés en el ambiente internacional de los especialistas.

Esta escuela se ha preocupado especialmente por las aplicaciones industriales de la Estadística y por la introducción en la industria española de la *investigación operativa*. Los trabajos realizados y en curso permiten ver con optimismo tan difícil tarea. Teniendo en cuenta el interés que para un estadístico representa el manejo de datos reales y el carácter experimental de esta ciencia, parece muy acertado el camino emprendido por este grupo de estadísticos españoles, ya que de un lado prestan un importante servicio a la industria nacional y de otro encuentran problemas interesantes que son estímulo de nuevas investigaciones y progresos.

En esta nueva etapa de su actividad, varios discípulos de Ríos han encontrado una ocupación interesante ; y sus trabajos publicados han merecido la atención de los Congresos internacionales. Creemos que ésta es una de las más laudables características de nuestro compañero: la preocupación por sus discípulos ; preocupación que le obliga a vigilar sus *oposiciones* a cátedras en todas sus vicisitudes ; (tan complicadas y aleatorias que debemos esperar el advenimiento de otro Von Neumann, capaz de formular la teoría de su estrategia óptima) ; preocupación que lo empujó hace años a cruzar el Atlántico con su familia, para organizar, durante varios meses, por encargo de la UNESCO, la Escuela de Estadística de la Universidad de Caracas, donde dejó a sus lugartenientes Azorín, Camacho y Repiso para proseguir su obra cultural en Venezuela.

En este momento de renovación, en que nuestra Academia traza planes de actividad para no quedar a la zaga de algunas de sus hermanas, dos de las tareas que encajarían en esos planes y que repetidas veces he propuesto sin éxito visible, serían la prosecución del vocabulario técnico de ciencias exactas, muchas veces iniciado, y el análisis objetivo de las aportaciones españolas a las ciencias de nuestro instituto. La desaparición reciente de los seis colegas de nuestra sección que acabo de rememorar, dificultará sin duda la realización del doble propósito; pero es de esperar que la incorporación en breve plazo a nuestro elenco de fuerzas jóvenes, nos permitirá redoblar el esfuerzo, para llevar a puerto, en plazo razonable, los dos programas que hace mucho tiempo debiéramos haber realizado.

La incorporación de Ríos será doblemente eficaz: porque nos enseñará el copioso vocabulario que los nuevos algoritmos están creando y que los matemáticos teóricos desconocemos; y porque, puesto al frente de su mesnada de estadísticos españoles, no se hará esperar el fruto de su trabajo en equipo. Por lo pronto, ya ha cesado la exclusividad de los nombres rusos y norteamericanos y ha aparecido en las bibliografías internacionales, además de Ricardo San Juan, el nombre de Procopio Zoroa, discípulo de Sixto Cámara y de Sixto Ríos, talentoso estadístico teórico, autor de métodos originales, en que todos tenemos puestas nuestras esperanzas.

Pero sería prematuro cantar victoria congratulándonos de estos éxitos de Ríos, pues la Estadística es una sola provincia del Nuevo Mundo; y al margen de la Estadística que está en buenas manos, siguen esperando alguna atención de los poderes públicos todas las numerosas disciplinas aledañas que integraban el Instituto de Cálculo del C. S. I. C. y han sido abandonadas en manos de los algebristas abstractos que conceptualmente son los antípodas de la Matemática aplicada. Porque el Algebra, abstracción de abstracciones, es la teoría de las estructuras, formas vacías de todo contenido real; todo lo contrario de la Matemática aplicada, que nace y crece sobre el suelo firme de la realidad visible y medible.

Nuestro nuevo compañero de tareas, creador de una Escuela que puede dar lustre y honor a España, ha tocado en su discurso un capítulo, uno solo, de los muchos que encierra en su seno la novísima Matemática aplicada. Basta hojear cualquier cuaderno de las *Mathematical Reviews*, que nos informa críticamente de los progresos de la Matemática pura y aplicada, en todos los países civilizados, para tener un índice de algunos de sus problemas y de sus métodos.

Año tras año van invadiendo estas novedades las páginas antes dedicadas exclusivamente a la Matemática clásica y a los prolíficos algebristas que se autodenominaban *modernos* (1).

(1) La última edición de la obra de Van der Waerden, idéntica a las anteriores, ha suprimido el calificativo *moderne*, siguiendo el consejo de BRANDT.

La variedad de problemas y de métodos de la juvenil disciplina es tal, que sería menguada denominación la de *Economía Matemática,* o aún el título más ambicioso de *Aplicaciones a las ciencias sociales.*

Baste, por ejemplo, fijar nuestra atención en la original *Teoría de los juegos de estrategia,* creada en 1928 por el genial von Neumann, que no solamente es aplicable a los confiictos bélicos aludidos en su título, como Ríos ilustra en su documentada exposición con sugestivos ejemplos, sino también a problemas muy variados de Economía, y más en general a todas las cuestiones polémicas (1) en que se plantean *conflictos de intereses,* cualquiera que sea su naturaleza. Arquetipo de lucha de intereses opuestos es la *competencia comercial.* Cada vendedor de una mercancía fija su precio de venta, aspirando a una *ganancia máxima* ; pero esta ganancia es función no sólo del *precio* estipulado, sino de la cantidad vendida, factor que depende de los compradores. Aparece así claramente el *juego de estrategia* entre los vendedores en esa lucha económica que es el comercio. En este caso típico, como en cualquier otro juego de estrategia, la solución óptima viene expresada por el teorema de von Neumann denominado *Minamax,* es decir, *mínimo de los máximos,* que está determinado por los puntos de *ensilladura* (o puntos de silla de la matriz numérica que simboliza cada juego).

Si continuamos ahora repasando el índice de las *Mathematical Reviews* encontramos copiosa bibliografía de todos los capítulos del cálculo numérico. Por ejemplo:

La *investigación operativa* muy fértil en aplicaciones a la economía matemática y en general a todas las ciencias sociales, estudia sucesivamente la programación (2) *lineal* (Dantzig, Koopmans...) ; la programación *cuadrática* (Dorfman, Barankin...) ; la programación *estocástica* (Dantzig, Tintner) con infinitas variables (Koopmans), y la *dinámica* (Bellmann, Arrow, Zoroa), los problemas de congestión del tráfico y colas (Saaty, Morse), los problemas de inventario o *stock* y organización de la producción industrial ;

(1) *Polémica,* según el Diccionario de la Academia, es el «arte que enseña los ardides con que se debe ofender y defender cualquier posición».

(2) Teniendo en cuenta el frecuente uso de la palabra *programación,* a pesar de no figurar en el diccionario, propuse y fué aceptada su admisión en la sesión de 15 de junio con su doble acepción (método de cálculo de máximo para funciones de varias variables condicionadas y preparación de problemas para calculadoras electrónicas).

los de transporte, etc. La *teoría de la decisión*, esquematizada en el discurso que acabamos de oír, tiene aplicaciones a la teoría de los juegos de estrategia de von Neumann y en problemas bélicos, como es el del famoso puente aéreo sobre Berlín (hazaña norteamericana de hace pocos años).

El *cálculo electrónico* con sus variadísimas máquinas de calcular, *analógicas* y *digitales*, tiene como disciplina anexa el método probabilístico llamado de *Montecarlo*, muy útil en la Física atómica. Tienen rica bibliografía los *sistemas de control* y la *teoría de la información*, fundamentales para la construcción de sistemas complejos de comunicación como los que se utilizan en los misiles y satélites artificiales (*Kelly, Feinstein*, el checo *Alberto Pérez*...); la *Biología Matemática* (con el clásico problema de Volterra sobre la *lucha por la vida* y con la moderna teoría de las *epidemias*, y otros puntos, abordables por el cálculo).

La *Cibernética* o teoría de las trasmisiones de comando y servomecanismo, creación de Norberto Wiener, a la que dedicó Puig Adam su discurso de ingreso en esta Academia.

Ultima en la enumeración, pero primera por su trascendencia social incalculable, es la *Automática*, que inició con su sistemática teórica y afianzó con algunos éxitos rotundos nuestro venerable Torres Quevedo, su indiscutido creador.

En la automática encuadra el *autogiro*, que el malogrado Lacierva inventó empíricamente y cuya teoría matemática, con demostración rigurosa de su estabilidad, elaboró el genial Puig Adam.

Esta incompleta enumeración de algoritmos que deben ser conocidos a fondo y manejados con soltura y eficacia en todo Instituto de Cálculo, dará idea a los profanos más alejados de las ciencias exactas, de cuán grave es la responsabilidad que significa la organización de tales Institutos de Cálculo, denominación que tenía modesto alcance a comienzos del siglo, cuando la Matemática numérica hacía sus primeros balbuceos, mientras que en nuestros días existe ya todo un nuevo mundo densamente poblado de problemas importantes que exigen solución y de métodos ingeniosos inventados para encontrarlas y calcularlas con la aproximación necesaria.

Pasó ya, quizá para no volver, la hora del Algebra que se llamó moderna, tejido de definiciones que pusieron orden entre los algoritmos aritméticos clasificando sus estructuras, y denominándolas; tarea de ordenación y bautizo que placía a los jóvenes educados en el famoso texto de *van der Waerden*; pero la visión general de la Matemática se ha modificado ya, muy radicalmente; ahora no se trata de clasificar, ordenar y bautizar con bizarros nombres, sino de descubrir *soluciones efectivas* a muy diversos problemas que surgen a nuestro paso en muchas ciencias sociales, como en el Siglo de Oro del Análisis aconteció con la Física, y de calcularlas con error despreciable, superando así a la Matemática clásica confinada dentro de la muralla de sus teoremas de existencia; ciertamente con indicación algunas veces de los caminos para calcular esas soluciones, pero casi siempre innacesibles a las fuerzas humanas. Los métodos matemáticos usados fructuoamente para la resolución de los problemas de la Física en el siglo XVIII, fueron inútiles para la Economía, porque el plan de Pareto estaba calcado en Newton y sus epígonos, artífices de la Física Matemática, sobre la base de supuestas leyes universales, que en la Economía no se cumplen (1). Este fracaso obligó a matemáticos y economistas a la creación de métodos especiales cortados a la medida de los nuevos problemas cuyo manejo seguro, nada fácil por cierto, es tarea de todo Instituto de Cálculo digno de tal nombre.

* * *

La tradición de estos discursos, que los franceses llaman muy justamente *elogios académicos*, obliga con fuerza de ley a glosar la monografía presentada por el nuevo cofrade, no solamente para encomiarla cortésmente, sino también para mostrar que en la corporación recipiente algo se conoce del tema en que el recipiendario es especialista, pero no monopolista. La Historia y la Filosofía nos brindan grandes recursos para salir airosamente de tales trances, y a estos comodines nos acogeremos.

* * *

Hemos oído en el discurso una síntesis de la situación actual de los problemas que se presentan en los diferentes tipos de procesos de decisión. Y *tres* son los *puntos* que vemos más apropiados para tomar contacto con tal tipo de problemas: la *inducción*

(1) Tal p. ej., la ecuación del equilibrio universal económico.

en la investigación matemática, el concepto de *modelo* desde el punto de vista de la Matemática *pura* y de sus *aplicaciones*, y la teoría de los *máximos y mínimos*.

Comencemos por este último punto. Al referirse al problema de *programación lineal* los autores suelen olvidar los antecedentes históricos de muchas de las ideas que se manejan en su solución y que podrían situarse en la Matemática teórica. Fourier fué el primero que en 1823, con penetrante visión, estudió los *sistemas de inecuaciones lineales*, estableciendo *condiciones generales* para la resolubilidad e irresolubilidad, y observando también la relación con los conjuntos *convexos*.

Cincuenta años más tarde se ocupó del problema el algebrista GORDAN, que llegó a él a través de sus estudios sobre los invariantes, estableciendo el notable *teorema de transposición*. MINKOWSKI realiza más tarde una síntesis del punto de vista *geométrico de* FOURIER y del *algebraico* de GORDAN, profundizando sus resultados e introduciendo una serie de nociones ahora familiares: *hiperplano de soporte*, *puntos extremales*, etc. Prosiguen esta línea histórica los trabajos de FARCKAS, FAKETE, POLYA, WEYL, SCHOENBERG, etc., que prueban hasta qué punto estaba abierto el camino en el aspecto teórico, cuando entran en escena *Dantzig* y los matemáticos norteamericanos y rusos.

Retrocedamos ahora hasta Monge, que en 1776 había presentado por *primera vez* un problema típico de *programación lineal*: elección de *estrategia óptima* en un problema de *transporte*. Tal trabajo no mereció atención de los matemáticos puros, y todo su alcance se redujo a algunas reglas prácticas de modesto interés y a unos teoremas geométricos sobre congruencias de normales.

Sin embargo, el germen de muchas ideas desarrolladas en nuestros días por *Kantorovich en* 1942 e independientemente por *Dantzig* y su escuela a partir de 1949, con los perfeccionamientos aportados por nuestro colega San Juan, se encuentra en la vieja memoria de Monge, que yacía arrinconada en el desván del olvido desde casi dos siglos. Es cierto que en ese gran lapso se han ocupado de problemas teóricos muy próximos a ella Fourier, Minkowski...; pero ese divorcio de matemáticos puros y aplicados, tan absoluto en aquella época, nos hace ahora lamentar el retraso en el hallazgo de una serie de algoritmos que hoy son importantes para la Matemática aplicada.

Pasemos al análisis de la *inducción*, primero de los tres puntos anunciados. Claramente se nos ha explicado el papel de la *inducción probabilística* o *inferencia estadística* en los problemas de decisión y se nos ocurre establecer un cierto paralelo con la inducción como *método de descubrimiento* de nuevas verdades matemáticas.

En el campo de sugestiva belleza de los números naturales, todos conocemos la existencia de propiedades «inducidas» por matemáticos geniales que aún no han sido demostradas, como el gran teorema de Fermat o la sospecha de que «todo número *par* es suma de dos primos (Goldbach) (1).

La inducción como método de adquisición de nuevas verdades matemáticas pone de relieve una *analogía* mucho mayor de la que a primera vista podría esperarse entre la Matemática y la Ciencia Natural. De hecho la Matemática es la ciencia *demostrativa* por excelencia y el rigor exige, para incorporar un nuevo teorema a la Matemática, su *demostración*, a partir de otros resultados verdaderos. Pero esto se refiere a la Matemática ya hecha, a la ciencia ya muerta, tal como yace en los tratados. En cuanto a la Matemática *viviente*, a la *génesis de teoremas* y propiedades nuevas, todo investigador sabe cuán poco puede esperarse del *puro razonamiento lógico* como instrumento básico de nuevos descubrimientos matemáticos. Nuestra *intuición* nos conduce a *conjeturas* de nuevos resultados, a esquemas más o menos esfuminados de demostraciones, y es después cuando ensayamos el razonamiento *deductivo* para llegar a demostraciones correctas. Este dualismo entre ciencia viva y ciencia muerta nos lleva de la mano a un problema pedagógico.

Por razones puramente externas, no siempre confesables, hay mu-

---

(1) He aquí un curioso ejemplo de cómo puede fallar la inducción intuitiva en Aritmética. si designamos por $\pi\ (x)$ el número de primos de l hasta x y por $li\ (x)$ el *logaritmo integral* $\int_0^x \frac{dt}{logt}$ se verifica, según es sabido, que $\pi\ (x)$ y $li\ (x)$ son asintóticamente iguales. Se ha comprobado también que $\pi\ (x) \leq li\ (x)$ para todos los números primos conocidos y *Gauss* afirmó que la desigualdad es válida para *todo* número primo. La sospecha de Gauss fué comprobada para todos los números primos $< 10^7$ y para otros muchos mayores que 10^7. Sin embargo, en 1912, *Litllewood* probó que la inducción de *Gauss* era *falsa* para *infinitos* números primos; y *Skewes* demostró posteriormente que era *falsa* incluso para algún número

$$x < 10^{10^{10^{34}}}.$$

chas personas que consideran poco deseable que el profesor universitario sea investigador. No lo eran, en efecto, los beneméritos profesores españoles que durante siglos vivieron como espectadores del progreso universal, esperando la importación de los frutos cosechados allende el Pirineo para servirlos bien triturados a sus escolares ; y no habiendo experimentado la emoción de la patética lucha con la verdad, siempre rebelde ; ignorando la aventura de la inducción creadora con sus emocionantes fracasos, sus esfumadas esperanzas y sus soñados éxitos, debían esperar pacientemente la publicación de algún texto francés que les ahorrase el esfuerzo de pensar por su cuenta, repitiéndolo fielmente ante los alumnos. ¡ Y no faltaban ilusos que soñaban con el mágico nacimiento de una ciencia española, con ese nutrimiento a base de fiambres envejecidos !

Algo hemos progresado en lo que va de siglo. Oficialmente *todos* somos investigadores y las enseñanzas del que no lo sea carecerán de la frescura y lozanía de los manjares recién preparados y su esfuerzo resultará estéril ; pues aun supuesta impecable su exposición, pero fattalmente libr[illegible]ente de vida, lejos de despertar vocaciones juveniles (como logra todo investigador por simple contagio, aun siendo desordenada y barroca su didáctica) impedirá la eclosión de las vocaciones dormidas.

Todo profesor de Ciencias incapaz de investigar es por ende un deficiente enseñante ; y en esta convicción estamos bien acompañados : Hadamard, Fréchet, Polya, lo han expresado en diversos tonos (1). Citemos especialmente las ideas siempre originales de mi gran amigo Polya.

Separa Polya el *razonamiento deductivo,* típico de la Matemática y la Lógica, del *razonamiento plausible,* al cual pertenecen «la *evidencia* inductiva del *físico,* la *evidencia circunstancial* del *abogado,* la evidencia *documental* del historiador y la evidencia *estadística* del *economista*».

De hecho, en la construcción de sus edificios, los matemáticos utilizan también los razonamientos *plausibles* y por ello consideramos del mayor interés el ensayo publicado por Polya (2), sobre

---

(1) Baste citar, por ejemplo, el laudatorio Discurso de Fréchet al inaugurar el Instituto de Ríos, en el cual elogia sus investigaciones ; la misma idea en forma distinta, aparece en los libros de Hadamard y Polya.

(2) Se titula el libro «*Patterns of Plausible Inference*» (Princeton 1958).

la interpretación de la *noción de probabilidad* para precisar las reglas de los razonamientos *plausibles*. Es notable ver cómo un matemático de primera fuerza analiza el material de los razonamientos plausibles en Matemáticas, con el mismo espíritu de observación, con que un naturalista estudiaría las funciones fisiológicas de un ser vivo, para «*abrir la puerta que conduce a la inducción investigando inductivamente*». Creemos que este ensayo del húngaro genial (que por otra parte está alejado de toda pretensión de generalidad filosófica y de aquí justamente su mayor interés para los matemáticos y los profesores) tendrá pronto repercusiones interesantes en el Cálculo de Probabilidades y en la Metodología de la enseñanza de las Matemáticas.

Pasando ya al tercer punto prometido, quizá vale la pena *matizar* un poco el alcance de la palabra *modelo* en matemáticas puras y aplicadas, muy usada modernamente.

En Matemáticas, como dice el gran lógico polaco Tarski, «se llama un *modelo* de una teoría T, toda *posible realización*, en que son válidas todas las sentencias de T». Es decir, «una *teoría* es una entidad lingüística formada por un conjunto de sentencias; y un *modelo* es una *entidad no lingüística* en que *se satisface* dicha teoría.

Establecer un teorema de *representación* para una teoría es probar que existe una *clase* de modelos de la teoría tal que cada modelo de la misma teoría es *isomorfo* a algún miembro de tal clase. Ejemplos importantes y fecundos son el teorema de *Stone*, según el cual *toda álgebra de Boole es isomorfa a un cuerpo de conjuntos*; y el clásico *teorema de Cayley*, según el cual *cada grupo es isomorfo a un grupo de transformaciones*.

Cuando un campo de fenómenos físicos, biológicos, etc., se ha formalizado, construyéndose una *axiomática* y sobre ella una teoría matemática de los mismos, se dice que se ha *construído un modelo matemático* y aquí la acepción de la palabra es algo diferente, ya que ahora las realizaciones son de carácter empírico y las relaciones entre el modelo y la realidad tienen un carácter *empírico* e *intuitivo*. Así se dice comúnmente que el cálculo de probabilidades es el *modelo matemático* de las *distribuciones de frecuencias que se presentan en los fenómenos aleatorios*; y hechos tan diversos como son las extracciones de bolas de una urna, los accidentes de aviación, o las llegadas de obreros a una factoría, constituyen *rea-*

lizaciones concretas de dicho modelo. Pero también se dice, cuando se establecen los axiomas del Cálculo de Probabilidades, que pueden interpretarse como axiomas de la *medida de ciertas clases de conjuntos* y entonces estaríamos claramente ante una interpretación de la noción de modelo *no diferente de la común* en las ciencias matemáticas.

En su famoso libro de Mecánica Estadística dice el ruso Kintchine, refiriéndose a Gibbs: el «autor considera que su objetivo directo no es establecer teorías físicas, sino *construir modelos mecánico-estadísticos* que tengan alguna analogía con la Termodinámica y algunas partes de la Física ; por ello no duda en introducir algunas hipótesis muy especiales de carácter estadístico».

Subraya con esto Kintchine la idea de que Gibbs al dar los fundamentos de la mecánica estadística no trató de dar *teorías* físicas, sino de construir *modelos que presentaran analogías con algunos hechos empíricos complicados* de la Termodinámica.

Quizá hay en el empleo de la palabra *modelo* en Física una tendencia a su *eliminación* cuando se trata de teorías físicas antiguas, sólidamente establecidas, que se corresponden bien con los fenómenos empíricos que tratan de explicar y en que con el tiempo se han mezclado teoría y situación empírica en un lenguaje *común realístico*. Contrariamente, teorías físicas que suponen una fuerte simplificación de la realidad continúan empleando la palabra *modelo*.

Esta es, a nuestro juicio, la explicación del porqué del constante empleo de la palabra *modelo* en las ciencias *psicológicas, económicas* y *sociales*, en que las situaciones son altamente complejas, las simplificaciones drásticas, y las discusiones sobre si tal situación está o no bien reflejada en el modelo, son interminables.

* * *

Hace justamente medio siglo que emprendí el análisis de la discutida obra de los matemáticos españoles del siglo XVI, llegando tras ímproba labor a conclusiones nada halagadoras en cuanto al hecho triste que saltaba a la vista ; pero no pesimistas, como lo eran las posiciones asumidas por Echegaray y Menéndez Pelayo, que siendo de raíces antagónicas, coincidían en su desesperanza de florecimiento de una Matemática española por incógnito maleficio racial; opinión compartida resignadamente por nuestros matemáticos más prestigiosos (Torroja, Terradas, Vegas, Alvarez Ude) y que fué sostenido filosóficamente, con acentos diversos, por nuestros egregios pensadores: Unamuno, con displicencia expresada sarcásticamente en frase famosa, y Ortega, con dolida expresión, atribuyendo la falta de filósofos hispanos originales a la penuria de ciencia y, en especial, de Matemática.

Coincidente con Ortega en la existencia de simbiosis entre las diversas actividades científicas, discutí, con todo el respeto que me inspiraba el gran vidente del problema español, mi optimismo fortificado tras la convivencia con los estudiosos alemanes. No había ninguna tara racial; y si la había, estaba por probarse, pues desde el siglo XVI el talento español, aislado del mundo, se había enquistado como un tumor, según decía Cajal, cuyo ejemplo debía animarnos para imitarle en su aventura victoriosa.

Enfervorizado así el gran filósofo y sobreponiéndose a su escepticismo, apadrinó el modestísimo Seminario de Matemáticas en 1918, y él mismo logró el apoyo legal y material de la inolvidable *Junta* encargada del fomento de la investigación científica en España, cuyas figuras señeras, que hoy echamos muy de menos, eran Cajal, Bolívar y Castillejo, con la colaboración asidua de don Ramón Menéndez Pidal.

De aquel Seminario, instalado en un sótano, procede nuestro gran geómetra Santaló y nuestros colegas San Juan y Ríos, que dominan el Análisis matemático en su doble faz: el puro y el aplicado. Bastarían todos tres, que ya han conquistado merecido prestigio internacional, para desmentir el prejuicio racial, tan unánime como infundado. Han bastado tres décadas de trabajo serio para desligar drásticamente el supuesto maleficio.

Plácemes entusiastas merece el nuevo colega por haberse situado en campo tan fecundo y promisor, que hemos llamado ciencia exacta de nuestro tiempo, donde él y sus discípulos seguirán cosechando óptimos frutos, que casi considero como propios, por pertenecer a mis nietos científicos.

RELACION DE TRABAJOS
DE INVESTIGACION, DIDACTICOS Y OBRAS
DE DON SIXTO RIOS

A) ANALISIS MATEMATICO

1. «Sobre una generalización del algoritmo de convergencia de Euler.» (*Revista Matemática Hispano-Americana*, 1932).
2. «Sur l'ensemble singulier d'une classe des séries potentielles.» (*Comptes Rendus de la Academie de París*, t. 107).
3. «Sopra l'ultraconvergenza delle serie di Dirichlet.» (*Rendiconti della Reale Accademia del Lincci*, 1934).
4. «Algunos resultados relativos a la hiperconvergencia en las series de Dirichlet.» (*Revista Matemática Hispano-Americana*, 1934).
5. «Sobre un teorema de Mandelbrojt.» (*Revista Hispano-Americana*, 1935).
6. «Observaciones a la nota «Sobre un teorema de Mandelbrojt.» (*Revista Matemática Hispano-Americana*, 1935.
7. «Problemas de hiperconvergencia.» *Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid*, 1936).
8. «La hiperconvergencia en las integrales de Laplace-Stieltjes.» (*Boletín Sem. Matemático*, 1935).
9. «Un torema sobre las singularidades de las integrales de Laplace-Stieltjes.» (*Revista Matemática Hispano-Americana*, 1935).
10. «Sobre los campos de convergencia de los algoritmos (E_n).» (*Revista Matemática Hispano-Americana*, 1939).
11. «Las series de potencias desordenadas.» (*Revista Matemática Hispano-Americana*, 1940).
12. «Sobre el problema de la hiperconvergencia de las series de Dirichlet de densidad máxima infinita.» (*Revista de la Real Academia de Ciencias*, 1940). Trabajo premiado por la Real Academia de Ciencias.
13. «Hiperconvergencia de las Series de Dirichlet.» (*Revista de la Unión Matemática Argentina*, 1939).
14. «Una demostración elemental del teorema fundamental de las familias normales.» (*Boletín del Seminario Matemático de la Facultad de Ciencias de Madrid*, 1941).
15. «Prolongación analítica de funciones definidas por series de Dirichlet.» *Revista de la Real Academia de Ciencias* (1941).
16. «Propiedades generales de las Series de Dirichlet desordenadas.» (*Revista de la Real Academia de Ciencias*, 1941).
17. «Sobre las singularidades de la integral de Laplace.» (*Portugaliae Mathematica*, 1943).
18. «Una demostración de un teorema de Ostrowski.» (*Revista Matemática Hispano-Americana*, 1944).
19. «Comunicación.» (*Revista Matemática Hispano-Americana*, 1943).
20. «Sobre la reordenación de series funcionales y sus aplicaciones.» (*Abhandlugen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universitat*, 1943).

21. «Sobre la reordenación de series funcionales—Nota I—. Series de Dirichlet de coeficientes reales.» (*Revista Matemática Hispano-Americana*, 1944).
22. «La Prolongación analítica de la integral de Dirichlet-Stieltjes.» (*Premio «Alfonso el Sabio» del Consejo Superior de Investigaciones Científicas*, Madrid, 1944).
23. «Prolungamento analítico mediante permutazione dei termini di une serie.» (Reale Accademia d'Italia. *Rendiconti della classe di Scienza Fisiche, Matematische e Naturali*, 1941).
24. «Sobre los conjuntos de series de potencias prolongables y no prolongables.» (*Revista del Instituto Matemático de Rosario*, 1946).
25. «Operaciones analíticas en los espacios de Banach.» (*Revista Matemática Hispano-Americana*, 1946).

B) ESTADISTICA MATEMATICA E INVESTIGACION OPERATIVA

1. «Sobre la probabilidad de que una serie de Taylor admita prolongación analítica.» (*Revista Matemática Hispano-Americana*, 4.ª serie, t. VI, 1946).
2. «Sobre la convergencia de distribuciones y la convergencia en probabilidad.» (*Revista Trabajos de Estadística*, Vol. III, Cuad. I, 1951).
3. «Probabilidad de que una serie sea prolongable: solución del problema de Borel.» (*Revista Matemática Hispano-Americana*, 1947).
4. «Observación a mi nota «Sobre la convergencia de distribuciones y la convergencia en probabilidad,» (*Revista Trabajos de Estadística*, Vol. V, Cuad. III, 1954).
5. «Problemas de máximos y mínimos relacionados con la inferencia en poblaciones finitas.» (*Trabajos de Estadística*, Vol. VI, Cuad. I, 1955).
6. «Comparación de muestras aleatorias con y sin reemplazamiento.» (presentado al Congreso Internacional de Estadísticos, Roma, 1953).
7. «Sur la notion d'estimateur consistente.» (Presentado al Congreso de Matemáticos de Viena, 1956).
8. «Análisis discriminante de dos muestras de indios venezolanos.» (En colaboración con A. Díaz Ungría y A. Camacho), (*Trabajos de Estadística*, Vol. V, Cuad. III, 1955).
9. «Estudio de la evolución y relación de medidas antropométricas en niños menores de un año.» (Publicado en la *Revista Trabajos de Estadística*, Vol. VI, 1956). Presentado al Congreso Internacional de Biometría de Belaggio.
10. «Sobre la noción de estimador consistente.» (*Trabajos de Estadística*, 1956).
11. «Sobre las líneas de regresión modal.» (presentado al Congreso Internacional de Estadística de Estocolmo). *Trabajos de Estadística*, 1957).
12. «Algunas leyes de probabilidad y procesos estocásticos que se reducen a un tipo general de Laplace-Stieltjes.» (*Revista Trabajos de Estadística*, Vol. IV, Cuad. I, 1953).

13. Un problème de programation non lineaire de la production dans une usine d'acier.» (*The Institute of Management Sciences,* 1960).
14. «Quelques exémples de Recherche Operationelle.» (*Colloque Internationale de Calcul des Probabilités,* Paris, 1958).
15. «Observaciones sobre la regresión y la estimación.» (*Trabajos de Estadística,* 1960).

C) TRABAJOS DE EXPOSICION Y DIDACTICOS

1. «Estado actual de la teoría de la hiperconvergencia.» (*Las Ciencias,* 1934).
2. Complemento a la Memoria «Estado actual de la teoría de la hiperconvergencia.» (*Las Ciencias,* 1936).
3. «Sobre la metodología de las Matemáticas aplicadas a la Química.» (*Las Ciencias,* 1941).
4. «Conferencias sobre funciones analíticas y sus aplicaciones.» (*Revista de la Real Academia de Ciencias,* 1941).
5. «Nota sobre la convergencia de las series trigonométricas.» (*Matemática Elemental,* 1943).
6. «Influencia de Rey Pastor en la Matemática Española.» (*Gaceta de Matemática de Lisboa,* 1944).
7. «El problema del número de isómeros en las series homólogas de la Química orgánica.» (*Investigación y Progreso,* año XV, 1944).
8. «Tendencias modernas del Análisis matemático.» (*Arbor,* 1946).
9. «Conceptos de integral.» (*Monografías de Ciencia Moderna,* 1946).
10. «La Estadística y las Ciencias de la Naturaleza.» (*Revista Trabajos de Estadística,* Vol. II, Cuad. II, 1951).
11. «Revisión de los fundamentos de la teoría de errores y mínimos cuadrados.» (*Instituto Geográfico y Catastral,* Madrid, 1948).
12. «Problemas de la inferencia estadística.» (*Revista de la Universidad de Madrid,* Vol. I, núm. 2, 1952).
13. «Progresos recientes en la teoría y aplicaciones de la Estadística.» (Jornada Estadística, 1951. Madrid).
14. «Introducción a la axiomática del Cálculo de probabilidades.» (*Las Ciencias,* año XII, núm. 3).
15. «Necesidad de una Escuela de Estadística.» (Conferencia pronunciada en la clausura del Curso de «Estadística y sus aplicaciones», organizado en la Facultad de Ciencias de Madrid, 1950).
16. «Nuevas aplicaciones de la Estadística: La Investigación Operativa», Conferencia pronunciada en la inauguración de la Escuela de Estadística de la Universidad de Madrid, *Trabajos de Estadística,* Vol. III, Cuad. III, 1952).
17. «Modelos y método de Montecarlo en la I. O. industrial y militar, (*Trabajos de Estadística,* 1957).
18. «Importancia de la introducción de la Estadística en la Enseñanza Media.» (*Revista Trabajos de Estadística,* Vol. IV, Cuad. I, 1953).

19. «Necesidad de una Escuela de Estadística.» *Revista Trabajos de Estadística*, Vol. I, Cuad. II, 1950).
20. «D. Esteban Terradas (1883-1950).» (*Revista Trabajos de Estadística*, Vol. II, Cuad. III, 1950).
21. «Actividades de los Estadísticos.» (*Estadística Española*, 1959).
22. «Teorías científicas y modelos matemáticos de los fenómenos naturales,» (*Trabajos de Estadística*, 1959).
23. «Matemáticos de ayer y de hoy», (*Trabajos de Estadística*, 1960).
24. «Investigación Operativa.» (Artículo del *Diccionario enciclopédico de la Guerra*).

D) LIBROS PUBLICADOS

1. *Introducción a los Métodos de la Estadística*, Madrid, 1953.
2. *Teoría de la Integral*, Madrid, 1942.
3. *Curso preliminar de análisis matemático*, Madrid, 1952. 2.ª edición. (En colaboración con F. Navarro-Borrás).
4. *Series de Dirichlet*. Conferencias explicadas en las Universidades de Oporto y Lisboa, 1943.
5. *Conferencias sobre sucesiones de funciones analíticas y sus aplicaciones*, Madrid, 1942.
6. *Conferencias sobre la representación analítica de funciones*, Madrid, 1945.
7. *Matemáticas para Economistas*, Madrid, 1946.
8. *Ampliación de Matemáticas*, Madrid, 1951.
9. *Iniciación Estadística*, Madrid. 1956.
10. *Estadística Matemática y Aplicaciones* (en prensa).
11. *Problemas de Matemáticas Generales* (en colaboración con L. Thomas).
12. *Textos de Bachillerato*.
13. Traducción de la obra *Matemáticas generales*, de B. Bawle.
14. Traducción de la obra *Puntos singulares de las ecuaciones diferenciales*, de H. Dulac.

TRABAJOS CITADOS POR DIVERSOS AUTORES Y OPINIONES PUBLICADAS SOBRE LOS MISMOS

En el tomo I de la Obra de Doetsch—*Handbuch der Laplace Transformation* (Berlin, 1950)—están citados los trabajos de S. Ríos:

«La hiperconvergencia en las integrales de Laplace-Stieltjes» (*Bol. del Seminario Matemático*).

«Un teorema sobre las singularidades de la integral de Laplace» (*Revista Matemática Hispano-Americana*, 1955).

«Sobre las singularidades de la integral de Laplace» (*Portugaliae Mathematica*, 1943). En esta memoria se resuelve un problema planteado en la primera edición del libro de Doetsch citado.

En el tomo III de la obra de Doetsch están citados los trabajos:

«Problemas de hiperconvergencia» (*Rev. Academia de Ciencias*, 1936).

«La prolongación analítica de la Integral de Dirichlet-Stieltjes» (Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1944).

«Teoria do prolungamento analítico das series di Dirichlet» (Universidad de Oporto, 1943).

En la memoria de A. Ghizzetti «Analisi in Italia nel campo complesso» está citada la memoria de

S. Ríos: «Prolungamento analitico mediante permutazione dei termini di una serie», (*Rendiconti Accademia Italia*, 1941, p. 677).

En la memoria de U. Hadwiger: «Ein umordnungsatz der Funktionentheorie», (Verhand. Schweizer. Naturfosch. Gessel, 1944, p. 85) está citado.

S. Ríos: Sobre la reordenación de series funcionales y sus aplicaciones. (*Abhand. Nath. Seminar der Hansischen Univ.*, 1943, p. 72).

En su Conferencia «La Statistique ses buts, ses applications, son enseignements» (publicada en *Trabajos de Estadística*, 1950), dice el profesor Fréchet:

«Hemos subrayado el peligro que entrañaba para una enseñanza de la Estadística el descuidar la teoría y preocuparse solamente en hacer conocer reglas de aplicación. También debemos felicitar por su elección, al tribunal que ha propuesto por unanimidad para titular de la Cátedra de Cálculo de Probabilidades y de Estadística, al profesor Sixto Ríos.

Matemático ya conocido, sabe toda la importancia y la necesidad de la investigación a la que él ha contribuído con trabajos. Siguiendo su ejemplo el Cuerpo de Profesores de la enseñanza de Estadística deseará ponerse al corriente de los progresos de la Ciencia e incluso contribuir a él.

Es cierto que los matemáticos son a menudo tachados de vivir en un mundo irreal, y ello es incluso a veces cierto. Pero he podido comprobar por mí mismo que el Profesor Sixto Ríos, ha sabido consagrarse totalmente a sus funciones actuales, ponerse al corriente de un campo nuevo y hacer él mismo descubrimientos. Con perseverancia serena ha iniciado la organización material de la enseñanza general de la Estadística y sus aplicaciones, ha reunido en torno suyo un equipo entusiasta que, con su ejemplo, sabrá dotarse de excelente espíritu.

Con la modestia que le caracteriza, atiende los consejos y sugerencias que se le hacen, a su vez adopta decisiones, efectúa la más diversas gestiones y triunfa al fin para poner en pie la hermosa organización de esta tentativa, que nosotros inauguramos hoy.

A él, a sus entusiastas y simpáticos colaboradores les deseo feliz éxito. Felicito a todos los que en España les han ayudado con sus acertados consejos y su apoyo material, entre los cuales están varios de aquellos a quienes me honra llamar amigos míos.»

En 1941 dos trabajos de S. Ríos fueron premiados por la Real Academia de Ciencias y en 1943 el Consejo Superior de Investigaciones Científicas concedió a otro el premio Alfonso el Sabio.

Todos los trabajos anteriores a la Memoria del Profesor Gino Loria, «Le matematiche in Ispagna e in Argentina alla vigilia della guerra civile spagnola» (*Revista de la Unión Matemática Argentina*, 1938), son citados en esta Memoria. Dice especialmente: «Nel campopropio del Analisi le seria furomo coltivate con impegno dei pui moderni punti di vista, quali quelli sugeriti del Borel, quanto quelli qui portaron an nuevo concetto de iperconvergencia».

El trabajo sobre la teoría de la reordenación fué objeto de una Conferencia del Profesor Hadwiger en la reunión anual de la Sociedad Matemática Suiza en 1946, con el título «Ueber einen funktionentheoretischen Umordnungsatz von S. Ríos» y fué publicada por la *Revista de la Sociedad Matemática Suiza* y por la *Revista Matemática Hispano-Americana*.

Varios teoremas de S. Ríos han sido demostrados posteriormente por otros matemáticos. Así I. Hirchmann en su memoria «Two power series theorems ext. to the Laplace Transform» (*Duke Marth*, Journal, 1944) y Sirvint. «Quelques exemples de series de Dirichlet dont la suite a exposants est condensée» (*Recueil Match. de Moscou*, 1942 y 1943).

Otros trabajos han sido citados por Guizetti, Rey Pastor, Hadamard, Kendall, etc.

Ha dirigido las tesis doctorales de los Sres. Béjar, Iglesias, Royo, Cansado, E. Ríos, Guiraum, Romaní, Navarro Sagristá, Castro Brziski, Azorín y Zoroa.

En la obra de Brambilla, *La distribuzioni dei rediti Pavia*, 1960, se recoge casi íntegra la memoria «Problemas de máximos y mínimos, en relación con la inferencia en las poblaciones finitas» (*Trabajos de Estadística*, Vol. VI, 1955), haciéndose interesantes aplicaciones al problema económico de la distribución de las rentas.

Del libro *Introducción a los métodos de la Estadística* se han publicado varias reseñas críticas de las que copiamos:

(De P. R. Halmos en el *Journal of the American Statistical Association*, 1954):

«This is a charming and elementary book that fulfills, within the author sets for it, the promise of the title.

»As a pre-technical introduction, with the purpose of telling the experimenter what ideas he is likely to do for him, the book is highly recommended.»

(De S. Vajda, en el *Journal of the Royal Statiscal Society*, 1955):

«The exposition is, of couse, elementary and the more modern chapters contain just the right dose for a first treatement... Prof. Ríos is to be congratulated on a achievement which, by the standards he has set himself, must be deemed, to be successful.»

De la *Revue de l'Institut International de Statistique* (La Haye, 1955):

«In short, this is an excellent book with which we can congratulate ourselves and which endebts us still more to its author, to whom statistical education and research in and out of Spain owe so much.»

FE DE ERRATAS

PÁGS. 39	DICE	Minamax	DEBE DECIR	Minimax
» 47	»	sostenido	»	sostenida
» 47	»	óptimos	»	opimos

Nómina de los matemáticos hispanohablantes cuyas investigaciones son citadas en revistas extranjeras

Sixto Cámara, Mischa Cotlar, J. B. Díaz, Roberto Frucht, Federico Gaeta, Godofredo García, Antonio Monteiro, Leopoldo Nachbin, Antonio Yorroja, E. Zarantonello y los discípulos de Rey Pastor siguientes:

Babini, Balanzat, Barral, Biggeri, Calderón, Castro, Corominas, Cuesta, Dou, Durañona, Frenkel, Gonxález Domínguez, Lamenza, Marsicano, Massera, Puig, Raimondi, Ríos, Sagastume, Salinas, San Juan, Santaló, Shäfer, Sunyer Balaguer, Teixidor, Toranzos, Trejo, Valeiras, Varela, Vignaux, Villamayor y Zoroa.