REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DISCURSO INAUGURAL

DEL AÑO ACADÉMICO 1996-1997

LEÍDO EN LA SESIÓN CELEBRADA EL DIA 16 DE OCTUBRE DE 1996
POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

EXCMO. SR. D. JOSÉ MARÍA MONTESINOS AMILIBIA

SOBRE EL TEMA

NÚMEROS, COMBINATORIA Y NUDOS: DE LO DISCRETO AL CONTINUO



MADRID DOMICILIO DE LA ACADEMIA VALVERDE, 22 TELÉFONO - 521 25 29 1996

Números, combinatoria y nudos: de lo discreto al continuo

Excmo. Sr. Presidente, Excma. Sra. Académica, Excmos. Sres. Académicos, Señoras y Señores.

Siguiendo un turno ya tradicional, me ha correspondido pronunciar el discurso de apertura de este nuevo año académico 1996-1997, y agradezco mucho a mis compañeros de Academia la atención que han tenido al confiarme este encargo.

1. Introducción

Los Señores Académicos que me han precedido en esta tarea habrán seguramente experimentado la incertidumbre y perplejidad del científico metido en sus personales investigaciones a quien se le pide que las explique en román paladino: Quiero fer una prosa -decía Berceo- en román paladino, con el cual suele el pueblo fablar a su vecino, ca non so tan letrado por fer otro latino, bien valdrá, como creo, un vaso de bon vino. El bueno de Berceo sabía perfectamente latín, pero el vino de la Rioja le gustaba más. Le pasaba más o menos como a las modistillas de San Sebastián: Iru damatxo Donostiyako, ..., josten ere ba-dakite, baña ardua edaten obeki (*).

No estoy, naturalmente, pidiendo que la ya tradicional jarrita de agua, con que nos aclaramos la garganta los oradores, sea sustituida por algún vino de calidad; simplemente manifiesto que es una buena lección, que todo científico debe aprender, la de tener que comunicar su ciencia de modo que brote de sus labios en lenguaje llano y comprensible para todos. ¡Ah! y sin aspavientos por las dificultades que ello entraña, aprendiendo a soterrarlas bajo una pizca de humor como el gran Berceo nos enseña.

Y que esto es difícil se ve hasta en los Congresos de Matemáticas especializados, (cuanto más en los generales como los Congresos Internacionales que se realizan -como las Olimpiadas- cada cuatro años). Con frecuencia, en efecto, un conferenciante que está llenando pizarra tras pizarra de demostraciones, teoremas, ideas, dibujos, etc., dice: "bueno, aquí les he engañado un poco: el argumento es más difícil". ¡Y esto, a especialistas! Y es que cualquier ciencia, y especialmente la Ciencia Matemática, ha de ser tratada con delicadeza. A veces, la más pequeña variación de un enunciado lo hace falso. Les contaré al respecto una pequeña anécdota que, les adelanto, acaba trágicamente.

La anécdota es un poco larga, así que "paciencia, y barajar". Sólo les prometo que no va a empezar con el consabido: "Ya en el siglo sexto antes de Cristo, etc.", pues cuando esto sucede el público se arrellana cómodamente en su asiento, para una

^{*} Las tres damitas de San Sebastián, coser también ya saben, pero vino beben mejor. (Canción popular donostiarra).

agradable siesta. Mi anécdota comienza en 1904 y acaba en los años 80. Así pues sólo dura 76 años.

Bueno, para ser exactos, empieza un poco antes, a finales del pasado siglo, lo que ocurre es que el enunciado de la Conjetura de Poincaré (que es el telón de fondo de la anécdota) se publicó en 1904. Enrique Poincaré fue un sabio universal (se dice que el último sabio universal, aunque esto no lo sabemos: la Historia demuestra que se puede volver a la Edad de Piedra, y más en una época donde se comercia con bombas atómicas); pues bien, este sabio universal (que además poseía todas las particularidades del científico mítico); este sabio universal, digo, tenía la costumbre, bastante curiosa también, de escribir sus trabajos de investigación a vuelapluma y de jamás corregir pruebas de imprenta. Además, en su sorprendente modo de concebir la ciencia, cuando comenzaba a escribir algo, iba directamente al grano, sin percatarse aparentemente de la enorme dificultad que entonces conlleva el leer sus artículos: ya pondré un ejemplo después, de un diagrama de Heegaard, que, tras años de investigación en estas materias, sigue produciéndome gran perplejidad.

2. La Conjetura de Poincaré

Pues aclaremos de entrada que la Conjetura de Poincaré no es tal Conjetura de Poincaré: ciertamente Poincaré es su autor, pero no es en absoluto una conjetura: es, sencillamente, una pregunta y una profecía simultáneamente. No le cuadra pues lo de conjetura, así que propongo que en este rato de charla la llamemos, de cuando en cuando "Pregunta de Poincaré".

Por cierto que sobre la "Conjetura de Poincaré" corren entre nosotros multitud de anécdotas, pero como se basan en cosas matemáticas muy técnicas sólo nos hacen reír a nosotros. Entre paréntesis "nosotros" somos un cierto tipo de Geómetras que ahora se llaman "topólogos de baja dimensión". Siempre estamos rodeados de nudos, poliedros, espacios hiperbólicos, y cosas parecidas que podemos visualizar. Nuestro modo de demostrar es ver: si no vemos, no creemos. Esto hace todo extremadamente variado, cromático, y altamente geométrico. Lo malo es que para convencer a un colega de algo, necesitamos hacer constantes movimientos con las manos. Nuestros detractores, que afortunadamente van disminuyendo en la medida en que nuestra ciencia va alcanzando más popularidad, dicen que sólo sabemos mover las manos.

Pero, vamos a lo nuestro. Estábamos con la "Pregunta de Poincaré" y ahora caigo en que no hay razón ninguna para suponer que ustedes sepan en qué consiste. Consiste en que algo no existe: esto no es un chiste de los nuestros: se lo han tomado en serio centenares, tal vez miles de matemáticos, desde que Poincaré profetizara en 1904 que la cuestión "nos llevaría demasiado lejos". Algunos de ustedes estarán pensando quizás: "bueno, deja de marear la perdiz y dinos de una vez qué es la Conjetura o Pregunta de Poincaré". Les confieso que mareo la perdiz para evitarles a ustedes uno demasiado repentino, porque ahora no me queda más remedio que ir al grano, y el garbanzo es duro. Si quisiera aturdirles un poco, bastaría enunciar algo incomprensible pero gramaticalmente correcto: lo malo es que, el que sabe de qué va, me llamaría con toda razón pedante, y, el que no lo sabe, sufriría un vahído y desearía abandonar esta sala lo antes posible. Así que voy a emplear el ejemplo del perro.

Empecemos con un perro bidimensional: un perro de papel muy fino, pero vivo. Bueno, mejor pensado, tomemos dos perros bidimensionales P_1 y P_2 . El primer

perro, el P₁, vive "planamente" en la superficie de una inmensa esfera también bidimensional: así que P_1 , al que llamaré Tino, cree que vive en un plano infinito: no lo olvidemos: la esfera en que vive Tino es enorme con respecto al tamaño de Tino. El segundo perro, al que llamaré Frascuelo, vive en la superficie de una inmensa rosquilla. La superficie de una rosquilla, por razones arquitectónicas que no conozco bien, se llama entre nosotros "toro". Frascuelo, pues, vive sobre un inmenso toro, también bidimensional y a él también le parece, como a Tino, que vive en un plano infinito. Ambos, Frascuelo y Tino, están atados a sendas estacas bidimensionales (más parecidas a un par de pesetas que a otra cosa, pues son planas), mediante correas de pequeña longitud, infinitamente extensibles y elásticas. Pero, nótenlo bien, las correas son planas, (como cinturones sin tercera dimensión) y nunca abandonan la superficie: siempre están sobre la esfera de Tino o sobre el toro de Frascuelo. Así que, para entendernos, si Tino está atado al polo norte de su esfera y se pasea hasta el polo sur, su correa seguirá un meridiano de la esfera: no se saldrá de la esfera para ir rectamente de norte a sur por el "espacio exterior o interior": este espacio exterior o interior simplemente no existe, porque queremos que no exista; sería como la cuarta dimensión en nuestro espacio tridimensional: la experiencia demuestra que cualquier perro tridimensional, llamémosle León, atado con una correa, puede deambular por ahí, pero siempre vemos la correa. Si hubiera una cuarta dimensión en la que nuestro espacio tridimensional estuviera sumergido (como lo está la esfera de Tino en un espacio tridimensional), y permitiéramos que la correa de León se saliera del espacio, para viajar por la cuarta dimensión, simplemente no veríamos la parte de la correa de León que está en la cuarta dimensión: se habría desvanecido en el aire. Bueno, pues esto es lo que no queremos. Queremos que Frascuelo y Tino tengan su correa sobre el toro y la esfera, respectivamente.

Si Tino pasea por la esfera, que podemos imaginar como la superficie de la Tierra, y vuelve a la estaca, la correa recobrará su longitud inicial: no estará estirada. Esto es cierto con una excepción únicamente: el caso en que Tino vaya por un meridiano completo. Entonces la correa de Tino dará una vuelta completa a la esfera pasando por el polo sur y llegando a la estaca situada en el polo norte, y la correa no se contraerá, suponiendo que la resistencia que oponen al suelo las patas de Tino impidan que éste sea arrastrado hacia atrás por la tensión de la correa. Pero, recuerden, somos topólogos. La más pequeña alteración de la posición de la correa de Tino la liberará del polo sur y en ese instante la correa se contraerá, barriendo en su contracción todo el Océano Pacífico, por ejemplo, para volver a alcanzar su tamaño original cerca de la estaca de Tino.

Esto que estoy diciendo, obviamente, es un modo de visualizar ideas y conceptos topológicos empleando perros y correas y estacas. Topológicamente, la estaca se llama punto base de la esfera; un camino recorrido por Tino que acaba en el punto base se llama un camino o un lazo; el barrido que realiza la correa para recobrar su longitud inicial se llama una homotopía del lazo; la correa, con su longitud inicial colocada junto a la estaca, dibuja un lazo que se llama el lazo trivial y se representa por 1. Es posible multiplicar el lazo L_1 por el lazo L_2 como sigue: el punto final del lazo L_1 se desprende de la estaca y se ata al punto inicial, desprendido de la estaca, de L_2 . El lazo resultante consiste en que Tino recorre L_1 y seguidamente L_2 ; se representa por L_1 L_2 . Nótese que si considero un lazo cualquiera L existe un lazo que consiste en recorrer L en sentido inverso; se llama

lazo L^{-1} ; entonces $L \cdot L^{-1}$ es la correa que parte de la estaca recorre todo L y luego, sin tocar la estaca, recorre L al revés: la correa obviamente se contrae hasta convertirse en el lazo trivial 1. Así que $L \cdot L^{-1} = 1$. Hemos llegado al corazón de la idea de Poincaré: si en un espacio (sea la esfera de Tino o el toro de Frascuelo o el espacio en que vivimos) marcamos un punto base E (estaca) y tomamos todos los caminos L que parten y concluyen en E; y suponemos iguales dos caminos L_1 , L_2 que difieren en una homotopía (L_1 barre cierta área y se convierte en L_2); es posible definir en este espacio de caminos un producto con identidad 1 (el camino trivial), tal que todo camino L tiene inverso L^{-1} (es decir $L \cdot L^{-1} = 1$) y el producto es asociativo. Esta estructura de caminos con producto de caminos es lo que los matemáticos llamamos un grupo. El grupo de caminos de un espacio se llama el grupo de Poincaré o grupo fundamental del espacio.

Volvamos a la esfera de Tino. Su estaca se llama E. Como todo camino basado en E es homotópico al camino trivial, es decir, se contrae sobre la esfera hasta reducirse al lazo inicial, resulta que el grupo de Poincaré de la esfera es el grupo que consta de un único elemento: a saber 1, el camino trivial.

Desde el punto de vista de Tino es francamente confortable saber que vive en un espacio cuyo grupo de Poincaré es trivial; pues, en efecto, si Tino se da un garbeo por su esfera y vuelve a la estaca y se pone a dormir, lo hará plácidamente sin que nada le perturbe el sueño. No le pasará lo mismo a Frascuelo. Este tal vez haya paseado en torno a la periferia del inmenso toro en que vive, y cuando se eche a dormir junto a su estaca, la correa no se habrá contraído porque el camino L seguido por la correa no puede barrer área hasta llegar a la estaca sin salirse del toro. Así que la correa de Frascuelo, cuando éste se eche a dormir, tendrá una enorme longitud y estará tensísima. Al comenzar Frascuelo su dulce sueño y al perder sus patas contacto suficiente con el suelo como para que el rozamiento compense la tensión de su correa, se verá de repente arrastrado por la correa, la cual recobrará su longitud inicial recorriendo L^{-1} , porque al ser $L \neq 1$, el único modo de que L se convierta en 1 es multiplicarlo por L^{-1} . En resumen, la vida de Frascuelo será un verdadero infierno, y si es suficientemente prudente, limitará sus paseos a un entorno de la estaca cuyo grupo de Poincaré sea trivial.

Bueno, pues ya estoy en condiciones de decirles cuál es la Conjetura de Poincaré. Antes de nada les comunico que la esfera y el toro son ejemplos de lo que los topólogos llamamos variedades bidimensionales cerradas: no tienen borde, como lo tendría, por ejemplo, el casquete norte de la esfera terrestre, cuyo borde es el ecuador, y se pueden cubrir con un número finito de mapas. Es claro que la superficie terrestre puede describirse con un atlas de un número finito de mapas y pasa igual con el toro. También hay variedades tridimensionales cerradas. Las hojas del atlas son cubos, en lugar de páginas rectangulares, y hay un número finito de hojas cúbicas. Una variedad tridimensional, de las infinitas que hay, es interesante para nosotros: la esfera tridimensional S^3 .

Para visualizarla pensemos primero en su análogo bidimensional: la superficie esférica S^2 . Vamos a hacer una tomografía de S^2 : la cortamos por una infinidad de planos paralelos. Veremos primero un punto aislado (el polo norte); después pequeños círculos concéntricos (paralelos de la tierra) que crecen en diámetro hasta alcanzar un máximo en el ecuador; luego el proceso se invierte: los círculos van

decreciendo en diámetro hasta reducirse a un solo punto (el polo sur). Una tomografía de la esfera tridimensional ó 3-esfera S³ comienza también con un punto aislado (polo norte); después siguen pequeñas superficies esféricas concéntricas que crecen en diámetro hasta alcanzar un máximo en una superficie esférica llamada ecuatorial; luego el proceso se invierte: las superficies esféricas decrecen en diámetro hasta convertirse en un solo punto (polo sur). Como ven, la reunión del polo norte junto con todas las superficies esféricas que lo tienen por centro hasta alcanzar el ecuador, forman una bola tridimensional B_1 . Asímismo las esferas bidimensionales que rodean al polo sur forman otra bola tridimensional B_2 , que tiene en común con B_1 la 2-esfera ecuatorial. La bola B_1 es el casquete norte de S^3 y la B_2 es el casquete sur de S^3 : ambos casquetes están pegados entre sí por sus fronteras comunes: la superficie esférica ecuatorial S^2 . Pueden visualizarlo de otro modo. Imagínense ante un espejo. Delante de él ponen una bola 3-dimensional (una naranja, por ejemplo): esta es la bola B_1 cuyo centro es el polo norte; reflejada en el espejo aparece la naranja B_2 cuyo centro es el polo sur. Si acercan la naranja al espejo, la frontera de la naranja (ecuador bidimensional) parece identificarse con su imagen. De hecho, esta identificación podría llevarse a cabo si la naranja fuera tan grande que su frontera llegara a ser el plano infinito del espejo. Así S^3 no es otra cosa que los dos lados del espejo más un punto ideal en el ∞. Es decir es el espacio euclídeo cerrado con un punto ideal en el ∞ . Ocurre que el grupo de Poincaré de la esfera tridimensional S^3 es trivial, como en el caso de S^2 .

La Conjetura de Poincaré es que, exceptuada la esfera tridimensional S^3 , ninguna otra variedad tridimensional M posee grupo de Poincaré trivial. Es decir, si el grupo de Poincaré de M es trivial entonces M es S^3 . Bien, hoy en día esto está todavía sin demostrar. Así que tal y como están las cosas podría existir un contraejemplo a la Conjetura: sería una 3-variedad cerrada M tal que su grupo de Poincaré fuera trivial sin que M fuera S^3 . También podría no existir tal contraejemplo. Simplemente, no lo sabemos: la Conjetura de Poincaré es un problema abierto. Es el problema abierto más importante de la Topología.

Lo curioso de este asunto es que uno podría conjeturar lo mismo en otras dimensiones. Así por ejemplo: si M es una 2-variedad cerrada con grupo de Poincaré trivial, ¿es $M = S^2$? Respuesta: sí. También: si M, n > 3, es una n-variedad cerrada homotópicamente equivalente a la n-esfera S^n , ¿es M homeomorfa a S^n ? Respuesta: sí. Nos encontramos con que la única dimensión que ignoramos es la dimensión 3, precisamente la dimensión sobre la que Poincaré formuló su pregunta.

Me parece pues que he dejado las cosas claras. En dimensión tres no se sabe si una variedad cerrada ha de ser S^3 si su grupo de Poincaré es trivial.

3. Generalización de Waldhausen de la conjetura de Poincaré

Piensen en una panadería. Sobre la mesa de marmol hay una masa de harina: una torta. Eso se llama una bola en topología. Hagan 20 agujeros a la torta que la atraviesen de arriba abajo hasta la mesa de marmol. Eso se llama un brazalete de género 20 en topología. Hemos dicho antes que S^3 se obtiene pegando dos bolas B_1 y B_2 por su frontera: se dice que S^3 tiene género cero (porque los brazaletes

 B_1 , B_2 al no tener agujeros se dice que tienen género cero). Pues bien, ocurre que toda 3-variedad cerrada se obtiene pegando dos brazaletes del mismo género por su frontera. La misma 3-variedad admite muchos modos de estos pegados. Pero dada una 3-variedad cerrada M habrá un modo de obtenerla pegando dos brazaletes de mínimo género; este mínimo genero se llama el género de M y se representa por g(M). Así $g(S^3)=0$. Recíprocamente si g(M)=0 entonces M es S^3 . Así que podemos reformular la Pregunta de Poincaré así: si el grupo de Poincaré de M es trivial entonces g(M)=0.

Ahora empieza el drama que anuncié al principio y que acaba trágicamente. Todo comienza con una ingenua observación. Sea G un grupo; un conjunto de elementos de G se dice que generan G si a base de multiplicar esos elementos y sus inversos de todos los modos posibles se pueden obtener todos los demás elementos de G. Naturalmente, todo grupo G posee un sistema de generadores: el propio conjunto de todos los elementos de G. Esta idiotez es típica de los matemáticos. Nos defendemos diciendo que al menos todo grupo admite algún sistema de generadores. Naturalmente de lo que se trata es del mínimo posible de elementos que generan G: este mínimo se llama el rango de G y se denota por rango(G). La ingenua observación a que antes me refería es que si M es una 3-variedad cerrada el rango del grupo de Poincaré de M, que denotamos rango(M) es menor o igual que g(M): el rango de M es menor o igual que su género. Demostrar esto es una obviedad así que es una ingenua observación. Recordemos de nuevo: rango, menor o igual que género. Rango es concepto algebraico; género es concepto geométrico: el rango dice algo sobre la 3variedad M de carácter algebraico, es decir, dice algo más débil que el género; el género es geométrico: una afirmación sobre el género es más fuerte que una afirmación sobre el rango. Pues bien, cuando los matemáticos no sabemos qué hacer, solemos generalizar: la experiencia nos ha demostrado muchas veces lo efectivo que es esto, siempre que el enunciado más general sea correcto. Lo que ocurre con la Pregunta de Poincaré es que es finísima: la amarga historia de muchas "demostraciones" enseña que si uno generaliza tiene muchas probabilidades de que la generalización sea falsa. Así que una jugarreta muy buena que podemos gastar a nuestros colegas es generalizar la Conjetura de Poincaré y dejar que los demás se estrellen.

Esto es precisamente lo que hizo el alemán F. Waldhausen. Este matemático, que andará por los sesenta, es uno de los más brillantes de la tradición de topologogeómetras alemanes que contiene a Dehn, Reidemeister, Kneser, Haken. Pues bien, Waldhausen publicó por el año 1978 ("Algunos problemas de 3-variedades". Proc.of Symposia in Pure Math, 32, 313-322) la siguiente Conjetura:

$$rango(M) = g(M)$$

Noten que ahora *rango* es igual a género. Esto es muy fuerte: se trata de obtener un resultado geométrico (sobre el género) a partir de uno algebraico (sobre el rango), para toda M: de lo débil pasar a lo fuerte: muy peligroso.

Lo interesante de la Conjetura de Waldhausen es que generaliza la Conjetura de Poincaré, porque si el grupo de Poincaré de M es trivial su rango es cero y ello, según la Conjetura de Waldhausen, debe implicar que el género de M es cero, lo que entraña que $M = S^3$: la Conjetura de Poincaré.

En la astuta trampa tendida por Waldhausen cayó cierto matemático muy bueno de la Universidad de Urbana. En esa universidad hay otros dos matemáticos conocidos por sus intentos con la Conjetura de Poincaré. Uno es el alemán Haken, mencionado antes, (que resolvió el problema de los cuatro colores). El otro es Craggs quien ha investigado el problema del rango durante años. Al matemático al que me refiero, que cayó en la trampa, le llamaremos X, siguiendo una antigua tradición algebraica. Para que se hagan una idea de cómo están las cosas, Haken suele decir que ha escrito hasta cuarenta "demostraciones" de la Conjetura de Poincaré. Una vez le pregunté su opinión sobre la Conjetura y me contestó que cree que es falsa y que por eso ha dejado de trabajar en ella (*). Pero vayamos a X. X trabajó exclusivamente en la Conjetura de Waldhausen hasta 1984; X trataba de demostrar que la Conjetura de Waldhausen es cierta. Supongo que escribió, en todo ese tiempo, centenares de resultados matemáticos, aunque no lo sabemos, pues no publicó nada.

Bueno, para acortar un poco la anécdota, el hecho es que un matemático francés M. Boileau y otro alemán H. Zieschang, trabajando juntos, encontraron en 1984 un contraejemplo a la Conjetura de Waldhausen.

El ejemplo apareció publicado en la prestigiosa revista Inventiones (Inventiones Math., 76, 455-468); y al mes, X moría de cáncer. En carta de Craggs, escrita días después de la muerte, me decía que el impacto moral sufrido por X fue tan fuerte que él (Craggs) y Haken estaban seguros de que el cáncer se desarrolló como consecuencia del disgusto.

Lo más sangrante es que el contraejemplo es fácil: una variedad fibrada de Seifert que tiene género 3 y rango 2. El ejemplo es muy bueno, pues se aprecia bien el por qué de la imposibilidad de realizar geométricamente cierta manipulación algebraica. Lo curioso es la falta de eco que entre los geómetras ha tenido este ejemplo. En mi opinión, un geómetra que esté convencido de la falsedad de la Conjetura de Poincaré debería dedicar sus mejores esfuerzos a examinar este ejemplo. Lo malo es si, en el ínterin, alguien prueba la Conjetura de Poincaré.

4. La conjetura de Poincaré y la dimensión 4

Pero volvamos a la trampa preparada por F. Waldhausen. Como hemos visto, ya se ha cobrado una víctima mortal. En la misma línea yo he preparado otra trampa. ("Nota sobre un resultado de Boileau-Zieschang" Lect. Notes, London Math. Soc. 112, 241-252(1986); "La discrepancia entre el rango y el género de Heegaard de una 3-variedad" Note di Matematica, Suplem. al v. 9., 101-117 (1989), de una conferencia pronunciada en Lecce el 23 de junio de 1989). Se trata de una generalización de la Pregunta de Poincaré que en principio es más fina que la de Waldhausen. Les adelanto que todavía no soy reo de homicidio. Mi conjetura, que generaliza la de Poincaré, permanece abierta. Más que conjetura la he formulado como pregunta, pues sospecho que la respuesta es también negativa, y sabe muy mal leer que una conjetura propia es falsa (lo digo por propia experiencia).

Lo que hago es generalizar esta vez el concepto de género de una variedad tridimensional cerrada M. Le quito a M una bola tridimensional y obtengo una variedad M_* con frontera la esfera que es el borde de la bola quitada. Entonces M_* se puede ver como un brazalete de género igual al género de M, al que se le pegan g

^(*) Dijo la zorra: "están verdes".

discos a lo largo de sus fronteras y luego se ensanchan estos discos para que el resultado sea tridimensional. Si formamos el producto cartesiano de M, por el intervalo cerrado [-1,1], obtenemos una variedad de dimensión cuatro \tilde{M} cuyo borde es el resultado de pegar M. consigo mismo a lo largo de su frontera: es decir el borde de M es 2M (que se llama el doble de M). El hecho de que M, sea representable como un brazalete de género g, más g discos ensanchados implica que \widetilde{M} puede representarse como un brazalete cuatridimensional de género g con g discos ensanchados hasta la dimensión cuatro. Al mínimo ĝ posible para esta última representación de \tilde{M} lo llamo supergénero de M, sg(M). Acabo de demostrar que para toda M, $sg(M) \le g(M)$. Pues bien mi pregunta es esta: ¿es el rango de M igual al supergénero de M? Naturalmente que podría ocurrir que el género de M fuera siempre igual a su supergénero, pero esto no se sabe. Si así fuera, mi pregunta coincidiría con la Conjetura de Waldhausen que es falsa. En particular el género del Contraejemplo de Boileau-Zieschang, mencionado antes, es 3; yo sospecho que el supergénero es 3, también, con lo cual mi pregunta tendría respuesta negativa, pero esto sigue siendo un problema abierto.

Mi pregunta, de tener respuesta afirmativa, implica también la Pregunta de Poincaré. En efecto, si el rango de M es cero, entonces el supergénero de M sería cero; luego \tilde{M} sería un brazalete cuatrodimensional de género cero: es decir una bola de dimensión cuatro. Entonces el borde de \tilde{M} sería el borde de una bola de dimensión cuatro, es decir la esfera de dimensión tres. Pero como el borde de \tilde{M} es el doble de M, deduciríamos que el doble de M es S^3 . Es decir, en S^3 habría una 2-esfera S^2 que, a uno y otro lado, bordearía M_* . Pero un cierto teorema de J.W. Alexander dice que tal S^2 debe bordear dos bolas de dimensión tres. En consecuencia, M_* es una bola de dimensión tres. Y como M se obtiene de M_* pegándole la bola que le quitamos al principio deducimos que el género de M es cero, luego M es S^3 : la Pregunta de Poincaré.

5. Algunas consideraciones sobre el infinito y lo finito

Ahora pasemos al meollo de mi conferencia. Quiero hoy aquí ilustrar la relación entre el infinito matemático y lo finito. Para ello tomaré tres ejemplos sencillos, uno de Teoría de Números, otro de Topología Combinatoria, y el tercero de Teoría de Nudos en que se ve cómo este infinito matemático está frecuentemente sustentado por alguna parte de la Ciencia Matemática de carácter finito, como la Teoría de Números, la Combinatoria, la Teoría de Nudos, etc.; teniendo presente que los enunciados matemáticos suelen tener siempre un tinte universal y que propiamente hablando las anteriores teorías son también teorías del infinito, pero de un infinito discreto en contraposición al infinito continuo que es el difícil de conceptualizar.

Esta tensión entre lo finito y lo infinito es una constante en la Historia de las Matemáticas, y la fuente de la que han surgido, surgen y surgirán las grandes ideas que hacen de las Matemáticas la Reina de las Ciencias. Como botón de muestra piensen un momento en la Historia del cálculo infinitesimal, adelantado por

Arquímedes, descubierto por Leibniz y Newton y fundamentado primero por Cauchy y más recientemente por Robinson.

En un libro de reciente aparición, escrito en inglés por Donald Spencer, y titulado "Fechas clave en la historia de los números", aparecen algunas efemérides curiosas que no avalan precisamente la calidad del libro, pero que a nosotros nos pueden servir para llegar a lo nuestro. Yendo al año 1710, se lee que cierto esclavo de Virginia, llamado Tomás Fuller, podía multiplicar números de 4 y 5 dígitos mentalmente y además calcular, también mentalmente, el número de segundos de un período de tiempo dado. La verdad es que no sé por qué Spencer incluye este extraño e insólito dato histórico como una "fecha clave en la historia de los números", a no ser que se refiera a los números de circo. Pero dejando de lado los gustos de Spencer, sorprende que un esclavo, al que podemos suponer ignorante, tuviera un poder mental tan fuerte. Podemos preguntarnos si la característica más genuina de un matemático consiste en la posesión de análoga potencia de cálculo. Dentro del mismo orden de cosas veamos otra efemérides, ésta del año 1751. Parece ser que en tal año, cierto Jedediah Buxton calculó mentalmente el número de pulgadas cúbicas de un bloque de piedra de 23.145.789 yardas de largo, 5.642.732 de ancho y 54.965 de alto. Reconocerán ustedes que ahora la cosa es aún más curiosa: ¡el bloque era de piedra!, naturalmente tan inexistente como si hubiera sido de regaliz, pero queda la duda de si el tal Jedediah hubiera podido con el cálculo si el bloque fuera de madera y de medidas más modestas que una piedra de 50 kilómetros de altura. La verdad es que leyendo esta efemérides no sé de qué extrañarme más, si de las peculiares medidas del bloque o de su naturaleza. Parece que aquí nos encontramos frente a un problema de psiquiatría o psicología más que con "una fecha clave de la teoría de los números". Quizá la Ciencia que se llama Moderna podrá explicarnos el origen de hazañas tan sorprendentes.

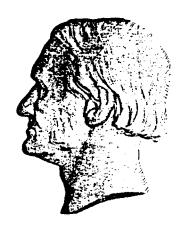
En otro orden de cosas, un poco más serias, está el cálculo realizado por Leonardo Euler en 1732. También éste era un gran calculista, pero sobre todo era un gran matemático, y sin embargo se empeñó en ver si el quinto número de Fermat $2^{32} + 1 = 4.294.967.297$ era o no primo. Esta vez no sabemos, ni se nos dice, cuánto tiempo dedicó a ello, pero uno puede sospechar que mucho. Pues bien, Euler comprobó que ese número tan grande, es compuesto; concretamente el producto de 641 y 6.700.417. ¿Por qué un esfuerzo tan considerable y aparentemente tan inútil? Ciertamente por imperativo de la Investigación Matemática, que muchas veces es tan experimental como puedan serlo la Física o la Química. En la Investigación Matemática, como en Astronomía, es precisa la observación. En último extremo las grandes computadoras modernas son para nosotros, los matemáticos, como potentes telescopios. ¿De qué habrían sido capaces Euler ó Gauss, por ejemplo, de tener la asistencia de tales máquinas? La respuesta está por encima de toda ponderación.

Otro ejemplo similar, que además de capacidad de cálculo revela una gran paciencia, es el que ofrece Antonio Fenkel: en 1776 tenía calculados los factores primos de todos los números hasta 2.000.000. ¿Qué motivación empujaba a estos hombres? Sólo puedo imaginar la curiosidad o la observación; la misma que ha impulsado a muchas personas a calcular miles de decimales de π , como en el caso de los hermanos David y Gregorio Chudnovsky, rusos, que en 1989 tenían calculados 1.011.196.691 decimales. El conocimiento de π con varios decimales de aproximación es un problema histórico de enorme importancia pues mediante él pueden construirse tablas trigonométricas de gran interés en navegación y astronomía (confección de

R= 18.306

CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE

ACHTER BAND.



HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

Zυ

GÖTTINGEN.

IN COMMISSION BEI B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1900.



284 NACHLASS.

Man kann die möglichen Tracte auch als geschlossene ansehen, und folglich aus jedem möglichen durch Vorrückung des Anfangsgliedes andere ableiten. Die 24 möglichen, welche sich unter den 105 Tracten für 4 vollständige Knoten befinden, erscheinen in dieser Abhängigkeit so:

Sehr vereinfacht wird die Registrirung, indem man die Plätze mit 0, 1, 2, 3 u. s. w. bezeichnet, und diejenigen Paare von Plätzen, die Einem Knoten entsprechen, neben einander setzt. In einem möglichen geschlossenen Tracte muss jedes Paar aus einer geraden und einer ungeraden Zahl bestehen. Z. B.

Dieses Criterium hört aber bei Perioden von mehr als 4 Knoten auf, für die Möglichkeit zureichend zu sein; z. B. abcadcedbe oder $\begin{pmatrix} 0. & 2. & 4. & 6. & 8 \\ 3. & 5. & 7. & 9. & 1 \end{pmatrix}$ ist, obgleich dem Criterium genügt ist, unmöglich.

Ebenso ist unmöglich abcabdecde [oder] $\begin{pmatrix} 0. & 2. & 4. & 6. & 8 \\ 3. & 7. & 1. & 9. & 5 \end{pmatrix}$.

Die vollständige lexicographische Aufzählung aller 120 Tractcombinationen für 5 Knoten auf der folgenden Seite [, wobei die unmöglichen Tracte durch einen Stern bezeichnet sind.]

calendarios). Pero el cálculo de tantos millones de decimales no se explica por su utilidad práctica. Desde este punto de vista bastan 5 decimales para casi todos los problemas que hallamos en las aplicaciones. Como dice H. Tietze en su libro "Famosos problemas de las Matemáticas", "cuatro decimales bastan para determinar la circunferencia de un círculo con error menor que un milímetro si el radio es de 30 metros o menos. Si el radio es tan grande como el de la Tierra son suficientes 10 decimales. Si el círculo tiene un radio tan grande como la distancia de la Tierra al Sol bastan 50 decimales, para determinar la circunferencia con error menor que un milímetro. Para ver la increíble exactitud que se obtiene con 100 decimales de π consideremos el siguiente problema: Tomemos una esfera, con nuestra Tierra como su centro, y que se extiende hasta Sirio. Pues la velocidad de la luz es de 300.000 kilómetros por segundo, tardaríamos 8 años y 9 meses en alcanzar la superficie de la esfera desde la Tierra. Llénese esta esfera con microbios, de tal manera que cada milímetro cúbico contenga un billón de microbios. Ahora, si todos estos microbios se extienden sobre una línea recta, de tal manera que la distancia entre los sucesivos microbios es igual a la distancia que hay entre la Tierra y Sirio, y la distancia del primero al último se toma como radio de un círculo, entonces el error, al calcular la circunferencia de este círculo usando 100 decimales de π , será menor que un décimo de la millonésima parte de un milímetro". Así que las razones prácticas explican los cálculos de Arquímedes (240 AC) que conocía dos decimales de π , o por poner un ejemplo exótico, los de Takakazu Seki, nacido hacia 1642 en Tokyo (entonces Edo), que obtuvo el valor 3,14159265358 inscribiendo un polígono de $2^{17} = 131.072$ lados en la circunferencia. Si hubiera tenido más paciencia, su método le habría proporcionado hasta 16 decimales exactos; pero esto lo sabemos hoy: Seki no sabía cuántos decimales eran exactos. El discípulo de Seki, Katahiro Takebe (1664-1739) obtuvo la aproximación 5419351/1725033 = 3,141592653589 ... mediante el empleo de fracciones continuas.

6. De lo finito a lo infinito en teoría de números

Los cálculos de los hermanos Chudnovsky no se explican por razones prácticas. Sin embargo su trabajo no es banal. Se trata aquí del número π : uno de los números más importantes de las Matemáticas, y lo que entre otras cosas se busca es si hay alguna regularidad en la aparición de decimales. Siendo π un número irracional, su desarrollo decimal no es periódico y no parece posible conocer la cifra que ocupará un lugar previamente elegido del desarrollo, sin conocer las cifras anteriores. A este respecto nos dice Luis Santaló, en su interesante libro "La matemática: una filosofía y una técnica", que "si suponemos que las letras del alfabeto mayúsculas y minúsculas más los signos de puntuación constituyen un total de 100 caracteres de imprenta diferentes y adoptamos un sistema de numeración de base 100 de manera que sus 100 cifras representen los caracteres de imprenta mencionados, podremos decir, siguiendo a Borel, que un número irracional como π o logaritmo de 3 estará escrito en este sistema de numeración según una serie ilimitada de páginas en las que los caracteres se sucederán según una ley aritmética que desconocemos pero que está rigurosamente determinada por la definición misma del número considerado. Si este número es absolutamente normal todas las agrupaciones de caracteres son igualmente probables y por consiguiente, prolongando cuanto sea necesaria la escritura de este

número, estamos seguros de que hallaremos con la frecuencia que se desee todas las agrupaciones posibles. Si escribimos el número π , que suponemos absolutamente normal, en este sistema de numeración, hallaremos entonces, tarde o temprano, la página que ahora estoy escribiendo como también se hallará el texto completo de las obras de Víctor Hugo y también el texto de los periódicos que aparecerán de aquí a un siglo, si es que en esta época va a haber periódicos. Todo ello está contenido en el número π junto con otras muchas cosas".

Un número es normal cuando la frecuencia de todas las cifras 0, 1, 2 hasta 9 en el desarrollo del número es la misma para todas ellas y por lo tanto es igual a un décimo. Si sucede lo mismo para cualquier otro sistema de numeración de base no decimal, sea el que sea, se dice que el número es absolutamente normal. Claro es que no sabemos si π es absolutamente normal, aunque los cálculos hechos hasta ahora lo confirman. Esta frase de Borel, que produce el vértigo de lo infinito, no es sino una advertencia para la adecuada comprensión de la ley de los grandes números de Jacobo Bernouilli, y un recordatorio de lo sutil que puede resultar la teoría de probabilidades. (Consúltese a este respecto el artículo de W. Weaver en el Scientific American de Octubre de 1950 y el libro de G.J. Székely: "Paradojas en Teoría de la Probabilidad y en Estadística Matemática" Reide. Publ. Co. (1986).)

Lo que llevamos dicho ilustra muy bien la diferencia que hay entre las matemáticas y el cálculo. Para Leibniz la repetición de cálculos, basados en un mismo algoritmo, era una tarea propia de esclavos y por eso trabajó en la invención de una máquina que los llevara a cabo automáticamente. Hoy en día su sueño es una realidad y podemos, con gran facilidad realizar las operaciones pasmosas de los calculistas mencionados. Las matemáticas no son un mero ejercicio de cálculo. Aunque esto es obvio, la mayoría de la gente de la calle cree lo contrario. Un amigo mío, doctor en filosofía, cuando le dije a qué me dedicaba, me espetó: "¡pero las matemáticas son una ciencia clausa!". Más penoso es constatar que hay personas, con una elevada educación universitaria o técnica, que ni siquiera conocen la naturaleza de las matemáticas. A este respecto y precisamente hablando de la cuadratura del círculo, nos dice Otto Toeplitz en su maravilloso libro "El Cálculo: un enfoque genético" que "hay gente que no comprende el punto principal del problema. Por ejemplo del sofista Antifón que vivía en Atenas en torno a la misma época que Hipócrates, Aristóteles relata que inscribió un cuadrado en un círculo y entonces construyó triángulos isósceles sobre sus lados formando un octógono regular inscrito en el círculo y similarmente un polígono regular de dieciséis lados y sucesivamente. Como todo polígono rectilíneo puede ser transformado en un cuadrado, Antifón creía que existe o que debe existir un polígono de un número suficientemente grande de lados idéntico al círculo y que el cuadrado en el cual este polígono pudiera ser transformado sería la solución a la cuadratura del círculo. Este argumento que era suficientemente válido para un círculo concreto, dibujado incluso con un compás muy fino, fue rechazado por Aristóteles como inválido para el círculo ideal de la geometría. También Hipócrates tenía este concepto claro de que la geometría era una ciencia exacta que trataba con configuraciones ideales como se demuestra en una cita de Anaxágoras. Precisamente es aquí, en que se trata de la discusión de un tema concreto especial y no en un debate filosófico, donde vemos la diferencia existente entre el pensamiento de los sofistas de aquella época y el verdadero pensamiento científico nacido en aquellos tiempos. Hoy también, después de dos mil años de historia de la ciencia hay todavía muchos que son incapaces de

comprender la naturaleza ideal de los objetos de la Ciencia Matemática y los contemplan como cosa de importancia menor o como un, más o menos, superfluo rizar el rizo. Así los sofistas aparecen aquí, no como personas ridículas, sino como representantes de una actitud mental que existe hasta hoy y que continúa luchando contra la ciencia pura. Las divergencias existentes hoy en día entre los matemáticos puros y aplicados no son sino la continuación de esta antiquísima lucha".

Teniendo presente esta ignorancia, resulta grandioso que ya entonces los griegos tuvieran el concepto de rigor matemático y la idea de demostración lógicamente rigurosa que seguimos teniendo nosotros ahora. Téngase en cuenta que en Oriente (China, Corea, Japón, India), aunque compartían con los griegos el conocimiento de muchas proposiciones matemáticas, no tenían una idea clara de "demostración". A este respecto es ilustrativa, en la biografía de Ramanujan, su primer contacto con la matemática occidental representada por Hardy. Hardy descubrió que el modo de pensamiento por el que Ramanujan obtenía sus fórmulas no era ni mucho menos plasmable en lo que reconocemos nosotros como "demostración"; era una indefinida mezcla de intuición, genialidad y cálculo. Hardy, comprendiendo que una educación matemática al estilo occidental podría dañar el talento de Ramanujan, lo tomó directamente a su cargo como pupilo. Aquí tenemos otro ejemplo de la sorprendente complejidad de la mente humana. Por eso aquellos que quieren reproducir mediante una máquina las capacidades de nuestra mente, bueno sería que estudiaran estos casos de calculistas y matemáticos mencionados y concluir que es un ingenuo reduccionismo el suponer que nuestro cerebro no es sino una máquina lógica, más o menos perfecta.

Pero volvamos al número π . Hemos dicho que es un número irracional y que por tanto no parece que podamos predecir cuál será el decimal que ocupará un lugar dado de este número sin calcular todos los precedentes. ¿Significa esto que no conocemos el número π ? Esta pregunta parece tener ribetes filosóficos. Desde luego, por definición, π es el perímetro de un círculo de diámetro 1, y no parece que sea difícil intuir lo que es un círculo. Desde este punto de vista tenemos una percepción clarísima de lo que es π . El problema surge cuando tratamos de hallar su desarrollo decimal. Pero ¿qué es un desarrollo decimal? Simplemente una serie convergente de un cierto tipo especial, y se suele identificar la serie con el número al que converge. En este sentido la serie

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \dots$$

que da el desarrollo decimal de π nos es totalmente desconocida a partir de un cierto lugar, luego π (el número que representa) nos es, desde este punto de vista, casi totalmente desconocido. Podemos aproximarnos a él cuanto queramos pero la serie sigue siendo un misterio. Supongo que ya ustedes se estarán preguntando que si el desarrollo decimal de π nos es totalmente desconocido a partir de un lugar, cómo es que se pueden seguir calculando decimales de π a medida que nuestra potencia de cálculo aumenta. La razón está en que poseemos definiciones de π mediante series (infinitas, claro) cuyos infinitos términos nos son totalmente conocidos. La aparente antinomia radica en que los términos de estas series siguen una ley tal que podemos decir exactamente el número que ocupa un lugar cualquiera de la serie sin calcular

los precedentes. Por ejemplo, tenemos la elegante serie de Leibniz descubierta en 1674:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \dots\right)$$

¿Conocemos entonces π ? La respuesta es pues ambigua: sí y no: según. Para iluminar más este tipo de pregunta filosófica vamos a comparar π con otro número importante de las matemáticas: el número e. Pero, antes de ello, veamos cómo es posible llegar al resultado de Leibniz: algo que en principio parece casi mágico. Seguiré aquí la espléndida exposición de Hilbert y Cohn-Vossen en su celebrado libro "Geometría e imaginación".

Tomamos en el plano la red de puntos de coordenadas enteras. Podemos pensar en los puntos de intersección de una hoja de papel cuadriculado. Gauss consideró el círculo de radio r centrado en uno de los puntos de la red y trató de hallar el número ρ de puntos (de la red, se entiende y se entenderá) que caen en él. Gauss obtuvo los resultados siguientes:

$$r = 10$$
, $\rho = 317$
 $r = 20$, $\rho = 1257$
 $r = 30$, $\rho = 2821$
 $r = 100$, $\rho = 31417$
 $r = 200$, $\rho = 125629$
 $r = 300$, $\rho = 282697$

Notamos que cuando r vale 10 ó 100, ρ vale 317 ó 31417, respectivamente; números que nos recuerdan el desarrollo decimal de π : 3,1415 ... Esto es porque el círculo de radio 10 tiene área 100 π , aproximadamente igual a 314, y el de radio 100 tiene área 10000π , aproximadamente igual a 31415. Naturalmente $\rho = 317$ no difiere mucho de 314; ni $\rho = 31417$, de 31415, porque al haber 317 puntos en el círculo de radio 10, el área total de los cuadrados cuyo origen son esos 317 puntos es 317, que difiere de 100π , en valor absoluto, en menos del área de todos los cuadrados cortados por la periferia del círculo. Veamos esto un poco más despacio. Queremos saber la diferencia $\pi r^2 - \rho$ en valor absoluto; πr^2 consta de una parte verde no cubierta por los ρ cuadrados, y una parte, digamos blanca, cubierta por ellos; ρ consta de la parte blanca y de una parte roja que se sale del círculo. Así que $\pi r^2 - \rho$ es (verde + blanco) menos (blanco + rojo), es decir (verde - rojo). En valor absoluto $\pi r^2 - \rho$ es (verde-rojo) ó (rojo - verde), según cuál de ellos sea positivo; pero en todo caso el valor absoluto de $\pi r^2 - \rho$ es menor que (verde + rojo). Pero las partes verde y roja están formadas de partes de cuadrados de la red que tocan a la periferia del círculo; por tanto, en valor absoluto, $\pi r^2 - \rho$ es menor que el área de los cuadrados tocados por la periferia; esta área es menor que la de un anillo ó banda cuya línea central es la periferia del círculo y cuyos bordes son dos circunferencias de radios $r+\sqrt{2}$ y $r-\sqrt{2}$, ya que la diagonal de un cuadrado de la red es $\sqrt{2}$. Pero el área de tal anillo es la longitud $2\pi r$, de su línea central, por su anchura $2\sqrt{2}$, o sea $4\pi\sqrt{2}r$.

Hemos pues demostrado que en valor absoluto $\pi r^2 - \rho$ es menor que $4\pi\sqrt{2}\,r$. Aquí está el quid de la cuestión pues mientras el área del círculo de radio r depende de r^2 , el área de la banda de anchura $2\sqrt{2}$ centrada en la circunferencia de radio r depende, no del cuadrado de r, sino de r simplemente. Dividiendo todo por r^2 (o, geométricamente, reduciendo todo por una contracción de razón $\frac{1}{r}$) tendremos que el valor absoluto de la diferencia $\pi - \frac{\rho}{r^2}$ es menor que $\frac{2\pi\sqrt{2}}{r}$. Al hacer tender r a infinito, $\frac{2\pi\sqrt{2}}{r}$ tiende a cero, luego π es el límite de $\frac{\rho}{r^2}$ cuando r tiende a infinito. Este es un resultado sencillo pero significativo. Digámoslo de nuevo: tomamos el círculo de radio r, tomamos el número ρ de puntos de la red que caen en él, entonces ρ / r^2 tiende a π cuando r tiende a infinito.

Veamos que esto es así con los ejemplos calculados por Gauss:

$$r = 10$$
, $\rho / r^2 = 3.17$
 $r = 20$, $\rho / r^2 = 3.1425$
 $r = 30$, $\rho / r^2 = 3.134$
 $r = 100$, $\rho / r^2 = 3.1417$
 $r = 200$, $\rho / r^2 = 3.140725$
 $r = 300$, $\rho / r^2 = 3.14107$

Se trata ahora de calcular ρ / r^2 (cuando r tiende a infinito) de otra manera, lo

que nos llevará a la serie de Leibniz. La clave del cálculo que vamos a hacer estriba en hacer tender r a infinito de un modo especial. Concretamente, haremos que r recorra los impares n mayores que 1: n = 3, 5, 7, ... y, llamando esta vez v al número de puntos de la red que caen en el círculo de radio n, vamos a calcular π como el límite de $\frac{v}{n^2}$ cuando n tiende a infinito sobre los impares mayores que 1. Previamente vamos a dividir los números impares en dos partes disjuntas: aquéllos que forman la progresión aritmética de razón $4:\{1,5,9,13,17,...\}$, que llamaremos (sólo para entendernos aquí) superimpares: impares congruentes con 1 módulo 4; y los números subimpares, congruentes con 3 módulo 4, y que forman la progresión $\{3,7,11,15,19,...\}$. Quiero meramente indicar ahora que los superimpares son los denominadores de los términos positivos de la serie de Leibniz, mientras que los subimpares corresponden a los términos negativos.

Si queremos calcular el límite de v/n^2 la cuestión clave es calcular v dado n. Naturalmente, uno puede trazar con un compás muy fino en una hoja cuadriculada un círculo de radio n y contar el número v de puntos de la red que caen en el círculo. Este instructivo procedimiento ni es general, ni es exacto: tiene que haber algo más inteligente. De momento observemos que la distancia de un punto de la red al centro (0,0) del círculo es la raíz cuadrada de un número entero, por el teorema de Pitágoras. Así que trazaremos dentro del círculo de radio n, las circunferencias de radios

 $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n^2}$ contaremos cuántos puntos de la red hay sobre cada una de ellas y la suma dará v-1, pues hemos prescindido del centro del círculo que también es un punto de la red. La cuestión ahora se ha convertido en averiguar cuántos puntos de la red hay en la circunferencia de radio \sqrt{m} . Por ejemplo en la de radio $\sqrt{1}$ hay cuatro; en la de radio $\sqrt{2}$ no hay ninguno, y tampoco en la de radio $\sqrt{3}$; pero en la de radio $\sqrt{5}$ hay ocho. ¿Qué problema tenemos entre manos? Simplemente un problema de teoría de números: en la circunferencia de radio \sqrt{m} caen tantos puntos de la red como modos distintos existen de expresar m como suma de dos cuadrados de enteros. Este problema ya fue considerado por Pedro de Fermat en 1640, y la fascinante respuesta es que el número distinto de maneras de expresar m como suma de dos cuadrados es cuatro veces la diferencia entre el número de superimpares divisores de m y el número de subimpares divisores de m. No voy a demostrarlo, pero veamos algún ejemplo: 30 posee dos divisores superimpares (1 y 5) y dos divisores subimpares (3 y 15); luego 30 no es suma de dos cuadrados, y sobre la circunferencia de radio $\sqrt{30}$ no cae ningún punto de la red. Por el contrario 10 posee dos divisores superimpares (1 y 5) y ninguno subimpar; luego 10 se puede escribir de $4 \times 2 = 8$ modos distintos como suma de dos cuadrados, a saber: $10 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2$, y sobre la circunferencia de radio $\sqrt{10}$ caen ocho puntos de la red, a saber (1,3),(3,1) y sus simétricos respecto a los ejes coordenados.

Como en la circunferencia de radio \sqrt{m} caen tantos puntos de la red como cuatro veces la diferencia entre el número de superimpares, divisores de m, y el número de subimpares divisores de m, para calcular $\frac{v-1}{4}$ tomaremos los números 1, 2, 3, etc ..., hasta n^2 (radio al cuadrado del círculo en estudio); a continuación contaremos los superimpares divisores de 1, los superimpares divisores de 2, etc ..., los superimpares divisores de n^2 , y obtendremos un número S; luego haremos lo mismo pero usando subimpares, y obtendremos un número s. Entonces $\frac{v-1}{4} = S - s$. Esta cuenta puede hacerse de otra manera y aquí está el nudo de la cuestión. Tomaremos un superimpar fijo, por ejemplo el 5, y nos preguntaremos cuántos de los números 1, 2, 3 hasta n^2 lo poseen como divisor: obviamente son los números 5, 10, 15 etc ... múltiplos de cinco menores o iguales que n^2 . ¿Cuántos de estos múltiplos hay? Pensemos en los números 1, 2, 3, ..., n^2 como los pisos de un edificio. Estamos contando el número de pisos que son múltiplos de cinco, menores o iguales que n^2 . Hay tantos de éstos como pisos son necesarios para alcanzar aquél piso en que se encuentra el número $n^2 / 5$. Este piso en el que está $n^2 / 5$ se denota por $\begin{bmatrix} n^2 / 5 \end{bmatrix}$ del entera número $n^2 / 5$. la parte (Por eiemplo [-7,2] = -8, [5] = 5, [17,3] = 17.) En resumen, hemos demostrado la igualdad

$$(v-1)/4 = \left[n^2/1\right] - \left[n^2/3\right] + \left[n^2/5\right] - \left[n^2/7\right] + \dots \pm \left[n^2/n^2\right]$$
 (1)

cuyos $(n^2 + 1)/2$ términos de la derecha nos permiten calcular v. Así por ejemplo, para n = 5 tendremos 13 términos que bajan en valor absoluto desde 25 hasta 1 alternando signos. Tendremos en este caso

$$v = 1 + 4(25 - 8 + 5 - 3 + 2 - 2 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1) = 1 + 4(20) = 81$$
.

Así que para n = 5 hay 81 puntos en el círculo de radio 5.

Para obtener la serie de Leibniz hay que quitar los corchetes en la expresión anterior. Si lo hiciéramos cometeríamos en valor absoluto un error

$$0 < \left| \varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_5 - \varepsilon_7 + \dots \pm \varepsilon_{n^2} \right| < (n^2 + 1)/2$$

pues el error ε_i al quitar el corchete i-ésimo es $0 \le \varepsilon_i < 1$. El error cometido sería de la forma $\pm \varepsilon \cdot (n^2 + 1)/2$, $0 < \varepsilon < 1$, donde ε depende de n. En este error aparece el término n^2 que haría imposible proseguir nuestro argumento, pues al pasar al límite $(\nu - 1)/4n^2$, (cuando n = 3, 5, 7, ...), $\varepsilon/2$ podría no tender a cero. Hay pues que obrar con más cuidado.

Primero observamos que los términos de la expresión (1) bajan en valor absoluto desde $[n^2/1]=n^2$ hasta $[n^2/n]=n$ y luego, siendo menores en valor absoluto que n bajan hasta 1. Esto se ve claro en el ejemplo n=5. Primero tenemos (n+1)/2 términos $\{25,-8,5\}$, que despojados de corchetes producen un error $\pm \hat{\epsilon}_1 (n+1)/2$, $0 < \hat{\epsilon}_1 < 1$, y como (n+1)/2 < n, para n=3,5,7, podemos escribirlo como $\epsilon_1 n$, $0 < \epsilon_1 < 1$; después, quedan n(n-1)/2 términos que acaban en 1, son menores en valor absoluto que n y alternan signos: $\{-3,2,-2,1,-1,1-1,1,-1,1\}$. Su suma es menor que n y la podemos escribir así $\epsilon_2 n$, $0 < \epsilon_2 < 1$. Esto resuelve nuestro problema: escribimos (1) así:

$$(v-1)/4 = (n^2/1) - (n^2/3) + \dots \pm (n^2/n) \pm \varepsilon_1 n \pm \varepsilon_2 n,$$
 (2)

y al dividir por n^2 obtenemos:

$$(v/4n^2) - (1/4n^2) = 1 - (1/3) + (1/5) - (1/7) + \dots \pm (1/n) \pm \varepsilon_1 / n \pm \varepsilon_2 / n$$
 (3)

Al hacer tender n a infinito sobre los impares mayores que 1, la sucesión $(v/4n^2)-(1/4n^2)$ tiene el mismo límite que la $v/4n^2$ ya que $1/4n^2$ tiende a cero; este límite -lo sabemos ya- es $\pi/4$. Asímismo, la sucesión del lado derecho de (3). cuando n=3,5,7,..., tiene el mismo límite que la sucesión $1-(1/3)+(1/5)-...\pm(1/n)$. Por tanto:

$$\pi / 4 = 1 - (1/3) + (1/5) - (1/7) + ...$$

como queríamos demostrar.

Merece la pena analizar brevemente la anterior demostración. En ella hay dos partes: Una parte, que podemos llamar finita, se basa en un teorema de teoría de números: "de cuántas maneras puede escribirse un número natural como suma de dos cuadrados". La segunda parte es un paso al límite que típicamente incluye ciertas estimaciones. Así el análisis del número irracional π (un número "infinito" en cierto modo) se apoya en un resultado de teoría de números y en un paso al límite. Nótese que en la serie de Leibniz queda un "rastro" del teorema de números, a saber los denominadores superimpares tienen signo +, y los subimpares, signo -. De esta manera, aunque la sola contemplación de la serie no nos dice nada, el proceso de demostración aparece plasmado en ella de modo patente, lo que produce una sensación psicológica de que poseemos el sentido de la serie. Esta observación es muy útil para aquellos que, además de la investigación nos dedicamos a la enseñanza. En ambos campos no es suficiente el mero desarrollo lógico de la demostración; es necesario plasmar en el enunciado del teorema, aunque sea sólo en nuestra mente, las ocultas relaciones que han hecho posible su demostración. Naturalmente que esta serie puede obtenerse con otros métodos. Creo que siempre hay que inclinarse por aquellos que iluminan el significado del teorema; y si, es preciso, dar diversas demostraciones del mismo teorema si ellas iluminan el resultado desde distintos ángulos. Aquí radica el salto de la "chispa" intelectual que permite el descubrimiento matemático.

Veamos si el clásico modo de demostración es o no, más luminoso. Hacemos uso del cálculo diferencial. La serie de Leibniz es el polimonio infinito (serie de potencias)

$$f(z) = z - (z^3 / 3) + (z^5 / 5) - (z^7 / 7) + \dots$$

evaluado en z=1. Derivando f(z) se obtiene un polinomio conocido $f'(z) = z - z^2 + z^4 - z^6 + \dots = \frac{1}{1+z^2}$, (donde la última igualdad sólo vale para |z| < 1). Pero $1/(1+z^2)$ es la derivada de la función inversa de la tangente. Por tanto f(z) y arc tang (z) differen en una constante, que es cero pues f(0) = arc tang(0) = 0, luego arc tang(z) = f(z), para |z| > 1. La situación es delicada porque nosotros queremos ver que esta última igualdad vale para z=1, es decir $f(1)=arc tang(1)=\pi/4$, y la igualdad sólo la tenemos para |z|<1. Recapitulando: la función f(z) está bien definida y es continua en el intervalo [0,1) pues ahí coincide con arc tang (z). Pero sabemos un poco más: f(1) está bien definida; en efecto: f(1), la serie de Leibniz $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$, es una serie alternante cuyos términos decrecen numéricamente y se aproximan al límite 0. Por tanto la serie f(1) converge. Solo falta ver que definida [0,1],es contínua, función f. en pues $\pi / 4 = arc tang(1) = \lim_{z \to 1} arc tang(z) = \lim_{z \to 1} f(z) = f(1)$. La continuidad de f en [0,1] se establece demostrando la continuidad uniforme de la serie f(z) en [0,1]; como cada término de esta serie es continuo en [0,1], también es continua f(z) en [0,1]. Los detalles están en cualquier libro de funciones de variable compleja. ¿Es más luminosa esta demostración? En cierto modo sí, pues coloca la serie de Leibniz en un contexto más amplio, pero por otro lado no arroja mucha luz sobre la forma concreta de la serie. Esencialmente lo que aquí sucede es que el proceso finito que da lugar a la serie infinita ha sido absorbido por un proceso finito universal sobre el que se construye todo el cálculo diferencial. Nosotros hemos usado un proceso finito particular para nuestro problema, que ha arrojado mucha luz sobre las particularidades del mismo. Esta posibilidad de un proceso finito universal es lo que hizo posible el cálculo diferencial totalmente general descubierto por Leibniz y Newton, superando los métodos particulares (basados en procesos finitos particulares adaptados a cada tipo de problema) desde Arquímedes a Fermat. Pero creo que conviene entender que en la medida en que un proceso se automatiza se gana en potencia, pero es posible perder muchos interesantes resultados también. En la enseñanza de las Matemáticas conviene tener bien aprendida esta experiencia. Veremos que algo parecido a esto sucede en el ejemplo siguiente, en donde el papel escamoteador del proceso finito lo realiza la teoría de homología.

Pero pasemos a la prometida comparación entre el número π y el número e. Ya sabemos que en el sistema de base 10 los números racionales tienen un desarrollo decimal periódico (puro o mixto). Y tienen un desarrollo no periódico los irracionales. Ya hemos indicado que el desarrollo decimal de π o de cualquier número, es en realidad una serie convergente. Aquí quiero subrayar el hecho de que los decimales del desarrollo dependen de la base de numeración elegida: no son intrínsecos al número. En otras palabras, trabajando en base 7 el desarrollo septimal de π sería totalmente distinto del decimal (véanse las tablas al final del artículo). Por otro lado, los términos de la serie de Leibniz para π dan un desarrollo intrínseco de π . La cuestión natural es: ¿Hay algún tipo de desarrollo intrínseco que valga para todos los números reales? Intrínseco quiere decir que la lista de números que definen el desarrollo de un número no depende de la base de numeración elegida. La respuesta es afirmativa y el desarrollo se llama "desarrollo en fracción continua de un número".

Para comprender el desarrollo en fracción continua de un número se me han ocurrido un par de métodos geométricos de explicación, que paso a describirles. Empecemos con el primero. Imaginemos un rascacielos de altura infinita y sumamente delgado, tanto que es una semirrecta con su extremo descansando sobre el suelo. El rascacielos tiene infinitos pisos. La planta baja es el piso 0. Además posee un ascensor cuya altura es exactamente la de uno cualquiera de los pisos. La planta baja del rascacielos es el centro de una semiesfera de cristal cuya clave llega justo al piso 1. Con estos requisitos imaginemos que queremos obtener el desarrollo en fracción contínua del número π . El número π lo imaginamos como un punto b_1 que está levitando en el aire del piso 3: apuntamos 3 como el primer número a_1 del desarrollo en fracción continua de π. Ahora bajamos, en ascensor hasta la planta baja: allí π habrá bajado y será un número $d_1 = b_1 - a_1$: la parte decimal de $\pi = b_1$ levitando bajo la bóveda de cristal a cierta altura (0.1415 ...) del suelo. Ahora le aplicamos a d_1 una sesión de rayos laser de la siguiente manera. Tomamos en el círculo que forma la base de la bóveda dos puntos diametralmente opuestos, P y Q, por ejemplo. Desde P lanzamos un rayo laser hasta d_1 que perforará la bóveda en d'_1 y desde Q, a continuación, un rayo laser que pasando a través de la perforación d'_1 llega hasta el rascacielos (más arriba de la bóveda) y marca un punto b_{2} en algún

piso del rascacielos. El segundo número a_2 del desarrollo en fracción continua de π es el piso en que está b_2 . Ocurre que b_2 está en el piso $7=a_2$. Procediendo así obtenemos el desarrollo en fracción contínua de π : $\left\{3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,\dots\right\}$. (véase la tabla al final del artículo). Nótese que b_2 es, simplemente, el inverso de d_1 construido geométricamente.

La contrapartida algebraica del proceso anterior es el siguiente algoritmo que a un número real $x \ge 0$ asigna su desarrollo $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$ en fracción continua:

1.-
$$b_1 := x$$
; $a_1 := [b_1];$ $d_1 := b_1 - a_1$
2.- $b_2 := 1 / d_1$; $a_2 := [b_2];$ $d_2 := b_2 - a_2$
 $a_3 := [b_1];$ $a_4 := b_1 - a_2$

donde $a_1 \ge 0$, $a_i > 0$, para i > 1.

Entonces se ve claramente que el número x es

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}}$$

Si al cumulante
$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$
 lo denotamos por (a_1, a_2, \dots, a_n) , el

miembro de la derecha en la expresión anterior de x es, por definición, el límite de la sucesión de cumulantes $\{(a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_2, a_3), \dots\}$; límite que vale x.

Por ejemplo, en el caso del número π , el cumulante (3,7)=3+1/7=22/7=3,142... se aproxima razonablemente bien a π a pesar de ser tan corto. La razón es que el cumulante siguiente (3, 7, 15) acaba en el piso $a_3=15$, lo cual ocurre porque levitando bajo la bóveda de cristal hay un número d_2 tan cercano al origen como para que su inverso b_3 (obtenido mediante los rayos laser) alcance el piso 15.

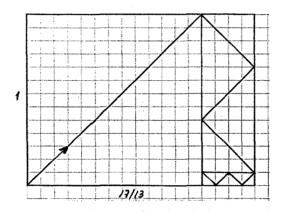
Mejor aproximación dará, por tanto, el cumulante anterior al (3,7,15,1,292), ya que el piso 292 es muy alto. Así tenemos $(3,7,15,1)=355/113=3,1415929\ldots$ que da π con 6 decimales exactos. Esta aproximación era conocida desde la antigüedad y así Spencer, en su libro de efemérides, dice que "en torno al 480 después de Cristo, el matemático chino Tse Ch'ung-chih daba 22/7=(3,7) como valor de π "no fino" y 355/113=(3,7,15,1) como el valor "fino" de π ". En Occidente hubo que esperar al año 1573. En este año "Valentinus Otho encontró el antiguo valor chino de π , a saber 355/113". En 1585 "Adrian Anthoniszoon redescubrió el antiguo valor chino de π , 355/113, pero parece que por pura casualidad, ya que primero estableció la desigualdad

$$377/120 > \pi > 333/106$$

y luego sacó la media aritmética de numeradores y denominadores, para obtener el valor "exacto" de π ". Como mera curiosidad, si uno desea obtener la aproximación a π que da 355/113 mediante la serie de Leibniz, ¡necesitaríamos calcular 3.748.630 términos de la serie! Se ve pues que la serie, en sí misma, no es práctica para el cálculo de decimales de π . Sin embargo un adecuado empleo de ella permite cálculos más precisos. (Véase el libro en inglés de Harold M. Edwards, "Cálculo avanzado: un enfoque mediante formas diferenciales" Birkhäuser 1994, sección 7.5, problema 1.)

El cumulante de π de orden 432 acaba en el piso 20776, por eso el cumulante de orden 431 se aproxima a π con 434 cifras decimales exactas.

El segundo método de visualización geométrica de las fracciones continuas es más sugerente. Supongamos que deseamos desarrollar el número real positivo x en fracción continua. Tomamos una mesa rectangular de billar de altura 1 y de anchura $b_1 = x$, como la de la figura siguiente en que x = 17/13. Se lanza una bola desde la



esquina inferior izquierda con ángulo de 45°. Cada vez que la bola da en una banda, la mesa de billar pierde el cuadrado cuya diagonal ha sido recorrida por la bola. Vamos anotando el número de cuadrados de un determinado tamaño que van desapareciendo. Si el primer cuadrado quitado no es de tamaño 1×1 es que x < 1, y añadiremos un cero al comienzo de nuestra lista de números. Se obtiene así el desarrollo en fracción contínua de x, $(a_1; a_2, a_3, ...)$. En la figura siguiente se tiene (1;3,4). También puede imaginarse que tenemos un rectángulo de $1 \times x$ que hay que enlosar. En lugar de imaginar que quitamos una losa por cada diagonal recorrida por la bola de billar, la ponemos. De este modo, un enlosador va empleando sucesivamente losas: primero $a_1 \ge 0$ losas de tamaño 1×1 ; después $a_2 > 0$ losas de tamaño $d_1 \times d_1$, donde $d_1 = b_1 - a_1$; etc ... Es claro que $a_1 = [b_1]$, y que $a_2 = [1/d_1]$; etc. Es ahora fácil ver cuándo la sucesión $\{a_1,a_2...\}$ es finita. Si la sucesión acaba, $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$, es que el lado de la penúltima baldosa puede cubrirse con a_k de las últimas baldosas utilizadas, luego el lado de la penúltima baldosa es conmensurable con el lado de la última baldosa. Procediendo así, resulta que los lados de todas las baldosas son conmensurables con el lado de la última baldosa empleada. Luego si la altura de la habitación admite m de estas últimas baldosas y el horizontal admite n, entonces x consta de n partes de 1/m; es decir x = m/n. El recíproco es obvio. Así que el desarrollo de x es periódico si y sólo si x es racional. Mi alumno de doctorado, el Sr. Crespí de Valldaura ha obtenido, empleando el método del billar, una demostración absolutamente elemental de que el desarrollo en fracción continua de x es periódico si y sólo si x es de la forma $(a+b\sqrt{c})/d$ en donde a, b, d son enteros; $d \neq 0$ y c es entero positivo y no es cuadrado perfecto. En su tesis, el mismo señor estudia la obvia generalización del desarrollo de x cuando el ángulo de tiro de la bola de billar no es de 45° .

Comparando esto con el desarrollo decimal de un número, en que son periódicos precisamente los racionales, parece como si con el desarrollo en fracción continua bajáramos un escalón hacia un conocimiento más profundo de los números. Así por ejemplo, el desarrollo en fracción continua de $\sqrt{17}$ es (4;8,8,8,...). Pero hay sorpresas más interesantes. Ya hemos indicado que el desarrollo en fracción continua del número π no parece seguir pauta ninguna . Esto contrasta hasta el asombro con el desarrollo en fracción continua del número e. Este número, al igual que π , no sólo es irracional sino trascendente: es decir, ninguno de ellos es raíz de un polinomio con coeficientes enteros. Y sin embargo, mientras que π no parece ofrecer pauta alguna en su desarrollo en fracción continua, vean ustedes cuál es el desarrollo en fracción continua de e: $e-1=\{1,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,...\}$ de tal manera que podemos decir de antemano cuál será la cifra que ocupará un determinado lugar. Podemos decir que dentro del contexto de los desarrollos en fracción continua, los números racionales, los irracionales cuadráticos y el número e nos son perfectamente conocidos. El número π sigue siendo un misterio.

Nótese que los términos del desarrollo de e en fracción continua suben por encima de toda cota. Curiosamente, calculando el desarrollo en fracción continua de π se observa que el número de pisos altos es pequeño en comparación al número de términos del desarrollo. Si $x = (a_0, a_1, a_2, \dots), a_0 \ge 0, a_i \ge 1$, llamaremos pisos a los a_i .

Sea \mathbb{B}_k la colección de números que llegan al piso k y no más. Sea \mathbb{B} la colección de números que poseen un último piso. Obviamente \mathbb{B} es la reunión de todos los \mathbb{B}_k . Podemos imaginar los números como una ciudad con edificios de distintas alturas. El número e tiene altura infinita. No se sabe si π tiene altura finita o infinita. (En las tablas al final del artículo, todas cortesía del Sr. Crespí de Valldaura, aparecen los "pisos altos" de los primeros números del desarrollo de π .)

Si $\mathbb{E} = \mathbb{B} \cap (0,1)$ son los números de altura finita del intervalo abierto (0,1), es conocido que \mathbb{E} posee una cantidad no numerable de elementos. Sin embargo, \mathbb{E} posee medida cero. Dicho de otro modo: la probabilidad de que un número entre 0 y 1, elegido al azar, tenga altura finita es cero. El artículo de J. Shallit "Números reales con cocientes parciales acotados" aparecido en L'Enseigement Mathématique 38(1992)151-187 contiene muy interesantes noticias sobre estos números de altura finita. Sobre estos números Lang dijo en 1966 que "quitando los irracionales cuadráticos no se conocen ejemplos sencillos de irracionales de altura constante. La mejor conjetura es que no existen". La conjetura es falsa; en efecto el número f(n) definido por la serie:

$$f(n) = n^{-2^{\circ}} + n^{-2^{1}} + n^{-2^{2}} + n^{-2^{3}} + \dots$$

tiene altura n+2 si $n \ge 3$. Pero si n=2 tiene altura 6. Por ejemplo f(3) tiene altura cinco y en efecto:

$$f(3) = (0, 2, 5, 3, 3, 1, 3, 5, 3, 1, 5, 3, 1, \dots)$$

Además los números f(n) son todos trascendentes de altura finita como fue demostrado en 1979.

En cuanto al desarrollo en fracción continua de los números algebraicos poco es conocido. Quitados los irracionales cuadráticos que tienen desarrollo periódico, no se sabe siquiera si son de altura finita o no.

Volviendo al número e, huelga decir que al igual que ocurre con el número π , poseemos desarrollos en serie de e que nos permiten calcular cuantos decimales deseemos. A este respecto, se me ocurrió definir un nuevo número, que no he hallado en la literatura, y que propongo llamar número p. El número p, por definición, es aquél cuyo desarrollo en fracción continua es la sucesión de números primos. Puede calcularse con la precisión que se quiera en la medida en que hallemos nuevos números primos. Su desarrollo decimal y septimal aparece en las tablas al final del artículo. Sobre el número p lo único que sé es que es irracional, ya que esto equivale a que la sucesión de números primos es infinita. Cualquier otra información que alguien pueda dar de este nuevo número, por ejemplo un desarrollo en serie, cambiaría la faz de las matemáticas, así que dudo mucho que, en la situación actual de nuestros conocimientos, pueda nadie decir nada substancial sobre p. Pero un exámen de su desarrollo decimal es tanto o más importante que el del número π .

Asímismo otro nuevo número que propongo aquí llamar número g (de "gemelos") es el número cuyo desarrollo en fracción continua es la sucesión de primos gemelos. Dos primos se dicen gemelos si difieren en menos que 3: 2, 3 son gemelos; 3, 5 son gemelos, etc. Como no se sabe si la sucesión de gemelos es infinita, ni siquiera podemos adelantar si el número g es racional o irracional.

7. De lo finito a lo infinito en la Topología Combinatoria

Vamos ya a abandonar los números y entremos de lleno en la geometría. Se trata de un proceso infinito basado en otro finito de carácter combinatorio. Me refiero a la demostración del teorema del punto fijo utilizando el lema de Sperner. También aquí hay un sustento finito: el lema de Sperner y un paso al límite.

El teorema del punto fijo de Brouwer dice que en un tetraedro de dimensión n (o n-simple) toda función continua del tetraedro en sí mismo tiene un punto fijo. Pensaremos en un triángulo, n=2; la demostración general es esencialmente la misma.

Si el triángulo T posee una función contínua $f:T\to T$ sin punto fijo, entonces para cada punto $t\in T$ definimos un punto $r(t)\in \partial T$ (frontera de T) proyectando t desde f(t) hasta ∂T . Esta función $r:T\to \partial T$ es continua y es la identidad en ∂T : en efecto, si $t\in \partial T$ al proyectar t desde f(t) obtenemos t; pues t ya está en ∂T . La función r se llama una retracción de T en su frontera ∂T . Se trata de ver que no son posibles tales retracciones.

Supongamos los vértices de T marcados 0, 1, 2 y sea $r:T\to \partial T$ una retracción. Entonces podemos asignar a todo punto $t\in T$ un número 0, 1 ó 2 del siguiente modo:

1.- Si
$$r(t) \in [0,1)$$
, $n(t) = 0$
2.- Si $r(t) \in [1,2)$, $n(t) = 1$
3.- Si $r(t) \in [2,0)$, $n(t) = 2$

Obsérvese que los puntos de [0,1] tienen asignado el 0, 6 el 1; los de [1,2], el 1 6 el 2; y los de [2,0] el 2 6 el 0. Los puntos del interior de $T(=T \setminus \partial T)$ tienen asignado el número 0, 1, 6 2.

El sustento finito del teorema que dice que no existe tal retracción es el lema de Sperner que enunciaré para un triángulo, pero que vale igualmente para un n-simple con las alteraciones obvias. Dice así el lema de Sperner: Sea el triángulo T = (0,1,2) triangulado, (es decir T es unión de triángulos en número finito, de modo que si dos triángulos se tocan lo hacen exactamente a lo largo de una cara común). Supongamos que los vértices de la arista [0,1] están marcados con 0 ó 1; los de la arista [1,2], con 1 ó 2; los de la arista [2,0] con 2 ó 0; y los de $T \setminus \partial T$ con 0, 1 ó 2, indistintamente. Entonces existe un triángulo de la triangulación de T cuyos vértices están marcados con números 0, 1, 2 distintos dos a dos. La demostración siguiente, bellísima, la leí hace más de veinte años, pero no sé donde.

Cerca del lado [0,1] de T tomamos un vértice nuevo V exterior al triángulo T y asignamos a V el número 0. Después juntamos V con los vértices de la triangulación de T que caen en la arista [0,1]. De este modo obtenemos un cuadrilátero C triangulado (V,0,2,1) y numerado (0,0,2,1). Vemos que C sólo posee una arista [0,1]en su frontera. Ahora vamos a realizar un juego. Nos encontramos fuera del cuadrilátero C y vamos a entrar en su interior y a deambular siguiendo las siguientes sencillas reglas:

- (1) Sólo podemos atravesar aristas marcadas [0,1].
- (2) Una vez atravesada una arista, ya no podemos volver a atravesarla.

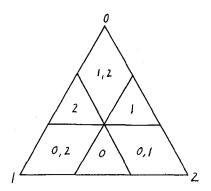
Comenzamos nuestro paseo y necesariamente entramos en el recinto C atravesando la única arista [0,1]que posee en su frontera, lo cual implica que, si seguimos las reglas, ya nunca jamás saldremos de C. El proceso de cruzar aristas [0,1] acabará antes o después porque hay sólo un número finito de ellas. Cuando ya no podamos cruzar ninguna más es que hemos entrado por una arista [0,1] en un triángulo cuyo vértice restante es 2. Este es un triángulo marcado (0,1,2), y no es de los nuevos (los que poseen el vértice nuevo V), porque ninguno de estos triángulos nuevos está marcado con (0,1,2). Luego el triángulo (0,1,2) pertenece a la triangulación de T, como queríamos demostrar.

Ahora viene el proceso de paso al límite. Tomamos triangulaciones $T_1, T_2, T_3...$ de T tales que son cada vez más finas. Se puede definir como tamaño de una triangulación T_i el de su triángulo más grande (aquél que posee dos puntos que maximizan la distancia). (No es difícil ver que las sucesivas triangulaciones baricéntricas de T tienen tamaños que tienden a cero.)

La función $n: T \to \{0,1,2\}$ asigna a los vértices de T_i números que cumplen las hipótesis del lema de Sperner, luego T_i posee un triángulo A_i marcado con números (0,1,2). La sucesión de los baricentros B_i de los A_i es infinita y siendo T compacto, tal sucesión B_i tiene un punto límite Q. En todo entorno de Q hay infinitos baricentros, luego en todo entorno de Q hay un triángulo A_i . Por tanto Q es límite de los vértices de estos triángulos. Luego Q es límite de puntos marcados con 0 y por continuidad (ya que los puntos marcados con 0 van al intervalo [0,1)) r(Q) pertenece a [0,1]. Pero también Q es límite de puntos marcados con 1; luego $r(Q) \in [1,2]$. Por tanto $r(Q) \in [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$. Pero Q es límite de puntos marcados con 2; luego $r(Q) \in [2,0]$; pero es imposible esto, ya que el vértice 1 de T no yace en la arista opuesta [2,0]. Esta contradicción nos dice que r no existe. Por tanto el teorema del punto fijo de Brouwer es correcto.

El argumento, de hecho, es constructivo. Se toma T_1 triangulación de T; si $f: T \to T$ posee un vértice fijo hemos acabado. En caso contrario se toma una triangulación T_2 más fina que T_1 , etc. Si ninguna de las triangulaciones T_1, T_2, T_3, \ldots , cada vez más fina, posee vértice fijo, podemos variar ligeramente el argumento anterior del siguiente modo: Asignamos a los puntos de T, no fijos por f, un número $\{0,1,2\}$ como sigue. Tomamos la flecha (t,f(t)) y la trasladamos, paralelamente, al baricentro de T, de modo que t ocupe el baricentro.

La figura 1 indica el número que hay que asignar a t. Se cumplen así para las



triangulaciones T_1, T_2, T_n, \ldots las hipótesis del lema de Sperner, y en cada T_i hay un triángulo A_i marcado (0,1,2); el $\lim_{i\to\infty}A_i$ es un punto fijo Q, ya que a él convergen sucesiones de ceros, de unos y de doses, y como la flecha (Q, f(Q)) no puede dirigirse en tres direcciones distintas, es que no hay flecha en Q: es decir f(Q) = Q. Este argumento prueba directamente el teorema del punto fijo de Brouwer, pero no el teorema más fuerte de la inexistencia de retracción de T en ∂T .

En los cursos de topología algebraica se prueba la inexistencia de la retracción r observando que el triángulo de funciones continuas conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\partial T & \xrightarrow{id} \partial T \\
j & \swarrow & \uparrow r \\
T
\end{array}$$

(donde j es la inclusión canónica), induce mediante el functor de homología singular entera un triángulo conmutativo de grupos abelianos y homomorfismos

$$H_{n-1}\left(\partial T; \mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \cong H_{n-1}\left(\partial T; \mathbb{Z}\right)$$

$$j_{\#}$$

$$H_{n-1}\left(T\right) \cong 0$$

que es imposible (T tiene dimensión n). Lo que ocurre es que en este argumento el sustento finito y el paso al infinito han sido escamoteados por el functor de homología. En qué punto de la definición de homología ocurre el sustento finito y el paso al límite es algo indispensable de explicar en un curso de homología. Pero es muy sutil y puede, si no se hace bien, invalidar todo el resultado del curso.

8. De lo finito a lo infinito en teoría de nudos

Vamos ahora a abandonar la "Topología continua" y vayamos a la de variedades. Se trata ahora de mostrar que el sustento finito de la existencia de una 3-variedad abierta y contractible no homeomorfa a \mathbb{R}^3 , es la teoría de nudos. De este modo colocamos a un mismo nivel la teoría de números, la combinatoria y la teoría de nudos. Ocurre que entre estas tres teorías hay múltiples y muy bellas interrelaciones que explicaré al final.

Hagamos un poco de historia que servirá para centrar el problema que ahora tenemos entre manos. Estamos a finales del pasado siglo cuando la Topología nace del cerebro de Poincaré, tras un período de gestación que ocupa la mitad de ese siglo. Es la época en que Poincaré ha probado su teorema de dualidad para variedades trianguladas y cerradas. Entonces en su "Segundo complemento al Analysis Situs" (Proc. London Math. Soc. 32 (1900) 277-308) conjetura que una 3-variedad cerrada (compacta y sin frontera) debe ser homeomorfa a la 3-esfera S³ si tiene los mismos grupos de homología que S3. Cuatro años más tarde demuestra la falsedad de su propia conjetura en su "Quinto Complemento al Analysis Situs" (Rendiconti Circ. Mat. Palermo 18 (1904), 45-110) mediante el famoso contraejemplo que hoy lleva el nombre de variedad de Poincaré. Se trata de una 3-variedad cerrada P3 que es homológicamente como S3 pero difiere de ella en el grupo fundamental (definido por Poincaré para este objeto). El grupo fundamental de P³ es una extensión central del grupo cíclico de dos elementos, mediante el grupo alternante de 5 cifras A₅. El grupo fundamental de P^3 resulta pues finito de 120 elementos, mientras que el de S^3 consta de un sólo elemento. El lector interesado en estas cosas puede consultar mi artículo en catalán "Puntos de vista sobre el problema de Poincaré" (en "El desarrollo de las matemáticas en el siglo XIX", Archivos de la Sección de Ciencias, LXXV. Instituto

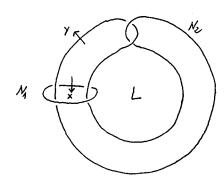
de Estudios Catalanes, Barcelona 1984, o en mi libro en inglés "Teselaciones clásicas y 3-variedades" Springer 1987). El contraejemplo P^3 aparece en el artículo de Poincaré citado antes y también, reproducido mostrando su simetría, en mi artículo en catalán. Es un diagrama de Heegaard que siempre ha suscitado en mí gran perplejidad pues Poincaré no da ni la más leve indicación de cómo lo puede haber obtenido y no puedo creer que haya sido debido al azar.

Visto pues por el mismo Poincaré que hay 3-esferas homológicas, como P^3 , no homeomorfas a S^3 , lanza al final de su "Quinto Complemento" el famoso reto que sigue abierto para vergüenza de geómetras. Dice así Poincaré, en el mejor estilo gallego: "Quedaría por estudiar la pregunta: ¿es posible que el grupo fundamental de V^3 se reduzca a la sustitución idéntica, sin que V^3 sea S^3 ? ". La expectación negativa a esta pregunta es lo que hemos llamado la Pregunta o Conjetura de Poincaré.

Si no estoy equivocado la primera "demostración" falsa, publicada, de la Conjetura de Poincaré (de las numerosísimas que después se han encontrado), se debe a J.H.C. Whitehead. En 1934 publicó un artículo, que se puede hallar en sus obras completas, en el que entre otras cosas "demuestra" la Conjetura de Poincaré. Whitehead inmediatamente comprendió su error ya que su demostración proporcionaba un resultado más general que el buscado ya que valía para 3variedades abiertas, además de para las cerradas; una situación similar a la trampa de Waldhausen mencionada más arriba. Whitehead, sin embargo, no cayó en su propia trampa y sospechó inmediatamente que su argumento era incorrecto, y con extraordinario ingenio construyó rápidamente una 3-variedad W3 (la variedad de Whitehead) abierta (no compacta, pero sin frontera) y contractible (del tipo de homotopía de un punto) pero no homeomorfa a R3. Nótese que el compactificado de Alexandroff de \mathbb{R}^3 es S^3 ; el compactificado de Alexandroff de W^3 no es una 3variedad. Si así fuera tendríamos el deseado contraejemplo a la conjetura de Poincaré. En breves palabras, Whitehead probó que la generalización de la Conjetura de Poincaré a variedades abiertas es falsa. Un resultado análogo al de Boileau-Zieschang mencionado más arriba.

Se trata aquí de describir el contraejemplo W^3 de Whitehead. Se obtiene por un proceso al infinito cuyo sustento finito es la teoría de nudos.

Comencemos estudiando el sistema de nudos (enlace) de la Figura 2, que se llama el enlace de Whitehead.



- 1. El nudo N_2 es trivial y la curva N_1 , que cae en $S^3 \setminus N_2$, tiene número de enlace cero con N_2 por tanto es nulhomóloga en $S^3 \setminus N_2$. (Que es nulhomóloga se puede ver directamente observando que N_1 bordea un toro en el complemento de N_2). Siendo N_2 trivial, se infiere que N_1 es también nulhomótopa en $S^3 \setminus N_2$. Esta es una propiedad sencilla, pero que emplearemos luego.
- 2. Tomemos un pequeño entorno tubular T^1 de N_1 . Vamos a demostrar ahora que

$$i_{\#}: \pi_{1}(\partial T^{1}) > \rightarrow \pi_{1}(S^{3} \setminus L)$$

es decir que el homomorfismo $i_{\#}$ inducido en grupos de Poincaré por la inclusión canónica $i:\partial T^1 \subset S^3 \setminus L$ es inyectivo (la flecha $> \to$ significa inyección).

Calculemos $\pi_1(s^3 \setminus L)$. Tomando los meridianos x e y de Figura 2 obtenemos la presentación siguiente de $\pi_1(s^3 \setminus L)$:

 $\left|x,y:x\left(yx^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y\right)=\left(yx^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y\right)x\right|$. El grupo fundamental de ∂T^1 está generado por una curva paralela a N_1 que llamaremos m, y por la curva x que llamaremos l. La curva m pensada en $\pi_1\left(S^3\setminus L\right)$ representa la palabra $y^{-1}y^{-1}xyx^{-1}yxy^{-1}x^{-1}y$. Tenemos que demostrar que si $i_{\#}\left(m^al^b\right)$ es el elemento trivial entonces a=b=0.

Definamos el homomorfismo $\pi_1\left(S^3\setminus L\right)\to C_2*C_2$, mediante $x\mapsto\beta\alpha$, $y\mapsto\alpha$, donde α genera el primer factor C_2 y β el segundo factor C_2 del producto libre C_2*C_2 . Puede verse que esta asignación es un homomorfismo porque la única relación xw=wx, $\left(w=yx^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y\right)$ va a la identidad. En efecto:

$$w \mapsto \alpha \alpha \beta \alpha \beta \alpha \alpha \alpha \beta \alpha = (\beta \alpha)^3$$

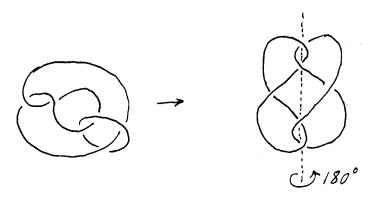
En este homorfismo $m \mapsto (\beta \alpha)^4$. Como la palabra $\beta \alpha$ es reducida, en $C_2 * C_2$, $(\beta \alpha)^4$ tiene orden infinito.

Supongamos que $m^a l^b$ es contractible en $S^3 \setminus L$. Entonces también es contractible en $S^3 \setminus N_1 \supset S^3 \setminus L$. Pero en $S^3 \setminus N_1$ la curva m es contractible, luego l^b es contractible en $S^3 \setminus N_1$; pero siendo l=x un generador de $\pi_1(S^3 \setminus N_1) \cong \mathbb{Z}$ deducimos que b=0. Es decir m^a es contractible en $S^3 \setminus L$. Lo cual implica que $(\beta \alpha)^{4a}$ es trivial y esto solo ocurre si a=0 pues $(\beta \alpha)^4$ tiene orden infinito en $C_2 * C_2$. Así pues hemos demostrado que $i_\#: \pi_1(\partial T^1) \longrightarrow \pi_1(S^3 \setminus L)$ es inyectiva.

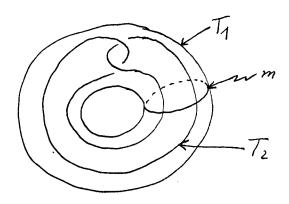
3. Un tercer resultado de teoría de nudos necesitaremos todavía. Vamos a demostrar que si T_2 es un pequeño entorno tubular de N_2 , también el siguiente homomorfismo inducido por inclusión es inyectivo:

$$\pi_1(\partial T_2) > \to \pi_1(S^3 \setminus L)$$

La razón es muy obvia ya que el enlace de Whitehead es *intercambiable*: hay una involución de (s^3, L) que envía N_1 a N_2 y recíprocamente (ver Figura 3).



Hasta aquí el sustento finito de nuestra construcción infinita. Es ya tiempo de definir la famosa variedad de Whitehead. Se parte de un toro sólido T_1 contenido en S^3 y desanudado (Figura 4).



Dentro de T_1 se toma un toro sólido T_2 , tal como se indica en la Figura 2, y se procede inductivamente con T_2 como si fuese T_1 . Entonces $S^3 \setminus \cap T_i$ es una 3-variedad abierta y contractible diferente de \mathbb{R}^3 que llamaremos W^3 : la variedad de Whitehead. Nótese que W^3 es el resultado de quitar de S^3 un cerrado, compacto $\cap T_i$, luego W^3 es un abierto de S^3 y por tanto una 3-variedad triangulable (con infinitos tetraedros). La naturaleza de $\cap T_i$ no es fácil de entender. El meridiano m de Figura 4 bordea un disco en T_1 que corta a $\cap T_i$ en un conjunto de Cantor. Así que $\cap T_i$ es una especie de conjunto de Cantor $\times \mathbb{R}$ enlazado consigo mismo de un modo muy complicado.

 W^3 puede describirse de otra manera. Llamamos T^i al cierre de $S^3 \setminus T_i$. Entonces $W_3 = \bigcup T^i$. Nótese que $T^{i-1} \subset T^i$. Veamos cómo se relaciona esta construcción con el enlace de Whitehead. Comparando la Figura 4 con la Figura 2, se

observa que $N_1 = m$ y N_2 es el ánima de T_2 . Nótese que T^1 (el exterior de T_1 en S^3) tiene como ánima a $N_1 = m$.

La propiedad 1. del enlace L implica por tanto que $\pi_1(T^1)$, generado por $N_1 = m$, es enviado a cero por la inclusión canónica:

$$i_1:\pi_1\left(T^1\right) \rightarrow \pi_1\left(T^2\right)$$

ya que N_1 es nulhomótopo en $S^3 \setminus N_2$ que tiene el tipo de homotopía del cierre de $S^3 \setminus T_2$, o sea T^2 .

Por inducción, pues todas las parejas $(T^2, T^1), \ldots, (T^n, T^{n-1}), \ldots$ son homeomorfas, obtenemos que todos los homomorfismos i_m inducidos por inclusión: $\pi_1(T^1) \xrightarrow{i_1} \pi_1(T^2) \xrightarrow{i_2} \pi_1(T^3) \xrightarrow{i_3} \ldots$ son cero.

Dado entonces un lazo en $W^3=\cup T^i$, como es un compacto, necesariamente ha de caer en algún T^i , lo que implica que su imagen en T^{i+1} es nulhomótopa. Así se deduce que $\pi_1\left(W^3\right)$ es trivial. Por otro lado si tomamos $f\colon S^m\to W^3$ continua, $f\left(S^m\right)$ estará contenida, por compacto, en algún T^i . Pero T^i tiene el tipo de homotopía de S^1 luego f es nulhomótopa en T^i (y por tanto en W^3). Esto demuestra que $\pi_m\left(W^3\right)=1$, para todo $m\geq 1$. Como W^3 es un poliedro (un abierto de S^3) se deduce que W^3 es contractible.

Veamos que W^3 no es homeomorfa a \mathbb{R}^3 . La diferencia está en el infinito. En el caso de \mathbb{R}^3 si se compactifica con un punto ∞ , los entornos de $\mathbb{R}^3 + \infty$ en torno al nuevo punto son bolas tales que privadas del ∞ tienen el tipo de homotopía de la 2-esfera y por tanto son simplemente conexas. En otras palabras \mathbb{R}^3 es unión creciente de bolas, mientras que W^3 es unión creciente de toros sólidos con la peculiaridad que el toro n-ésimo cae en el (n+1)-ésimo como T_2 cae en T_1 . Por tanto será de esperar que T^1 no esté contenido en ningún compacto cuyo complemento (entorno de la compactificación de Alexandroff de ∞) sea simplemente conexo. Es decir W^3 "no es simplemente conexa en el infinito". Por tanto para distinguir \mathbb{R}^3 de W^3 emplearemos la siguiente obvia propiedad de \mathbb{R}^3 : todo compacto de \mathbb{R}^3 está contenido en otro compacto (una bola) cuyo complemento es simplemente conexo (= tiene grupo fundamental trivial y es conexo).

Veamos que esta propiedad topológica de \mathbb{R}^3 no la comparte w^3 . En efecto, veamos que el compacto T^1 no está contenido en ningún compacto K de w^3 cuyo complemento es simplemente conexo. Supongamos lo contrario

Vamos a jugar con las dos descripciones de W^3 . Recuérdese: $W^3 = S^3 \setminus \cap T_i = \cup T^i$. Si T^1 está contenido en un compacto, este compacto K está contenido en algún T^m y por tanto $W^3 \setminus K \supset W^3 \setminus T^m = T_m$. Pero entonces el

meridiano x de T_m sería un elemento de $\pi_1\left(W^3 \setminus K\right) = 0$, y por tanto tal meridiano sería contractible en $W^3 \setminus K \subset W^3 \setminus T^1 \subset \overline{W^3 \setminus T^1} = T_1 \setminus \bigcap T_i$. Veamos que esto es falso. En efecto, tenemos los homomorfismos inducidos por inclusión:

$$\pi_{1}\left(T_{1}\setminus T_{2}\right) \xrightarrow{i_{2}} \pi_{1}\left(T_{1}\setminus T_{3}\right) \xrightarrow{i_{3}} \pi_{1}\left(T_{1}\setminus T_{4}\right) \longrightarrow \dots \longrightarrow \pi_{1}\left(T_{1}\setminus T_{i}\right) = \lim_{\longrightarrow} \pi_{1}\left(T_{1}\setminus T_{i}\right)$$

y el meridiano x de T_m cae en $T_1 \setminus T_m$. Basta probar que:

(A) $\pi_1(\partial T_m) > \xrightarrow{j_m} \pi_1(\overline{T_1 \setminus T_m})$ es inyectivo, donde el homomorfismo es inducido por inclusión.

De este modo $j_{\#}(x) \neq 0$ en $\pi_1\left(\overline{T_1 \setminus T_m}\right)$.

(B) La sucesión de homomorfismos inducidos por inclusión i_2, i_3, i_4, \ldots es una sucesión de inyecciones. Entonces $j_{\#}(x)$ no muere en ningún $\pi_1(T_1 \setminus T_i)$, $i = 2, 3, \ldots$ y. por tanto representa un elemento no trivial del límite directo del sistema i_1, i_2, i_3, \ldots , que es $\pi_1(T_1 \setminus \cap T_i)$. Así x no es contractible en $T_1 \setminus \cap T_i$ como queremos demostrar.

Vamos a probar todo a la vez, por inducción usando el teorema de Van Kampen. Supongamos que $\pi_1\left(T_{n-2} \setminus T_{n-1}\right) \to \pi_1\left(T_1 \setminus T_{n-1}\right)$ es inyectiva para todo n > 3 y veamos que es cierto para n+1. (Para n=3 el homomorfismo es $\pi_1\left(T_1 \setminus T_2\right) \to \pi_1\left(T_1 \setminus T_2\right)$ que es la identidad.)

Analicemos qué significa la propiedad 2 de L. Decíamos

$$\pi_1 \left(\partial T^1 \right) \longrightarrow \pi_1 \left(S^3 \setminus L \right)$$

que equivale a $\pi_1(\partial T_1) \longrightarrow \pi_1(T_1 \setminus T_2)$. La propiedad 3 de L dice

$$\pi_1(\partial T_2) \longrightarrow \pi_1(S^3 \setminus L)$$

que equivale a $\pi_1(\partial_y T_2) > \to \pi_1(T_1 \setminus T_2)$. La propiedad 3 y la hipótesis de inducción dicen que la composición siguiente es inyectiva:

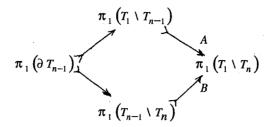
$$\pi_1\left(\partial T_{n-1}\right) > \xrightarrow{3} \pi_1\left(T_{n-2} \setminus T_{n-1}\right) > \xrightarrow{induccion} \pi_1\left(T_1 \setminus T_{n-1}\right)$$

y esta es la propiedad (A) que queríamos probar antes.

La propiedad 2 dice que es inyectiva la

$$\pi_1\left(\partial T_{n-1}\right) > \xrightarrow{2} \pi_1\left(T_{n-1} \setminus T_n\right)$$

Obsérvese que la intersección $(T_1 \setminus T_{n-1}) \cap (T_{n-1} \setminus T_n)$ tiene el tipo de homotopía de ∂T_{n-1} . Por el teorema de Van Kampen las dos flechas de la derecha del siguiente diagrama son inyectivas



pues la unión $(T_1 \setminus T_{n-1}) \cup (T_{n-1} \setminus T_n) = T_1 \setminus T_n$.

La flecha B es el siguiente paso de la inducción que con esto queda probada, y la flecha A es la afirmación (B) que queríamos probar.

Por tanto W^3 no es homeomorfo a \mathbb{R}^3 .

Una notable propiedad de w^3 es que $w^3 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^4$. El lector sabrá hacer esto como ejercicio.

He elegido este ejemplo para ilustrar cómo la teoría de nudos está en el centro de los problemas de la topología de 3-variedades abiertas. También está en el centro de la topología de las 4-variedades. Precisamente M. Freedman, el que demostró la Conjetura de Poincaré topológica en dimensión 4, utilizó de manera esencial la variedad de Whitehead^(*). Curiosa ironía del destino: ¡lo que sirvió de contraejemplo a una "demostración" de la Conjetura de Poincaré en dimensión 3 fue pieza para demostrarla en dimensión cuatro!

No es este el sitio para explicar de qué modo interviene w^3 en este problema 4-dimensional. El lector interesado puede leer M. Freedmann y F. Quinn, "Topología de 4-variedades" en Princeton U. Press. Pero quiero indicar aquí que la teoría de nudos es tan esencial para la Geometría como lo es la teoría de números para todas las Matemáticas.

Otros aspectos parecidos del tema tratado surgen en el cálculo infinitesimal, pero están tan trillados y son tan conocidos que sólo queda dirigir al lector a los libros, múltiples, que explican el desarrollo histórico del cálculo; o genético, como el citado de O. Toeplitz.

Otro tema más arduo pero muy interesante es el de curvatura en superficies poliédricas y sus relaciones con superficies suaves. Hay que remontarse a Descartes y acabar en los trabajos de Alexandroff y Pogolerov para hacerse idea cabal de la maravillosa belleza de esta relación.

Y para terminar querría decir que entre los sustentos de las anteriores construcciones infinitas existen relaciones sorprendentes. Por ejemplo entre la teoría de nudos y la combinatoria hubo relaciones importantes al principio de la historia de la teoría de nudos (trabajos de Reidemeister, Goeritz, Alexander, Fox, y la escuela japonesa contemporánea de Fox), pero esta relación ha revivido últimamente con los

^(*) Es opinión mía que la demostración de Freedman no ha pasado todavía el examen crítico de un número suficientemente alto de especialistas.

trabajos de muchos matemáticos que han creado una nueva rama de la teoría de nudos que yo llamaría "teoría combinatoria de nudos". Estos trabajos, todavía en estado incipiente, y muy similares a los de la clásica teoría de grafos, han interesado a algunos físicos teóricos. (Para una aplicación curiosa a la Física, véase un reciente trabajo del Profesor Antonio Fernández Rañada sobre la explicación del rayo en bola, aparecido en Nature.) Esta mutua relación con los físicos ha proporcionado valiosas ideas que también han encontrado (mediante la teoría de nudos) su aplicación en el hallazgo de nuevos invariantes de 3-variedades cerradas.

Por otro lado la teoría de nudos, también recientemente, ha tenido un potente aliado en la geometría riemanniana de manos de W. Thurston. Este matemático ha generalizado (revitalizando antiguas investigaciones de Satake) el concepto de variedad al de calidoscopio ("orbifold") en el que las singularidades son enlaces y aun grafos en una 3-variedad cerrada. Ha puesto de manifiesto la relación entre los nudos y la geometría hiperbólica. Como el grupo de isometrías de esta geometría es un grupo de Lie complejo, tiene sentido hablar de sus subgrupos aritméticos. Así se encuentran sorprendentes relaciones entre los nudos y la teoría de números. Por ejemplo el volumen de un nudo "aritmético" puede expresarse mediante las funciones clásicas de la teoría analítica de números.

El primero que observó este tipo de relación fue L. Bianchi al final del siglo pasado quien probó que el número de puntos cuspidales del cociente del espacio hiperbólico por $PSL(2,\mathcal{A}(D))$, donde $\mathcal{A}(D)$ es el anillo de enteros del cuerpo $\mathcal{Q}(\sqrt{-D})$, (D) entero libre de cuadrados y positivo), coincide con el número de clases de ideales del anillo $\mathcal{A}(D)$. Este bellísimo teorema relaciona los nudos con los números, ya que los puntos cuspidales pueden completarse cerrándolos con un nudo.

Otra relación entre los nudos y los números procede de los nudos fibrados y en general de los invariantes cada vez más sofisticados hallados por los matemáticos que se dedican a los nudos. No sorprende esta relación ya que ambos objetos, nudos y números, parecen estar en la base de todas las matemáticas.

Espero que algún día tenga tiempo para poner de manifiesto estas relaciones tan variadas y sugestivas. Ahora no quiero abusar más de su paciencia, sólo agradecerles la atención que me han prestado. Muchas gracias.



R. 15921

INTRODUCTIO

IN ANALYSIN

INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO.

Professore Regio BEROLINENSI, & Academia Imperialis Scientiarum PETROPOLITANE S. Germania Pratis. Socio.

TOMUSPRIMUS



LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.



AC LOGARITHM. PER SERIES EXPLICAT. 93
tero Logarithmorum hyperbolicorum usus in calculo integrali CAP.VII.
fusius demonstrabitur.

CAPUT VIII.

De quantitatibus transcendentibus ex Circulo ortis.

Post Logarithmos & quantitates exponentiales confiderari debent Arcus circulares corumque Sinus & Cosinus, quia non solum aliud quantitatum transcendentium genus constituunt, sed etiam ex ipsis Logarithmis & exponentialibus, quando imaginariis quantitatibus involvuntur, prove-

niunt, id quod infra clarius patebit.

Ponamus ergo Radium Circuli seu Sinum totum esse = 1, atque satis liquet Peripheriam hujus Circuli in numeris rationalibus exacte exprimi non posse, per approximationes autem inventa est Semicircumferentia hujus Circuli esse = 3, 1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132723066470938446 +, pro quo numero, brevitatis ergo, scribam π , ita ut sit π = Semicircumferentiæ Circuli, cujus Radius = 1, seu π erit longitudo Arcus 180 graduum.

127. Denotante z Arcum hujus Circuli quemcunque, cujus Radium perpetuo assumo = 1; hujus Arcus z considerari potissimum solent Sinus & Cosinus. Sinum autem Arcus
z in posterum hoc modo indicabo, sin. A. z, seu tantum sin. z.
Cosinum vero hoc modo cos. A. z, seu tantum cos. z. Ita,
cum π sit Arcus 180°, erit sin. 0 π = 0; cos. 0 π = 1; &
sin. $\frac{1}{2}\pi$ = 1, cos. $\frac{1}{2}\pi$ = 0; sin. π = 0; cos. π = -1;
sin. $\frac{3}{2}\pi$ = -1; cos. $\frac{3}{2}\pi$ = 0; sin. π = 0; & cos. π = 1.

Omnes ergo Sinus & Cosinus intra limites + 1 & -1 con-

M 3 tinen-

5.040 dígitos decimales de π

5.040 dígitos septimales de π

5.040 dígitos decimales de e

5.040 dígitos septimales de e

4.977 términos de la fracción continua de π

(3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 5, 2, 2, 26, 1, 4, 1, 1, 8, 2, 42, 2, 1, 7, 3, 3, 1, 1, 7, 2, 4, 9, 7, 2, 3, 1, 57, 1, 18, 1, 9, 19, 1, 2, 18, 1, 3, 7, 30, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 1, 2, 8, 1, 1, 2, 1, 15, 1, 2, 13, 1, 2, 1, 4, 1, 12, 1, 1, 3, 3, 28, 1, 10, 3, 2, 20, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 5, 2, 1, 6, 1, 4, 1, 120, 2, 1, 1, 3, 1, 23, 1, 15, 1, 3, 7, 1, 16, 1, 2, 9, 1, 6, 4, 127, 14, 5, 1, 3, 13, 7, 9, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 4, 1, 2, 1, 1, 2, 9, 1, 6, 4, 127, 14, 4, 1, 1, 3, 1, 29, 3, 1, 1, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 10, 3, 1, 3, 1, 2, 1, 12, 1, 4, 1, 1. 1. 7, 1, 1, 2, 1, 11, 3, 1, 7, 1, 4, 1, 48, 16, 1, 4, 5, 2, 1, 1, 4, 3, 1, 2, 3, 1. 2, 1, 2, 5, 20, 1, 1, 5, 4, 1, 436, 8, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 2, 1, 3, 11, 4, 3, 1, 1, 1, 2, 5, 4, 6, 9, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 11, 24, 4, 4, 5, 2, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 58, 5, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 7, 1, 15, 1, 4, 8, 1, 4, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 9, 1, 4, 3, 15, 1, 2, 1, 13, 1, 1, 6, 1, 24, 1, 2, 4, 10, 5, 12, 3, 3, 21, 1, 2, 1, 34, 1, 1, 1, 4, 15, 1, 4, 44, 1, 20776, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 23, 1, 7, 2, 1, 94, 55, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 32, 5, 14, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 50, 2, 16, 5, 1, 2, 1, 4, 6, 3, 1, 3, 3, 1, 2, 2, 2, 5, 2, 1. 28, 1, 1, 13, 1, 5, 43, 1, 4, 3, 5, 3, 1, 4, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 19, 2, 7, 1, 72, 3, 7, 11, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 33, 7, 19, 1, 19, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 3, 2, 2, 2, 2, 4, 1, 1, 1, 4, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 7, 2, 27, 1, 1, 6, 2, 1, 9, 6, 26, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 15, 36, 4, 2, 2, 1, 22, 2, 1, 106, 2, 2, 1, 3, 1, 12, 10, 7, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 8, 2, 5, 3, 2, 1, 4, 23, 1, 18, 2, 10, 3, 1, 6, 6, 13, 8, 6, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 17, 1, 1, 2, 5, 5, 1, 1, 2, 11, 1, 6, 1, 6, 1, 29, 4, 29, 3, 5, 3, 1, 141, 1, 7, 7, 2, 2, 7, 1, 1, 7, 1, 7, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 30, 1, 12, 4, 18, 10, 2, 8, 1, 2, 2. 6, 1, 1, 11, 2, 4, 2, 1, 1, 3, 3, 12, 1, 1, 39, 5, 4, 13, 1, 5, 4, 1, 125, 1, 4, 1, 2, 1, 19, 1, 4, 1, 1, 2, 1, 4, 1, 10, 1, 4, 2, 1, 1, 1, 5, 10, 4, 14, 1, 13, 41, 1, 4, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 6, 1, 3, 2, 2, 2, 1, 4, 1, 14, 1, 2, 8, 1, 6, 1, 1, 1, 12, 1, 8, 3, 3, 3, 1, 37, 4, 2, 4, 1, 3, 4, 25, 4, 27, 2, 7, 1, 1, 2, 1, 12, 22, 13, 1, 1, 3, 20, 1, 1, 61, 1, 376, 2, 107, 1, 10, 3, 2, 2, 31, 1, 2, 10, 2, 2, 2, 2, 7, 4, 5, 6, 1, 1, 1, 1, 2, 8, 2, 73, 3, 5, 42, 1, 3, 2, 1, 1, 59, 6, 1, 1, 1, 5, 1, 6, 1, 2, 6, 1, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 3, 1, 8, 1, 4, 2, 5, 4, 7, 1, 4, 2, 2, 6, 1, 1, 4, 2, 15, 2, 4. 10. 2. 1, 1, 13, 1, 1, 7, 15, 1, 1, 1, 2, 3, 15, 8, 8, 2, 1, 13, 3, 5, 1, 2, 1, 4, 2, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 3, 3, 5, 2, 1, 11, 3, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 1, 14, 5, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 2, 1, 2, 1, 4, 1, 14, 1, 1, 58, 7, 1, 2, 1, 1, 5, 1, 2, 1, 5, 18, 1, 4, 1, 1, 2, 5, 1, 148, 1, 9, 2, 1, 2, 1, 5, 4, 93, 1, 1, 2, 4, 1, 2, 1, 4, 3, 1, 1, 73, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 34, 1, 5, 6, 1, 2, 1, 3, 4, 1, 16, 28, 17, 2, 5, 5, 26, 1, 1, 4, 12, 1, 3, 2, 1, 5, 1, 2, 9, 3, 2, 41, 1, 16, 2, 2, 20, 1, 17, 1, 6, 16, 3, 3, 2, 2, 2, 18, 15, 1, 1, 51, 4, 9, 5, 2, 2, 1, 2, 1, 45, 3, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 3, 5, 1, 2, 3, 8, 2, 47, 2, 3, 1, 1, 1, 15, 9, 1, 8, 2, 1, 4, 2, 4, 14, 1, 12, 2, 1, 161, 1, 26, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 18, 528, 12, 4, 1, 5, 16, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 2, 1, 63, 1, 97, 1, 4, 4, 10, 5, 9, 5, 2, 3, 2, 5, 7, 1, 32, 13, 1, 5, 4, 1, 7, 1, 3, 12, 1, 3, 9, 1, 7, 1, 102, 53, 1, 1, 1, 3, 4, 2, 15, 2, 8, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 1, 1, 3, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 6, 1, 1, 14, 1, 80, 11, 1, 1, 1, 1, 1, 22, 1, 2, 3, 1, 7, 1, 32, 13, 1, 5, 4, 1, 3, 26, 2, 24, 2, 2, 4, 3, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 63, 1, 1, 1, 25, 1, 1, 1, 8, 1, 3, 3, 1, 10, 5, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 8, 12, 1, 53, 1, 2, 1, 1, 5, 1, 1, 3, 1, 39, 1, 12, 1, 3, 14, 18, 9, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 4, 4, 7, 1, 17, 1, 14, 1, 1, 1, 1, 1, 10, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 12, 1, 3, 44, 2, 10, 1, 14, 1, 2, 1, 3, 43, 4, 1, 7, 3, 4, 1, 1, 2, 2, 1, 34, 1, 2, 5, 8, 3, 2, 1, 2, 13, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 25, 1, 5, 1, 94, 2, 4, 3, 4, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 10, 41, 1, 4, 4, 1, 155, 1, 8, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 9, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 6, 23, 5, 1, 3, 5, 2, 1, 1, 1, 1, 7, 67, 5, 7, 1, 23, 3, 3, 1, 6, 1, 11, 1, 57, 1, 4, 1, 5, 8, 1, 1, 2, 5, 2, 10, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 11, 2, 10, 1, 4, 18, 1, 2, 3, 1, 1, 6, 3, 6, 4, 31, 3, 4, 1, 18, 3, 9, 7, 5, 1, 2, 2, 1, 7, 1, 23, 2, 217, 1, 2, 1, 4, 1, 54, 2, 196, 10, 3, 1, 32, 1, 40, 55, 1, 5, 1, 3, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 6, 3, 16, 1, 31, 1, 5, 6, 1, 4, 42, 4, 1, 10, 1, 3, 1, 3, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 4, 1, 13, 1, 88, 1, 1, 1, 14, 3, 27, 3, 1, 1, 16, 4, 1, 2, 4, 1, 4, 1, 1, 17, 2, 4, 1, 1, 9, 2, 1, 1,

1, 1, 1, 10, 6, 1, 3, 1 3, 1, 1, 30, 1, 1, 3, 2, 2, 1, 1, 4, 10, 1, 7, 1, 6, 1, 35, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 24, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 6, 6, 2, 1, 1, 10, 6, 4, 1, 2, 16, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 6, 5, 1, 13, 5, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 3, 1, 3 6, 1, 1, 1,
1, 1,
3, 6, 1,
1, 9, 47, 3,
1, 1, 1, 1, 1,
18, 1, 33, 1, 5,
3, 1, 4, 1, 59,
1, 3, 13, 1, 95,
4, 2, 15, 1, 1,
1, 2, 2, 1,
1, 5, 3, 7
15, 2, 1
4, 2, 6, 4, 3, 1, 30, 2, 1, 6, 6, 2, 1, 1 6, 2, 1, 1 2, 3, 1, 1, 48, 3, 3, 5, 1, 4, 9, 2, 1, 1, 1, 3, 48, 1, 4 41, 18 1, 1, 6, 5, 1, 1 3, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 65, 6, 5, 3, 6, 8, 1, 6, 9, 1, 4, 2, 11, 10, 11, 24, 0 8, 1, 4, З, 2, 16, 1, З, 1, 1, 0, 3, 2, 1 1, 4, 5, 4, 1, 5, 1, 2, 2, 5, 6, 9, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 5, 6, 1, 4, 3, 108, 2, 1, 1, 6, 8, 6, 8, , 2, 6, 2 1. 8, 1, 2, 10, 6, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 43, 3, 7, 5, 1, 4, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 1, 6, 4, 1, 2, 33, 50, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 204, 36, 1, 1, 4, 116, 1, 3, 4, 5, 1, 11, 2, 55, 1, 17, 1, 1, 1, 6, 6, 1, 4, 5
1, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 2, 5, 1, 1, 5, 20, 11, 1, 1,
1, 1, 10, 2, 1, 5, 1, 2, 4, 22, 2, 7, 1, 1, 1, 1,
11, 7, 3, 1, 1, 1, 7, 1, 1, 8, 1, 8, 1, 2, 2, 3,
1, 1, 4, 2, 3, 1, 7, 3, 4, 4, 1, 1, 1, 2, 54, 16,
1, 5, 3, 4, 1, 4, 18, 1, 1, 1, 1, 1, 8, 3, 1, 8,
1, 1, 8, 2, 3, 2, 13, 1, 1, 1, 1, 7, 1, 3, 1, 10,
1, 1, 3, 7, 1, 16, 4, 1, 84, 1, 14, 1, 39, 1, 1
1, 5, 1, 1, 1, 4, 2, 2, 1, 4, 5, 1, 2, 1, 3, 1, 1,
1, 1, 1, 2, 2, 14, 3, 1, 5, 2, 4, 1, 3, 29, 2, 2,
4, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 1, 3, 80, 2,
1, 74, 1, 2, 1, 5, 1, 1, 9, 1, 1, 1, 1, 3, 80, 2,
1, 7, 3, 18, 1, 8277, 35, 29, 2, 1, 2, 2, 44, 1, 1,
7, 3, 18, 1, 8277, 35, 29, 2, 1, 2, 2, 6, 1, 5,
1, 7, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 7, 1, 28, 1, 50, 10, 2,
1, 5, 2, 1, 4, 1, 1, 520, 10, 2, 8, 1, 4, 1, 39,
1, 1, 5, 1, 1, 2, 6, 2, 5, 5, 4, 1, 12, 1, 6, 2,
1, 588, 1, 3, 1, 6, 1, 8, 8, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 7,
17, 1, 1, 1, 63, 1, 4, 2, 1, 2, 14, 1, 3, 5, 1, 1
2, 3, 1, 1, 2, 7, 2, 1, 2, 4, 1, 10, 1, 5, 1, 2, 46, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 5, 7, 7, 2, 1, 10, 39, 1, 3, 1, 1, 19, 2, 2, , 1, 1, 80, 2 2, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 3, з, 9, 2, 4, 10, 2, 6, 1, 4, 3, 6, 18, 1, 3, 3, 4, 1, 4, 1, 3, 4, 3, 1, 3, 2, 23, 2, 2, 1, 5, 2. 17, 13, 1, 1, 6, 3, 1, 1, 2, 1, 5, 5, 212, 2, 2, 5. 1, 1, 4, 8, 1, 8, 4. 7, 7, 5, 1, 1, 1, 2, 6, 5, 2159, 2, 1, 2, 2, 7, 1, 3, 4, 4, 61, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 5,

1, 1, 4, 11, 1, 1, 1, 3, 2, 6, 1, 3, 2, 1, 4, 6, 2, 1, 7, 1, 17, 12, 1, 1, 7, 7, 1431, 4, 12, 3, 6, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 9, 1, 1, 92, 3, 26, 1, 212, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 5, 331, 1, 1, 1, 22, 3, 1, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 21, 2, 1, 1, 57, 2, 2, 5, 1, 117, 21, 7, 19, 1, 3, 1, 1, 1, 5, 4, 4, 7, 3, 2, 3, 1, 3, 4, 2, 21, 1, 5, 1, 1, 143, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 2, 3, 49, 1, 3, 2, 31, 2, 1, 32, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 5, 1, 7, 1, 1, 1, 7, 1, 2, 5, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 21, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 6, 7, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 2, 21, 2, 3, 1, 4, 501, 1, 1, 11, 7, 3, 1, 2, 6, 9, 1, 1, 15, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 4, 1, 40, 1, 5, 7, 1, 2, 3, 8, 1, 5, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 8, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 5, 10, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 2, 4, 5, 1, 1, 23, 1, 47, 1, 17, 9, 4, 2, 1, 3, 20, 1, 1, 2, 180, 2, 6, 1, 9, 1, 2, 1, 1, 2, 5, 1, 7, 1, 4, 1, 1, 2, 1, 21, 2, 1, 3, 1, 2, 6, 1, 1 3, 3, 1, 1, 18, 27, 1, 9, 19, 1, 6, 1, 2, 1, 1, 1, 7, 1, 4, 1, 7, 4, 1, 1, 3, 3, 46, 8, 1, 3, 10 12, 3, 23, 1, 1, 1, 42, 1, 3, 7, 1, 1, 4, 1, 1, 63, 1, 1, 1, 14, 527, 3, 1, 1, 3, 1, 19, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 17, 3, 1, 3, 1, 3, 2, 3, 9, 1, 75, 5, 34, 3, 3, 3, 1, 55, 2, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 44, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 82, 2, 1, 1, 2, 1, 4, 13, 1, 2, 2, 172, 3, 12, 6, 2, 1 27, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 1, 3, 2, 2, 2, 15, 1282, 1, 2, 1, 2, 1, 17, 1, 14, 2, 2, 2, 4, 2, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 4, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 204, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 12, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 5, 1, 5, 3, 5, 2, 1, 9, 8, 3, 5, 2, 1, 1, 1, 9, 1, 1, 4, 3, 1, 1, 2, 4, 5, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 36, 3, 5, 6, 1, 1, 1, 15, 15, 1, 5, 5, 9, 4, 3, 1, 1, 16, 1, 1, 2, 1, 4, 4, 1, 1, 11, 8, 1, 1, 1, 1, 52, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 8, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 5, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 2, 18, 9
2, 31, 1, 1, 164, 4, 3, 2, 1, 8, 12, 2, 78, 6, 3, 3, 14, 10, 1, 26, 2, 6, 4, 2, 1, 1, 2, 18, 9, 1, 1, 7, 12, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 4, 1, 12, 2, 19, 2, 1, 20, 1, 38, 1, 4, 1, 2, 8, 1, 9, 3, 11, 1, 2, 1, 1, 1, 8, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 14, 1, 2, 8, 3, 1, 1, 7, 1, 1, 13]

Coeficientes superiores a 100 del desarrollo en F.C. de π

número	coeff	número	coeff	número	coeff
5	292	2105	256	3812	8277
80	161	2155	121	3826	242
197	120	2168	391	3867	520
223	127	2199	252	3916	588
308	436	2356	106	4020	1431
432	20776	2477	193	4127	212
602	106	2553	152	4193	331
670	141	2560	473	4216	117
726	125	2565	108	4242	143
870	376	2689	141	4323	501
872	107	2845	188	4348	154
961	129	3085	310	4401	180
1002	193	3090	211	4552	134
1111	114	3158	210	4606	527
1216	123	3204	113	4666	172
1222	156	3249	325	4701	1282
1360	148	3274	1722	4739	204
1484	161	3291	292	4900	164
1498	528	3374	104		
1546	102	3403	111		
1759	155	3435	204		
1858	217	3440	118		
1866	196	3642	142		
2054	620	3745	212		
2078	425	3778	2159		

5.040 dígitos decimales de p=(2;3,5,7,11,13,...)

5.040 dígitos septimales de p=(2;3,5,7,11,13,...)

ERRATAS ADVERTIDAS

- Pág. 19, línea 5.- Debe decir: "en la de radio $\sqrt{2}$ hay cuatro y ninguno en la de radio $\sqrt{3}$
- **Pág. 21, línea 29**.- Debe decir: "|z|<1".
- Pág. 24, línea 20.- Debe decir: "En la figura anterior".
- Pág. 24, línea -1.- Debe decir "n/m".
- Pág. 25, línea 1.- Debe decir "finito" en vez de periódico.
- Pág. 32, línea -12.- Debe decir "Figura 4".