DISCURSO

LEÍDO ANTE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

EN SU RECEPCIÓN PÚBLICA

POR EL

SR. D. AUGUSTO KRAHE Y GARCIA

Y CONTESTACIÓN DEL

EXCMO. SR. D. JOSÉ ECHEGARAY

El día 13 de Diciembre de 1914.

MADRID
IMPRENTA RENACIMIENTO
Calle de San Marcos, núm. 42
—
1914

DISCURSO

DEL

Sr. D. AUGUSTO KRAHE

Señores académicos:

Modesto profesor de Matemática, consagrábame al cuidado de iniciar inteligencias juveniles en estas disciplinas del humano saber, cuando, abrumado por vuestras bondades, me encuentro exaltado por vosotros al puesto que dejó vacante la muerte del insustituible y llorado D. Eduardo Saavedra. Aun temiendo fundadamente que el compromiso contraído sea muy superior á mis fuerzas, he aceptado el inmerecido cargo honrado y complacido, y aquí me tenéis dispuesto á compartir vuestras tareas.

Mi nombramiento no tiene ni puede tener otra explicación que el haber llegado á vuestros oídos mi fervoroso y casi innato entusiasmo hacia las Ciencias exactas, y vuestra designación, que no he de ocultaros que con toda el alma agradezco, me pone en trance parecido al del noble godo, al del histórico personaje, que alejado del mundanal ruido, vióse sorprendido por su exaltación al trono. Mi eterna gratitud, señores académicos, y desde ahora insignes compañeros, por vuestra donación generosa.

Convendréis conmigo, y quedaréis por ello obligados á ser muy indulgentes, en que para mantener el honor del puesto con el brillo y esplendor con que lo mantuvieron Echegaray y Saavedra — entre otros muy ilustres varones que honraron la medalla número 6 — tendría que desplegar esfuerzos muy superiores á los de mis modestos músculos mentales. Admitiréis igualmente no ser éste ya solamente puesto de honor, sino sitio de verdadero peligro, por la tensión y desasosiego espirituales á que ha de estar sometido el que intente no ya igualar, sino ni aun siquiera tratar de seguir ó de imitar á tan perfectos modelos. Echegaray y Saavedra alcanzaron fama mundial. Tanto el uno como el otro, por sus aptitudes variadísimas y excepcionales para las más opuestas disciplinas, y por las obras maestras producidas por sus excelsas mentalidades, conquistaron, desde su juventud, el derecho á ver inscritos sus preclaros nombres, con áureos é indelebles caracteres, en las páginas de la Historia.

Perdido Saavedra para la Ciencia y la Literatura patrias, réstanos el ilustre presidente de esta Real Academia, este asombroso veterano, admiración de propios y extraños por su vigor y agilidad intelectuales, más bien acrecidos que amenguados por la edad, y cuyos recientes trabajos compiten con ventaja, en frescura, belleza y lozanía, con los que su genio produjera en aquella juventud de que nos habla en sus exquisitos *Recuerdos*.

No tuve la honra de conocer personalmente á Saavedra, mas asócianse en mi memoria las noticias primeras de su inmenso saber con mis evocaciones infantiles.

Para los que frecuentábamos, en una de las últimas décadas del siglo anterior, las aulas de la Escuela de Caminos por las cuales desfilaron, primero como alumnos y luego como maestros meritísimos, Saavedra y Echegaray, estos ilustres ingenieros seguían formando parte de aquella casa. Aunque no les hubiéramos alcanzado como profesores, sentíamos aún en el ambiente el luminoso rastro de sus enseñanzas. Nuestros maestros habían sido discípulos de ambos, y en la orientación de los programas notábase la influencia de aquellos insignes varones. Los triunfos científicos y literarios de los dos egregios ingenieros eran considerados como victorias propias; nuestro incipiente espíritu de Cuerpo, que en la juventud —á veces también en otras edades — adquiere marcados tintes de exclusivismo, no admitía peros ni distingos tratándose de sus producciones. Cuando los trabajos estaban al alcance de nuestros conocimientos, los alabábamos por convicción; cuando así no era, por demasiado elevados en relación á nuestra escasa base científica, postulábamos, como dicen los matemáticos, y eran ensalzados á sentimiento, por hipótesis. Un drama ó un artículo de Física de nuestro Echegaray, un trabajo sobre resistencia de materiales ó un informe académico del ínclito Saavedra, eran admitidos como dogmas, sin dudas ni vacilaciones. Enteramente parecía que hubiéramos colaborado en aquéllos ó que sus autores no los publicaron sin haber obtenido antes nuestro beneplácito. En honor á la verdad, el sabio profesorado de aquel ilustre centro docente nos daba el ejemplo, procurando injertar con toda ocasión y con todo motivo, en los primeros brotes de nuestra cultura técnica, la admiración hacia las enseñanzas del afamado ingeniero. Aún recordarán con gusto, como yo lo recuerdo, los que en aquella época fueron mis entrañables compañeros, el deleite que nos producía la sustitución de la conferencia marcada para el día por la lectura y comentario de algún trozo entresacado de las Memorias ó monografías del insigne maestro.

Ha sido estudiado Saavedra por meritísimos escritores como ingeniero, como arquitecto, como historiador, como arqueólogo, como arabista, como filólogo, como matemático y como literato, mereciendo singular mención la admirable y sentidísima biografía que en la *Revista de la Socie-*

dad Matemática Española le dedicó nuestro egregio presidente. Repetir como un eco, como una resonancia, lo que todos sabéis y lo que no se habrá seguramente borrado de vuestra memoria, me parecería casi una redundancia, y en cambio, pretender hacer un análisis serio y de primera mano de la obra de Saavedra, sería en mí una verdadera temeridad, un loco atrevimiento, casi una profanación. Confieso que carezco de la preparación necesaria para esa labor de honda é intensa cultura, y estas cosas no son de las que se improvisan. Para estudiar á Saavedra se necesitaría casi ser otro Saavedra. El jugo sinovial de sus escritos, la variadísima erudición de sus obras, la multiplicidad de sus creaciones, la diversidad de sus actividades mentales, todo ello requiere una base de ilustración y una altura de pensamiento fuera del alcance de mi especialización matemática. Yo leo verbigracia, el estudio de Saavedra acerca de nuestras calzadas romanas, y me parece que me hallo frente á un ingeniero de los Escipiones; mas he de limitarme á eso, á admirarlo, y sería pretensión pueril atreverme á más; leo sus concienzudas investigaciones acerca de la arquitectura árabe, y me parece que me hallo ante un alarife del Califato, sin que por cuenta propia me atreviera á decir otra cosa que lo que en diversas formas se ha repetido y que todos sabéis. Creo, en suma, que la mejor forma de honrar la memoria de nuestro gran Saavedra, de aquel espíritu tan sincero, tan enemigo de las falsas apariencias, tan apegado á la verdad, es beber en mi vaso, cultivar mi jardín. Me parece como que oigo la voz patriarcal de nuestro D. Eduardo, que me dice al oído: «Zapatero, á tus zapatos», y obedeciendo la orden, á mis zapatos, es decir, á mis matemáticas me voy.

> "El cálculo de los vectores tiene un sentido geométrico claro y preciso, y las operaciones analíticas con los símbolos marchan paralelamente con estas construcciones geométricas, que son tan firmes, y tan claras, y que, por decirlo así, son aún más plásticas que las mismas operaciones numéricas.„—Resolución de ecuaciones y teoría de Galois.—Lecciones explicadas en el Ateneo de Madrid por José Echegaray, pág. 36.

Mis primeros pasos en la Matemática fueron dirigidos por maestros tan competentes como Catalá, Portuondo y Garcini, de cuyo valer científico tenéis brillantes pruebas en publicaciones de esta docta Corporación. Sean mis primeras palabras, al abordar mi tema, para rendirles público homenaje de respeto y de cariño.

Iniciado en estos estudios por los ilustres profesores que acabo de citar, y á los cuales me atreveré á calificar de *oportunistas* en Matemática, en contraposición con los dogmáticos é intransigentes, apasionados del puro Análisis ó de la Geometría purísima, nunca entendí bien, y cada día lo comprendo menos, el deslinde de campos, analítico y geométrico, que muchos, á mi entender equivocadamente, tratan de establecer. Acaso sea yo el equivocado; mas creo firmemente que las intransigencias, ya sean analíticas, ya geométricas, antes perjudican que favorecen los adelantos matemáticos.

No está mal que dediquemos algunas horas de estudio á los verdaderos y hermosísimos monumentos científicos, edificados con pie forzado por geniales matemáticos; pero cuidado con entregarnos de por vida á la contemplación, repetición y comento de lo que dijera el maestro. Tales apasionamientos, vuelvo á repetir, antójanseme nocivos, por constituir una rémora para el desenvolvimiento de la personalidad en los trabajos de investigación.

Pudo creerse en tiempos de Galois, y así hubo éste de afirmarlo, que una parte del problema de la resolución algebraica de las ecuaciones constituía en cierto modo como un coto aislado, sin conexiones de ningún linaje con el resto de los estudios matemáticos. Trabajos más recientes sobre el particular han quebrantado un tanto semejante afirmación. Seguramente darán buena cuenta de ella las investigaciones de matemáticos vivientes ó venideros. No es necesario el don de profecía para formular tales pronósticos. La Historia de la Matemática, tan descuidada por cierto en nuestra patria, á pesar de los esfuerzos y clamores con que el heroico García de Galdeano trata de llamar la atención de los rectores de nuestra enseñanza hacia estos importantísimos estudios, esa Historia, repito, tan abandonada, nos demuestra á cada paso que las cuestiones matemáticas al parecer más inconexas poseen afinidades que, una vez puestas de manifiesto, constituyen los más firmes puntos de apoyo para el rápido avance de la ciencia.

No extrañaréis, tras de esta profesión de fe, que como veis tiene sus raíces en los ya lejanos tiempos de mi iniciación en los hermosos estudios de la Matemática, que en el trabajo que os ofrezco —modesto tributo á vuestro saber— espigue mis recursos, á medida de la necesidad, en los campos de la Geometría y del Análisis. Aun así, temo que mi labor no tenga el jugo bastante para justificar la elección con que me honrasteis.

Antes de desarrollar el método que he seguido en la resolución de las ecuaciones de cuarto grado he de decir algo acerca de otras de menor grado, que aclarará el trabajo de investigación.

No me detendré en la determinación del cociente de dos complejas, ó de dos vectores, interpretación geométrica de la resolución de las de primer grado, por ser sobrado conocida de todos aquellos que se han asomado al estudio de la teoría de los vectores.

Pongamos nuestra atención, breves momentos, en la de segundo grado. En una ecuación de éstas, cuya forma sea binomia, son conocidas sus soluciones inmediatamente. Sus raíces se representan geométricamente en el plano de Cauchy por dos afijos simétricos respecto al origen. Reduciremos á éste el caso general. Consideremos la ecuación general de segundo grado con una incógnita. Los afijos de sus raíces determinarán los extremos de un segmento rectilíneo, cuyo punto medio tiene por coordenada las semisumas de las del mismo nombre de sus extremos. La imaginaria correspondiente á este punto medio será la semisuma de las raíces de la ecuación de segundo grado, cantidad que ya sabemos cómo está formada en función de los coeficientes. Una traslación, definida por el vector correspondiente á dicha semisuma, llevará á coincidir aquel punto medio con el origen, y tendremos de esta suerte á la ecuación convertida en una binomia. Obsérvese que la marcha señalada geométricamente es la que se sigue en los elementos al resolver la ecuación de segundo grado. La traslación equivale á la sustitución que hace desaparecer el término de primer grado, ó lo que es lo mismo, al aumento, en los dos miembros, del término necesario para convertir á uno de ellos en el cuadrado de una función de primer grado de la incógnita y al otro en una cantidad conocida.

Pasemos á la ecuación de tercer grado. Si ésta fuera una binomia, tendría sus raíces representadas por los vértices de un triángulo equilátero, cuyo centro coincidiría con el origen. Intentemos reducir á este caso la resolución de la ecuación completa. Imaginándonos el triángulo cualquiera, cuyos vértices sean los afijos de sus raíces, sabemos que existen dos puntos del plano, los cuales, tomados como polos de una inversión por radios vectores recíprocos, transforman el triángulo en equilátero. Estos puntos, llamados por Neuberg *centros isodinámicos* del triángulo, están determinados por las raíces de una ecuación de segundo grado, resolvente de la de tercero, cuya ecuación es la que se conoce en las teoría de las formas con el nombre de covariante canónico, ó canonizante, de la forma binaria cúbica que corresponde al primer miembro de la ecuación dada. Como quiera que las sustituciones lineales efectuadas con las variables imaginarias equivalen á las operaciones geométricas de traslación, rotación, homotecia é inversión, tendremos trazado el camino que conduce á reducir á binomia la ecuación de tercer grado. Llevaremos, mediante una traslación, á coincidir uno de los centros isodinámicos con el origen. Transformaremos por una inversión el triángulo en equilátero. Por último, haciendo coincidir, por una nueva traslación, el origen con el centro de este último triángulo, tendremos resuelto el problema. Este fué el procedimiento que seguí y desarrollé en otro lugar al resolver las ecuaciones de este orden *.

Existe un grupo de ecuaciones, á las cuales llamé armónicas por ser los afijos de sus raíces los vértices de un polígono armónico, cuya resolución puede hacerse de un modo análogo al indicado para las de tercer grado. Los polígonos armónicos tienen, como los triángulos, dos centros isodinámicos que permiten la transformación del polígono en otro regular por medio de una inversión. Estas ecuaciones se resolverán valiéndose de una ecuación de segundo grado y

* Mathesis, 1905, páginas 61-66.

una binomia del mismo grado que el de la ecuación dada. En particular, son armónicas las de cuarto grado, cuyo invariante de tercer orden es nulo *.

El procedimiento que desarrollo más adelante para la resolución de las ecuaciones de cuarto grado no tiene en su parte analítica nada común con los conocidos de Ferrari Descartes, Euler y Lagrange; tampoco es análogo al que se deduce del estudio de las ecuaciones poliédricas del ilustre Klein. Es algo muy elemental, y cuya exposición no necesita del auxilio de elevadas teorías, aunque en su parte final, como ya veréis, se puede enlazar con los de Cayley y Sylvester. Estos insignes geómetras ingleses hicieron verdaderos derroches de sagacidad eliminatoria al tratar algunos de los casos de reducción de las formas binarias á sus canónicas; problema que aplicado á las de cuarto grado viene á ser en el fondo el de la reducción de la ecuación á bicuadrada. Respecto á la parte geométrica del tema por mí desarrollado y á la manera de reducir la ecuación á recíproca, las creo de alguna novedad; por lo menos, no conozco ningún trabajo análogo que haya sido hecho para las de cuarto grado.

El malogrado matemático italiano Cesaro dió en la traducción y arreglo al alemán de su notable obra de Análisis una interpretación geométrica de las raíces de la resolvente de sexto grado (Jacobiana de la binaria bicuadrática). El eminente profesor mencionado desarrolló el asunto de la reducción de la binaria de cuarto grado á su canónica, como suelen hacerlo los continuadores de la obra de Cayley y Sylvester, y se fundó en la definición de razón armónica de cuatro números imaginarios para llegar á la consecuencia

---

* Revista de la Real Academia de Ciencias. Tomo II, núm. 3.—Ecuaciones armónicas.

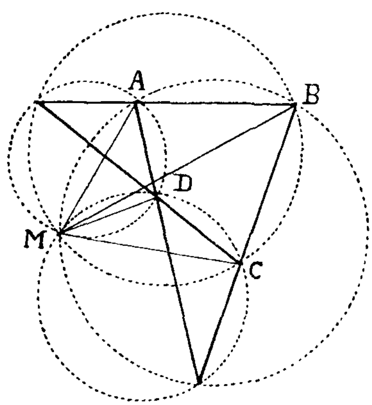
de ser las raíces del jacobiano los puntos dobles de las tres involuciones que determinan las cuatro raíces. En la parte final del estudio cinemático que tengo la honra de someter á vuestra benevolencia llego de un modo natural y breve á estos puntos dobles. Los centros de las tres involuciones, puntos de los cuales no se ocupó Cesaro, son los que empleo en la simplificación del problema.

Todo lo que hasta aquí he dicho respecto á las ecuaciones de los tres primeros grados, y la investigación referente á la de cuarto, se basa en aquellos movimientos geométricos que corresponden á las sustituciones lineales con variables imaginarias. Mas nótese que pueden concebirse multitud de transformaciones geométricas, las cuales, una vez traducidas al lenguaje algebraico, permitirán abordar los problemas de este género por muy diversas sendas.

Si, juzgándolo con suma indulgencia, mereciera vuestra aprobación el estudio cinemático que presento, creeré haber contribuído en la medida de mis fuerzas á enaltecer en día tan solemne para mí la memoria del insigne Saavedra.

Estudio cinemático de la ecuación de cuarto grado.—Los puntos de Miquel del cuadrivértice en la reducción á las formas recíproca y bicuadrada.

En un cuadrilátero plano se producen, por la combinación de sus lados tres á tres, cuatro triángulos, cuyas circunferencias circunscritas pasan por un punto. Este punto



es conocido con el nombre de punto de Miquel del cuadrilátero, y la demostración de la propiedad recordada se encuentra en la mayor parte de los tratados de Geometría ó de Analítica.

El punto M es centro de semejanza directo del par de lados AB, CD, así como también del otro par AD, BC. De la semejanza de los triángulos MAD y MBC se deduce

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC} = \frac{AD}{BC}.$$

De la semejanza de los triángulos MAB y MDC se obtiene

$$\frac{MA}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{DC}.$$

De estas y las anteriores relaciones hallaremos, por multiplicación y división miembro á miembro, que la razón de distancias del punto de Miquel á dos vértices opuestos es la misma que la de los productos de los lados que concurren en estos vértices; es decir,

$$\frac{MA}{MC}=\frac{AD\cdot AB}{CB\cdot CD} \qquad \frac{MB}{MD}=\frac{AB\cdot BC}{DA\cdot DC}.$$

Las relaciones que anteceden determinan otras seis circunferencias que pasan también por M. Dos cualesquiera de ellas determinarían el mencionado punto cuando no se formasen triángulos, es decir, cuando tres de los puntos $ABCD$ estuviesen en línea recta.

De la misma semejanza citada se tendrá, evidentemente,

$$MA\cdot MC=MB\cdot MD.$$

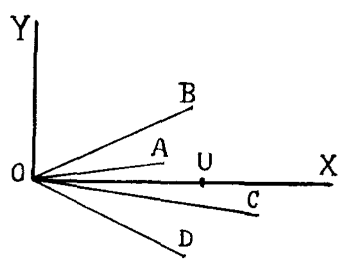
Supongamos una ecuación cualquiera de cuarto grado con coeficientes reales ó imaginarios. Convengamos en representar sus raíces, como es corriente, por sus afijos en el plano de las variables imaginarias. Quedará definido, de este modo, un cuadrivértice del cual podemos deducir tres cuadriláteros, uno convexo y otros dos con un par de lados cruzados. Cada uno de estos cuadriláteros tendrá un punto de Miquel; por consiguiente, el cuadrivértice que corresponde á las raíces de una ecuación de cuarto grado tendrá tres de estos puntos.

Fijémonos por un momento en el cuadrivértice representativo de las raíces de una ecuación recíproca de cuarto grado.

Si A y C son los afijos correspondientes á un par de raíces recíprocas, y B y D los afijos del otro par, se ha de tener:

$$OA \cdot OC = OB \cdot OD = \overline{OU}^2 = 1.$$

La recta OX ha de ser, además, bisectriz común de los ángulos AOC y BOD, puesto que los argumentos de dos cantidades recíprocas son iguales y de signos contrarios. De todo lo cual se deduce que los triángulos OAB y ODC son semejantes, así como también lo son el otro par de



triángulos OAD y OBC. El origen será, por lo tanto, punto de Miquel del cuadrivértice, y éste se hallará situado en la disposición que indica la figura con respecto al eje OX.

Si la ecuación fuera negativamente recíproca, estaría el cuadrivértice orientado con respecto al eje OY, como lo estaba antes con respecto al OX; esto es, el eje OY sería bisectriz común de los ángulos AOC y BOD. De esto se desprende que una rotación de un ángulo recto efectuada alrededor del origen conduce al cuadrivértice desde la representación geométrica de las raíces de la ecuación recíproca á la de las negativamente recíprocas.

Traducido esto al lenguaje analítico quiere decir que la sustitución

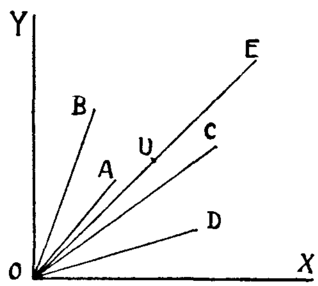
$$z = Z\sqrt{-1}$$

transforma á una ecuación recíproca en negativamente recíproca ó viceversa.

Señalaremos también que la sustitución (inversion simétrica)

$$Z = \frac{1}{z}$$

deja invariable el cuadrivértice, pues lo que hace es permutar *entre sí el par de afijos A, C y el otro par B, D,*



que es la propiedad característica de las ecuaciones recíprocas.

Si el origen es punto de Miquel del cuadrivértice determinado por los afijos de las raíces, suponiendo, además, no ser recíproca la ecuación

$$a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 + 4 a_3 z + a_4 = 0,$$

se ha de tener entre sus coeficientes la relación de condición

$$a_0 a_3^2 = a_4 a_1^2.$$

En efecto; sean z_1, z_2, z_3, z_4 las raíces de la ecuación de cuarto grado; $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ sus módulos; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sus argumentos, y OE la bisectriz común á los ángulos AOC y BOD.

Sabemos que

$$\rho_1 \rho_3 = \rho_2 \rho_4,$$
$$2 \text{áng } XOE = \varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_4.$$

Por consiguiente:

$$\rho_1 \rho_3 e^{(\varphi_1 + \varphi_3)i} = \rho_2 \rho_4 e^{(\varphi_2 + \varphi_4)i},$$

ó lo que es lo mismo,

$$z_1 z_3 = z_2 z_4.$$

Ahora bien; de las relaciones entre los coeficientes y las raíces de una ecuación y de la igualdad anterior se obtendrán:

$$\frac{a_4}{a_0} = z_1 z_2 z_3 z_4 = (z_1 z_3)^2 = (z_2 z_4)^2,$$

$$\frac{4 a_3}{a_0} = -(z_2 z_3 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_3) =$$
$$= - z_1 z_3 (z_1 + z_2 + z_3 + z_4),$$

ó lo que es lo mismo,

$$\frac{a_3}{a_0} = \frac{a_1}{a_0} \sqrt{\frac{a_4}{a_0}}.$$

Haciéndola racional, simplificando y quitando denominadores,

$$a_0 a_3^2 = a_4 a_1^2.$$

En el caso tratado anteriormente hemos supuesto la ecuación no recíproca, pero está preparada para serlo. La multiplicación por un factor λ (homotecia y rotación) tal que

$$z'_1 z'_3 = z'_2 z'_4 = 1,$$

teniéndose

$$z'_1 = \lambda z_1, \; z'_2 = \lambda z_2, \; z'_3 = \lambda z_3, \; z'_4 = \lambda z_4,$$

nos dará

$$\lambda^2 z_1 z_3 = 1,$$

ó bien,

$$\lambda^2 \sqrt{\frac{a_4}{a_0}} = 1.$$

Teniendo en cuenta la relación que liga los coeficientes cuando la ecuación, no siendo recíproca, tiene un punto de Miquel en el origen, se tendrá:

$$\lambda^2 \frac{a_3}{a_1} = 1,$$

de donde

$$\lambda = \sqrt{\frac{a_1}{a_3}} \qquad (*)$$

(*) En todo lo que precede, cuando se ha presentado un radical de índice 2 no he tomado signo. El doble signo correspondería á las dos posiciones simétricas de la figura respecto al punto de Miquel.

Quedará así determinado el factor que convierte en recíproca la ecuación.

Podemos resumir brevemente, señalando ya un método para resolver la ecuación de cuarto grado.

Dada una ecuación de cuarto grado, existen tres traslaciones, las que conducen uno cualquiera de los puntos de Miquel á coincidir con el origen, que obligan á la ecuación á prepararse, digámoslo así, á ser recíproca.

La determinación de una de las cantidades, α, que fijan las traslaciones, ó si se quiere, los puntos de Miquel, ha de depender de una ecuación de tercer grado, resolvente de la dada. Una vez coincidiendo el origen con el punto de Miquel, una rotación acompañada de una homotecia, la convertirá en recíproca, es decir, en resoluble, mediante ecuaciones de segundo grado.

He aquí previsto por la Geometría un método para resolver ecuaciones de cuarto grado.

Veamos ahora la exposición analítica del mismo asunto, paralela á la geométrica, y si se quiere, independiente de la misma.

I. Si en una ecuación de coeficientes reales ó imaginarios

$$a_0 z^4 + 4\, a_1 z^3 + 6\, a_2 z^2 + 4\, a_3 z + a_4 = 0$$

hacemos la sustitución, $u = \lambda z$, la ecuación se transforma en

$$a_0 u^4 + 4\, a_1 \lambda u^3 + 6\, a_2 \lambda^2 u^2 + 4\, a_3 \lambda^3 u + a_4 \lambda^4 = 0.$$

Para que la sustitución transforme la ecuación en recíproca es preciso que se verifiquen las condiciones

$$a_0 = a_4 \lambda^4, \qquad a_1 = a_3 \lambda^2,$$

De la eliminación de λ entre estas igualdades resulta la relación de condición entre los coeficientes:

$$a_0 a_3^2 = a_4 a_1^2$$

Cumpliéndose esta condición, los valores de λ, que mediante la sustitución, $u = \lambda z$, hacen recíproca la ecuación, son:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{a_1}{a_3}}.$$

Hecha la sustitución en la ecuación se obtiene:

$$a_0 u^4 \pm 4 a_1 \sqrt{\frac{a_1}{a_3}}\, u^3 + 6 a_2 \frac{a_1}{a_3} u^2 \pm 4 a_1 \sqrt{\frac{a_1}{a^3}}\, u + a_0 = 0 .$$

Obsérvese que la ecuación puede transformarse en recíproca eligiendo para λ valores inversos de los anteriores. Puede transformarse en negativamente recíproca por medio de los valores

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{a_1}{a_3}}$$

ó por sus inversos.

II. Tratemos ahora de investigar si mediante sustituciones de la forma

$$z = Z + \alpha$$

es posible transformar la ecuación

$$a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 + 4 a_3 z + a_4 = 0$$

en otra,

$$A_0 Z^4 + 4 A_1 Z^3 + 6 A_2 Z^2 + 4 A_3 Z + A_4 = 0,$$

en la cual se verifique

$$A_0 A_3^2 = A_4 A_1^2.$$

Que existen valores de α es evidente, pues de establecer la condición anterior ha de resultar una ecuación algebraica en α. Si el grado de esta ecuación es inferior al cuarto, el problema de la resolución algebraica de la ecuación de cuarto grado estará resuelto por este procedimiento. Veamos que la ecuación en α, que, al parecer, es de sexto grado, se reduce al tercero.

Efectuada la sustitución, se tienen para valores de los coeficientes de la transformada

$$\begin{aligned}
A_0 &= a_0, \\
A_1 &= a_0 \alpha + a_1, \\
A_2 &= a_0 \alpha^2 + 2 a_1 \alpha + a_2, \\
A_3 &= a_0 \alpha^3 + 3 a_1 \alpha^2 + 3 a_2 \alpha + a_3, \\
A_4 &= a_0 \alpha^4 + 4 a_1 \alpha^3 + 6 a_2 \alpha^2 + 4 a_3 \alpha + a_4,
\end{aligned}$$

Imponiendo la repetida condición se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 (a_0 \alpha^3 + 3 a_1 \alpha^2 + 3 a_2 \alpha + a_3)^2 = \\
&= (a_0 \alpha^4 + 4 a_1 \alpha^3 + 6 a_2 \alpha^2 + 4 a_3 \alpha + a_4)(a_0 \alpha + a_1)^2,
\end{aligned}$$

en la cual, haciendo operaciones y reducciones, vemos que desaparecen los términos de sexto, quinto y cuarto grado, quedando reducida á la siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 6 a_0 a_1 a_2 \\ -2 a_0^2 a_3 \\ -4 a_1^3 \end{array}\right| \alpha^3 + \left.\begin{array}{r} 9 a_0 a_2^2 \\ -a_0^2 a_4 \\ -2 a_0 a_1 a_3 \\ -6 a_1^2 a_2 \end{array}\right| \alpha^2 + \left.\begin{array}{r} 6 a_0 a_2 a_3 \\ -2 a_0 a_1 a_4 \\ -4 a_1^2 a_3 \end{array}\right| \alpha + \left.\begin{array}{r} a_0 a_3^2 \\ -a_1^2 a_4 \end{array}\right| = 0,$$

que es una resolvente de la de cuarto grado.

La marcha que hay que seguir para la resolución de la ecuación de cuarto grado es la siguiente: 1.°, formaremos la resolvente anterior y determinaremos una de sus raíces; 2.°, la sustitución $z = Z + \alpha$ nos dará á conocer los coeficientes de la transformación en Z; 3.°, convertiremos ésta en recíproca mediante la sustitución

$$u = Z\sqrt{\frac{A_1}{A_3}}.$$

Halladas las raíces u conoceremos las Z, y, por lo tanto, las z.

La reducción puede hacerse de tres maneras, según la raíz de la resolvente que empleemos.

III. Una ecuación recíproca de cuarto grado,

$$Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4Bz + A = 0,$$

se reduce á bicuadrada por medio de la sustitución:

$$z = \frac{Z+1}{Z-1}.$$

En efecto; sustituyendo, quitando denominadores y reduciendo, llegaremos á la ecuación

$$(A + 4B + 6C)Z^4 + 6(A - 2C)Z^2 + A - 4B + 6C = 0.$$

Del enlace de las proposiciones anteriores se deduce que si en una ecuación de cuarto grado,

$$A_0 z^4 + 4A_1 z^3 + 6A_2 z^2 + 4A_3 z + A_4 = 0,$$

se verifica

$$A_0 A_3^2 = A_4 A_1^2,$$

y ya sabemos que á este caso siempre podemos llegar, la sustitución,

$$z = \frac{Z+1}{Z-1}\sqrt{\frac{A_1}{A_3}},$$

la transformará en bicuadrada.

Así tendremos, de paso, resuelto el problema de transformar la forma binaria de cuarto grado en su forma canónica.

La ecuación en α, resolvente de la de cuarto grado, viene á ser una canonizante de la forma binaria correspondiente. Sabido es que pasamos de los primeros miembros de las ecuaciones á las formas correspondientes por la sustitución $z = x : y$.

Vamos á aplicar el método á una ecuación numérica que se presenta en uno de los casos de división de la circunferencia en partes iguales.

Sea la ecuación

$$z^4 + z^3 - 4z^2 - 4z + 1 = 0, \qquad (*)$$

en la cual

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = \frac{1}{4}, \qquad a_2 = -\frac{2}{3}, \qquad a_3 = -1, \qquad a_4 = 1.$$

La resolvente en α, deducida bien directamente ó por medio de la ecuación hallada es, después de hacer simplificaciones,

$$\alpha^3 + 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 0,$$

(*) Véase *Cours d'Algèbre supérieure*, par J. A. Serret, 4.e édition, 1879: t. II, pág. 638.

cuyas raíces son:

$$-1, \qquad \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \qquad \frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

La ecuación en Z obtenida por la sustitución

$$z = Z - 1$$

es

$$Z^4 - 3Z^3 - Z^2 + 3Z + 1 = 0.$$

No es necesario en este caso efectuar la segunda transformación, pues esta ecuación es negativamente recíproca y sus raíces se obtienen sin dificultad; son:

$$Z = \frac{3+\sqrt{5} \pm \sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4},$$

$$Z = \frac{3-\sqrt{5} \pm \sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}.$$

Las de la ecuación dada serán:

$$z = \frac{-1+\sqrt{5} \pm \sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4},$$

$$z = \frac{-1-\sqrt{5} \pm \sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}.$$

Si tomamos cualquiera de las otras dos raíces, α, llegaremos al mismo resultado; pero el cálculo se alarga algo por tener que operar con números irracionales.

Voy á dar una interpretación geométrica sumamente sencilla del paso de la recíproca á la bicuadrada.

Por ser las raíces de una bicuadrada dos á dos iguales y de signos contrarios, la representación geométrica de sus raíces se hará por los vértices de un paralelógramo cuyo centro coincida con el origen.

Tratemos de determinar puntos del plano que tomados como polos de una inversión por radios vectores recíprocos transformen á un cuadrilátero en paralelógramo.

Sean, P, uno de los puntos que se buscan A', B', C', D', los recíprocos de A, B, C, D, en la inversión de polo P y de potencia μ.

Consideremos como pares de vértices opuestos del cuadrilátero A, C y B, D. Ya sabemos que se pueden considerar otros dos cuadriláteros pareando de otros modos los vértices, pero con ello repetiríamos el razonamiento que sigue.

La fórmula que da la longitud de un segmento en función de su inverso, aplicada á los cuatro lados, dará:

$$A'B' = AB\frac{\mu}{PA \cdot PB}, \qquad B'C' = BC\frac{\mu}{PB \cdot PC},$$

$$C'D' = CD\frac{\mu}{PC \cdot PD}, \qquad D'A' = DA\frac{\mu}{PD \cdot PA}.$$

Para que el cuadrilátero se transforme en paralelogramo se ha de tener

$$A'B' = C'D', \qquad B'C' = D'A',$$

de cuyas igualdades deduciremos, teniendo en cuenta las anteriores,

$$\frac{PA \cdot PB}{PC \cdot PD} = \frac{AB}{CD}, \qquad \frac{PB \cdot PC}{PD \cdot PA} = \frac{BC}{DA}.$$

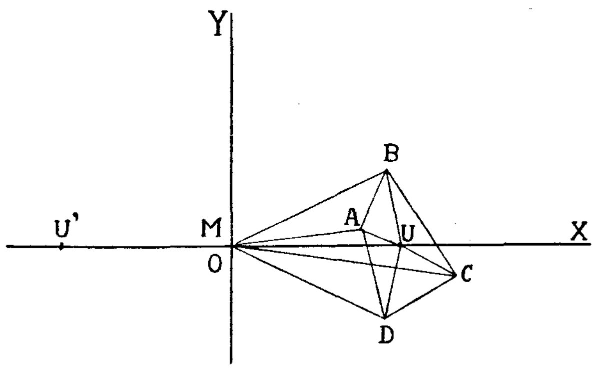
Multiplicando y dividiendo miembro á miembro dan:

$$\frac{\overline{PB}^2}{\overline{PD}^2} = \frac{AB \cdot BC}{CD \cdot CA}, \qquad \frac{\overline{PA}^2}{\overline{PC}^2} = \frac{AB \cdot DA}{CD \cdot BC},$$

ó lo que es lo mismo,

$$\frac{PB}{PD} = \sqrt{\frac{AB \cdot BC}{CD \cdot DA}}, \qquad \frac{PA}{PC} = \sqrt{\frac{AB \cdot DA}{CD \cdot BC}}.$$

Estas igualdades nos determinan dos puntos por intersección de dos circunferencias, lugares de puntos cuyas razones de distancia á dos vértices opuestos se conocen.



Tendremos, por lo tanto, un par de puntos de los que investigábamos para cada uno de los cuadriláteros, es decir, seis para el cuadrivértice.

Podemos, pues, enunciar el teorema siguiente: Dado un cuadrivértice, existen seis puntos de su plano que tomados como polos de una transformación por radios vectores recíprocos transforman á sus vértices en los de un paralelógramo.

La ecuación que determine estos puntos P ha de ser de sexto grado, así como era de tercero la que determinaba los puntos de Miquel.

Veamos ahora cómo están enlazados estos puntos con los de Miquel.

Sea ME la bisectriz común de los ángulos AMC y BMD; señalemos sobre ella dos puntos U simétricos con respecto al M, tales que

$$\overline{MU}^2 = MA \cdot MC = MB \cdot MD.$$

De estas igualdades y de la condición con que hemos trazado la ME se deduce la semejanza del par de triángulos MAU, MUC; por la misma razón también son seme jantes MUB y MUD, y de una y otra semejanza deduciremos:

$$\frac{UA}{UC} = \frac{MA}{MU} = \frac{MU}{MC} = \sqrt{\frac{MA}{MC}},$$

$$\frac{UB}{UD} = \frac{MB}{MU} = \frac{MU}{MD} = \sqrt{\frac{MB}{MD}};$$

pero como se tiene por las propiedades de los puntos M

$$\frac{MA}{MC} = \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD}, \qquad \frac{MB}{MD} = \frac{BA \cdot BC}{DA \cdot DC},$$

resultará

$$\frac{UA}{UC} = \sqrt{\frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD}}, \qquad \frac{UB}{UD} = \sqrt{\frac{BA \cdot BC}{DA \cdot DC}},$$

lo que nos demuestra que los puntos P, polos de inversión que transforman al cuadrivértice en paralelógramo son los mismos puntos U.

Hemos visto que una ecuación recíproca se transforma en bicuadrada mediante la sustitución

$$z = \frac{Z + 1}{Z - 1}.$$

En la representación de las recíprocas, $MU = 1$, y la sustitución anterior puede escribirse

$$z = 1 + \frac{2}{Z - 1},$$

que equivale á la serie de sustituciones,

$$z = z' + 1, \qquad z' = \frac{2}{z''}, \qquad z'' = Z - 1.$$

La primera es una traslación que hace coincidir el origen con el punto U; la segunda, una inversión de polo U que transforma el cuadrivértice en paralelógramo, pero no coincide todavía el origen con el centro del paralelógramo, y la última sustitución es una nueva traslación que obliga á coincidir el origen con el centro.

El problema del paso de la ecuación general de cuarto grado á la forma bicuadrada puede abordarse de otra manera. Demostrada geométricamente la existencia de los seis centros de inversión que transforman el cuadrivértice en paralelogramo, se ve la posibilidad de efectuar primero una traslación que haga coincidir cualquiera de los polos de inversión paralelográmica con el origen, después una inversión que transforma el cuadrivértice en paralelógramo, y, por último, una nueva traslación que haga coincidir el centro de este paralelógramo con el origen.

Todas estas operaciones geométricas pueden representarse analíticamente por la sustitución:

$$z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta} = \mu + \frac{\varepsilon}{Z + \eta},$$

que equivale á la serie de sustituciones

$$z = z' + \mu, \qquad z' = \frac{\varepsilon}{z''}, \qquad z'' = Z + \eta.$$

El procedimiento analítico que habría que seguir vendría á ser, en el fondo, el seguido por los matemáticos ingleses Cayley y Sylvester en la reducción de la forma binaria bicuadrática á su canónica.

CONTESTACION

DEL

Excmo. Sr. D. JOSÉ ECHEGARAY

Señores:

En representación y á nombre de la Academia de Ciencias debo contestar al muy notable é interesantísimo discurso de D. Augusto Krahe, discurso que con tan merecido aplauso acabáis de recibir.

Cumplo este deber con verdadera satisfacción y como honra señaladísima, y cumplo á la vez deberes ineludibles de cortesía y gratitud, al propio tiempo que saludo y doy la bienvenida al nuevo académico.

Y esta recepción del Sr. Krahe y mi discurso tienen cierto carácter de novedad, permitidme que lo afirme, luego lo demostraré; carácter que estas solemnidades no suelen presentar con frecuencia.

Me explicaré.

Y para que me comprendáis debo acudir á tiempos pasados.

Hace cuarenta y tantos años, yo creo que medio siglo, que cuando de los tiempos pasados hablo, por siglos y medios siglos los cuento, sin descender á unidades de menor categoría; hace medio siglo, repito, que fuí elegido para la Sección de Ciencias Exactas de esta ilustre Corporación. Honra que nunca olvidaré y que á través de *los siglos* voy recordando siempre con emoción que nunca se marchita.

Algo después ocurrió una vacante en esta misma Academia, pero fué en la Sección de Ciencias Físicas; y yo deseaba vivamente, era para mí gran empeño de justicia y amistad, que ocupara un puesto entre nosotros, sin más dilaciones, aquel varón ilustre cuyo nombre nunca se pronuncia por los que le conocieron y admiraron sin profunda pena y nunca amortiguada veneración.

Bien comprendéis que me refiero á D. Eduardo Saavedra.

Deseaban todos mis compañeros, tanto como yo, que Saavedra fuese elegido sin esperar nuevas vacantes. Pero él, por entonces, se había dedicado más á las matemáticas puras que á las ciencias físicas, y prefería ingresar en la Sección de aquéllas, en vez de ocupar la vacante directa. Yo facilité la solución del pequeño conflicto académico, pasando á la Sección de Ciencias Físicas y dejando en la de Exactas puesto, para el cual, por unanimidad y con entusiasmo, fué elegido D. Eduardo Saavedra.

Había estado en posesión mía la medalla número 6; de esta medalla entró en posesión Saavedra, y ésta es la que hoy pasa á D. Augusto Krahe.

Con lo cual el nuevo académico viene á ocupar el puesto que sucesivamente hemos ocupado, por orden cronológico, el que en este momento os dirige la palabra y el que ya nunca hará oir su voz tan bondadosa, tan sujestiva y tan ilustre en este recinto; en suma, Saavedra y yo somos los inmediatos predecesores del Sr. Krahe en la Academia de Ciencias.

Y como estos discursos tienen, por decirlo así, su tradición, que les impone normas y pautas, por otra parte bien naturales, á que han de sujetarse todos los académicos en el acto de su recepción, el Sr. Krahe tenía que hacer hoy el elogio de los dos académicos que le han precedido, por cuya causa ha pronunciado frases cariñosas y de alabanza para mi modesta personalidad; frases que yo le agradezco en el alma, porque están dictadas por la simpatía y si se quiere por el respeto que los años, por ser muchos, imponen, y hasta por influencias de aficiones comunes: que el señor Krahe y yo amamos con amor vehemente las matemáticas puras, y si los cariños terrenos tributados á un mismo objeto engendran rivalidades y odios, estos amores á la misma ciencia engendran sentimiento profundo de simpatía y fraternidad.

Sea como fuere, en su discurso el Sr. Krahe me aludía una y otra vez en términos afectuosos, y yo debía recoger la alusión y debía contestar á ella como mejor pudiese: lo dije al empezar, era en mí deuda de gratitud y cortesía.

El nuevo académico, habiendo cumplido ya esta primera labor de cortesía respecto á uno de sus predecesores, la completa con las frases de respetuoso entusiasmo y justa admiración que al segundo tributa y de las que todos nosotros somos eco repetido.

A los elogios que hace del Sr. Saavedra yo me asocio con la inteligencia y con el corazón, y á nosotros se asocian, de seguro, todos los demás académicos. Pero ¿qué elogio podré agregar yo para el Sr. Saavedra que no resulte vulgar y mezquino, tributado á aquella gran figura del siglo XIX, á aquel justo entre los justos, sabio entre los sabios, cuya inteligencia era toda luz, cuyo corazón era todo bondad y cuyo nombre será glorioso en la historia de la ciencia española?

***

También para el que contesta á estos discursos de recepción ha fijado la costumbre sus normas y sus pautas, y después de consagrar un recuerdo siempre vivo y un tributo de admiración siempre inferior á mi deseo al Sr. Saavedra, debo pagar otro tributo de indiscutible justicia al nuevo académico, al que viene á ocupar la doble vacante, como antes explicaba, evocando recuerdos ya lejanos.

El Sr. Krahe, él lo dice y todos lo sabemos, ha dedicado de preferencia sus grandes energías intelectuales y su amor al estudio, consagrando aquéllas y éste al cultivo de las matemáticas puras, con preferencia á toda otra labor científica.

D. Augusto Krahe, alumno brillante de la Escuela de Ingenieros de Caminos, catedrático por oposición de Geometría descriptiva y Estereotomía de la Escuela Superior de Artes é Industrias de Madrid, y por reforma profesor más tarde de la clase de Geometría descriptiva y Ampliación de Matemáticas en la misma Escuela, es ya, hace muchos años, maestro eminente en la enseñanza privada y matemático ilustre en España y fuera de España.

No se ha contentado con ser lo que pudiéramos llamar un matemático contemplativo, es decir, con estudiar las teorías que los maestros han creado, sino que ha construído por sí otras nuevas con trabajos importantísimos de propia investigación. Y no necesita ni citas ni demostraciones este aserto, porque el discurso que acabáis de oir es la mejor prueba y la demostración más completa de lo que vale la inteligencia del Sr. Krahe y su facultad creadora.

El contemplar y juzgar la obra ajena, si es digna de ello, con imparcialidad, admiración y entusiasmo, es ya acto meritorio, del que no todos son capaces por desgracia, ya porque les falte inteligencia para comprender, ya porque les abrumen á veces aquellas tristezas del bien ajeno de que habla la Doctrina Cristiana.

Pero si estudiar y comprender á los maestros, si hacer suya intelectualmente la obra de otro matemático es ya mucho, y es el comienzo de la cultura para la clase intelectual de un país, hacer obra propia, agregar siquiera una hilada de sillería al monumento de la ciencia, ¡qué digo una hilada!, agregar una piedra tan solo á su ciclópea mampostería, es mucho más.

Millares de hombres, aunque no todos, son capaces de admirar un edificio; pero los que van elevando la fábrica son relativamente pocos y deben ser los predilectos.

Así el Sr. Krahe, que siente en sí energías grandemente activas, al escribir su discurso académico no ha podido resistir aquellos impulsos, y al aproximarse este momento ha roto resueltamente con la tradición, según la que, en esta clase de trabajos, la parte que pudiera llamar técnica queda á veces reducida á un mínimo, invadiendo su campo la parte literaria. Para excusar lo que considera un atrevimiento, dice el nuevo académico con modestia y gracejo: «me parece como que oigo la voz patriarcal de nuestro don Eduardo, que me murmura al oído: *zapatero, á tus zapatos*, y obedeciendo la orden, á mis zapatos, ó sea á mis matemáticas me voy».

Recuerdo un caso análogo, pero en otra Academia, la Academia Española; allí se presentaba el gran poeta, el poeta inmortal D. José Zorrilla, y también tenía que escribir un discurso en prosa, y también se resistió por impulsos de su naturaleza poética á abandonar en el acto solemne su maravillosa rima, y al fin, resueltamente, dió forma, y leyó, entre grandes aplausos, su discurso de recepción, *pero escrito en verso*. También el admirable autor de *El zapatero y el rey* volvió en aquella ocasión á sus zapatos. Hay zapatos que son coturnos.

En suma, que nuestro nuevo compañero ha escogido para este acto solemne, no un tema general, sino un problema concreto y al parecer modesto: el de la resolución de las ecuaciones de cuarto grado por un nuevo método. Y así que el que lea su discurso encontrará poca retórica, pero lo encontrará sembrado, como el cielo de estrellas, de fórmulas matemáticas, que son las prodigiosas constelaciones de otro cielo.

Verdad es que el problema de la resolución de ecuaciones de cuarto grado es un problema hace mucho tiempo resuelto y por múltiples artificios; de modo que parece difícil encontrar en él variedad tentadora y materia virgen y algo nuevo que pueda interesar al espíritu matemático moderno. Y, sin embargo, el Sr. Krahe ha vencido estas dificultades, y las ha vencido brillantemente, presentando un método no solamente nuevo, sino que con él marca nuevas y fecundas orientaciones: tal es el mayor mérito, á mi entender, que resplandece en su notabilísimo trabajo.

El Sr. Krahe protesta, y protesta con razón, contra todo exclusivismo en la ciencia matemática, ya en favor del análisis, en el que por lo demás todos admiran sus prodigiosos medios de investigación, ya en favor de las transformaciones y representaciones geométricas, que cuando se las contempla no al través del microscopio clásico, para achicarlas, sino al través de un telescopio para explorar sus senos infinitos, en ellos se adivinan grandes conquistas de la ciencia del porvenir.

El nuevo académico, en su memoria, como habéis oído y podéis leer, parte de lo más sencillo, para irse elevando á lo más general y complicado. A la manera que el naturalista parte del protoplasma elemental para seguir el desarrollo de la vida y llegar á los seres superiores.

Aquí lo elemental, el protoplasma, si vale la imagen, de las ecuaciones, son las de primer grado, y escogiendo las magnitudes más generales, es decir, las imaginarias ó cantidades complejas, cita el Sr. Krahe la multiplicación y división de vectores, que con la cita basta, y pasa desde luego á las ecuaciones de segundo grado. Ya en ellas empiezan á dibujarse las líneas generales del nuevo método, como en la escala zoológica se dibujan vagamente en los animales inferiores órganos que más adelante adquirirán suprema perfección.

En este ejemplo elemental está ya un esquema de la idea que el Sr. Krahe ha de aplicar á las ecuaciones superiores; este ejemplo da una muestra del propósito del autor á unir la Geometríà y el Análisis, no como rivales, sino como partes de una ciencia total, que armoniza sus esfuerzos para el descubrimiento de una teoría ó, mejor dicho, para la solución de un problema único: el soberano problema de la verdad matemática.

El nuevo académico recuerda que las ecuaciones binomias son las más sencillas entre las ecuaciones de grado superior, las que se resuelven inmediatamente por la extracción de una raíz, y el límite de lo elemental en este género se encuentran pues en las binomias de segundo grado.

El alumno más modesto de una clase de matemáticas de Instituto sabe ó debe saber cómo se transforma una ecuación de segundo grado general en ecuación binomia; pero cuenta que á veces en lo más sencillo está el germen de lo más sublime, y el Sr. Krahe no desdeña este método infantil. No lo desdeña pero le da sentido más alto y demuestra inmediatamente que la transformación analítica se interpreta por una traslación geométrica entre puntos conocidos, á saber: el origen y el punto medio del segmento que une los dos afijos que representan las raíces en el plano de Cauchy.

Porque este punto medio se conoce inmediatamente por la ecuación misma.

Pues aquí tenéis un esquema, como decía, del método que aplicó el Sr. Krahe á las ecuaciones de tercer grado, en un artículo por todo extremo interesante publicado en el periódico extranjero que lleva por título *Mathesis*, revista editada en París y en Gante y en la que colaboran ilustres matemáticos del extranjero.

Este es todavía el método que nuestro compañero aplicó, en un artículo publicado en la revista de esta Academia, á las ecuaciones armónicas de grado superior.

Este es, por fin, el método que desarrolla brillantemente en la Memoria que acabáis de oir para las ecuaciones de cuarto grado, y el que es seguro, dado su poderoso ingenio, su actividad y su amor á la ciencia, que generalizará para otras ecuaciones de grado superior.

Y tal método, prescindiendo de pormenores técnicos, y considerado desde un punto de vista más alto, es como, ya lo podréis columbrar, no sólo sencillo, sino fecundo y grandemente comprensivo.

Es como enlazar, según antes dije, lo más complejo con lo más simple por artificios especiales de transformación analítica y geométrica á la vez; es como proyectar, si vale la imagen, lo múltiple en lo uno, buscando en la sencillez de éste la explicación de lo complicado de aquél.

Así, en el ser zoológico primitivo está todo lo que, desarrollándose, ha de dar el sistema poderoso del ser altamente organizado.

Y así busca el Sr. Krahe en la ecuación general de segundo grado, como antes recordábamos, la ecuación binomia de segundo grado también; y en la ecuación de tercer grado la binomia de este mismo grado; y en la ecuación armónica del grado n la binomia todavía del grado n; y en la ecuación del cuarto grado, no ya una ecuación binomia, pero sí una ecuación recíproca que por dos ecuaciones de segundo grado puede resolverse.

No otra cosa ha hecho el análisis en estos casos y en otros muchos, convirtiendo por *transformaciones analíticas* ecuaciones complicadas en ecuaciones de extrema sencillez.

Pero la eficacia de las transformaciones analíticas á veces, no digo siempre, dependen del ingenio del matemático que las inventa, de una especie de intuición genial, de la casualidad en alguna ocasión, sin que *a priori* tales transformaciones resulten ó evidentes por sí ó como términos finales de un procedimiento lógico.

En cambio, y por ingeniosísimo contraste, el nuevo académico, en todos los trabajos que he citado y en la Memoria que habéis oído, enlazando la Geometría con el Análisis, va en este sobre seguro; y cuando emplea una transformación sabe de antemano el resultado que ha de producir, porque lo ha visto dibujado, si vale la palabra, en una construcción geométrica.

Yo no he de repetir lo que el Sr. Krahe explica tan bien y con tan perfecta claridad y con tan perfecto enlace en su Memoria, y he de contentarme con una síntesis de todos los trabajos antes citados, y de los que siguiendo el mismo rumbo pueda realizar en lo sucesivo.

*
* *

Todas las raíces de una ecuación, que admitiendo el caso más general podemos suponer que sean imaginarias, y si algunas no lo son lo mismo da, porque lo particular está comprendido en lo general, pueden suponerse representadas por afijos, ó sea por puntos determinados en un plano, que, para abreviar, puede llamarse el plano de Cauchy.

Estos puntos determinarán un polígono de tantos lados como unidades tiene el grado de la ecuación. Pero mientras el problema no se resuelva, ni se conocerán dichos puntos, ni se conocerá el polígono.

Poco importa, porque de las propiedades de éste y utilizando los coeficientes de la educación, pueden deducirse determinados puntos, que para darme á entender con claridad llamaré *puntos característicos;* y estos puntos podrán determinarse, y deberán determinarse, como antes dije, si el método ha de ser eficaz, por medio de los coeficientes de la ecuación dada, que son cantidades conocidas; en suma, estos puntos característicos se fijarán mediante ecuaciones de grado inferior al de la propuesta ó que sean casos particulares fáciles de resolver.

Así, en la ecuación de segundo grado puede conocerse directamente por el segundo coeficiente de la ecuación el *punto medio* del segmento de los afijos, que será punto característico para esta ecuación.

Y en la ecuación de tercer grado podrán deducirse dos puntos de los que he llamado característicos, y que Neuverg llama centros isodinámicos.

Y en las ecuaciones armónicas del grado n es también fácil obtener *dos de estos puntos,* que designa el autor citado con idéntico nombre, con el de centros isodinámicos.

Y en las ecuaciones de cuarto grado, por fin, será fácil hallar *tres puntos* característicos, que son los puntos de Miquel, y que se obtienen por una ecuación de tercer grado.

Con lo cual hemos pasado de los puntos desconocidos á puntos conocidos en número inferior. Pues apóyase en éstos el Sr. Krahe por transformaciones geométricas perfectamente determinadas y sumamente sencillas, como son traslaciones, inversiones, giros y transformaciones de hometecia, cambia aquel polígono de los afijos en otro elemental, todavía desconocido, que será en las ecuaciones de segundo grado el conjunto de dos puntos simétricos respecto al origen, y en las de tercer grado serán los tres vértices de un triángulo equilátero, y en las armónicas del grado n se habrán convertido en los vértices de un polígono regular, y en las ecuaciones de cuarto grado en los vértices de un polígono correspondiente á una ecuación recíproca.

Nada más elemental, y agreguemos nada más ingenioso: nada que hable más y con más elocuencia al sentido geométrico.

El método, en pocos términos, se condensa; casi en tres:

1.° Determinación de los puntos característicos.

2.° Transformaciones elementales que son de primer grado, enteras ó fraccionarias.

Y 3.° Resolución de una ecuación binomia ó recíproca.

Y este método geométrico da sentido, da significación y firmeza y rumbo seguro al método analítico; porque cuando se aplican las transformaciones analíticas sabemos de antemano, que han de ser eficaces y conocemos el término á que hemos de llegar: de otro modo iríamos transformando la ecuación á la gracia de Dios y á lo que resultase.

El procedimiento del nuevo académico, sólo con lo que precede, se comprende que puede ser fecundo, y además por él se da fuerza intuitiva á los métodos históricos de este problema.

***

Ampliemos las anteriores consideraciones con un ejemplo:

En el orden analítico, las ecuaciones de quinto grado se han resuelto por funciones elípticas, y entre todos los métodos que siguen esta orientación, podemos citar uno, el de Halphen.

A la manera que muchas ecuaciones se reducen á ecuaciones binomias, que es como decir á la división del período trigonométrico, ó sea de la circunferencia, en partes iguales, las ecuaciones de quinto grado pueden hacerse depender de la división de los períodos de las funciones elípticas en cinco partes iguales, ó sea de la ecuación elemental que determina esta división del período. Y puede conseguirse esta dependencia por una serie determinada de transformaciones; mas por ingeniosas que sean, ¡qué largas, ¡qué enojosas!, ¡qué áridas para el principiante... y aun para el que, sin ser principiante, tenga en Matemáticas sentido artístico de orden y armonía!

Cuando estas transformaciones alcancen una significación geométrica, como en el método del Sr. Krahe, todo este problema se iluminará, por decirlo así, al destello de una idea superior.

Ya el Sr. Krahe tenemos entendido que trabaja en este nuevo y arduo problema.

***

Y con lo dicho pudiéramos terminar, en rigor, este discurso; pero los trabajos del Sr. Krahe son tan interesantes, son tan sujestivos, que una idea llama á otra, y el horizonte se ensancha, y no quisiera terminar mi tarea sin apuntar, siquiera sea de paso, algunas consideraciones que me ocurren.

Más de un crítico descontentadizo, que no sería crítico de pura raza si no lo fuese, pudiera decirnos al Sr. Krahe y á mí, que en esta materia por pecador me confieso, que al fin y al cabo este problema de resolver ecuaciones es un problema de importancia muy relativa y de puro alarde matemático.

El que así piense se equivoca, no de medio á medio, sino de entero á entero; porque la resolución de las ecuaciones es un problema de inmensa importancia, no sólo en la ciencia pura, en la que hay también otros problemas que por otras relaciones se expresan, sino muy principalmente en la Física matemática, en la Física experimental y, además, en todas las ciencias de aplicación, y, por lo tanto, en toda la industria.

Las ecuaciones expresan acaso más de la mitad, y digo la mitad por decir algo, de toda la ciencia matemática; y se desarrollan en serie que no acaba y que cada vez se eleva á términos de mayor complicación y sublimidad. Empezando por las sencillísimas ecuaciones de primer grado; elevándose á las de grado superior; pasando al campo sin límites de las ecuaciones trascendentes; saltando á otra región aún más extensa, la de las ecuaciones diferenciales; dilatándose en época moderna hasta abarcar las nuevas teorías de las ecuaciones integrales, como, por ejemplo, la de Fredholm, en que ya no basta con que estén complicadas las incógnitas y los datos con relaciones algebraicas, ó trascendentes, ó diferenciales, sino que aquellas incógnitas y sus derivadas mismas aparecen bajo el signo integral: sólo con esta enumeración tendría yo infinitos espacios que recorrer. Pero aquí pongo término, no porque termine la materia ó porque haya llegado al límite del horizonte, que á este límite no se llega nunca, sino por no hacer interminable el recuento y no fatigar con exceso la atención con que me honran mis oyentes.

Mas á pesar de esta inmensa riqueza científica, muchos escritores, muchos críticos y hasta ilustres hombres de ciencia con alardes filosóficos, parece como que desdeñan toda ecuación en general; y aun los hay, que miran compasivos á los que á esta rama del saber humano dedican sus esfuerzos, porque suponen que toda ecuación A = A es una verdadera *tautología*, de todo punto estéril, aunque á ella se aplique toda la lógica aristotélica.

Vamos despacio.

Es, que *una ecuación* matemática, en general, no expresa simplemente que *una cosa* es igual *á sí misma* con identidad de forma y esencia y por gusto á la repetición estéril; las ecuaciones, por ejemplo en las Ciencias físicas, expresan *leyes del mundo material*, relaciones entre diversas magnitudes de las que se agitan en el seno del cosmos, aunque al reducirse á números estas ecuaciones expresen igualdades numéricas. Cuando se dice «la atracción entre dos astros es igual al producto de las masas, dividido por el cuadrado de la distancia y multiplicado el resultado por una constante», no se escribe una *tautología*, una *identidad;* se escribe una ley exacta ó aproximada del Universo, en la que entran en acción diferentes magnitudes, y que encierra en sus contornos algebraicos toda la Astronomía y una buena parte de la Física matemática clásica. Y como las ecuaciones expresan leyes del mundo inorgánico, por ellas se resuelven problemas prodigiosos, en los que parece imposible haya penetrado la inteligencia humana; y cada vez son mayores y mayores y más increíbles estos triunfos, sin que se agote la llamada tautología.

Para condensar mis ideas y hacer menos árido este discurso, me limitaré á citar de paso algunos ejemplos. De este modo se comprenderá mejor la importancia de las ecuaciones analíticas, desde aquella ecuación infantil en que se plantea «el problema del milano y las palomas», que tampoco era una tautología, hasta la suprema región de las ecuaciones integrales y otras de más allá.

⁂

Empecemos esta digresión final.

Cuando bajo la acción de ciertas energías se ioniza (y perdóneseme el empleo de palabras que no están en el Diccionario, pero que son insustituíbles) un gas, ¿quién hubiera podido creer hace algunos años que era posible *contar el número* de los millones de estos elementos eléctricos engendrados en el flúido?

Pues esto se realiza de muchas maneras, combinando siempre el método experimental con las ecuaciones del matemático.

Basta evaporar agua en el espacio que encierra el gas, provocar por la expansión de éste la condensación del vapor sobre los centros eléctricos, con lo cual *cada ión* será el centro de *una gota;* y luego ver cómo la neblina que de este modo se forma desciende lentamente; y luego medir la velocidad del descenso; y luego hacerse cargo de que esa misma velocidad es aquella con que cada gota cae, y por fin acudir á una fórmula del célebre Stokes, quiero decir á *una ecuación* que expresa la *velocidad* de la caída en función del *diámetro* de la gota.

Con lo cual el problema está resuelto; porque si *despejando el diámetro en dicha ecuación* en valores de la velocidad se conoce este diámetro de la gota, se conoce su volumen, y si por las fórmulas de la termodinámica se determina la cantidad de agua evaporada, se podrá conocer con esa cantidad de agua cuántas gotas se han formado, y como hay tantas gotas como iones, el número de éstos quedará definitivamente determinado.

Si las ecuaciones fueran pura tautología, hay que confesar que la fórmula de Stokes es una tautología maravillosa, que burla la sentencia de esterilidad del crítico, que condenó á las ecuaciones en general á una impotencia perpetua.

***

Y permítaseme otro ejemplo más; otra maravilla de la ciencia moderna.

Cuando se acusa á las ecuaciones analíticas de mero juego de cubiletes matemáticos, hay que buscar testigos de descargo, y el mejor testigo es la ciencia práctica, la de los hechos.

Con lo cual quiero poner en evidencia que esta digresión no es inoportuna.

¿Cuántas moléculas existen en un peso dado de gas, por ejemplo, en el que se llama *molécula-gramo*, se pregunta la insaciable curiosidad del sabio? Que es como preguntar por qué cifra está formado el número de Avogadro; y no hace mucho, esta pregunta hubiera sido, más que una pregunta impertinente, una pregunta ridícula. Pues hoy, por muchos métodos, y entre otros por las admirables experiencias de Perrín, aplicadas á las fórmulas de los gases, la pregunta se contesta y el número se fija con alta probabilidad.

Perrín finge, mejor dicho, *fabrica un gas* en el seno de un líquido; este gas artificial es una emulsión; y sus pequeñísimas partículas simbolizan las moléculas de cualquier otro flúido gaseoso. Afirma además el insigne experimentador, teórica y experimentalmente, que las leyes matemáticas de los gases reales y del gas que ha fabricado son idénticas y á ambos los encierra en la misma fórmula. Pero el gas que él fabricó está al *alcance del microscopio*, puede contar el número de sus partículas, y por carambola, si vale la palabra, contará las de los gases en la realidad física. Esto es todo.

Hay, en efecto, una fórmula,

$$\log \frac{n_0}{n} = \frac{N}{RT} m \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right) g h,$$

que enlaza con cantidades accesibles al microscopio este número N de Avogadro, y como en dicha ecuación todo es conocido menos el número N, se *despeja la incógnita*, que esta frase es ya de sentido vulgar. Las multitudes á veces tienen más instinto que los doctos, aunque en otras ocasiones suceda lo contrario, y un hombre solo vea mejor que millones y millones de seres más ó menos inteligentes. Hay en la vida ejemplos para todo.

Ello es que mediante una ecuación, *la ecuación de los gases*, se realiza este prodigio semifantástico: contar *las moléculas, los átomos ó las partículas.*

Ya lo dijo Henri Poincaré, el gran matemático de Francia, gloria del siglo XIX: «Las moléculas han dejado de ser una hipótesis; hasta parece que *las vemos, cuando sabemos contenerlas.*»

Porque, en efecto, por los procedimientos de Perrín y por otros muchos procedimientos, se demuestra que el número de que se trata está representado por esta cifra: 68 seguido de 22 ceros, ó sean 680.000 trillones, en numeración española.

La cifra es tan formidable, que vale la pena de escribirla solemne y aislada, con todo su acompañamiento de ceros:

$$680000.\underset{3}{000000}.\underset{2}{000000}.\underset{1}{000000}.$$

Y me ocurre incidentalmente, que al ver esta cifra el genio de la guerra acaso pensará: «¡qué numero, *si estos átomos fueran hombres*, para una espléndida movilización!» ¡Cómo ante ella se achican movilizaciones que sólo dan millones y sólo tienen seis ceros! ¿Qué son seis ceros ante veintidós?

Es que también acude á sus movilizaciones la naturaleza; pero el sabio sólo las utiliza para sublimar el espíritu y para iluminar el cerebro, sin detrimento del cráneo.

* * *

Y sigamos con nuestros ejemplos y con nuestras ecua ciones.

Contar moléculas es realmente empresa increíble, pues la ciencia moderna aún pretende más: *medir el diámetro de estas moléculas* ó átomos en milímetros; quiero decir en fracciones de milímetro.

Problema que sólo el pretender resolverlo era en otro tiempo llegar al delirio, una insensatez en la ciencia antigua, y que hoy es *un problema* serio y formal; ya no es un delirio, y al intentar resolverlo se obtienen resultados de verdadera importancia. Todo gracias á *una ecuación*, á una *tautología*, dijera el crítico desdeñoso; y el problema se resuelve, como se resuelven todos los problemas matemáticos de la Física, por un procedimiento único, general, por un método que está al alcance de todas las inteligencias y, por fin, mediante *una ecuación.*

Se quiso saber el número de iones de un espacio; se quiso saber el número de moléculas de un gas; pues se quiere determinar ahora *el diámetro de una de estas moléculas ó átomos.*

Y bien, del estudio experimental y teórico de los fenómenos naturales deduciré leyes cuantitativas, ó sean ecuaciones en que entren estos números ó estas magnitudes que bus co, y de estas ecuaciones, como todo el mundo dice, *despejaré la incógnita.* Más claro: pasaré de la ecuación primitiva, por procedimientos lógicos ó de identidad, de esa identidad tan inútil, á otra ecuación en la que el primer miembro esté expresado por la incógnita que pretendo hallar y el segundo miembro por cantidades conocidas. Más claro aún: de la tautología $A = A$ á la tautología $X = C$; y si conozco C, por ley tautológica, perdóneseme el ensañamiento, sabré lo que X vale.

Así en este último problema que indicaba, el del *diáme-*

tro de los átomos, y en la ecuación general de los gases transformada por Van der Waals,

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R\,T,$$

ecuación en la que se tiene en cuenta en a la influencia de la cohesión y en b el volumen verdadero de las moléculas; en esa ecuación, repito, veré que entra la *incógnita*, porque si entra el volumen entra el diámetro, y de esta ecuación deduciré la fantástica x que buscábamos, que resulta para el argon igual 2,85 multiplicado por la unidad, dividida por cien millones, es decir, por 10^{-8}, fracción pequeñísima del milímetro: del milímetro dividido en cien millones de partes, apenas *tres*.

Que al penetrar en estos rincones de lo infinitamente pequeño, siempre nos encontramos con legiones de ceros en el numerador ó en el denominador del número resultante.

Estos ceros vienen unidos á unas cuantas *cifras significativas*, que se comprueban en multitud de experiencias y en los fenómenos más distintos de la Física. Pero todo el ingenio de los experimentadores y toda su habilidad se estrellarían en la impotencia, si no determinasen previamente *ecuaciones* en que estuvieran contenidas las incógnitas combinadas por las leyes del análisis con parámetros accesibles á la observación y á la medida.

Las ecuaciones continúan, pues, imperando como árbitros supremos en todos estos prodigiosos problemas, que han pasado de ser *idealismos vaporosos* á ser realidades *medibles y contables.*

***

Un último ejemplo de la alta función que ejercen las ecuaciones en cualquier investigación, por profunda que sea, de la Física matemática ó experimental.

Pretender contar los iones, contar las moléculas de un gas, determinar su diámetro, si no se tratase de hechos positivos, sería pasar los límites de lo sensato y de lo verosímil; pero á más aspira el poder de estas ecuaciones matemáticas: á fijar el diámetro de los electrones.

Medir el volumen y el peso de un astro que se ve, que casi con el telescopio se maneja, era ya un triunfo prodigioso de la ciencia clásica; pues hoy se aspira á medir la masa y el radio de estos átomos de electricidad á que se da el nombre de electrones, y por una fórmula bien sencilla. Sin remontarse mucho, acudiendo á la más elemental teoría, voy á citar la fórmula que expresa la masa electromagnética de un electrón, ó mejor dicho, su primera aproximación, que es

$$m = \frac{2 \mu e^2}{3 a}.$$

Sabemos que m representa la masa, la cual se puede medir, por ejemplo, mediante la teoría de los rayos catódicos, y la de la ionización antes citada, gracias también á varias ecuaciones aplicadas á procedimientos experimentales; y en dicha ecuación a es el radio del electrón, suponiendo que fuera esférico.

De modo que este problema inconcebible depende de una ecuación de *primer grado*, y no hay mas que despejar a.

Y cuando una ecuación de *primer grado* da estos resultados no hay motivo para ver con cierta desdeñosa superioridad las ecuaciones de tercer y cuarto grado, *que tiene mucho en sí:* más pequeño es un átomo y encierra un mundo.

*
* *

He presentado estos ejemplos de la manera vaga y general que pueden presentarse en un discurso de esta clase, y dirigiéndome no sólo á los que ya conocen la materia, para los que cuanto yo digo es inútil, y las reservas críticas que pudiera hacer sobre definición de diámetros y grandes números, ellos las harán de antemano; sino dirigiédome al público en general, que no se compone de especialistas. A este público he querido explicarle que todas las críticas más ó menos filosóficas que contra las ecuaciones matemáticas se dirigen, como si fueran lucubraciones estériles de los sabios, son de todo punto inconsistentes y vacías.

***

Y no sólo la inmensa teoría de las ecuaciones en general, sino las grandes creaciones matemáticas son prodigiosas en la región de las ideas y son fecundísimas en las ciencias de aplicación; que sin las matemáticas la industria en general es rutina, y la rutina significa derroche de fuerza, impotencia y atraso.

De aquí la importancia de las matemáticas en la civilización moderna.

Podría borrarse del mapa toda Grecia: Arquímedes y Euclides se elevarían eternos sobre las ruinas de aquel pueblo admirable. Y no hablemos de épocas más recientes, no hablemos de Newton, ni de Hamilton, ni de lord Kelvin, ni de Descartes, ni de Pascal, ni de Leplace, ni de Poisson, ni de Cauchy, ni de Lagrange, ni de Poincaré; ni hablemos de Leibnitz, ni de Jacobi, ni de Gauss, ni de Abel, ni de tantos otros, que serán más duraderos que las pirámides de los Faraones; contra ellos es impotente la más potente artillería, porque sus nombres flotan en la región eterna de la verdad, y allí no llegan ni balas ni metralla.

Animado de estos sentimientos, que son ya muy viejos en mí, y en edad ya casi me hacen la competencia, me dolía en el primer discurso que tuve que pronunciar en esta Academia, y me dolía quizá en términos sobradamente acres, de la carencia de grandes matemáticos en España en los últimos siglos y del desdén con que entre nosotros se miraba el cultivo de esta ciencia suprema.

Cincuenta años han pasado y el horizonte se aclara y alborea. Hoy en Institutos, en Universidades, en Escuelas especiales, militares y civiles, en la enseñanza privada, en todas partes hay profesores eminentes de ciencias matemáticas y físicomatemáticas, que son las ciencias á que me concreto; hoy se estudian y se comprenden los trabajos de los matemáticos extranjeros de primer orden, y empiezan trabajos propios, dignos de alta consideración y que abren anchos horizontes para nuestra patria y la prometen días gloriosos.

Esta misma recepción, por el discurso del Sr. Krahe y por el premio que ha de otorgarse al Sr. Rey Pastor, es un ejemplo de lo mucho que vale y puede el nuevo espíritu matemático que entre nosotros despierta.

Séanos permitido buscar con ansia, entre las nubes de la pólvora y de los explosivos, rayos de luz que alumbren un nuevo arranque de civilización de la que simbolizan las grandes naciones, y un nuevo esfuerzo en el orden intelectual de la patria española: sea nuestro lema trabajo y esperanza.