

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DISCURSO INAUGURAL

DEL AÑO ACADÉMICO 1972-1973

LEIDO EN LA SESIÓN CELEBRADA EL DÍA 22 DE NOVIEMBRE DE 1972

POR EL ACADEMICO NUMERARIO

EXCMO. SR. D. JUAN GARCIA-FRIAS GARCIA



M A D R I D

DOMICILIO DE LA ACADEMIA:

VALVERDE, 22.—TELÉFONO 221-25-29

1 9 7 2

Depósito Legal: M. 32.843.-1972

TALLERES GRAFICOS VDA. DE C. BERMEJO.—J. GARCIA MORATO, 122.—MADRID

LOS ELEMENTOS NUMERICOS DE n DIMENSIONES

En la presente investigación se pretende mostrar que los números reales considerados como «conjuntos n -ordinales» llevan implícito la estructuración puramente aritmética de n -dimensiones, cuya aplicación al espacio se corresponde, para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$, con las estructuras geométricas de una, dos y tres dimensiones, respectivamente, y, en particular, con la línea recta, el plano y el espacio, para las estructuraciones que aquí denominamos *elementos numéricos de varias dimensiones*, y, en su consecuencia, las proposiciones contenidas en los axiomas geométricos son también peculiares de dichos *elementos*, las cuales pueden demostrarse partiendo de los axiomas aritméticos y de la teoría implícita en los mismos —*teoría matricial dimensional*—, presentándose como ejemplos las del primer grupo de axiomas de Pasch-Schur —axiomas de ordenación y enlace— y las del sistema de Hilbert.

Expreso mi agradecimiento al profesor Rvdo. P. Dou MaxdeXexás, S. J., y al profesor Ancochea Quevedo, por su amabilidad al examinar detenidamente este trabajo y por sus interesantes observaciones, que me han sido muy útiles en la redacción definitiva.

* * *

El número en su acepción ordinal y en su idoneidad para constituir, con otro u otros, el ente básico de los elementos numéricos de varias dimensiones, lo llamaremos aquí *número dimensional* o simplemente *dimensional*, y al conjunto de estos dimensionales lo denominaremos *término dimensional* o simplemente *término*. Es obvio que dos términos de un solo dimensional, (A) y (A') , constituyen un intervalo $(A) \vdash (A')$ (1), que es igual a la diferencia entre los números cardina-

(1) En lo sucesivo utilizaremos el signo $\vdash$ puesto entre los dos *terminales* —voz que aplicaremos a los términos que delimitan al intervalo de una dimensión— para expresarlo por medio de ellos.

les correspondientes a los dos dimensionales. Este intervalo, que vamos a designar, en general, con el símbolo ΔE_1 , es *unidimensional*, porque los términos que contiene son de un solo dimensional, y de una *dimensión*, ya que al tratar de ésta en sentido puramente aritmético, puede considerarse de un modo lato la *dimensionalidad* de un conjunto numérico de esta clase, como *el grado de variabilidad independiente de sus términos*. Conviene advertir, para evitar confusiones, que la voz *dimensión* la empleamos aquí con carácter exclusivo para la posesión de la cualidad que propiamente implica, y así tenemos, por ejemplo, un intervalo de una dimensión, de dos dimensiones, etc., etc., mientras que el adjetivo *dimensional* se concreta a su verdadero significado de pertenencia o también referencia a las estructuraciones de ciertas dimensiones. El intervalo ΔE_1 es, además, *elemental*, porque la *elementalidad dimensional* puede aritméticamente considerarse como *la cualidad de toda estructura de n -dimensiones de estar determinada por $n + 1$ cualesquiera de sus términos dimensionalmente idóneos, y solamente $n + 1$, que es el mínimo necesario de su dimensionalidad*, siendo evidente que al estar el intervalo $(A) \vdash (A')$ constituido por la parte de la sucesión de los números reales comprendida entre los dos términos que son sus terminales, goza de dicha cualidad, y si lo consideramos en toda su extensión, es decir, en la totalidad de la sucesión de los números reales, tanto positivos como negativos, tendremos el *elemento* E_1 unidimensional de una dimensión.

Como con esta clase de términos —o sea, de un solo dimensional— no es posible distinguir si los intervalos ΔE_1 pertenecen a un mismo E_1 cuando no son contiguos, surge la necesidad de ampliar el término con otro dimensional B , pues entonces sí que es posible tal distinción, siempre que el término (A, B) que así resulta, conserve su cualidad indivisible, es decir, que los dos dimensionales A y B no tengan entre sí ninguna relación cardinal, sirviendo solamente en su función determinante, delimitadora y ordenadora de los dos intervalos dimensionales $A' - A$ y $B' - B$, que así se presentan *condensados*, constituyendo un solo intervalo de una dimensión delimitado por los términos (A, B) y (B', B') , que será bidimensional por constar sus términos de dos dimensionales.

El intervalo $(A, B) \vdash (A', B')$ es *elemental*, porque también goza de la cualidad expuesta para la elementalidad dimensional, ya que si al dividirlo en k partes cualesquiera, de modo que se verifique que la razón entre los intervalos dimensionales respectivos.

$$\frac{\Delta b'}{\Delta a'} = \frac{\Delta b''}{\Delta a''} = \frac{\Delta b'''}{\Delta a'''} = \dots = \frac{\Delta b^{(k)}}{\Delta a^{(k)}} = m$$

es la misma para todos, tendremos

$$\begin{aligned}\Delta b' &= m \Delta a' \\ \Delta b'' &= m \Delta a'' \\ \Delta b''' &= m \Delta a''' \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta b^{(k)} &= m \Delta a^{(k)}\end{aligned}$$

$$\Delta b' + \Delta b'' + \Delta b''' + \dots + \Delta b^{(k)} = m (\Delta a' + \Delta a'' + \Delta a''' + \dots + \Delta a^{(k)})$$

$$\frac{\Delta b' + \Delta b'' + \Delta b''' + \dots + \Delta b^{(k)}}{\Delta a' + \Delta a'' + \Delta a''' + \dots + \Delta a^{(k)}} = \frac{B' - B}{A' - A} = m$$

o sea, que la condición por la cual los términos del intervalo $(A, B) \vdash (A', B')$ pertenecen a él, está definida exclusivamente por esta relación entre sus dos terminales, sin ninguna otra condición, estando caracterizada, en su consecuencia, la *elementalidad dimensional* del ΔE_1 *bidimensional* porque la *razón entre los intervalos dimensionales del todo es la misma que la de cada una de las partes*, y, viceversa, los intervalos ΔE_1 *contiguos que tengan la misma razón entre sus respectivos intervalos dimensionales, pertenecen a un mismo $\Sigma \Delta E_1$, que es la suma de todos ellos*. A esta razón constante la llamaremos *módulo unidimensional* y la designaremos por el símbolo m_1 . El ΔE_1 *bidimensional elemental* que así se obtiene, continúa siendo de una dimensión con la ampliación del término en otro dimensional B, ya que al ser la razón $\Delta b/\Delta a = m_1$, constante, $\Delta b = m_1 \Delta a$, y, por consiguiente, el dimensional A sigue siendo el único independiente.

* *

La comparación —operación matemática por excelencia— de estos intervalos ΔE_1 *bidimensionales* sólo es posible de un modo directo, cuando cada uno de los intervalos dimensionales del mismo orden de los dos intervalos $(A, B) \vdash (A', B')$ y $(A, B) \vdash (A', B')$ son iguales en ambos, es decir, que

$$\begin{aligned}\Delta a &= A' - A = A' - A \\ \Delta b &= B' - B = B' - B\end{aligned}$$

o solamente los dos Δa o los dos Δb , pues entonces los dos ΔE_1 propuestos, son iguales o desiguales, respectivamente, ya que en los demás

casos en que son desiguales los dos Δa y los dos Δb , el valor de ΔE_1 sólo puede obtenerse de un modo indirecto. A estos intervalos ΔE_1 que son iguales por serlo sus dos intervalos dimensionales Δa y Δb , dos a dos, y tienen el mismo signo o el opuesto en ambos a la vez en los respectivos órdenes en cada ΔE_1 , los denominaremos *intervalos idénticos*, porque en realidad les corresponde esta calificación con respecto a los que también son iguales, pero no lo son sus correspondientes intervalos dimensionales Δa y Δb , o aunque lo sean, no son opuestos ambos intervalos ΔE_1 .

Hemos visto que una sucesión de ΔE_1 contiguos del mismo m_1 —y, por consiguiente, también los intervalos idénticos— pertenecen a un mismo E_1 , pero si tales intervalos no son contiguos, por ejemplo, $(A, B) \vdash (A', B')$ y $(A'', B'') \vdash (A''', B''')$, y el m_1 del $(A', B') \vdash (A'', B'')$ —o sea, de un terminal del primero con un terminal del segundo— es distinto del m_1 de aquellos dos, tendremos:

$$\begin{aligned} B' - B &= m_1 (A' - A) \\ B'' - B' &= m_1 (A'' - A') \\ B''' - B'' &= m_1 (A''' - A'') \\ (B' - B) + (B'' - B') + (B''' - B'') &= \\ &= m_1 ((A' - A) + (A'' - A')) + m_1 (A'' - A'), \end{aligned}$$

o sea, que al no poderse poner el módulo unidimensional como factor común, no puede obtenerse el m_1 para el $(A, B) \vdash (A''', B''')$, y, por tanto, los dos intervalos ΔE_1 propuestos no pertenecen a un mismo E_1 . Ahora bien, es evidente que el hecho de tener dos ΔE_1 el mismo m_1 cuando son idénticos, aunque no pertenezcan a un mismo E_1 , tiene que suponer una relación entre ellos estrechamente ligada a la cualidad que caracteriza al E_1 bidimensional como elemento de una dimensión. En efecto, si dos ΔE_1 son idénticos, como

$$\begin{aligned} (A, B) &\vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \\ (A', B') &\vdash (A' + \Delta a, B' + \Delta b) \end{aligned}$$

sus terminales delimitan los intervalos

$$\begin{aligned} (A, B) &\vdash (A', B') \\ (A + \Delta a, B + \Delta b) &\vdash (A' + \Delta a, B' + \Delta b), \end{aligned}$$

que también son idénticos, pues

$$\begin{aligned}(A' + \Delta a) - (A + \Delta a) &= A' - A \\ (B' + \Delta b) - (B + \Delta b) &= B' - B.\end{aligned}$$

Como Δa puede tener un valor cualquiera, resulta que todos los pares de términos $(A + \Delta a, B + \Delta b)$ y $(A' + \Delta a, B' + \Delta b)$, tomados a partir de los respectivos términos del par (A, B) , (A', B') , delimitan intervalos ΔE_1 idénticos, es decir, que constituyen una sucesión de ΔE_1 idénticos, y lo mismo que la sucesión de los números reales admiten entre cada dos de ellos otros ΔE_1 del mismo m_1 , que, a su vez, admiten otros entre cada dos, y así sucesivamente, llegándose así a la conclusión de que esta sucesión de ΔE_1 se sucede como la de los números reales, no teniendo entre ellos ningún término común, porque si lo tuvieran se confundirían en un solo ΔE_1 , ya que un término cualquiera y un m_1 determinan un elemento E_1 único.

Se puede demostrar del mismo modo, que los dos ΔE_1 idénticos propuestos al principio,

$$(A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \quad \text{y} \quad (A', B') \vdash (A' + \Delta a, B' + \Delta b),$$

forman parte de otra sucesión de ΔE_1 idénticos con otro módulo m_1 , cuyos terminales son pares de términos sobre los intervalos

$$(A, B) \vdash (A', B') \quad \text{y} \quad (A + \Delta a, B + \Delta b) \vdash (A' + \Delta a, B' + \Delta b),$$

y, por tanto, gozan de la misma propiedad con respecto a aquellos intervalos. Esta propiedad podemos muy bien denominarla *paralelismo aritmético*, porque al concretarla a las líneas rectas —que, a su vez, son la concreción de los E_1 en el espacio—, nos encontramos con el paralelismo geométrico, pero como este último se restringe al campo de la línea recta y del plano, mientras que el aritmético es peculiar de los elementos de cualquier número de dimensiones, como veremos más adelante, parece más apropiado emplear una denominación que lleve implícito el significado general del mismo, y puesto que la cualidad por la cual los E_1 pertenecen a una sucesión de esta clase es que tienen el mismo m_1 , y, como también veremos después, esta cualidad, en general, está implícita en lo que denominaremos *matriz dimensional*, o simplemente *matriz*, los elementos correspondientes pueden llamarse

isomátricas, y, por consiguiente, la voz *isomatrismo* parece la más adecuada para designar a esta cualidad en lugar de 'paralelismo aritmético.

* *

Es fácil observar que los dos pares de intervalos ΔE_1

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad (A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \\ \text{III} \quad (A', B') \vdash (A' + \Delta a, B' + \Delta b) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{l} \text{II} \quad (A, B) \vdash (A', B') \\ \text{IV} \quad (A + \Delta a, B + \Delta b) \vdash (A' + \Delta a, B' + \Delta b) \end{array}$$

son contiguos, porque el terminal $(A + \Delta a, B + \Delta b)$, final del I, es el terminal principio del IV; el terminal $(A' + \Delta a, B' + \Delta b)$, final del IV, es el terminal final del III; el terminal (A', B') , principio del III, es el terminal final del II, y el terminal (A, B) , principio del II, es el terminal principio del I, formando todos ellos, por tanto, un contorno cerrado conteniendo en su interior un recinto R_2 isomátrimorfo, de dos dimensiones (2), porque si consideramos un intervalo ΔE_1 de cada par, con un mismo terminal común, por ejemplo,

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad (A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \\ \text{II} \quad (A, B) \vdash (A', B') \end{array}$$

como independientes —ya que podemos dar a sus dimensionales A' y $A + \Delta a$ cualquier valor dentro de Δa —, los otros dos no son independientes, porque el III es idéntico al I y el IV al II, y lo mismo puede decirse de todos los ΔE_1 delimitados por dos términos cualesquiera pertenecientes a los ΔE_1 del contorno o en el interior del mismo, como puede fácilmente demostrarse, o sea, que las dos sucesiones ΔE_1 que suponen los intervalos I y II, respectivamente, son las únicas independientes, y, por tanto, el R_2 isomátrimorfo delimitado por los dos pares I, III y II, IV, es de dos dimensiones, conforme con la noción aritmética de dimensionalidad.

También se puede observar que el R_2 expuesto constituye un *cuadrilátero isomátrimorfo*, que en el aspecto aritmético se corresponde con el *paralelogramo* en el geométrico. Si en este cuadrilátero isomátrimor-

(2) Así como para una dimensión, el intervalo ΔE_1 es efectivamente tal intervalo, para dos dimensiones solamente lo es cuando, como veremos más adelante, los ΔE son los que denominaremos intervalos *isodimensionales*, pues entonces únicamente el recinto R_2 en general se identifica con la noción de intervalo de varias dimensiones.

fo se completan dos ΔE_1 con un terminal común, con el ΔE_1 delimitado por los terminales no-comunes, el contorno cerrado que así se obtiene comprende en su interior un *trilátero*, que en el aspecto aritmético se corresponde con el *triángulo* en el geométrico. El trilátero así constituido queda determinado, por tanto, por dos ΔE_1 con un terminal común, pues los terminales de todo ΔE_1 no sólo determinan su extensión sino también su ordenación, lo que lleva implícito su invariación al estar inmersos en los elementos numéricos de varias dimensiones, o sea, no sólo en los de dos, sino en los de cualquier número de ellas, como veremos después.

* *

Si consideramos ahora los dos triláteros determinados por los tres ΔE_1 ,

$$\begin{array}{ll} \text{I} & (A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \\ \text{II} & (A, B) \vdash (A, B + \Delta b) \\ \text{III} & (A, B) \vdash (A - \Delta a, B + \Delta b) \end{array}$$

con $(A, B) \vdash (A, B + \Delta b)$ común, los ΔE_1 delimitados por los terminales no comunes

$$\begin{array}{l} (A + \Delta a, B + \Delta b) \vdash (A, B + \Delta b) \\ (A - \Delta a, B + \Delta b) \vdash (A, B + \Delta b) \end{array}$$

son opuestos con respecto a $(A, B + \Delta b)$, ya que sus intervalos dimenmesionales

$$\begin{array}{l} (A) - (A + \Delta a) = -\Delta a; (A) - (A - \Delta a) = +\Delta a \\ (B + \Delta b) - (B + \Delta b) = 0; (B + \Delta b) - (B + \Delta b) = 0 \end{array}$$

son de signo contrario, y, por tanto, los dos triláteros con $(A, B) \vdash (A, B + \Delta b)$ común, están en un mismo R_2 y son iguales, porque I y III son iguales, con lo que tenemos su *simetría* respecto a II en el aspecto aritmético, ya que se corresponde con la simetría que suponen en el campo geométrico los triángulos correspondientes a los dos triláteros considerados, y si tenemos en cuenta que los m_1 de I y III son iguales y de signo contrario, esta propiedad de la *simetría aritmética* lleva implícito una cierta afinidad con la noción del E_1 y del isomatrismo, por ser todas estas nociones consecuencia de la igualdad de los Δa y Δb respectivos, si bien la variante del *principio de identidad dimensional* —implícito en los intervalos idénticos— sea exclusiva de estos dos últimos.

* *

La igualdad de los ΔE_1 , por ser iguales los intervalos dimensionales de los mismos órdenes en ambos, presenta otra modalidad que, por tanto, entra también dentro de la afinidad expuesta anteriormente, ya que si consideramos los ΔE_1

$$\begin{aligned}(A, B) &\vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \\ (A, B) &\vdash (A - \Delta b, B + \Delta a)\end{aligned}$$

con sus opuestos

$$\begin{aligned}(A - \Delta a, B - \Delta b) &\vdash (A, B) \\ (A + \Delta b, B - \Delta a) &\vdash (A, B)\end{aligned}$$

o sea, los cuatro con su terminal común (A, B) , es decir, en la disposición estructural,

$$\begin{array}{c}(A - \Delta b, B + \Delta a) \\ \vdash \\ (A - \Delta a, B - \Delta b) \vdash (A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \\ \vdash \\ (A + \Delta b, B - \Delta a),\end{array}$$

puede observarse que, por una parte, al ser opuestos los que están en la vertical, y, por otra, los que están en la horizontal, son en realidad dos ΔE_1 con el mismo término común (A, B) , siendo ambos de módulo unidimensional inverso y de signo contrario.

Además, los intervalos dimensionales de los ΔE_1 que delimitan los terminales no comunes de los cuatro ΔE_1 con terminal común (A, B) ,

$$\begin{array}{ll}\text{I} & (A - \Delta b) - (A + \Delta a) = -(\Delta a + \Delta b) \\ & (B + \Delta a) - (B + \Delta b) = +(\Delta a - \Delta b) \\ \text{II} & (A + \Delta a) - (A + \Delta b) = +(\Delta a - \Delta b) \\ & (B + \Delta b) - (B - \Delta a) = +(\Delta a + \Delta b) \\ \text{III} & (A - \Delta a) - (A + \Delta b) = -(\Delta a + \Delta b) \\ & (B - \Delta b) - (B - \Delta a) = +(\Delta a - \Delta b) \\ \text{IV} & (A - \Delta b) - (A - \Delta a) = +(\Delta a - \Delta b) \\ & (B + \Delta a) - (B - \Delta b) = +(\Delta a + \Delta b)\end{array}$$

muestran que los ΔE_1 con los intervalos dimensionales I y III son idénticos, así como los ΔE_1 con los II y IV, y, por consiguiente, tanto los ΔE_1 con los I y III, como los ΔE_1 con los II y IV, son isomatri-

ciales, respectivamente, formando un R_2 isomatrímorfo los cuatro ΔE_1 conexos —conexión aritmética, naturalmente—. Por otra parte, los ΔE_1 con los intervalos dimensionales I y II tienen estos inversos, siendo sus módulos de signo contrario, y lo mismo sucede con los pares correspondientes a II y III, III y IV, IV y I, en sus terminales comunes, con lo que la estructuración que resulta presenta una simetría completa, y, en su consecuencia, a esta disposición estructural de los cuatro ΔE_1 propuestos —o sea, de los dos ΔE_1 con la intersección (A, B)— la podemos denominar *ortonomía* (3), porque corresponde en el aspecto aritmético a la perpendicularidad en el geométrico.

* *

A los dos intervalos ΔE_1 , I y II, que se tomaron como independientes al tratar del R_2 isomatrímorfo, podemos darles el nombre de *determinantes* del R_2 en cuestión, porque con sus respectivos intervalos idénticos, III y IV, lo delimitan. La consecuencia inmediata es que dos R_2 son idénticos si tienen sus determinantes idénticos, o sea, los pares

$$(A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b)$$

$$(A, B) \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b')$$

y

$$(A', B') \vdash (A' + \Delta a, B' + \Delta b)$$

$$(A', B') \vdash (A' + \Delta a', B' + \Delta b'),$$

pues si descomponemos cada uno de ellos en los triláteros que resultan teniendo en cuenta los ΔE_1 delimitados por los terminales no comunes de los determinantes, estos triláteros son idénticos dos a dos, ya que tales ΔE_1

$$(A + \Delta a, B + \Delta b) \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b')$$

$$(A' + \Delta a, B' + \Delta b) \vdash (A' + \Delta a', B' + \Delta b')$$

lo son, por ser sus intervalos dimensionales iguales y del mismo signo, como puede fácilmente observarse.

* *

Los dos determinantes que determinan un R_2 isomatrímorfo, suponen cada uno un E_1 bidimensional, y, por consiguiente, éstos, a su vez, determinan un E_2 bidimensional —el cual resulta, por tanto, de tomar

(3) (3) Parece más apropiado emplear la voz *ortonomía* (del gr. $\acute{o}\rho\theta\acute{o}\varsigma$, recto, y $\nu\omicron\mu\acute{o}\varsigma$, división) en lugar de *perpendicularidad aritmética*, por las mismas razones que expusimos al aceptar el isomatrismo en lugar de paralelismo aritmético.

en consideración la sucesión de todos los números reales, tanto positivos como negativos, para los dos determinantes—, cuando los R_2 isomátriformos son contiguos, de un modo análogo a como los ΔE_1 contiguos del mismo m_1 pertenecen a un mismo E_1 , que lleva implícito, por otra parte, una propiedad —característica de la elementalidad dimensional— del E_2 análoga a la que supone el m_1 constante para el E_1 que lleva implícito dicha elementalidad, y, como ésta aparece con la ampliación del término unidimensional (A) en otro (B), tendremos necesidad de ampliar el término bidimensional (A, B) en otro dimensional C, para obtenerla, lo que es lógico, puesto que se trata de la distinción de los términos que pertenecen a un mismo E_2 , de los que no pertenecen a él, y, por tanto, esto no es posible más que definiendo esa posibilidad con términos que sirvan para esa distinción.

El término tridimensional (A, B, C) que resulta de la ampliación del término (A, B) con el dimensional C, tiene que tener la misma cualidad indivisible que el (A) y el (A, B), es decir, que los tres dimensionales no tienen entre sí ninguna relación cardinal, sirviendo sólo en su función delimitadora y ordenadora de los tres intervalos dimensionales que así se presentan condensados, constituyendo, por tanto, un ΔE_1 de una dimensión, pero para que sea elemental será necesario y suficiente que, además de m_1 constante, lo sea también $m'_1 = \Delta c / \Delta a$, pues como $\Delta c = m'_1 \Delta a$, sigue estando determinado por una relación entre los dimensionales de sus terminales, y, por tanto, el ΔE_1 es elemental y de una dimensión, siendo tridimensional por estar determinado por términos tridimensionales. Como la elementalidad de este ΔE_1 tridimensional precisa de los dos módulos m_1 y m'_1 , se comprende que es preferible darle el nombre de *matriz dimensional* o simplemente *matriz* —como ya anticipamos— a este conjunto m_1, m'_1 , pues con ella se obtienen todos los términos del E_1 tridimensional a partir de un solo término.

* *

Para hallar la matriz del E_2 en función de los intervalos dimensionales, son necesarios y suficientes dos determinantes cualesquiera,

$$\begin{array}{ll} \text{I} \vdash \text{II} & (A, B, C) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b, C + \Delta c) \\ \text{I} \vdash \text{III} & (A, B, C) \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b', C + \Delta c') \end{array}$$

con el terminal común (A, B, C), porque al elegirlos como tales determinantes, son los únicos ΔE_1 independientes del R_2 isomátriformo respectivo.

Con las matrices dimensionales de los I $\vdash$ II, y I $\vdash$ III,

$$\text{I} \vdash \text{II} \left| \begin{array}{l} m_1 = \frac{\Delta b}{\Delta a} \\ m'_1 = \frac{\Delta c}{\Delta a} \end{array} \right. \quad \text{I} \vdash \text{III} \left| \begin{array}{l} m_1 = \frac{\Delta b'}{\Delta a'} \\ m'_1 = \frac{\Delta c'}{\Delta a'} \end{array} \right.$$

obtenemos las diferencias modulares,

$$m_1 - m'_1 = \frac{\Delta b'}{\Delta a'} - \frac{\Delta b}{\Delta a} = \frac{\Delta b' \Delta a - \Delta a' \Delta b}{\Delta a \Delta a'}$$

$$m'_1 - m'_1 = \frac{\Delta c'}{\Delta a'} - \frac{\Delta c}{\Delta a} = \frac{\Delta c' \Delta a - \Delta a' \Delta c}{\Delta a \Delta a'}$$

cuya razón,

$$\frac{m'_1 - m'_1}{m_1 - m'_1} = \frac{\Delta c' \Delta a - \Delta a' \Delta c}{\Delta b' \Delta a - \Delta a' \Delta b}$$

es constante para todos los términos de los I $\vdash$ II y I $\vdash$ III, y sus respectivos E_1 .

Si tomamos como terminal común, uno de los otros terminales de los dos determinantes elegidos, distintos del común en ellos —como, por ejemplo, el II—, los determinantes serán entonces,

$$\text{II} \quad (A + \Delta a, B + \Delta b, C + \Delta c) \vdash (A, B, C) \quad \text{I}$$

$$\text{II} \quad (A + \Delta a, B + \Delta b, C + \Delta c) \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b', C + \Delta c') \quad \text{III},$$

para los que resulta,

$$\begin{aligned}
& \text{II} \vdash \text{I} \left| \begin{array}{l} m_1 = \frac{-\Delta b}{-\Delta a} \\ m'_1 = \frac{-\Delta c}{-\Delta a} \end{array} \right. \quad \text{II} \vdash \text{III} \left| \begin{array}{l} m_1 = \frac{\Delta b' - \Delta b}{\Delta a' - \Delta a} \\ m'_1 = \frac{\Delta c' - \Delta c}{\Delta a' - \Delta a} \end{array} \right. \\
& m_1 - m_1 = \frac{\Delta b' - \Delta b}{\Delta a' - \Delta a} - \frac{\Delta b}{\Delta a} = \frac{\Delta b' \Delta a - \Delta a' \Delta b}{(\Delta a' - \Delta a) \Delta a} \\
& m'_1 - m'_1 = \frac{\Delta c' - \Delta c}{\Delta a' - \Delta a} - \frac{\Delta c}{\Delta a} = \frac{\Delta c' \Delta a - \Delta a' \Delta c}{(\Delta a' - \Delta a) \Delta a} \\
& \frac{m'_1 - m'_1}{m_1 - m_1} = \frac{\Delta c' \Delta a - \Delta a' \Delta c}{\Delta b' \Delta a - \Delta a' \Delta b}
\end{aligned}$$

que es el mismo valor constante de la razón que obtuvimos antes, y como se hallaría el mismo resultado si tomásemos el término III como terminal común, tendremos que la razón es constante para los tres términos I, II y III, cualquiera que sea el que se tome como terminal común de los dos determinantes que resulten.

Esta razón, que denominaremos *módulo bidimensional* y designaremos con el símbolo m_2 , es también constante para todos los pares de términos del E_2 al que pertenece el R_2 , $\frac{\text{I} \vdash \text{II}}{\text{I} \vdash \text{III}}$ o sea, obtenidos por

la matriz implícita en los dos determinantes, con respecto al término I, pues si consideramos un par cualquiera IV, V, y los módulos de los $\text{I} \vdash \text{IV}$ y $\text{I} \vdash \text{V}$ son, respectivamente, m_1, m'_1 y m_1, m'_1 , tendremos,

$$\begin{aligned}
& \frac{\text{I} \vdash \text{II}}{\text{I} \vdash \text{IV}} \left| \begin{array}{l} m_2 = \frac{m'_1 - m'_1}{m_1 - m_1} ; \quad m_1 m_2 - m'_1 = m_1 m_2 - m'_1 \end{array} \right. \\
& \frac{\text{I} \vdash \text{II}}{\text{I} \vdash \text{V}} \left| \begin{array}{l} m_2 = \frac{m'_1 - m'_1}{m_1 - m_1} ; \quad m_1 m_2 - m'_1 = m_1 m_2 - m'_1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

luego

$$\frac{\text{I} \vdash \text{IV}}{\text{I} \vdash \text{V}} \left| \begin{array}{l} m_1 m_2 - m'_1 = m_1 m_2 - m'_1 ; \quad \frac{m'_1 - m'_1}{m_1 - m_1} = m_2 \end{array} \right.$$

y, por consiguiente, dos términos cualesquiera IV y V, del E_2 en cues-

ción, dan con I el mismo m_2 que los dos determinantes I $\vdash$ II y I $\vdash$ III.

Si consideramos ahora tres términos cualesquiera I', II', III', del E_2 determinado por los dos determinantes I $\vdash$ II, I $\vdash$ III, o sea, obtenidos por la matriz correspondiente, y se toma como terminal común el I', tendremos que los ΔE_1 con terminal común I, idénticos dos a dos con los nuevos determinantes I' $\vdash$ II' y I' $\vdash$ III', darán el mismo m_2 que los determinantes primitivos, y, en su consecuencia, llegamos a la conclusión general de que la cualidad de todo E_2 , y por la cual es *elemental*, es que sea constante el m_2 para todas las ternas de términos dimensionalmente idóneos, pues entonces la relación de elementalidad dimensional, que es precisamente dicho m_2 , se obtiene sólo de los dimensionales de tales términos, constituyéndose la *matriz bidimensional*, por los dos módulos m_1 y m'_1 del I $\vdash$ II, que han servido para hallar el m_2 , y éste último.

* *

El valor constante de m_2 para los tres casos que resultan al tomar cada uno de los tres términos como terminal común, que determinan un E_2 , se comprueba con el siguiente ejemplo, para términos I (1, 2, 3), II (3, 6, 4) y III (5, 8, 6) (4):

I $\vdash$ II		I $\vdash$ III		$\frac{I \vdash II}{I \vdash III}$	
$\Delta a = 2$	$m_1 = 2$	$\Delta a = 4$	$m_1 = \frac{3}{2}$	$\Delta m_1 = -\frac{1}{2}$	$m_2 = -\frac{1}{2}$
$\Delta b = 4$		$\Delta b = 6$			
$\Delta c = 1$	$m'_1 = \frac{1}{2}$	$\Delta c = 3$	$m'_1 = \frac{3}{4}$	$\Delta m'_1 = \frac{1}{4}$	
II $\vdash$ I		II $\vdash$ III		$\frac{II \vdash I}{II \vdash III}$	
$\Delta a = -2$	$m_1 = 2$	$\Delta a = 2$	$m_1 = 1$	$\Delta m_1 = -1$	$m_2 = -\frac{1}{2}$
$\Delta b = -4$		$\Delta b = 2$			
$\Delta c = 1$	$m'_1 = \frac{1}{2}$	$\Delta c = 2$	$m'_1 = 1$	$\Delta m'_1 = \frac{1}{2}$	

(4) Tanto en este ejemplo como en los sucesivos, figuran en cabeza de las columnas respectivas los esquemas de los elementos que intervienen en las operaciones, los cuales están constituidos por los determinantes delimitados por los números romanos de los terminales. El número de rayas horizontales que figuran entre cada dos determinantes es de dos en este ejemplo, porque determinan un E_2 . En sucesivos ejemplos, se aumentará el número de rayas, tanto horizontales o verticales, según el caso, siendo cada uno el del número de las dimensiones del esquema parcial o total.

$$\begin{array}{c}
\text{III} \vdash \text{I} \\
\Delta a = -4 \left| m_1 = \frac{3}{2} \right. \\
\Delta b = -6 \\
\Delta c = -3 \left| m'_1 = \frac{3}{4} \right.
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\text{III} \vdash \text{II} \\
\Delta a = -2 \left| m'_1 = 1 \right. \\
\Delta b = -2 \\
\Delta c = -2 \left| m_1 = 1 \right.
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\frac{\text{III} \vdash \text{I}}{\text{III} \vdash \text{II}} \\
\Delta m'_1 = \frac{1}{2} \\
\Delta m_1 = -\frac{1}{4} \left| m_2 = -\frac{1}{2} \right.
\end{array}$$

* *

Del mismo modo que dos ΔE_1 idénticos determinan un R_2 isomatrímorfo cuando los intervalos dimensionales que definen sus terminales no dan el mismo m_1 que aquellos ΔE_1 idénticos, dos R_2 isomatrímorfos idénticos determinan un R_3 isomatrímorfo cuando tres términos tomados entre ambos de cualquier modo, dan un m_2 distinto del de los R_2 idénticos. Si los ΔE_1 idénticos dos a dos, son

$$\begin{array}{llll}
\text{I} & (A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) & \text{II} & \\
\text{III} & (A', B') \vdash (A' + \Delta a, B' + \Delta b) & \text{IV} & \\
\text{I} & (A, B) \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b') & \text{V} & \\
\text{III} & (A', B') \vdash (A' + \Delta a', B' + \Delta b') & \text{VI} &
\end{array}$$

o sea, los $\text{I} \vdash \text{II}$ y $\text{III} \vdash \text{IV}$ por una parte, y $\text{I} \vdash \text{V}$ y $\text{III} \vdash \text{VI}$, por otra, siendo, por tanto, idénticos los R_2 isomatrímorfos

$$\frac{\text{I} \vdash \text{II}}{\text{I} \vdash \text{V}} \quad \text{y} \quad \frac{\text{III} \vdash \text{IV}}{\text{III} \vdash \text{VI}},$$

si el m_2 determinado por el $\text{I} \vdash \text{II}$, por ejemplo, de uno de ellos con el término (A', B') del otro, es distinto del m_2 de aquellos dos R_2 isomatrímorfos idénticos, es que éstos no pertenecen al mismo E_2 , y, en consecuencia, son isomatríciales, porque entonces el R_2 isomatrímorfo

$$\frac{\text{I} \quad (A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \quad \text{II}}{\text{III} \quad (A', B') \vdash (A' + \Delta a, B' + \Delta b) \quad \text{IV}}$$

es idéntico al

$$\frac{\text{V} \quad (A + \Delta a', B + \Delta b') \vdash (A + \Delta a + \Delta a', B + \Delta b + \Delta b') \quad \text{VII}}{\text{VI} \quad (A' + \Delta a', B' + \Delta b') \vdash (A' + \Delta a + \Delta a', B' + \Delta b + \Delta b') \quad \text{VIII}}$$

pudiendo decirse lo mismo del R_2 isomatrímorfo

$$\begin{array}{c} \text{I } (A, B) \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b') \quad \text{V} \\ \hline \text{III } (A', B') \vdash (A' + \Delta a', B' + \Delta b') \quad \text{VI} \end{array}$$

y del R_2 isomatrímorfo

$$\begin{array}{c} \text{II } (A + \Delta a, B + \Delta b) \vdash (A + \Delta a + \Delta a', B + \Delta b + \Delta b') \quad \text{VII} \\ \hline \text{IV } (A' + \Delta a, B' + \Delta b) \vdash (A' + \Delta a + \Delta a', B' + \Delta b + \Delta b') \quad \text{VIII} \end{array}$$

es decir, que los dos pares opuestos son isomatríciales y, como al mismo tiempo son conexos todos ellos con los dos propuestos, formando un contorno cerrado de dos dimensiones, resulta comprendido en su interior un R_3 isomatrímorfo, que es precisamente de tres dimensiones, porque gozan sus términos de los tres grados de variabilidad independiente implícitos en los tres determinantes $I \vdash II$, $I \vdash V$ y $I \vdash III$ que lo determinan.

Este R_3 isomatrímorfo, hallado en virtud del principio de identidad dimensional, dando lugar al isomatrismo entre R_2 isomatrímorfos, puede también obtenerse por los tres determinantes precitados, es decir, tres ΔE_1 con un terminal común, constituyendo cada dos consecutivos un R_2 isomatrímorfo que pertenecen a distintos E_2 , los cuales junto con los respectivos R_2 isomatrímorfos idénticos, constituyen el mismo contorno cerrado de dos dimensiones que hemos obtenido antes para dicho R_3 isomatrímorfo. Para hallar la relación que caracteriza a los R_3 que pertenecen a un mismo E_3 —el cual resulta, por tanto, de tomar en consideración la sucesión de todos los números reales, tanto positivos como negativos, en los tres determinantes—, es necesario ampliar en otro dimensional D al término tridimensional (A, B, C) que hemos utilizado hasta ahora, porque con términos de esta clase es imposible distinguir a los R_3 isomatrímorfos que pertenecen a distintos E_3 . El término cuatridimensional (A, B, C, D) que así se obtiene, es de la misma cualidad indivisible que el (A) , el (A, B) y el (A, B, C) , es decir, que los cuatro dimensionales A, B, C, D no tienen entre sí ninguna relación cardinal sirviendo solamente en su función delimitadora y ordenadora de los cuatro intervalos dimensionales que así se presentan condensados, constituyendo, por tanto, un solo intervalo ΔE_1 delimitado por los terminales (A, B, C, D) y (A', B', C', D') , que será entonces cuatridimensional. Con la ampliación del término (A, B, C) en otro dimensional es

necesario y suficiente, para que el ΔE_1 continúe con una dimensión, que además de ser constantes $m_1 = \Delta b / \Delta a$ y $m'_1 = \Delta c / \Delta a$, lo sea también la razón $\Delta d / \Delta a = m''_1$, pues al ser entonces $\Delta d = m''_1 \Delta a$, el dimensional A continúa siendo el único independiente. La elementalidad de este E_1 cuatridimensional está, por tanto, implícita en estos tres módulos unidimensionales m_1, m'_1, m''_1 , que constituyen su *matriz* con la cual se obtienen todos los términos del E_1 correspondiente a partir de un solo término cuatridimensional.

*

Para hallar la matriz del E_3 en función de los intervalos dimensionales, son necesarios y suficientes tres determinantes cualesquiera:

$$I \vdash II \quad (A, B, C, D) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b, C + \Delta c, D + \Delta d)$$

$$I \vdash III \quad (A, B, C, D) \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b', C + \Delta c', D + \Delta d')$$

$$I \vdash IV \quad (A, B, C, D) \vdash (A + \Delta a'', B + \Delta b'', C + \Delta c'', D + \Delta d'')$$

con el terminal común (A, B, C, D), porque al elegirlos como tales determinantes, son los únicos ΔE_1 de variabilidad independiente del R_3 isomátrímorfo en cuestión.

Con las matrices de los $R_2 \frac{I \vdash II}{I \vdash III}$ y $\frac{I \vdash II}{I \vdash IV}$,

$$\begin{array}{l} I \vdash II \left| \begin{array}{l} m_1 = \frac{\Delta b}{\Delta a} \\ m'_1 = \frac{\Delta c}{\Delta a} \\ m''_1 = \frac{\Delta d}{\Delta a} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{I \vdash II}{I \vdash III} \\ m_1 - m_1 = \frac{\Delta b'}{\Delta a'} - \frac{\Delta b}{\Delta a} \\ m'_1 - m'_1 = \frac{\Delta c'}{\Delta a'} - \frac{\Delta c}{\Delta a} \\ m''_1 - m''_1 = \frac{\Delta d'}{\Delta a'} - \frac{\Delta d}{\Delta a} \end{array} \\ I \vdash III \left| \begin{array}{l} m_1 = \frac{\Delta b'}{\Delta a'} \\ m'_1 = \frac{\Delta c'}{\Delta a'} \\ m''_1 = \frac{\Delta d'}{\Delta a'} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} m_2 = \frac{\Delta c' \Delta a - \Delta c \Delta a'}{\Delta b' \Delta a - \Delta b \Delta a'} = \frac{m'_1 - m'_1}{m_1 - m_1} \\ m'_2 = \frac{\Delta d' \Delta a - \Delta d \Delta a'}{\Delta b' \Delta a - \Delta b \Delta a'} = \frac{m''_1 - m''_1}{m_1 - m_1} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{I} \equiv \text{II} \\
\hline
\text{I} \equiv \text{IV}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\text{I} \equiv \text{IV}
\end{array}
\left| \begin{array}{l}
\mathbf{m}_1 = \frac{\Delta b''}{\Delta a''} \\
\mathbf{m}'_1 = \frac{\Delta c''}{\Delta a''} \\
\mathbf{m}''_1 = \frac{\Delta d''}{\Delta a''}
\end{array} \right.
\begin{array}{l}
\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_1 = \frac{\Delta b''}{\Delta a''} - \frac{\Delta b}{\Delta a} \\
\mathbf{m}'_1 - \mathbf{m}'_1 = \frac{\Delta c''}{\Delta a''} - \frac{\Delta c}{\Delta a} \\
\mathbf{m}''_1 - \mathbf{m}''_1 = \frac{\Delta d''}{\Delta a''} - \frac{\Delta d}{\Delta a} \\
m_2 = \frac{\Delta c'' \Delta a - \Delta c \Delta a''}{\Delta b'' \Delta a - \Delta b \Delta a''} = \frac{\mathbf{m}'_1 - \mathbf{m}'_1}{\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_1} \\
m'_2 = \frac{\Delta d'' \Delta a - \Delta d \Delta a''}{\Delta b'' \Delta a - \Delta b \Delta a''} = \frac{\mathbf{m}''_1 - \mathbf{m}''_1}{\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_1}
\end{array}$$

obtenemos las diferencias modulares,

$$\begin{aligned}
m_2 - m_2 &= \frac{(\mathbf{m}'_1 - \mathbf{m}'_1) (m_1 - m_1) - (\mathbf{m}_1 - m_1) (m'_1 - m'_1)}{(\mathbf{m}_1 - m_1) (m_1 - m_1)} \\
m'_2 - m'_2 &= \frac{(\mathbf{m}''_1 - \mathbf{m}''_1) (m_1 - m_1) - (\mathbf{m}_1 - m_1) (m''_1 - m''_1)}{(\mathbf{m}_1 - m_1) (m_1 - m_1)}
\end{aligned}$$

cuya razón,

$$\frac{m'_2 - m'_2}{m_2 - m_2} = \frac{(\mathbf{m}''_1 - \mathbf{m}''_1) (m_1 - m_1) - (\mathbf{m}_1 - m_1) (m''_1 - m''_1)}{(\mathbf{m}'_1 - \mathbf{m}'_1) (m_1 - m_1) - (\mathbf{m}_1 - m_1) (m'_1 - m'_1)}$$

es constante para todos los términos de los E_1 de los tres determinantes.

Si de los cuatro terminales que delimitan a los tres determinantes, tomamos como terminal común uno de los otros tres que para aquéllos eran no-comunes, por ejemplo el $(A + \Delta a, B + \Delta b, C + \Delta c, D + \Delta d)$, los determinantes serán entonces $\text{II} \equiv \text{I}$, $\text{II} \equiv \text{III}$, $\text{II} \equiv \text{IV}$, para los que resulta,

$$\begin{array}{c} \text{II} \vdash \text{I} \\ \left| \begin{array}{l} m_1 = \frac{\Delta b}{\Delta a} \\ m'_1 = \frac{\Delta c}{\Delta a} \\ m''_1 = \frac{\Delta d}{\Delta a} \end{array} \right| \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{II} \vdash \text{III} \\ \left| \begin{array}{l} m_2 = \frac{\Delta b' - \Delta b}{\Delta a' - \Delta a} \\ m'_1 = \frac{\Delta c' - \Delta c}{\Delta a' - \Delta a} \\ m''_1 = \frac{\Delta d' - \Delta d}{\Delta a' - \Delta a} \end{array} \right| \end{array}$$

$$\frac{\text{II} \vdash \text{I}}{\text{II} \vdash \text{III}}$$

$$m_1 - m_2 = \frac{\Delta b' - \Delta b}{\Delta a' - \Delta a} - \frac{\Delta b}{\Delta a} = \frac{\Delta b' \Delta a - \Delta a' \Delta b}{(\Delta a' - \Delta a) \Delta a}$$

$$m'_1 - m'_1 = \frac{\Delta c' - \Delta c}{\Delta a' - \Delta a} - \frac{\Delta c}{\Delta a} = \frac{\Delta c' \Delta a - \Delta a' \Delta c}{(\Delta a' - \Delta a) \Delta a}$$

$$m''_1 - m''_1 = \frac{\Delta d' - \Delta d}{\Delta a' - \Delta a} - \frac{\Delta d}{\Delta a} = \frac{\Delta d' \Delta a - \Delta a' \Delta d}{(\Delta a' - \Delta a) \Delta a}$$

$$m_2 = \frac{\Delta c' \Delta a - \Delta a' \Delta c}{\Delta b' \Delta a - \Delta a' \Delta b}$$

$$m'_2 = \frac{\Delta d' \Delta a - \Delta a' \Delta d}{\Delta b' \Delta a - \Delta a' \Delta b}$$

$$\text{II} \equiv \text{IV} \left| \begin{array}{l} \mathbf{m}_r = \frac{\Delta b'' - \Delta b}{\Delta a'' - \Delta a} \\ \mathbf{m}'_1 = \frac{\Delta c'' - \Delta c}{\Delta a'' - \Delta a} \\ \mathbf{m}''_1 = \frac{\Delta d'' - \Delta d}{\Delta a'' - \Delta a} \end{array} \right|$$

$$\frac{\text{II} \equiv \text{I}}{\text{II} \equiv \text{IV}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1 - m_1 &= \frac{\Delta b'' - \Delta b}{\Delta a'' - \Delta a} - \frac{\Delta b}{\Delta a} = \frac{\Delta b'' \Delta a - \Delta a'' \Delta b}{(\Delta a'' - \Delta a) \Delta a} \\ \mathbf{m}'_1 - m'_1 &= \frac{\Delta c'' - \Delta c}{\Delta a'' - \Delta a} - \frac{\Delta c}{\Delta a} = \frac{\Delta c'' \Delta a - \Delta a'' \Delta c}{(\Delta a'' - \Delta a) \Delta a} \\ \mathbf{m}''_1 - m''_1 &= \frac{\Delta d'' - \Delta d}{\Delta a'' - \Delta a} - \frac{\Delta d}{\Delta a} = \frac{\Delta d'' \Delta a - \Delta a'' \Delta d}{(\Delta a'' - \Delta a) \Delta a} \end{aligned}$$

$$m_2 = \frac{\Delta c'' \Delta a - \Delta a'' \Delta c}{\Delta b'' \Delta a - \Delta a'' \Delta b}$$

$$m'_2 = \frac{\Delta d'' \Delta a - \Delta a'' \Delta d}{\Delta b'' \Delta a - \Delta a'' \Delta b}$$

o sea, que los módulos bidimensionales de los mismos órdenes son los mismos, con los que se obtiene la citada razón constante, y como tendríamos idéntico resultado si tomamos el término III o el IV como terminal común de los determinantes, resulta que la razón es constante para los cuatro términos, cualquiera que sea el que se tome como terminal común.

Si V y VI son dos términos cualesquiera del E_3 al que pertenece el R_3

$$\frac{\text{I} \equiv \text{II}}{\text{I} \equiv \text{III}} \parallel \parallel \frac{\text{I} \equiv \text{II}}{\text{I} \equiv \text{IV}}$$

o sea, obtenidos por medio de la matriz implícita en los tres determinantes, y los módulos bidimensionales de

$$\frac{I \ H \ II}{I \ H \ V} \text{ y } \frac{I \ H \ II}{I \ H \ VI}$$

son, respectivamente, m_2, m'_2 y $\mathbf{m}_2, \mathbf{m}'_2$, tendremos:

$$\frac{I \ H \ II}{I \ H \ III} \parallel \frac{I \ H \ II}{I \ H \ V} \Big| m_3 = \frac{m'_2 - m'_2}{m_2 - m_2}; \quad m_2 m_3 - m'_2 = m_2 m_3 - m'_2$$

$$\frac{I \ H \ II}{I \ H \ III} \parallel \frac{I \ H \ II}{I \ H \ VI} \Big| m_3 = \frac{\mathbf{m}'_2 - \mathbf{m}'_2}{\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_2}; \quad \mathbf{m}_2 m_3 - \mathbf{m}'_2 = m_2 m_3 - m'_2$$

o sea

$$\frac{I \ H \ II}{I \ H \ V} \parallel \frac{I \ H \ II}{I \ H \ VI}$$

$$m_2 m_3 - m'_2 = \mathbf{m}_2 m_3 - \mathbf{m}'_2; \quad \frac{\mathbf{m}'_2 - m'_2}{\mathbf{m}_2 - m_2} = m_3$$

y, por consiguiente, dos términos cualesquiera, V y VI, del E_3 en cuestión, dan con I H II, el mismo m_3 que los tres determinantes I H II, I H III y I H IV.

Si consideramos ahora otro término más cualquiera, VII, del E_3 , y los módulos bidimensionales de

$$\frac{I \ H \ V}{I \ H \ VI} \text{ y } \frac{I \ H \ V}{I \ H \ VII}$$

son, respectivamente, $\mathbf{m}_2, \mathbf{m}'_2$ y m_2, m'_2 , tendremos

$$\frac{I \ H \ V}{I \ H \ II} \parallel \frac{I \ H \ V}{I \ H \ VI} \Big| m_3 = \frac{\mathbf{m}'_2 - m'_2}{\mathbf{m}_2 - m_2}; \quad \mathbf{m}_2 m_3 - \mathbf{m}'_2 = m_2 m_3 - m'_2$$

$$\frac{I \ H \ V}{I \ H \ II} \parallel \frac{I \ H \ V}{I \ H \ VII} \Big| m_3 = \frac{m'_2 - \mathbf{m}'_2}{m_2 - \mathbf{m}_2}; \quad m_2 m_3 - m'_2 = \mathbf{m}_2 m_3 - \mathbf{m}'_2$$

o sea,

$$\frac{I \vdash V}{I \vdash VI} \parallel \frac{I \vdash V}{I \vdash VII}$$

$$m_2 m_3 - m'_2 = m_2 m_3 - m'_2; \frac{m'_2 - m'_2}{m_2 - m_2} = m_3$$

y, por consiguiente, tres términos cualesquiera, V, VI, VII, del E_3 en cuestión dan, con I, el mismo m_3 que los tres determinantes $I \vdash II$, $I \vdash III$ y $I \vdash IV$.

Se puede prescindir también del término I —común de los tres determinantes primitivos—, pues si consideramos los cuatro términos I' , II' , III' , IV' , cualesquiera del E_3 determinado por aquellos determinantes, o sea, obtenidos por la matriz correspondiente, y se toma como terminal común el I' , tendremos que los ΔE_1 con terminal común I' , idénticos dos a dos con los nuevos determinantes $I' \vdash II'$, $I' \vdash III'$ y $I' \vdash IV'$, darán el mismo m_3 que los determinantes primitivos, y, en su consecuencia, llegamos a la conclusión general de que la cualidad de todo E_3 , y por la cual es *elemental*, es que sea constante el m_3 para todas las cuaternas de términos dimensionalmente idóneos, pues entonces la relación de elementalidad dimensional, que es precisamente dicho m_3 , se obtiene sólo de los dimensionales de tales términos, constituyéndose la *matriz tridimensional* por los tres módulos m_1 , m'_1 y m''_1 del $I \vdash II$, los dos módulos m_2 y m'_2 del $\frac{I \vdash II}{I \vdash III}$, que han servido para hallar el m_3 y este último.

*

El valor constante de m_3 para los cuatro casos que resultan al tomar cada uno de los cuatro términos como terminal común para formar los determinantes del R_3 isomatrímorfo correspondiente y, por tanto, del E_3 , se comprueba con el siguiente ejemplo con los dos casos que se presentan para los términos:

I	(1, 2, 3, 4)
II	(2, 4, 6, 7)
III	(3, 5, 5, 8)
IV	(5, 3, 4, 9)

con terminal común I para el primero y el IV, para el segundo respec-

tivamente,

I H II								$\frac{I H II}{I H III} \frac{I H II}{I H IV}$
$\Delta a = 1$	$m_1 = 2$							
$\Delta b = 2$								
$\Delta c = 3$								
$\Delta d = 3$	$m'_1 = 3$							
I H III								
$\Delta a = 2$	$m_1 = \frac{3}{2}$							$\Delta m_2 = -\frac{17}{7}$
$\Delta b = 3$								
$\Delta c = 2$								
$\Delta d = 4$	$m'_1 = 1$							$\Delta m_2' = -1$
								$m_3 = \frac{7}{17}$
I H IV								
$\Delta a = 4$	$m_1 = \frac{1}{4}$							
$\Delta b = 1$								
$\Delta c = 1$	$m'_1 = \frac{1}{4}$							$m_2 = \frac{11}{7}$
$\Delta d = 5$								$m_2' = 1$
	$m''_1 = \frac{5}{4}$							

$\begin{array}{l} \text{IV} \vdash \text{I} \\ \Delta a = -4 \quad \left \begin{array}{l} m_1 = \frac{1}{4} \\ \Delta b = -1 \\ \Delta c = -1 \\ \Delta d = -5 \end{array} \right. \\ m'_1 = \frac{1}{4} \\ m''_1 = \frac{5}{4} \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{IV} \vdash \text{I} \\ \hline \text{IV} \vdash \text{II} \\ \Delta m_1 = -\frac{7}{12} \\ \Delta m'_1 = -\frac{11}{12} \\ \Delta m''_1 = -\frac{7}{12} \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{IV} \vdash \text{I} \quad \parallel \quad \text{IV} \vdash \text{F} \\ \hline \text{IV} \vdash \text{II} \quad \parallel \quad \text{IV} \vdash \text{III} \\ m_2 = \frac{11}{7} \\ m'_2 = 1 \\ \Delta m_2 = -\frac{34}{35} \\ \Delta m'_2 = -\frac{2}{5} \\ m_3 = \frac{7}{17} \end{array}$
$\begin{array}{l} \text{IV} \vdash \text{II} \\ \Delta a = -3 \quad \left \begin{array}{l} m_1 = -\frac{1}{3} \\ \Delta b = 1 \\ \Delta c = 2 \\ \Delta d = -2 \end{array} \right. \\ m'_1 = -\frac{2}{3} \\ m''_1 = \frac{2}{3} \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{IV} \vdash \text{I} \\ \hline \text{IV} \vdash \text{III} \\ \Delta m_1 = \frac{5}{4} \\ \Delta m'_1 = -\frac{3}{4} \\ \Delta m''_1 = -\frac{3}{4} \end{array}$	
$\begin{array}{l} \text{IV} \vdash \text{III} \\ \Delta a = -2 \quad \left \begin{array}{l} m_1 = -1 \\ \Delta b = 2 \\ \Delta c = 1 \\ \Delta d = -1 \end{array} \right. \\ m'_1 = -\frac{1}{2} \\ m''_1 = \frac{1}{2} \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{IV} \vdash \text{I} \\ \hline \text{IV} \vdash \text{III} \\ \Delta m_1 = \frac{5}{4} \\ \Delta m'_1 = -\frac{3}{4} \\ \Delta m''_1 = -\frac{3}{4} \end{array}$	

Así como se demostró que dos R_2 isomátrmorfos que tienen sus determinantes idénticos dos a dos, son idénticos, puede demostrarse que dos R_3 isomátrmorfos cuyos tres determinantes son idénticos dos a dos, son idénticos. Y siguiendo el razonamiento basado en el principio de identidad dimensional, podemos afirmar que dos R_3 isomátrmorfos idénticos, o pertenecen a un mismo E_3 , o son isomátrriciales, dando lugar en este último caso a un R_4 isomátrmorfo de cuatro dimensiones, que también puede obtenerse por los cuatro determinantes definidos por cinco términos cualesquiera, o sea, cuatro ΔE_1 con un terminal común. Para hallar la relación que caracteriza a los R_4 isomátrmorfos que pertenecen a un mismo E_4 —el cual resulta, por tanto, de tomar en consideración la sucesión de todos los números reales, tanto positivos como negativos, en los cuatro determinantes—, es necesario ampliar en otro dimensional E el término cuádrimensional (A, B, C, D) , porque con términos de esta clase es imposible distinguir a los R_4 isomátrmorfos idénticos que pertenecen a distintos E_4 . El término pentadimensional que así se obtiene, es de la misma cualidad indivisible que el (A) , el (A, B) , el (A, B, C) y el (A, B, C, D) , es decir, que los cinco dimensionales A, B, C, D, E no tienen entre sí ninguna relación cardinal, sirviendo solamente en su función delimitadora y ordenadora de los cinco intervalos dimensionales que así se presentan condensados, constituyendo, por tanto, un solo ΔE_1 delimitado por los terminales (A, B, C, D, E) y (A', B', C', D', E') , que será entonces pentadimensional. Con esta ampliación del término en otro dimensional, es necesario y suficiente, para que el ΔE_1 continúe con una dimensión, que además de los módulos m_1, m'_1 y m''_1 , sea también constante el $m'''_1 = \Delta e / \Delta a$, pues al ser entonces $\Delta e = m'''_1 \Delta a$, el dimensional A continúa siendo el único independiente. La matriz del E_1 está, por tanto, constituida por los cuatro módulos m_1, m'_1, m''_1 y m'''_1 , porque con ellos se obtienen todos los términos de un E_1 pentadimensional a partir de un término cualquiera pentadimensional.

Para hallar la matriz cuádrimensional del E_4 en función de los intervalos dimensionales, son necesarios y suficientes cuatro determinantes cualesquiera, $I \vdash II, I \vdash III, I \vdash IV$ y $I \vdash V$, siendo sus terminales,

$$\begin{array}{ll} I & (A, B, C, D, E) \\ II & (A + \Delta a, B + \Delta b, C + \Delta c, D + \Delta d, E + \Delta e) \\ III & (A + \Delta a', B + \Delta b', C + \Delta c', D + \Delta d', E + \Delta e') \end{array}$$

$$\text{IV} \quad (A + \Delta a'', B + \Delta b'', C + \Delta c'', D + \Delta d'', E + \Delta e'')$$

$$\text{V} \quad (A + \Delta a''', B + \Delta b''', C + \Delta c''', D + \Delta d''', E + \Delta e''')$$

con el terminal común (A, B, C, D, E), porque al elegirlos como tales determinantes son los únicos ΔE_1 de variabilidad independiente del R_4 isomatrimorfo en cuestión.

Con la matriz del ΔE_3 $\frac{\text{I} \text{ II}}{\text{I} \text{ III}} \parallel \frac{\text{I} \text{ II}}{\text{I} \text{ IV}}$

$\text{I} \text{ II}$	$\frac{\text{I} \text{ II}}{\text{I} \text{ III}}$
$m_1 = \frac{\Delta b}{\Delta a}$	$m_1 - m_1 = \frac{\Delta b'}{\Delta a'} - \frac{\Delta b}{\Delta a}$
$m'_1 = \frac{\Delta c}{\Delta a}$	$m'_1 - m'_1 = \frac{\Delta c'}{\Delta a'} - \frac{\Delta c}{\Delta a}$
$m''_1 = \frac{\Delta d}{\Delta a}$	$m''_1 - m''_1 = \frac{\Delta d'}{\Delta a'} - \frac{\Delta d}{\Delta a}$
$m'''_1 = \frac{\Delta e}{\Delta a}$	$m'''_1 - m'''_1 = \frac{\Delta e'}{\Delta a'} - \frac{\Delta e}{\Delta a}$
$\text{I} \text{ III}$	
$m_1 = \frac{\Delta b'}{\Delta a'}$	$m_2 = \frac{m'_1 - m'_1}{m_1 - m_1} = \frac{\Delta a \Delta c' - \Delta a' \Delta c}{\Delta a \Delta b' - \Delta a' \Delta b}$
$m'_1 = \frac{\Delta c'}{\Delta a'}$	$m'_2 = \frac{m''_1 - m''_1}{m_1 - m_1} = \frac{\Delta a \Delta d' - \Delta a' \Delta d}{\Delta a \Delta b' - \Delta a' \Delta b}$
$m''_1 = \frac{\Delta d'}{\Delta a'}$	$m''_2 = \frac{m'''_1 - m'''_1}{m_1 - m_1} = \frac{\Delta a \Delta e' - \Delta a' \Delta e}{\Delta a \Delta b' - \Delta a' \Delta b}$
$m'''_1 = \frac{\Delta e'}{\Delta a'}$	

I H IV

$$\mathbf{m}_i = \frac{\Delta b''}{\Delta a''}$$

$$\mathbf{m}'_i = \frac{\Delta c''}{\Delta a''}$$

$$\mathbf{m}''_i = \frac{\Delta d''}{\Delta a''}$$

$$\mathbf{m}'''_i = \frac{\Delta e''}{\Delta a''}$$

I H II
I H IV

$$\mathbf{m}_i - m_i = \frac{\Delta b''}{\Delta a''} - \frac{\Delta b}{\Delta a}$$

$$\mathbf{m}'_i - m'_i = \frac{\Delta c''}{\Delta a''} - \frac{\Delta c}{\Delta a}$$

$$\mathbf{m}''_i - m''_i = \frac{\Delta d''}{\Delta a''} - \frac{\Delta d}{\Delta a}$$

$$\mathbf{m}'''_i - m'''_i = \frac{\Delta e''}{\Delta a''} - \frac{\Delta e}{\Delta a}$$

$$m_2 = \frac{\mathbf{m}'_i - m'_i}{\mathbf{m}_i - m_i} = \frac{\Delta a \Delta c'' - \Delta a'' \Delta c}{\Delta a \Delta b'' - \Delta a'' \Delta b}$$

$$m'_2 = \frac{\mathbf{m}''_i - m''_i}{\mathbf{m}_i - m_i} = \frac{\Delta a \Delta d'' - \Delta a'' \Delta d}{\Delta a \Delta b'' - \Delta a'' \Delta b}$$

$$m''_2 = \frac{\mathbf{m}'''_i - m'''_i}{\mathbf{m}_i - m_i} = \frac{\Delta a \Delta e'' - \Delta a'' \Delta e}{\Delta a \Delta b'' - \Delta a'' \Delta b}$$

$$\frac{\text{I} \text{H} \text{II}}{\text{I} \text{H} \text{III}} \parallel \parallel \frac{\text{I} \text{H} \text{II}}{\text{I} \text{H} \text{IV}}$$

$$m_2 - m_2 = \frac{(\mathbf{m}'_1 - m'_1) (m_1 - m_1) - (\mathbf{m}_1 - m_1) (m'_1 - m'_1)}{(\mathbf{m}_1 - m_1) (m_1 - m_1)}$$

$$m'_2 - m'_2 = \frac{(\mathbf{m}''_1 - m''_1) (m_1 - m_1) - (\mathbf{m}_1 - m_1) (m''_1 - m''_1)}{(\mathbf{m}_1 - m_1) (m_1 - m_1)}$$

$$m''_2 - m''_2 = \frac{(\mathbf{m}'''_1 - m'''_1) (m_1 - m_1) - (\mathbf{m}_1 - m_1) (m'''_1 - m'''_1)}{(\mathbf{m}_1 - m_1) (m_1 - m_1)}$$

$$m_3 = \frac{(\mathbf{m}''_1 - m''_1) (m_1 - m_1) - (\mathbf{m}_1 - m_1) (m''_1 - m''_1)}{(\mathbf{m}'_1 - m'_1) (m_1 - m_1) - (\mathbf{m}_1 - m_1) (m'_1 - m'_1)}$$

$$m'_3 = \frac{(\mathbf{m}'''_1 - m'''_1) (m_1 - m_1) - (\mathbf{m}_1 - m_1) (m'''_1 - m'''_1)}{(\mathbf{m}'_1 - m'_1) (m_1 - m_1) - (\mathbf{m}_1 - m_1) (m'_1 - m'_1)}$$

y la del $\Delta E_3 \frac{\text{I} \text{H} \text{II}}{\text{I} \text{H} \text{III}} \parallel \parallel \frac{\text{I} \text{H} \text{II}}{\text{I} \text{H} \text{V}},$

$$\text{I} \text{H} \text{V} \quad \frac{\text{I} \text{H} \text{II}}{\text{I} \text{H} \text{V}}$$

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{m}_1 = \frac{\Delta b'''}{\Delta a'''} & \mathbf{m}_1 - m_1 = \frac{\Delta b'''}{\Delta a'''} - \frac{\Delta b}{\Delta a} \\ \mathbf{m}'_1 = \frac{\Delta c'''}{\Delta a'''} & \mathbf{m}'_1 - m'_1 = \frac{\Delta c'''}{\Delta a'''} - \frac{\Delta c}{\Delta a} \\ \mathbf{m}''_1 = \frac{\Delta d'''}{\Delta a'''} & \mathbf{m}''_1 - m''_1 = \frac{\Delta d'''}{\Delta a'''} - \frac{\Delta d}{\Delta a} \\ \mathbf{m}'''_1 = \frac{\Delta e'''}{\Delta a'''} & \mathbf{m}'''_1 - m'''_1 = \frac{\Delta e'''}{\Delta a'''} - \frac{\Delta e}{\Delta a} \\ & \mathbf{m}_2 = \frac{\mathbf{m}'_1 - m'_1}{\mathbf{m}_1 - m_1} = \frac{\Delta a \Delta c''' - \Delta a''' \Delta c}{\Delta a \Delta b''' - \Delta a''' \Delta b} \\ & \mathbf{m}'_2 = \frac{\mathbf{m}''_1 - m''_1}{\mathbf{m}_1 - m_1} = \frac{\Delta a \Delta d''' - \Delta a''' \Delta d}{\Delta a \Delta b''' - \Delta a''' \Delta b} \\ & \mathbf{m}''_2 = \frac{\mathbf{m}'''_1 - m'''_1}{\mathbf{m}_1 - m_1} = \frac{\Delta a \Delta e''' - \Delta a''' \Delta e}{\Delta a \Delta b''' - \Delta a''' \Delta b} \end{array}$$

$$\frac{I \vdash II}{I \vdash III} \parallel \frac{I \vdash II}{I \vdash V}$$

$$m_2 - m_2' = \frac{(m_1' - m_1')(m_1 - m_1) - (m_1 - m_1)(m_1' - m_1')}{(m_1 - m_1)(m_1 - m_1)}$$

$$m_2' - m_2'' = \frac{(m_1'' - m_1'')(m_1 - m_1) - (m_1 - m_1)(m_1'' - m_1'')}{(m_1 - m_1)(m_1 - m_1)}$$

$$m_2'' - m_2''' = \frac{(m_1''' - m_1''')(m_1 - m_1) - (m_1 - m_1)(m_1''' - m_1''')}{(m_1 - m_1)(m_1 - m_1)}$$

$$m_3 = \frac{(m_1'' - m_1'')(m_1 - m_1) - (m_1 - m_1)(m_1'' - m_1'')}{(m_1' - m_1')(m_1 - m_1) - (m_1 - m_1)(m_1' - m_1')}$$

$$m_3' = \frac{(m_1''' - m_1''')(m_1 - m_1) - (m_1 - m_1)(m_1''' - m_1''')}{(m_1' - m_1')(m_1 - m_1) - (m_1 - m_1)(m_1' - m_1')}$$

obtenemos las diferencias modulares

$$m_3 - m_3' = \frac{m_2' - m_2'}{m_2 - m_2} - \frac{m_2' - m_2'}{m_2 - m_2}$$

$$m_3' - m_3'' = \frac{m_2'' - m_2''}{m_2 - m_2} - \frac{m_2'' - m_2''}{m_2 - m_2}$$

cuya razón

$$\frac{m_3' - m_3'}{m_3 - m_3}$$

es constante para todos los términos del R_4 isomatrímorfo, como se puede demostrar en forma análoga a como se hizo para el R_2 y el R_3 isomatrímorfos, y de un modo general se puede llegar a la conclusión de que la cualidad esencial de todo E_4 , y por la cual éste es *elemental*, es precisamente que sea constante dicha razón, que denominaremos módulo *cuadridimensional* y designaremos con el símbolo m_4 , estando constituida la *matriz cuadridimensional* por los cuatro módulos m_1 , m_1' , m_1'' y m_1''' del $\Delta E_1 I \vdash II$, los tres módulos m_2 , m_2' , m_2'' del R_2 iso-

matrimorfo $\frac{I \text{ H II}}{I \text{ H III}}$, los dos módulos m_3 y m'_3 del R_3 isomatrímorfo

$$\frac{I \text{ H II}}{I \text{ H III}} \equiv \frac{I \text{ H II}}{I \text{ H IV}},$$

que han servido para obtener el m_4 y este último.

*

El valor constante de m_4 para los cinco casos que resultan al tomar cada uno de los cinco términos como terminal común para formar los determinantes del R_4 , y, por tanto, del E_4 —el cual resulta, en general, de tomar en consideración la sucesión de todos los números reales, tanto positivos como negativos, en los cuatro determinantes— correspondiente, se comprueba con el ejemplo que se presenta a continuación con dos casos —terminales comunes I y V, respectivamente—, para los siguientes:

I	(5, 4, 7, 12, 11)
II	(4, 5, 8, 10, 12)
III	(3, 5, 7, 9, 11)
IV	(1, 2, 3, 4, 5)
V	(2, 4, 6, 8, 10)

I H II

$$\begin{array}{l|l} \Delta a = 1 & m_1 = -1 \\ \Delta b = 1 & m'_1 = -1 \\ \Delta c = 1 & m''_1 = 2 \\ \Delta d = -2 & m'''_1 = -1 \\ \Delta e = 1 & \end{array}$$

I H III

$$\begin{array}{l|l} \Delta a = -2 & m_1 = -\frac{1}{2} \\ \Delta b = 1 & m'_1 = 0 \\ \Delta c = 0 & m''_1 = \frac{3}{2} \\ \Delta d = -3 & m'''_1 = 1 \\ \Delta e = 0 & \end{array}$$

I H II
I H III

$$\begin{array}{l|l} \Delta m_1 = \frac{1}{2} & m_2 = 2 \\ \Delta m'_1 = 1 & m'_2 = -1 \\ \Delta m''_1 = \frac{1}{2} & m''_2 = 2 \end{array}$$

I H IV

$$\begin{array}{l|l} \Delta a = -4 & m_1 = \frac{1}{2} \\ \Delta b = -2 & m'_1 = 1 \\ \Delta c = -4 & m''_1 = 2 \\ \Delta d = -8 & m'''_1 = \frac{3}{2} \\ \Delta e = -6 & \end{array}$$

I H II
I H IV

$$\begin{array}{l|l} \Delta m_1 = \frac{3}{2} & m_2 = \frac{4}{3} \\ \Delta m'_1 = 2 & m'_2 = 0 \\ \Delta m''_1 = 0 & m''_2 = \frac{5}{3} \\ \Delta m'''_1 = \frac{5}{2} & \end{array}$$

I H V

$$\begin{array}{l|l} \Delta a = -3 & m_1 = 0 \\ \Delta b = 0 & m'_1 = \frac{1}{3} \\ \Delta c = -1 & m''_1 = \frac{4}{3} \\ \Delta d = -4 & m'''_1 = \frac{1}{3} \\ \Delta e = -1 & \end{array}$$

I H II
I H V

$$\begin{array}{l|l} \Delta m_1 = 1 & m_2 = \frac{4}{3} \\ \Delta m'_1 = \frac{4}{3} & m'_2 = -\frac{2}{3} \\ \Delta m''_1 = -\frac{2}{3} & m''_2 = \frac{4}{3} \\ \Delta m'''_1 = \frac{4}{3} & \end{array}$$

$\frac{\overline{\overline{\text{I H II}}}}{\overline{\overline{\text{I H III}}}} \parallel \frac{\overline{\overline{\text{I H II}}}}{\overline{\overline{\text{I H IV}}}}$	$\Delta m_2 = -\frac{2}{3} \quad m_3 = -\frac{3}{2}$		$\frac{\overline{\overline{\text{I H II}}}}{\overline{\overline{\text{I H III}}}} \parallel \frac{\overline{\overline{\text{I H II}}}}{\overline{\overline{\text{I H IV}}}}$
$\Delta m'_2 = 1$	$m'_3 = \frac{1}{2}$		$\frac{\overline{\overline{\text{I H II}}}}{\overline{\overline{\text{I H III}}}} \parallel \frac{\overline{\overline{\text{I H II}}}}{\overline{\overline{\text{I H V}}}}$
$\Delta m''_2 = -\frac{1}{3}$	$m''_3 = 1$		$\Delta m_3 = 1$
$\frac{\overline{\overline{\text{I H II}}}}{\overline{\overline{\text{I H III}}}} \parallel \frac{\overline{\overline{\text{I H II}}}}{\overline{\overline{\text{I H V}}}}$	$\Delta m'_3 = \frac{1}{2}$		$m_4 = \frac{1}{2}$
$\Delta m_2 = -\frac{2}{3}$	$m_3 = -\frac{1}{2}$		
$\Delta m'_2 = \frac{1}{3}$	$m'_3 = 1$		
$\Delta m''_2 = \frac{4}{3}$	$$		

V H II	$\Delta a = 2 \quad m_1 = \frac{1}{2}$		$\frac{\overline{\overline{\text{V H II}}}}{\overline{\overline{\text{V H III}}}}$
$\Delta b = 1$	$m'_1 = 1$		$\Delta m_1 = \frac{1}{2} \quad m_2 = 0$
$\Delta c = 2$	$m''_1 = 1$		$\Delta m'_1 = 0 \quad m'_2 = 0$
$\Delta d = 2$	$m'''_1 = 1$		$\Delta m''_1 = 0 \quad m''_2 = 0$
$\Delta e = 2$	$$		$\Delta m'''_1 = 0 \quad m'''_2 = 0$
V H III	$\Delta a = 1 \quad m_1 = 1$		
$\Delta b = 1$	$m'_1 = 1$		
$\Delta c = 1$	$m''_1 = 1$		
$\Delta d = 1$	$m'''_1 = 1$		
$\Delta e = 1$	$$		

V H I

$$\begin{array}{l|l} \Delta a = 3 & m_1 = 0 \\ \Delta b = 0 & m'_1 = \frac{1}{3} \\ \Delta c = 1 & m''_1 = \frac{4}{3} \\ \Delta d = 4 & m'''_1 = \frac{1}{3} \\ \Delta e = 1 & \end{array}$$

$\frac{V H II}{V H I}$

$$\begin{array}{l|l} \Delta m_1 = -\frac{1}{2} & m_2 = \frac{4}{3} \\ \Delta m'_1 = -\frac{2}{3} & m'_2 = -\frac{2}{3} \\ \Delta m''_1 = \frac{1}{3} & m''_2 = \frac{4}{3} \\ \Delta m'''_1 = -\frac{2}{3} & \end{array}$$

V H IV

$$\begin{array}{l|l} \Delta a = -1 & m_1 = 2 \\ \Delta b = -2 & m'_1 = 3 \\ \Delta c = -3 & m''_1 = 4 \\ \Delta d = -4 & m'''_1 = 5 \\ \Delta e = -5 & \end{array}$$

$\frac{V H II}{V H IV}$

$$\begin{array}{l|l} \Delta m_1 = -\frac{3}{2} & m_2 = -\frac{4}{3} \\ \Delta m'_1 = 2 & m'_2 = -\frac{2}{3} \\ \Delta m''_1 = 3 & m''_2 = -\frac{8}{3} \\ \Delta m'''_1 = 4 & \end{array}$$

$\frac{V H II}{V H III} \parallel \frac{V H II}{V H I}$

$$\begin{array}{l|l} \Delta m_2 = \frac{4}{3} & m_3 = -\frac{1}{2} \\ \Delta m'_2 = -\frac{2}{3} & m'_3 = 1 \\ \Delta m''_2 = \frac{4}{3} & \end{array}$$

$\frac{V H II}{V H III} \parallel \frac{V H II}{V H I}$
 $\frac{V H II}{V H III} \parallel \frac{V H II}{V H IV}$

$\frac{V H II}{V H III} \parallel \frac{V H II}{V H IV}$

$$\begin{array}{l|l} \Delta m''_2 = \frac{4}{3} & m_3 = \frac{3}{2} \\ \Delta m'_2 = -\frac{2}{3} & m'_3 = 2 \\ \Delta m_2 = \frac{8}{3} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \Delta m_3 = 2 & m_4 = \frac{1}{2} \\ \Delta m'_3 = 1 & \end{array}$$

En el proceso seguido para hallar la matriz dimensional de los elementos E_1 , E_2 , E_3 y E_4 es fácil observar su ley de formación, con la cual podríamos continuar con los elementos de cinco, seis, etc., dimensiones, y de un modo general, en virtud del razonamiento por recurrencia, se puede establecer la fórmula para el elemento E_n . Se ha visto, en efecto, que, en general, el módulo o módulos de la misma dimensionalidad que el número de dimensiones del elemento cuya matriz se quiere hallar, es la razón o razones de la diferencia modular o las diferencias modulares de todos los órdenes menos uno —siendo la dimensionalidad de estas diferencias modulares de una dimensión menos que las dimensiones del elemento— con respecto a esta última diferencia modular. Se puede observar también que la matriz del elemento en cuestión se compone de una parte que es la matriz de uno de los elementos —el que sus módulos han entrado como sustraendo para hallar las diferencias modulares— que sirven para hallar el módulo o módulos finales, y se completa con estos últimos.

Procediendo, por tanto, con ampliaciones sucesivas del número de dimensionales, podemos establecer, en general, los términos $(n + 1)$ -dimensionales, en los que éstos tienen la misma cualidad indivisible que en los de menor número de dimensionales, es decir, que los dimensionales $A, B, C, \dots, N, N^{(n+1)}$, no tienen entre sí ninguna relación cardinal, sirviendo solamente en su función delimitadora y ordenadora de los $(n + 1)$ intervalos dimensionales que así se presentan condensados constituyendo, por tanto, un ΔE_i de una dimensión, el cual, por estar delimitado por términos $(n + 1)$ -dimensionales, será un ΔE_i $(n + 1)$ -dimensional. Con la ampliación del término $(A, B, C, \dots, N)$ en otro dimensional, es necesario y suficiente, para que el E_i continúe con una dimensión que además del $m_1 = \Delta b / \Delta a$, del $m'_1 = \Delta c / \Delta a$, del $m''_1 = \Delta d / \Delta a$, ..., del $m_1^{(n-2)} = \Delta n^{(n-1)} / \Delta a$, constantes, sea también constante la razón $\Delta n^{(n)} \Delta a = m_1^{(n-1)}$, pues al ser entonces $\Delta n^{(n)} = m_1^{(n-1)} \Delta a$, el dimensional A continúa siendo el único independiente. La elementalidad de este ΔE_i $(n + 1)$ -dimensional está, por tanto, implícita en estos n módulos unidimensionales $m_1, m'_1, m''_1, \dots, m_1^{(n-1)}$, que constituyen su matriz con la cual se obtienen todos los términos del E_i correspondiente a partir de un solo término $(n + 1)$ -dimensional.

Para hallar la matriz del E_n son necesarios y suficientes n determinantes. Si consideramos los siguientes:

muy bien calificar de *fundamentales* a los isodimensionales que contienen al término $(0, 0, 0, \dots, 0)$. Si consideramos los ΔE_1 isodimensionales iguales,

$$\begin{aligned} I \vdash II & (A, B, C, \dots, N^{(n+1)}) \vdash (A + \Delta a, B, C, \dots, N^{(n+1)}) \\ I \vdash III & (A, B, C, \dots, N^{(n+1)}) \vdash (A, B + \Delta b, \dots, N^{(n+1)}) \\ I \vdash IV & (A, B, C, \dots, N^{(n+1)}) \vdash (A, B, C + \Delta c, \dots, N^{(n+1)}) \\ & \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \\ I \vdash N^{(n+1)} & (A, B, C, \dots, N^{(n+1)}) \vdash (A, B, C, \dots, N^{(n+1)} + \Delta n^{(n+1)}) \end{aligned}$$

con terminal común el término $(A, B, C, \dots, N^{(n+1)})$ y sus opuestos, siendo, por tanto, $\Delta a = \Delta b = \Delta c = \dots = \Delta n^{(n+1)}$, es evidente que los ΔE_1 delimitados por el terminal $(A + \Delta a, B, C, \dots, N^{(n+1)})$ del $I \vdash II$ y cada uno de los terminales no-comunes de los demás ΔE_1 considerados, excepto su opuesto, o sea, los

$$\begin{aligned} (A + \Delta a, B, C, \dots, N^{(n+1)}) & \vdash (A, B + \Delta b, C, \dots, N^{(n+1)}) \\ (A + \Delta a, B, C, \dots, N^{(n+1)}) & \vdash (A, B, C + \Delta c, \dots, N^{(n+1)}) \\ & \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \\ (A + \Delta a, B, C, \dots, N^{(n+1)}) & \vdash (A, B, C, \dots, N^{(n+1)} + \Delta n^{(n+1)}) \end{aligned}$$

són todos iguales, como es fácil apreciar directamente, ya que cada uno tiene el intervalo $-\Delta a$ común y el $+\Delta b, +\Delta c, \dots, +\Delta n^{(n+1)}$, respectivamente, y los mismos valores, pero positivos, en los opuestos, y como lo mismo sucede con los demás intervalos ΔE_1 delimitados por los terminales

$$\begin{aligned} & (A, B + \Delta b, C, \dots, N^{(n+1)}), \\ & (A, B, C + \Delta c, \dots, N^{(n+1)}), \dots, \\ & (A, B, C, \dots, N^{(n+1)} + \Delta n^{(n+1)}), \end{aligned}$$

se observa que la propiedad expuesta, para $n = 2$ y $n = 3$ es, en el aspecto numérico dimensional, lo que constituye la perpendicularidad de las rectas en el plano y en el espacio, respectivamente —propiedad que con toda generalidad hemos denominado *ortonomía* al tratar de los ΔE_1 bidimensionales—, y que se caracteriza de un modo general,

como vimos para el caso particular de estos últimos, en que los m_1 con respecto a los órdenes dimensionales correspondientes a los que son variables en cada ΔE_1 considerados, son inversos en los que son mutuamente ortonómicos. En efecto, para el $I \vdash II$ con respecto a todos los demás y sus opuestos, excepto el sayo, tenemos:

$$\begin{array}{l|l} I \vdash II & I \vdash III \\ (A + \Delta a) - A = \Delta a & A - A = 0 \\ B - B = 0 & (B + \Delta b) - B = \Delta b \\ m_1 = \frac{0}{\Delta a} = 0 & m_1 = \frac{\Delta b}{0} = \infty \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} I \vdash II & I \vdash IV \\ (A + \Delta a) - A = \Delta a & A - A = 0 \\ C - C = 0 & (C + \Delta c) - C = \Delta c \\ m_1 = \frac{0}{\Delta a} = 0 & m_1 = \frac{\Delta c}{0} = \infty \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} I \vdash II & I \vdash N^{(n+1)} \\ (A + \Delta a) - A = \Delta a & A - A = 0 \\ N^{(n+1)} - N^{(n+1)} = 0 & (N^{(n+1)} + n^{(n+1)}) - N^{(n+1)} = \Delta n^{(n+1)} \\ m_1 = \frac{0}{\Delta a} = 0 & m_1 = \frac{\Delta n^{(n+1)}}{0} = \infty \end{array}$$

para el $I \vdash III$ con todos los demás, excepto su opuesto,

$$\begin{array}{l|l} \text{I} \vdash \text{III} & \text{I} \vdash \text{IV} \\ (B + \Delta b) - B = \Delta b & B - B = 0 \\ C - C = 0 & (C + \Delta c) - C = \Delta c \\ m_1 = \frac{0}{\Delta b} = 0 & m_1 = \frac{\Delta c}{0} = \infty \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{I} \vdash \text{III} & \text{I} \vdash \text{V} \\ (B + \Delta b) - B = \Delta b & B - B = 0 \\ D - D = 0 & (D + \Delta d) - D = \Delta d \\ m_1 = \frac{0}{\Delta b} = 0 & m_1 = \frac{\Delta d}{0} = \infty \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{I} \vdash \text{III} & \text{I} \vdash N^{(n+1)} \\ (B + \Delta b) - B = \Delta b & B - B = 0 \\ N^{(n+1)} - N^{(n+1)} = 0 & (N^{(n+1)} + \Delta n^{(n+1)}) - N^{(n+1)} = \Delta n^{(n+1)} \\ m_1 = \frac{0}{\Delta b} = 0 & m_1 = \frac{\Delta n^{(n+1)}}{0} = \infty \end{array}$$

y así sucesivamente.

Al ser iguales los ΔE_1 que están delimitados por el terminal no-común de cada uno de los ΔE_1 isodimensionales que hemos considerado coincidentes en un mismo término y por los terminales no-comunes de todos los demás ΔE_1 isodimensionales menos su opuesto, cada uno de tales ΔE_1 isodimensionales es ortonómico al E_{n-1} determinado por aquéllos, y los E_1 isodimensionales respectivos correspondientes a todos los términos de este último, forman un *haz n-dimensional de E_1 isodimensionales* —que son, por tanto, isomatriciales—, existiendo n haces de esta clase en un E_n , siendo todos ellos mutuamente ortonómicos, concurriendo en cada término del E_n un isodimensional de cada haz, o sea, n isodimensionales E_1 mutuamente ortonómicos.

*

Esta contextura ortomorfa que lleva implícita la isodimensionalidad, supone la posibilidad de determinar el *quantum* de un ΔE_1 cualquiera en función de sus intervalos dimensionales. Si consideramos el ΔE_1 ,

$$(A, B, C, \dots, N) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b, C + \Delta c, \dots, N + \Delta n)$$

y los n intervalos ΔE_1 isodimensionales con sus opuestos que tienen común con él el terminal $(A, B, C, \dots, N)$, siendo el intervalo dimensional variable de cada uno igual y del mismo signo que el respectivo de dicho ΔE_1 ; en el trilátero que este último forma con el

$$(A, B, C, \dots, N) \vdash (A + \Delta a, B, C, \dots, N),$$

por ejemplo, el otro lado será

$$(A + \Delta a, B + \Delta b, C + \Delta c, \dots, N + \Delta n) \vdash (A + \Delta a, B, C, \dots, N)$$

y, por consiguiente, este trilátero es ortonómico en el terminal $(A + \Delta a, B, C, \dots, N)$, porque

$$\begin{aligned} \frac{B - B}{(A + \Delta a) - A} &= \frac{0}{\Delta a} = 0; \\ \frac{B - (B + \Delta b)}{(A + \Delta a) - (A + \Delta a)} &= \frac{-\Delta b}{0} = -\infty. \end{aligned}$$

o sea, que

$$\begin{aligned} &\overline{(A, B, C, \dots, N) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b, C + \Delta c, \dots, N + \Delta n)}^2 = \\ &= \overline{(A, B, C, \dots, N) \vdash (A + \Delta a, B, C, \dots, N)}^2 + \\ &+ \overline{(A + \Delta a, B + \Delta b, C + \Delta c, \dots, N + \Delta n) \vdash (A + \Delta a, B, C, \dots, N)}^2 = \\ &= \Delta a^2 + \overline{(A + \Delta a, B + \Delta b, C + \Delta c, \dots, N + \Delta n) \vdash (A + \Delta a, B, C, \dots, N)}^2 \end{aligned}$$

Si tomamos ahora el ΔE_1 idéntico a este último en el terminal común $(A, B, C, \dots, N)$, o sea, el

$$(A, B, C, \dots, N) \vdash (A, B + \Delta b, C + \Delta c, \dots, N + \Delta n),$$

en el trilátero que éste forma con otro de los ΔE_1 isodimensionales cualesquiera, por ejemplo, el $(A, B, C, \dots, N) \vdash (A, B + \Delta b, C, \dots, N)$, el otro lado será

$$(A, B + \Delta b, C + \Delta c, \dots, N + \Delta n) \vdash (A, B + \Delta b, C, \dots, N).$$

y, por consiguiente, este trilátero es ortonómico en el terminal $(A, B + \Delta b, C, \dots, N)$, porque

$$\frac{C - C}{(B + \Delta b) - B} = \frac{0}{\Delta b} = 0;$$

$$\frac{C - (C + \Delta c)}{(B + \Delta b) - (B + \Delta b)} = \frac{-\Delta c}{0} = -\infty,$$

o sea, que

$$\begin{aligned} & \overline{(A + \Delta a, B + \Delta b, C + \Delta c, \dots, N + \Delta n) \vdash (A + \Delta a, B, C, \dots, N)}^2 = \\ & = \overline{(A, B, C, \dots, N) \vdash (A, B + \Delta b, C + \Delta c, \dots, N + \Delta n)}^2 = \\ & = \overline{\Delta b}^2 + \overline{(A, B + \Delta b, C + \Delta c, \dots, N + \Delta n) \vdash (A, B + \Delta b, C, \dots, N)}^2. \end{aligned}$$

Del mismo modo obtendríamos

$$\begin{aligned} & \overline{(A, B + \Delta b, C + \Delta c, \dots, N + \Delta n) \vdash (A, B + \Delta b, C, \dots, N)}^2 = \\ & = \overline{(A, B, C, \dots, N) \vdash (A, B, C + \Delta c, \dots, N + \Delta n)}^2 = \\ & = \overline{\Delta c}^2 + \overline{(A, B, C + \Delta c, \dots, N + \Delta n) \vdash (A, B, C + \Delta c, \dots, N)}^2. \end{aligned}$$

y así sucesivamente hasta llegar a

$$\begin{aligned} & \overline{(A, B, C, \dots, (N-1) + \Delta(n-1), N + \Delta n)}^2 = \overline{\Delta(n-1)}^2 + \\ & + \overline{(A, B, C, \dots, N + \Delta n) \vdash (A, B, C, \dots, (N-1) + \Delta(n-1), N)}^2 = \\ & = \overline{\Delta(n-1)}^2 + \overline{\Delta n}^2 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} & \overline{(A, B, C, \dots, N) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b, C + \Delta c, \dots, N + \Delta n)}^2 = \\ & = \overline{\Delta a}^2 + \overline{\Delta b}^2 + \overline{\Delta c}^2 + \dots + \overline{\Delta n}^2. \end{aligned}$$

que en el aspecto numérico dimensional nos da una fórmula análoga a la de la propiedad pitagórica generalizada por Helmholtz, y si la ponemos en función de los m_i respectivos,

$$\begin{aligned} & (A, B, C, \dots, N) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b, C + \Delta c, \dots, N + \Delta n) = \\ & = \Delta a \sqrt{1 + m_1^2 + m_1'^2 + \dots + m_1^{(n-2)2}}, \end{aligned}$$

es decir, que el *quantum* del intervalo ΔE_1 *n*-dimensional es igual al producto de uno de sus intervalos dimensionales por la raíz cuadrada de 1 más la suma de los cuadrados de los módulos unidimensionales con respecto a aquél.

* *

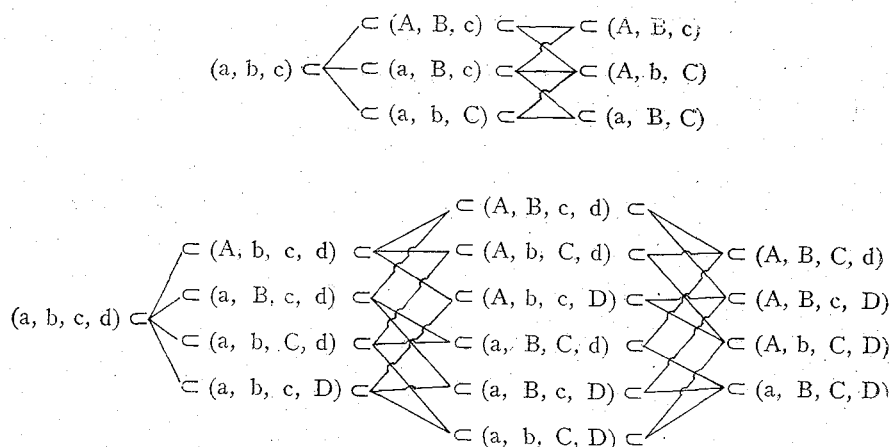
Y para terminar con esta sucinta exposición de la *teoría matricial dimensional*, dos E_{n-1} cualesquiera de la misma matriz pertenecientes a un E_n —y por tanto, isomatriciales—, dan lugar a una *acotación isomatricial* $E_{n-1} \vdash E'_{n-1}$, que comprende una parte del E_n limitada según una dimensión por E_{n-1} y E'_{n-1} (5), e ilimitada en las $(n-1)$ dimensiones restantes, pero si son de distinta matriz, los dos E_{n-1} dividen al E_n en cuatro partes que podemos llamar *radioacotaciones* semi- E_{n-1} , porque todos los E_{n-1} que están comprendidos en el interior de cada una de ellas y su opuesta, irradian del E_{n-2} común a todos ellos —para $n=2$ y $n=3$, las radioacotaciones semi- E_1 y semi- E_2 , respectivas, son en el aspecto numérico dimensional, lo que en el geométrico son el ángulo y el ángulo diedro, en el plano y en el espacio, respectivamente—; y n elementos E_{n-1} de distinta matriz que tienen un término común, dividen al E_n en 2^n partes, que podemos denominar *radioacotaciones* semi- E_1 , porque todos los E_1 que están comprendidos en el interior de cada una de ellas y su opuesta, irradian de dicho término común —para $n=3$, la radioacotación respectiva es, en el aspecto numérico dimensional, lo que el ángulo triedro en el espacio, en el geométrico. Si todas las radioacotaciones, tanto las semi- E_{n-1} , como las semi- E_1 , que resultan de la división completa de un E_n , son iguales, entonces son ortonómicas, y también son mutuamente ortonómicos los semi- E_{n-1} que los delimitan.

*

Si designamos con $a, b, c, \dots, n$ los semi- E_1 con respecto al término $(A, B, C, \dots, N)$, que corresponden a los dimensionales variables en los E_1 cuando éstos son isodimensionales, se puede obtener una notación de las *radioacotaciones* semi- E_1 ortonómicas de las dimensiones respectivas, que permite con facilidad su interpretación, pues así tendremos, por ejemplo, (a, b, c, D) , para la *radioacotación* semi- E_1 de tres dimensiones determinada por a, b, c , en el término (A, B, C, D) , siendo muy

(5) Se utiliza el mismo signo $\vdash$ que hemos puesto entre dos términos para designar el intervalo de una dimensión que éstos delimitan, porque los dos E_{n-1} entre los que también se pone aquí, delimitan el E_n según una dimensión.

útil esta clase de notación para obtener el esquema de la estructuración de dichas radioacotaciones, como se pone de manifiesto a continuación para las de tres y cuatro dimensiones,



En el primer esquema la radioacotación (a, b, c) en el término (A, B, C) está delimitada por las tres radioacotaciones de 2-dimensiones de la primera columna de la izquierda, mostrada por los enlaces de aquella con estas últimas, y éstas, a su vez, están delimitadas por los semi- E_1 de la segunda columna, cuyos enlaces entre ambas muestran los dos que corresponden a cada una y el semi- E_1 común a cada dos de ellas. En el segundo esquema, la radioacotación (a, b, c, d) en el término (A, B, C, D) está delimitada por las cuatro radioacotaciones de 3-dimensiones de la primera columna de la izquierda, mostrada por los enlaces de aquella con estas últimas; cada una de éstas, a su vez, están delimitadas por las respectivas radioacotaciones de 2-dimensiones de la segunda columna, cuyos enlaces entre ambas muestran las tres de esta última que corresponden a cada una de las de la primera columna, así como cada uno de los pares de éstas que tienen común una de las de la segunda columna; y cada una de las de la segunda columna, a su vez, están delimitadas por los respectivos semi- E_1 de la tercera columna, cuyos enlaces entre ambas muestran los dos de esta última que corresponden a cada una de las de la segunda columna, así como cada una de las ternas de éstas que tienen común un semi- E_1 de la tercera columna.

*

Dos *radioacotaciones semi- E_1* de n dimensiones, cuyos *semi- E_1* del contorno son isodimensionales —y, por tanto, ortomorfas, siendo opuestos dos a dos los respectivos *semi- E_1* —, tienen común un ΔE_n , el cual, en su consecuencia, queda determinado por los terminales de tales *radioacotaciones semi- E_1* , o sea, que dos términos cualesquiera de n dimensionales, siendo éstos distintos en ambos, determinan un ΔE_n estando delimitado por n pares de ΔE_{n-1} conexos, el cual define completamente el conjunto de términos (A, B, C, ..., N), cuyos dimensionales están comprendidos entre los correspondientes de los mismos órdenes de aquellos dos, o sea, todos los términos cuyos dimensionales son cada uno de todos los B con cada uno de todos los A, cada uno de todos los C con cada una de las combinaciones obtenidas para A y B, y así sucesivamente hasta llegar a combinar cada uno de todos los N con cada una de las combinaciones formadas de ese modo para A, B, C, ..., $N^{(n-1)}$. Si los intervalos dimensionales correspondientes a los dos terminales en cuestión, son iguales a 1, tendremos el ΔE_n -unidad, con el cual obtendremos el *quantum* de un ΔE_n , ya que éste sería su valor expresado en dichas unidades y fracciones de la misma en su caso, con lo que llegamos a la importante consecuencia de que el E_n es *cuántico*, cualidad que en el aspecto numérico dimensional se corresponde con lo *métrico* en las estructuras geométricas de esta clase. Como los ΔE_1 del contorno de un ΔE_n son isodimensionales, los respectivos *quantum* son sus intervalos dimensionales variables, o sea, un número determinado de ΔE_1 -unidades y sus fracciones en su caso, y, en su consecuencia, es fácil demostrar que el *quantum* de un ΔE_n es igual al producto de los intervalos dimensionales correspondientes a los dos términos que lo determinan.

* * *

Las proposiciones contenidas en todos los axiomas y postulados geométricos son también peculiares de los elementos numéricos de varias dimensiones, con la notable diferencia de que así como en las primeras tienen tal carácter de axiomas o postulados, en las segundas se demuestran como consecuencia necesaria de los axiomas aritméticos y de la teoría matricial dimensional, como vamos a ver a continuación con las proposiciones del primer grupo de axiomas de Pasch-Schur —axiomas de ordenación y enlace— y el sistema completo de Hilbert.

El axioma 1.º (existencia del punto) de Pasch-Schur, *Hay infinitos elementos llamados PUNTOS*, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *Hay infinitos elementos llamados TERMINOS DI-*

MENSIONALES. En efecto, restringiéndolo solamente a los términos de un solo dimensional, éste puede tener cualquier valor de la sucesión de los números reales, existiendo, por tanto, infinitos términos, y, con mayor razón, en los de mayor número de dimensionales.

El axioma 2.º (existencia del segmento) de Pasch-Schur, *Dos puntos cualesquiera determinan unívocamente un conjunto de infinitos puntos llamado SEGMENTO, tal que dos puntos cualesquiera del mismo determinan otro segmento, cuyos puntos pertenecen al primero,* puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *Dos términos cualesquiera (A, B) y (A', B') determinan unívocamente un conjunto de infinitos términos, llamado INTERVALO de una dimensión, tal que dos términos cualesquiera del mismo determinan otro intervalo de una dimensión, cuyos términos pertenecen al primero.* En efecto, los dos términos $A, B)$ y (A', B') determinan un ΔE_1 delimitado por ellos, ya que con el módulo $m_1 = (B' - B)/(A' - A)$ se obtienen todos los términos de dicho ΔE_1 a partir de uno cualquiera de los dos terminales, siendo infinitos dichos términos comprendidos entre ellos, por ser infinitos los números reales respectivos entre A y A' tomados como independientes; y dos términos cualesquiera (A, B) y (A', B') de aquel intervalo $(A, B) \vdash (A', B')$, determinan otro intervalo $(A, B) \vdash (A', B')$, cuyos términos tienen que pertenecer al primero, porque al tener todos los de éste el mismo módulo con respecto a uno de sus terminales, por ejemplo el (A, B) , los dimensionales comprendidos entre B y B' tienen que estar comprendidos entre B y B' , ya que $(B' - B) = m_1 (A' - A)$, y los comprendidos entre A y A' lo están entre A y A' .

El axioma 3.º (división del segmento), *Si es C un punto del segmento $\overline{AB}$, todo punto del segmento pertenece al $\overline{CA}$ o al $\overline{CB}$, pero no a los dos simultáneamente,* puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *Si (A', B') es un término del intervalo $(A, B) \vdash (A'' \vdash B'')$, todo término del intervalo pertenece al $(A', B') \vdash (A, B)$ o al $(A', B') \vdash (A'', B'')$, pero no a los dos simultáneamente.* En efecto, un término (A', B') del intervalo $(A, B) \vdash (A'', B'')$ divide a éste en dos partes $(A, B) \vdash (A', B')$ y $(A', B') \vdash (A'', B'')$, de modo que si un término cualquiera (A''', B''') del intervalo $(A, B) \vdash (A'', B'')$ pertenece al $(A', B') \vdash (A, B)$, su dimensional A''' está comprendida entre A y A' y el B''' entre el B y el B' , y, por consiguiente, no pueden estarlo entre los respectivos del intervalo $(A', B') \vdash (A'', B'')$.

El axioma 4.º (prolongación del segmento), *Si C está en $\overline{AB}$ (siendo distinto de B) y B está en $\overline{CD}$, está C en $\overline{AD}$,* puede enunciarse

en su aspecto numérico dimensional, Si (A'', B'') pertenece a $(A, B) \vdash \vdash (A', B')$ (siendo distinto de (A', B')) y (A', B') pertenece a $(A'', B'') \vdash (A''', B''')$, (A'', B'') pertenece a $(A, B) \vdash (A''', B''')$. En efecto, como (A''', B''') tiene sus dimensionales comprendidos entre los de (A, B) y los de (A', B') , y este último los tiene, a su vez, entre los de (A'', B'') y (A''', B''') , (A'', B'') los tendrá entre los de (A, B) y los de (A''', B''') .

El axioma 5.º, Si C está en $\overline{AB}$ y en $\overline{AD}$, o está B en $\overline{AD}$ o D en $\overline{AB}$, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, Si (A''', B''') pertenece a $(A, B) \vdash (A', B')$ y a $(A, B) \vdash (A'', B'')$, o (A', B') pertenece a $(A, B) \vdash (A'', B'')$ o (A'', B'') pertenece a $(A, B) \vdash (A', B')$. En efecto, como (A''', B''') tiene sus dimensionales comprendidos entre los de (A, B) y los de (A', B') , así como entre los de (A, B) y los de (A'', B'') , esto puede ser solamente, o perteneciendo (A', B') a $(A, B) \vdash (A'', B'')$ o perteneciendo (A'', B'') a $(A, B) \vdash \vdash (A', B')$.

El axioma 6.º, Fuera de la recta hay uno y, por tanto, infinitos puntos, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, Hay uno y, por tanto, infinitos términos que no pertenecen al E_1 . En efecto, como el E_1 propuesto comprende solamente todos los términos (A, B) —restringiéndonos al E_2 — que para todos sus pares de ellos es constante m_1 , existe uno y, por tanto, infinitos términos (A, B) , que cada uno de ellos con otro de aquél, dan un m_1 distinto, y, en su consecuencia, no pertenecen a él.

El axioma 7.º, Si A, B, C son tres puntos no situados en línea recta, A' es un punto interior a $\overline{BC}$, y D un punto interior a $\overline{AA'}$, hay un punto común a $\overline{AB}$ y CD , puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, Si (A, B) , (A', B') , (A'', B'') son tres términos no pertenecientes a un mismo E_1 , (A, B) es un término perteneciente a $(A', B') \vdash (A'', B'')$, y (A', B') un término perteneciente a $(A, B) \vdash \vdash (A'', B'')$, hay un término común a $(A, B) \vdash (A', B')$ y al E_1 de $(A'', B'') \vdash (A', B')$. En efecto, veamos previamente que si los términos (A, B) y (A', B') de un ΔE_1 en un E_2 están, respectivamente, en cada uno de los dos semi- E_2 en que queda dividido este último por un E_1 a cualquiera, éste tiene un término común con $(A, B) \vdash (A', B')$, porque entonces a está comprendido en la acotación isomátrica limitada por los E_1 isomátricos en (A, B) y (A', B') con el E_1 a , y, en su consecuencia, éste tiene un término común con cualquier ΔE_1 cuyos ter-

minales estén, respectivamente, en cada uno de los dos E_1 isomátricos límites de la acotación, y, viceversa, si el $E_1 a$ tiene un término común con $(A, B) \vdash (A', B')$, sus terminales (A, B) y (A', B') están, respectivamente, en cada uno de los semi- E_2 en que el E_2 queda dividido por $E_1 a$. Sentado esto, al tener el E_1 correspondiente al $(A'', B'') \vdash (A', B')$, el término (A', B') común con el $(A, B) \vdash (A, B)$, los términos (A, B) y (A', B') están, respectivamente, en cada uno de los dos semi- E_2 en que el E_1 del intervalo $(A'', B'') \vdash (A', B')$ divide al E_2 determinado por los tres términos (A, B) , (A', B') , (A'', B'') , y como, por otra parte, el término (A', B') tiene que estar en el mismo semi- E_2 que el (A, B) , pues, de lo contrario, el E_1 del intervalo $(A'', B'') \vdash (A', B')$ tendría un término común con el $(A'', B'') \vdash (A', B')$, que comprende al $(A, B) \vdash (A', B')$ —además del (A'', B'') —, resulta que los términos (A, B) y (A', B') están, respectivamente, en cada uno de los dos semi- E_2 precisados y, por tanto, el E_1 del $(A'', B'') \vdash (A', B')$ tiene un término común con $(A, B) \vdash (A', B')$.

El axioma 8.º, *Hay un punto exterior a cada plano*, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *Hay un término que no pertenece a cada E_2* . En efecto, como cada E_2 comprende solamente los términos (A, B, C) para los que m_2 es constante, existe otro término cualquiera (A', B', C') que junto con dos cualesquiera de aquéllos, resulta un m_2 distinto y, por consiguiente, este término no pertenece al E_2 propuesto.

El axioma 9.º, *Hay un punto exterior al espacio E_3* , puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *Hay un término que no pertenece a cada E_3* . En efecto, como cada E_3 comprende solamente los términos (A, B, C, D) para los que m_3 es constante, existe otro término cualquiera (A', B', C', D') que junto con tres términos cualesquiera del E_3 propuesto, resulten un m_3 distinto, y, por consiguiente, no pertenece a él.

* *

El axioma 1.º del primer grupo (axiomas de enlace) de Hilbert, *Dos puntos distintos A y B determinan siempre una recta a* , puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *Dos términos distintos (A, B) y (A', B') determinan siempre un elemento $E_1 a$* . En efecto, dos términos cualesquiera (A, B) y (A', B') son necesarios y suficientes para obtener el $m_1 = (B' - B)/(A' - A)$, con el cual queda perfectamente

determinado un E_1 a y solamente uno, porque con dicho módulo unidimensional se pueden hallar todos sus términos, y con un término y un m_1 no hay más que un solo E_1 .

El axioma 2.º del primer grupo, *Dos puntos cualesquiera, distintos entre sí, de una recta, la determinan*, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *Dos términos (A, B) y (A', B') cualesquiera, distintos entre sí, de un E_1 , lo determinan*. En efecto, dos términos cualesquiera (A, B) y (A', B') , distintos entre sí, de un mismo E_1 , dan lugar al $m_1 = (B' - B)/(A' - A)$, que es constante para todos los pares de términos de dicho E_1 y, por consiguiente, lo determinan, como se vio en el axioma 1.º

El axioma 3.º del primer grupo, *Sobre una recta existen siempre por lo menos dos puntos; en un plano existen por lo menos tres puntos no situados sobre una recta*, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *En un E_1 existen siempre por lo menos dos términos; en un E_2 existen por lo menos tres términos no pertenecientes a un mismo E_1* . En efecto, dos términos (A, B) y (A', B') son necesarios y suficientes para obtener el m_1 que determina a un E_1 ; en cuanto al E_2 , son necesarios y suficientes tres términos

$$(A, B, C), (A', B', C') \text{ y } (A'', B'', C'')$$

para que existan los dos determinantes que son precisos y bastan para obtener la matriz de todo E_2 y, por tanto, no pueden pertenecer los tres a un mismo E_1 , porque de lo contrario no pueden obtenerse los módulos unidimensionales distintos para que con las respectivas diferencias de los del mismo orden, resulte el m_2 correspondiente a aquel E_2 .

El axioma 4.º del primer grupo, *Tres puntos A, B, C , no situados sobre una misma recta, determinan siempre un plano*, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *Tres términos (A, B, C) , (A', B', C') , (A'', B'', C'') no pertenecientes a un mismo E_1 , determinan siempre un E_2* . En efecto, tomando como término común el (A, B, C) , tendremos los determinantes $(A, B, C) \cup (A', B', C')$ y $(A, B, C) \cup (A'', B'', C'')$, con los cuales resulta:

$$\begin{array}{l}
 (A, B, C) \vdash (A', B', C') \\
 (A, B, C) \vdash (A'', B'', C'')
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 m_1 = \frac{B' - B}{A' - A} \\
 m'_1 = \frac{C' - C}{A' - A} \\
 m_1 = \frac{B'' - B}{A'' - A} \\
 m'_1 = \frac{C'' - C}{A'' - A}
 \end{array}
 \right|
 m_2 = \frac{m'_1 - m_1}{m_1 - m_1}$$

la matriz formada por los módulos m_1 , m'_1 y m_2 , con los cuales quedan determinados todos los demás términos del E_2 correspondiente al ΔE_2 ,

$$\frac{(A, B, C) \vdash (A', B', C')}{(A, B, C) \vdash (A'', B'', C'')}$$

El axioma 5.º del primer grupo, *Tres puntos cualesquiera de un plano, no situados sobre una misma recta, lo determinan*, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *Tres términos cualesquiera de un E_2 no pertenecientes a un mismo E_1 , lo determinan*. En efecto, como hemos visto en el axioma 4.º, con tres términos cualesquiera no pertenecientes a un mismo E_1 , es decir, capaces de constituir dos determinantes, se obtiene siempre la matriz del E_2 propuesto, quedando éste, por tanto, determinado, porque con esta matriz se pueden obtener todos los demás términos.

El axioma 6.º del primer grupo, *Si dos puntos A y B de una recta a están situados en un plano α , todo punto de a está situado en el mismo plano α* , puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *Si dos términos (A, B, C) y (A', B', C') de un E_1 pertenecen a un $E_2 \alpha$, todo término de a pertenece al $E_2 \alpha$* . En efecto, por pertenecer los términos (A, B, C) y (A', B', C') al $E_2 \alpha$, si tomamos otro término (A'', B'', C'') de este $E_2 \alpha$, que no pertenece al E_1 del intervalo $(A, B, C) \vdash (A', B', C')$, y con los tres hallamos el m_2 , éste será el módulo bidimensional del $E_2 \alpha$, y como los m_1 y m'_1 de dicho intervalo $(A, B, C) \vdash (A', B', C')$ que han servido para hallar el m_2 en cuestión son los mismos para todos los términos del $E_1 \alpha$, al cual pertenecen los términos (A, B, C) y (A', B', C') , todo término de dicho $E_1 \alpha$ dará el

mismo m_2 con dos términos cualesquiera del $E_2 \alpha$, y, por consiguiente, pertenece a este último.

El axioma 7.º del primer grupo, *Si dos planos α y β tienen un punto común, tienen común por lo menos un segundo punto*, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *Si dos E_2 , α y β tienen un término común, tienen por lo menos un segundo término*. En efecto, si consideramos un E_1 del $E_2 \alpha$ que contenga al término común (A, B, C) y otro E'_1 del mismo $E_2 \alpha$ que sea isomatricial con E_1 , E'_1 tiene que tener un término (A', B', C') común con $E_2 \beta$, porque todo E_2 que tenga un término común con un E_1 lo tiene con todos los demás E_1 pertenecientes al mismo conjunto isomatricial.

El axioma 8.º del primer grupo, *Existen por lo menos cuatro puntos no situados en un plano*, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *Existen por lo menos cuatro términos no pertenecientes a un E_2* . En efecto, con tres de dichos términos que puedan constituir dos determinantes, queda determinada la matriz de un E_2 , y el otro término, junto con dos de aquéllos, puede dar un m_2 distinto del de aquella matriz, y, por consiguiente, no pertenece a este E_2 el cuarto término.

El axioma 1.º del segundo grupo (axiomas de ordenación) del sistema de Hilbert, *Si A, B, y C son puntos de una recta, y B está situado entre A y C, B estará situado también entre C y A*, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *Si (A, B), (A', B') y (A'', B'') son términos de un E_1 , y (A', B') está comprendido entre (A, B) y (A'', B''), (A', B') estará comprendido también entre (A'', B'') y (A, B)*. En efecto, por estar comprendido (A', B') entre (A, B) y (A'', B''), cada dimensional A', B' será mayor o menor que los respectivos A, B, y menor o mayor que los respectivos A'', B'', según el sentido de la sucesión de tales dimensionales, y, por consiguiente, el término (A', B') estará también comprendido entre (A'', B'') y (A, B).

El axioma 2.º del segundo grupo, *Si A y C son dos puntos de una recta, existe por lo menos un punto B situado entre A y C, y por lo menos un punto D tal que C esté situado entre A y D*, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *Si (A, B) y (A'', B'') son dos términos de un E_1 , existe por lo menos un término (A', B') comprendido entre (A, B) y (A'', B''), y por lo menos un término (A''', B''') tal que (A'', B'') esté comprendido entre (A, B) y (A''', B''')*. En efecto, siempre existe un dimensional A' comprendido entre A y A'', así como un dimensional B' comprendido entre B y B'', y, por consiguiente, el término (A', B') está comprendido entre (A, B) y (A'', B''); del mismo

modo, siempre existe un dimensional A'' tal que A'' esté comprendido entre A y A' , así como un dimensional B'' tal que B'' esté comprendido entre B y B' , y, por tanto, el término (A'', B'') está comprendido entre (A, B) y (A', B') .

El axioma 3.º del segundo grupo, *Entre tres puntos cualesquiera de una recta, existe siempre uno y uno solo que esté situado entre los otros dos*, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, *Entre tres términos cualesquiera de un E_1 , existe siempre uno y uno solo que esté comprendido entre los otros dos*. En efecto, de los tres dimensionales A, A', A'' , correspondientes a cada uno de los tres términos propuestos, tiene que ser uno de ellos, por ejemplo, el A' , mayor que el A y menor que el A'' , o viceversa, y, por consiguiente, como

$$(B' - B) = m_1 (A' - A) \quad \text{y} \quad (B'' - B') = m_1 (A'' - A'),$$

B' está comprendido entre B y B'' , o sea, que el término (A', B') está comprendido entre (A, B) y (A'', B'') .

El axioma 4.º del segundo grupo (llamado de Pasch), *Sean A, B, C , tres puntos no situados en línea recta, y a una recta en el plano ABC que no pasa por ninguno de estos puntos; si la recta a pasa por un punto del segmento $\overline{AB}$, pasa también por un punto del segmento $\overline{BC}$ o por un punto del segmento $\overline{AC}$* , puede enunciarse en el aspecto numérico dimensional, *Sean $(A, B), (A', B'), (A'', B'')$, tres términos no pertenecientes a un mismo E_1 , y a un E_1 en el E_2 determinado por dichos tres términos que no contiene a ninguno de ellos; si a contiene un término del intervalo $(A, B) \vdash (A', B')$, contiene también un término del intervalo $(A', B') \vdash (A'', B'')$ o del intervalo $(A, B) \vdash (A'', B'')$* . En efecto, con lo demostrado como cuestión previa en el axioma 7.º de Pasch-Schur, por tener a un término común con el intervalo $(A, B) \vdash (A', B')$, cada uno de los terminales de este último se encuentra, respectivamente, en cada uno de los dos semi- E_2 en que queda dividido por a el E_2 determinado por los tres términos propuestos, y, por consiguiente, si el término (A'', B'') está en distinto semi- E_2 que el (A, B) , a tendrá un término común con $(A, B) \vdash (A'', B'')$, y si está en distinto semi- E_2 que el (A', B') , a tendrá un término común con $(A', B') \vdash (A'', B'')$.

El axioma 1.º del tercer grupo (axiomas de congruencia) del sistema de Hilbert, *Si A y B son dos puntos sobre una recta a y A' es otro*

punto sobre la misma recta u otra a' , se puede hallar siempre a partir de A' y en un sentido dado sobre la recta a' , un punto B' tal que el segmento $\overline{AB}$ sea igual o congruente al segmento $\overline{A'B'}$, se puede enunciar en su aspecto numérico dimensional, Si (A, B) y (A', B') son dos términos pertenecientes a un $E_1 a$ y (A'', B'') es otro término perteneciente al mismo $E_1 a$ o a otro $E_1 a'$, se puede hallar siempre un término (A''', B''') tal que el intervalo $(A, B) \vdash (A', B')$ sea igual o idéntico al intervalo $(A'', B'') \vdash (A''', B''')$. En efecto, si el término (A'', B'') pertenece al mismo $E_1 a$ o a otro $E_1 a'$, siendo ambos isomatríciales, se puede hallar siempre a partir de (A'', B'') y en un sentido dado un término $(A'' + \Delta a, B'' + \Delta b)$, que dará un intervalo $(A'', B'') \vdash (A'' + \Delta a, B'' + \Delta b)$ idéntico al $(A, B) \vdash (A', B')$, si $\Delta a = A' - A$ y $\Delta b = B' - B$; pero si el otro $E_1 a'$ no es isomatricial al $E_1 a$, entonces la fórmula $I = \Delta a \sqrt{1 + m_1^2}$ nos dará, primero el *quantum* I en función de $A' - A$ y de $m_1 = (B' - B)/(A' - A)$, y después el valor de Δa en función del *quantum* anterior y del m_1 de a' , así como el de $\Delta b = m_1 \Delta a$, con lo que el término respectivo $(A'' + \Delta a, B'' + \Delta b)$ nos dará con el (A'', B'') el intervalo $(A'', B'') \vdash (A'' + \Delta a, B'' + \Delta b)$, igual al $(A, B) \vdash (A', B')$.

El axioma 2.º del tercer grupo, Si el segmento $\overline{AB}$ es congruente tanto al segmento $\overline{A'B'}$ como al segmento $\overline{A''B''}$, los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{A''B''}$ son también congruentes, o sea que si $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ y $\overline{AB} \equiv \overline{A''B''}$, se tendrá también $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$, se puede enunciar en su aspecto numérico dimensional, Si un intervalo $(A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b)$ es igual tanto al intervalo $(A', B') \vdash (A' + \Delta a', B' + \Delta b')$, como al intervalo $(A'', B'') \vdash (A'' + \Delta a'', B'' + \Delta b'')$, los intervalos $(A', B') \vdash (A' + \Delta a', B' + \Delta b')$ y $(A'', B'') \vdash (A'' + \Delta a'', B'' + \Delta b'')$ son también iguales. En efecto, si los intervalos que se comparan pertenecen a un mismo elemento E_1 o a elementos isomatríciales, es decir, que sus m_1 son los mismos, entonces, al ser el $(A', B') \vdash (A' + \Delta a', B' + \Delta b')$ idéntico al $(A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b)$, y éste al $(A'', B'') \vdash (A'' + \Delta a'', B'' + \Delta b'')$, tendremos $\Delta a = \Delta a'$, $\Delta b = \Delta b'$, y $\Delta a = \Delta a''$, $\Delta b = \Delta b''$, o sea, que $\Delta a' = \Delta a''$, $\Delta b' = \Delta b''$, y, por consiguiente, $(A', B') \vdash (A' + \Delta a', B' + \Delta b')$ es idéntico al $(A'', B'') \vdash (A'' + \Delta a'', B'' + \Delta b'')$, pero si los módulos m_1, m_1, m_1 , respectivos, son distintos, tendremos:

$$\begin{aligned}\Delta a \sqrt{1 + m_1^2} &= \Delta a' \sqrt{1 + m_1^2} \\ \Delta a \sqrt{1 + m_1^2} &= \Delta a'' \sqrt{1 + m_1^2},\end{aligned}$$

luego

$$\Delta a' \sqrt{1 + m_1^2} = \Delta a'' \sqrt{1 + m_1^2},$$

es decir, que los intervalos $(A', B') \vdash (A' + \Delta a', B' + \Delta b')$ y $(A'', B'') \vdash (A'' + \Delta a'', B'' + \Delta b'')$ son iguales.

El axioma 3.º del tercer grupo, Si $\overline{AB}$ y $\overline{B'C}$ son dos segmentos sin puntos comunes sobre una recta a y $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ dos segmentos sobre la misma recta u otra a' , igualmente sin puntos comunes; si $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ y $\overline{B'C} \equiv \overline{B'C'}$, será igualmente $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, Si $(A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b)$ y $(A + \Delta a, B + \Delta b) \vdash (A + \Delta a + \Delta a', B + \Delta b + \Delta b')$ son dos intervalos sin términos comunes pertenecientes a un $E_1 a$, y

$$(A'', B'') \vdash (A'' + \Delta a'', B'' + \Delta b'')$$

y

$$(A'' + \Delta a'' + \Delta a''', B'' + \Delta a'' + \Delta b''')$$

dos intervalos en el mismo $E_1 a$ u otro a' , igualmente sin términos comunes; y si

$$(A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) = (A'', B'') \vdash (A'' + \Delta a'', B'' + \Delta b'')$$

y

$$\begin{aligned} (A + \Delta a, B + \Delta b) \vdash (A + \Delta a + \Delta a', B + \Delta b + \Delta b') = \\ = (A'', B'') \vdash (A'' + \Delta a'' + \Delta a''', B'' + \Delta b'' + \Delta b'''), \end{aligned}$$

será igualmente

$$\begin{aligned} (A, B) \vdash (A + \Delta a + \Delta a', B + \Delta b + \Delta b') = \\ = (A'', B'') \vdash (A'' + \Delta a'' + \Delta a''', B'' + \Delta b'' + \Delta b'''). \end{aligned}$$

En efecto, si los intervalos que se comparan pertenecen al mismo $E_1 a$ o los dos $E_1 a$ y a' , son isomatrificiales, entonces, al ser $(A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b)$ idéntico al $(A'', B'') \vdash (A'' + \Delta a'', B'' + \Delta b'')$ y el $(A + \Delta a, B + \Delta b) \vdash (A + \Delta a + \Delta a', B + \Delta b + \Delta b')$ idéntico al $(A'' + \Delta a'', B'' + \Delta b'') \vdash (A'' + \Delta a'' + \Delta a''', B'' + \Delta b'' + \Delta b''')$,

tendremos $\Delta a = \Delta a''$, $\Delta b = \Delta b''$, $\Delta a' = \Delta a''$, $\Delta b' = \Delta b''$, y por consiguiente,

$$\Delta a + \Delta a' = \Delta a'' + \Delta a''$$

$$\Delta b + \Delta b' = \Delta b'' + \Delta b''$$

es decir, que los

$$(A, B) \vdash (A + \Delta a + \Delta a', B + \Delta b + \Delta b')$$

y

$$(A'', B'') \vdash (A'' + \Delta a'' + \Delta a'', B'' + \Delta b'' + \Delta b'')$$

son idénticos, pero si los módulos m_1 y m_1 son distintos, entonces

$$\Delta a \sqrt{1 + m_1^2} = \Delta a'' \sqrt{1 + m_1^2}$$

$$\Delta a' \sqrt{1 + m_1^2} = \Delta a'' \sqrt{1 + m_1^2},$$

luego

$$\begin{aligned} (A, B) \vdash (A + \Delta a + \Delta a', B + \Delta b + \Delta b') = \\ = (A'', B'') \vdash (A'' + \Delta a'' + \Delta a'', B'' + \Delta b'' + \Delta b''). \end{aligned}$$

El axioma 4.º del tercer grupo, Sean dados un ángulo $\sphericalangle (h, k)$ en un plano α y una recta a' en un plano α' , así como un semiplano determinado por a' sobre α' . Si h' es una semirrecta de la recta a' , que parte del punto O' , existe en el plano α' una semirrecta y una sola, tal que el ángulo $\sphericalangle (h, k)$ sea congruente o igual al ángulo $\sphericalangle (h', k')$ y que todos los puntos interiores del ángulo $\sphericalangle (h', k')$ estén situados en el semiplano citado. En signos: ángulo $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h', k')$, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, Sean dados una radio-acotación

$$\begin{aligned} & \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \\ (A, B) \vdash & \\ & \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b') \end{aligned}$$

en un $E_2 \alpha$ y un $E_1 a'$ en un $E_2 \alpha'$, así como un semi- E_2 determinado

por a' en el $E_2 \alpha'$. Si h' es un semi- E_1 del a' que tiene un terminal (A', B') , existe en el $E_2 \alpha'$ un semi- $E_1 k'$ y uno solo, tal que

$$\begin{aligned} & \vdash (A' + \Delta a'', B' + \Delta b'') \\ (A', B') & \vdash \\ & \vdash (A' + \Delta a''', B' + \Delta b''') \end{aligned}$$

sea idéntico o igual a

$$\begin{aligned} & \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \\ (A, B) & \vdash \\ & \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b') \end{aligned}$$

y que todos los términos interiores de la radioacotación

$$\begin{aligned} & \vdash (A' + \Delta a'', B' + \Delta b'') \\ (A', B') & \vdash \\ & \vdash (A' + \Delta a''', B' + \Delta b''') \end{aligned}$$

estén comprendidos en el semi- E_2 citado. En efecto, si el $E_1 a'$ tiene el mismo m_1 que el E_1 que contiene a h —que, a su vez, contiene a $(A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b)$ —, entonces existe un semi- $E_1 k'$ y uno solo, que teniendo el mismo m_1 que k tiene común (A', B') con h' formando en el $E_2 \alpha'$ la radioacotación

$$\begin{aligned} & \vdash (A' + \Delta a'', B' + \Delta b'') \\ (A', B') & \vdash \\ & \vdash (A' + \Delta a''', B' + \Delta b''') \end{aligned}$$

que es idéntica a la

$$\begin{aligned} & \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \\ (A, B) & \vdash \\ & \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b') \end{aligned}$$

del $E_2 \alpha$. Pero si el m_1 de a' es distinto del correspondiente a h , podemos hacer que $(A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b)$ en h sea igual a $(A, B) \vdash \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b')$ en k , e igual también a $(A', B') \vdash (A' + \Delta a'', B' + \Delta b'')$ en h' , existiendo entonces en el $E_2 \alpha'$ un intervalo $(A', B') \vdash \vdash (A' + \Delta a'', B' + \Delta b'')$ de igual *quantum* que aquéllos, tal que resulte que el intervalo $(A' + \Delta a'', B' + \Delta b'') \vdash (A' + \Delta a''', B' + \Delta b''')$

delimitado por los terminales no-comunes de los dos intervalos en $E_2 \alpha'$, sea igual al $(A + \Delta a, B + \Delta b) \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b')$ delimitado por los terminales no-comunes de los ΔE_1 en $E_2 \alpha$, o sea, que en el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \Delta a''^2 + \Delta b''^2 &= \Delta a'''^2 + \Delta b'''^2 \\ (\Delta a' - \Delta a)^2 + (\Delta b' - \Delta b)^2 &= (\Delta a''' - \Delta a'')^2 + (\Delta b''' - \Delta b'')^2 \end{aligned}$$

tendremos los valores de $\Delta a'''$ y $\Delta b'''$ —intervalos dimensionales del ΔE_1 en k' — para los que se verifica,

$$\begin{aligned} (A, B) \vdash \begin{array}{l} \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \\ \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b') \end{array} &= (A', B') \vdash \begin{array}{l} \vdash (A' + \Delta a'', B' + \Delta b'') \\ \vdash (A' + \Delta a''', B' + \Delta b''') \end{array} \end{aligned}$$

siendo único el $(A', B') \vdash (A' + \Delta a''', B' + \Delta b''')$ para el semi- E_2 determinado por α' en el $E_2 \alpha'$, porque $\Delta a'''$ y $\Delta b'''$ son también únicos tanto en los valores como en sus signos con respecto a los signos de $\Delta a'$ y $\Delta b'$ de $(A, B) \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b')$. Estos signos suponen la pertenencia al semi- E_2 correspondiente a k' de la radioacotación

$$\begin{aligned} &\vdash (A' + \Delta a'', B' + \Delta b'') \\ (A', B') \vdash &\vdash (A' + \Delta a''', B' + \Delta b''') \end{aligned}$$

y, por consiguiente, el que sus términos internos pertenezcan a dicho semi- E_2 .

El axioma 5.º del tercer grupo, *Si para dos triángulos ABC y $A'B'C'$, se verifican las congruencias $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$; $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$; $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$, se verifican también las congruencias $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$; $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$ y $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$, puede enunciarse en su aspecto numérico dimensional, Si para dos triángulos*

$$(A, B) \vdash \begin{array}{l} \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \\ \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b') \end{array}$$

y

$$(A', B') \vdash \begin{array}{l} \vdash (A' + \Delta a'', B' + \Delta b'') \\ \vdash (A' + \Delta a''', B' + \Delta b''') \end{array}$$

se verifican las igualdades

$$(A, B) \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) = (A', B') \vdash (A' + \Delta a'', B' + \Delta b'');$$

$$(A, B) \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b') = (A', B') \vdash (A' + \Delta a''', B' + \Delta b''');$$

$$\begin{aligned} & \text{radioacotación } (A, B) \vdash \begin{array}{c} \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \\ \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b') \end{array} = \\ & = \text{radioacotación } (A', B') \vdash \begin{array}{c} \vdash (A' + \Delta a'', B' + \Delta b'') \\ \vdash (A' + \Delta a''', B' + \Delta b''') \end{array} \end{aligned}$$

se verifican también las igualdades

$$\begin{aligned} & (A + \Delta a, B + \Delta b) \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b') = \\ & = (A' + \Delta a'', B' + \Delta b'') \vdash (A' + \Delta a''', B' + \Delta b'''); \\ & \text{radioacotación } (A + \Delta a, B + \Delta b) \vdash \begin{array}{c} \vdash (A, B) \\ \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b') \end{array} = \\ & = \text{radioacotación } (A' + \Delta a'', B' + \Delta b'') \vdash \begin{array}{c} \vdash (A', B') \\ \vdash (A' + \Delta a''', B' + \Delta b''') \end{array}; \\ & \text{radioacotación } (A + \Delta a', B + \Delta b') \vdash \begin{array}{c} \vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \\ \vdash (A, B) \end{array} = \\ & = \text{radioacotación } (A' + \Delta a''', B' + \Delta b''') \vdash \begin{array}{c} \vdash (A' + \Delta a'', B' + \Delta b'') \\ \vdash (A', B') \end{array} \end{aligned}$$

En efecto, como la estructura del triángulo es invariante si lo son los ΔE_1 que lo delimitan, bastará hacer la demostración para el caso en que los ΔE_1 que se comparan sean idénticos, ya que entonces es válida para cualquier otro caso en que sólo sean iguales, y, por consiguiente, si se verifica que

$$\begin{aligned} \Delta a &= \Delta a''; \Delta b = \Delta b'' \\ \Delta a' &= \Delta a'''; \Delta b' = \Delta b''', \end{aligned}$$

tendremos

$$\begin{aligned}\Delta a' - \Delta a &= \Delta a''' - \Delta a'' \\ \Delta b' - \Delta b &= \Delta b''' - \Delta b'',\end{aligned}$$

o sea, que

$$(A + \Delta a, B + \Delta b) \vdash (A + \Delta a', B + \Delta b')$$

y

$$(A' + \Delta a'', B' + \Delta b'') \vdash (A' + \Delta a''', B' + \Delta b''')$$

son idénticos. La identidad de las radioacotaciones

$$\begin{aligned}(A, B) &\vdash (A + \Delta a, B + \Delta b) \\ (A, B) &\vdash (A + \Delta a', B + \Delta b')\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(A', B') &\vdash (A' + \Delta a'', B' + \Delta b'') \\ (A', B') &\vdash (A' + \Delta a''', B' + \Delta b''')\end{aligned}$$

es en este caso consecuencia de los ΔE_1 que los delimitan, ya que entonces los m_1 y m_1 de los primeros son iguales a los de los segundos, respectivamente. En cuanto a los otros dos pares de radioacotaciones, tenemos:

$$\frac{-\Delta b}{-\Delta a} = \frac{-\Delta b''}{-\Delta a''}; \quad \frac{(\Delta b' - \Delta b)}{(\Delta a' - \Delta a)} = \frac{(\Delta b''' - \Delta b'')}{(\Delta a''' - \Delta a'')}$$

y

$$\frac{-\Delta b'}{-\Delta a'} = \frac{-\Delta b'''}{-\Delta a'''}; \quad \frac{(\Delta b - \Delta b')}{(\Delta a - \Delta a')} = \frac{(\Delta b'' - \Delta b''')}{(\Delta a'' - \Delta a''')}$$

es decir, que al ser los m_1 y m_1 de los ΔE_1 que los limitan iguales, respectivamente, las radioacotaciones son idénticas en cada par.

El único axioma del cuarto grupo —el postulado de Euclides—, Sean a una recta cualquiera y A un punto exterior a ella. En el plano

determinado por a y A existe a lo sumo una recta que pase por A y no corte a a . Esta recta recibe el nombre de la paralela a a por A , se puede enunciar en su aspecto numérico dimensional, Sean a un E_1 cualquiera y (A, B) un término no perteneciente a él. En el E_2 determinado por a y (A, B) existe a lo sumo un E_1 que contenga a (A, B) y no tenga nada común con a . En efecto, si m_1 es el módulo del E_1 a , el E_1 determinado por el término (A, B) y el mismo módulo m_1 , no tiene nada en común con a , porque (A, B) no pertenece a él, ya que los E_1 del mismo módulo, si tienen un término común, los tienen todos; siendo único el E_1 de (A, B) , porque con un término y un m_1 no existe más que un E_1 .

El axioma 1.º del grupo de los de continuidad —axioma de la medición o de Arquímedes—, Sea A_1 un punto cualquiera sobre una recta entre los puntos A y B dados arbitrariamente; constrúyanse luego los puntos $A_2, A_3, A_4, \dots$, de modo que A_1 esté situado entre A y A_2 , A_2 entre A_1 y A_3 , A_3 entre A_2 y A_4 , etc., y de modo, además, que los segmentos $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4$, etc., sean iguales. En la serie de los puntos $A_2, A_3, A_4, \dots$, existirá siempre un punto A_n tal que B esté situado entre A y A_n , se puede enunciar en su aspecto numérico dimensional, Sea (A_1, B_1) un término cualquiera en un E_1 entre los términos (A, B) y (A', B') dados arbitrariamente; considérense luego los términos $(A_2, B_2), (A_3, B_3), (A_4, B_4)$, etc., de modo que (A_1, B_1) se encuentre entre (A, B) y (A_2, B_2) , (A_2, B_2) entre (A_1, B_1) y (A_3, B_3) , (A_3, B_3) entre (A_2, B_2) y (A_4, B_4) , etc., y de modo, además, que los intervalos $(A, B) \vdash (A_1, B_1)$, $(A_1, B_1) \vdash (A_2, B_2)$, $(A_2, B_2) \vdash (A_3, B_3)$, $(A_3, B_3) \vdash (A_4, B_4)$, etc., sean iguales. En la serie de los términos $(A_2, B_2), (A_3, B_3), (A_4, B_4), \dots$, existirá siempre un término (A_n, B_n) tal que (A', B') esté comprendido entre (A, B) y (A_n, B_n) . En efecto, esta proposición es el axioma aritmético correspondiente en relación con los dos órdenes de dimensionales que constituyen los términos respectivos, es decir, que continúa siendo axioma, pero aritmético.

El axioma 2.º del grupo de los de continuidad —Axioma de integridad— y último del sistema de Hilbert, Los elementos (puntos, rectas, planos) de la Geometría constituyen un sistema de entes incapaces de ampliación al conservar todos los axiomas, o sea: es imposible agregar al sistema de puntos, rectas, planos, un nuevo sistema de «entes» tales que en el sistema que resulta de su agregación es satisfagan todos los axiomas I-IV y V-I, se puede enunciar en su aspecto numérico dimensional. Los elementos (E_0, E_1, E_2) de la Teoría Numérica Dimensional cons-

tituyen un sistema de entes incapaces de ampliación al conservar todos los axiomas aritméticos, o sea: es imposible agregar al sistema de E_0 , E_1 , E_2 , un nuevo sistema de «entes» tales que en el sistema que resulta de su agregación se satisfagan todos los axiomas aritméticos. En efecto, los E_0 o términos (A, B, C) —o sea, los que se obtienen con las combinaciones de cada uno de todos los dimensionales B con cada uno de todos los dimensionales A , y cada uno de todos los dimensionales C con cada una de todas las combinaciones obtenidas con A y B —, constituyen el E_3 , en el cual, para todas las posibilidades de m_1 y m' , para los E_1 , y de m_2 para los E_2 , en toda la amplitud de los números reales y los signos respectivos, constituyen un sistema de entes incapaces de ampliación, ya que los dimensionales A, B, C de dichos términos comprenden todos los números reales, con lo que queda solamente esta proposición a resultas de las posibilidades de los axiomas aritméticos, bien entendido que esta incapacidad de ampliación se circunscribe a las tres dimensiones que se tratan en este axioma del sistema de Hilbert.

* * * *