

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

**UNA VIDA DEDICADA A LA MATEMÁTICA
Y SUS APLICACIONES**

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
COMO ACADÉMICO DE NÚMERO POR EL

EXCMO. SR. D. ENRIQUE CASTILLO RON

Y CONTESTACIÓN DEL

EXCMO. SR. D. FRANCISCO JAVIER GIRÓN GONZÁLEZ-TORRE

EL DÍA 23 DE MARZO DE 2011



MADRID
Domicilio de la Academia
Valverde, 22

© Enrique Castillo Ron

Edita: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Valverde, 22
28004 Madrid

ISSN: 0214-9540
ISBN: 978-84-87125-51-5
Depósito Legal: SA-102-2011

IMPRIME: Gráficas Calima, S.A.
Santander

Índice

1. Introducción	9
1.1. El Profesor Sixto Ríos	9
1.2. El Profesor Jiménez Salas	13
1.3. Elección del tema del discurso	15
2. Probabilidad y Estadística	16
2.1. Estadística de valores extremos	16
2.2. Especificación condicional de distribuciones	19
2.3. Redes Bayesianas	23
2.3.1. Propagación simbólica de la evidencia por simulación	24
2.3.2. Propagación simbólica de la evidencia, sensibilidad y acotación	25
2.3.3. Estimación de probabilidades extremas	28
2.3.4. Especificación coherente de redes bayesianas múltiples	28
2.3.5. Aplicaciones	28
2.4. Métodos Bayesianos	29
2.5. Inferencia estadística	32
3. Ecuaciones funcionales	33
3.1. Las fórmulas de las áreas del rectángulo y del trapecio	34
3.2. Ecuación funcional de los modelos de fatiga	35
3.3. Software de ecuaciones funcionales	36
3.4. Caracterización de familias de superficies	36
4. Inteligencia artificial	38
4.1. Sistemas expertos	38
4.2. Redes neuronales	39
4.2.1. Aprendizaje de la inversa de la función neuronal como una alternativa	40
4.2.2. Aprendizaje de las funciones neuronales	41
4.2.3. Un método lineal de aprendizaje basado en sensibilidades	42
4.2.4. La descomposición ANOVA de Sobol	43
4.3. Redes funcionales	46
5. Economía	50
5.1. Modelos de demanda	50
5.2. Curvas de Lorenz	50
5.3. Modelos dinámicos	51

6. Fiabilidad y diseño en ingeniería civil	52
6.1. Introducción	52
6.2. Análisis de sensibilidades	56
6.3. Otras aplicaciones	56
6.4. Modelos de fatiga	56
6.4.1. Modelo S-N para un nivel de tensiones fijo	56
6.4.2. Modelo S-N para nivel de tensiones variable	59
6.4.3. Curvas de crecimiento de grieta para σ_m^* y σ_M^* constantes	61
6.4.4. Densidades del daño independientes de la historia de cargas	66
6.4.5. Compatibilidad de los modelos S-N y de crecimiento de grieta	66
6.4.6. Modelos E-N	66
6.4.7. Efecto de la longitud en la vida a fatiga de elementos longitudinales	67
7. Algebra y aplicaciones	69
7.1. Los algoritmos de Jubete	70
7.1.1. Algoritmo para obtener los subespacios ortogonal y complementario de uno dado	70
7.1.2. Algoritmo para obtener el cono dual de uno dado	71
7.2. Algebra tensorial	74
7.3. Observabilidad	78
8. Investigación operativa y análisis de sensibilidad	78
8.1. Planteamiento del problema	79
8.2. Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker	79
8.3. Un método práctico para obtener las sensibilidades de la función objetivo	80
8.4. Fórmula general para la sensibilidad de la función objetivo	80
8.5. Método general para todas las sensibilidades	81
8.6. El caso particular de programación lineal	83
9. Ecuaciones en derivadas parciales	83
9.1. Puentes con planta curva	83
9.2. Ecuaciones diferenciales con condiciones de rango	84
10. Cálculo de variaciones	85
10.1. Aplicaciones a Geotecnia	85
10.2. Análisis de sensibilidad	91
10.3. Generalización de la teoría clásica	92

<i>ÍNDICE</i>	7
11. Modelos de transporte	93
11.1. Tráfico de trenes	93
11.2. Tráfico de automóviles	93
12. Epílogo	98
13. Bibliografía	99
13.1. Referencias	99
14. Contestación de Francisco Javier Girón González-Torre	123

UNA VIDA DEDICADA A LA MATEMÁTICA Y SUS APLICACIONES

POR

Enrique Castillo Ron

*Excelentísimo Señor Presidente
Excelentísimos Señores Académicos
Señoras y Señores:*

1. Introducción

Es para mí un alto honor y una gran satisfacción haber sido elegido Académico Numerario, adscrito a la Sección de Exactas. Por ello, quiero que mis primeras palabras sean de agradecimiento a esta Real Academia y a todos sus Académicos por mi elección. De una manera especial deseo reconocer a los tres académicos numerarios, profs. Pedro Jiménez Guerra, Francisco Javier Girón González-Torre y David Ríos Insua, que propusieron mi candidatura para ocupar la Plaza Número 12 de Académico Numerario, vacante por el fallecimiento del Profesor Sixto Ríos.

1.1. El Profesor Sixto Ríos

Tiene para mí un significado especial el que se haya pensado en mi persona para sustituir nada menos que al Prof. Sixto Ríos, pues en sus libros, que dejaron en mí una profunda huella, aprendí mi principal especialidad que es la “Estadística”, considerándolo responsable de que yo me dedicara a esta rama de la Matemática.

Interesantes detalles biográficos de su vida puede verse en Escribano y Busto [209, 210, 211].

Hijo de D. José María Ríos Moreiro y Dña. María Cristina García Martín, el profesor Sixto Ríos García nació en Pelahustán, un pueblecito de Toledo, el 4 de enero



Figura 1: El profesor Sixto Ríos con Julio Rey Pastor el día de su ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

de 1913. Se puede decir que inicialmente fue discípulo de sus propios padres, que eran maestros de profesión y le transmitieron muchas de sus virtudes. Tras el traslado de la familia a Madrid, estudió primero en el Colegio San Mauricio y más tarde en el Instituto San Isidro, en el que destacó por ser el número uno de su promoción.

En 1932 terminó la licenciatura en Ciencias Exactas en la Universidad Central de Madrid, con Sobresaliente y Premio Extraordinario para, seguidamente, obtener el título de Doctor en Ciencias Matemáticas. Fue uno de los discípulos predilectos de Julio Rey Pastor con el que estuvo en el Laboratorio y Seminario Matemático (LSM) y por el que sintió una gran admiración (figura 1). Ocupó las plazas de Catedrático de Análisis Matemático en las Universidades de Valencia y Valladolid y la de Catedrático de Estadística de la Universidad Central de Madrid, además de Dr. Ingeniero Geógrafo y Profesor en la Escuela de Ingenieros Aeronáuticos y en la Facultad de Ciencias Económicas de Madrid.

Contrajo matrimonio en 1950 con María Jesús Insúa Negroa en la Iglesia del Espíritu Santo del CSIC y tuvo seis hijos: María Jesús, Cristina, Sixto, Valeria, David y Alba (véase la figura 2).

Sus obras estuvieron dedicadas principalmente al análisis matemático, a las probabilidades, a la estadística y a la investigación operativa, entre las que destacan por su gran incidencia en el número de lectores: *Matemática Aplicada*, publicada en



Figura 2: El profesor Sixto Ríos con su esposa María Jesús Insúa Negro y sus hijos María Jesús, Cristina, Sixto, Valeria, David y Alba en la foto del carnet de familia numerosa.

1975 por Editorial Paraninfo (Ríos [258]), *Métodos Estadísticos*, publicado en 1977 por Mc Graw Hill (Ríos [257]) y *Procesos de decisión multicriterio*, en 1990 por Eudema (Ríos [259]). Tengo que reconocer y agradecer el impacto que causó en mí el segundo de estos libros.

Realizó investigaciones de aplicación en la industria española y formó una Escuela de Investigación Operativa, contribuyendo a crear y dirigir importantes centros de estudios e investigación. Fue Director de la Escuela de Estadística de la Universidad de Madrid, Director del Instituto de Investigación Operativa y Estadística del C.S.I.C., Director del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense de Madrid, Presidente de la Sociedad Española de Investigación Operativa, Estadística e Informática y fundador de las revistas *Trabajos de Estadística e Investigación Operativa*, antecedentes de las actuales *Test* y *Top*.

A nivel internacional tuvo importantes reconocimientos. Fue académico correspondiente de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires, y organizador y



Figura 3: El profesor Sixto Ríos recibiendo el Premio Nacional de Investigación de manos de su Majestad el Rey.

fundador, por encargo de la Unesco, de la Escuela de Estadística de la Universidad Central de Venezuela en Caracas. Fue miembro del comité de redacción de *Statistical Abstracts* y miembro de número del *International Statistical Institute* y del *Institute of Mathematical Statistics*. Impartió conferencias en universidades de todo el mundo y presentó comunicaciones en congresos internacionales y publicaciones en revistas de máximo nivel internacional.

Su trayectoria le hizo merecedor de importantes premios y condecoraciones, tales como el Premio Alfonso X El Sabio (1943), el Premio Nacional de Investigación Matemática (1976) (figura 3) y la Medalla de Oro de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (1983), su nombramiento como Académico Numerario de esta Real Academia en 1961 (figura 4), de la que presidió la sección de exactas, y los Doctorados Honoris Causa por las Universidades de Oviedo (2000) y de Sevilla (2001).

El profesor Sixto Ríos García mediante su magisterio personal directo y sus más de 30 libros, más de 200 artículos y 16 direcciones de tesis, ha formado a numerosos alumnos. Entre sus discípulos directos se encuentran catedráticos de muchas universidades, y directores de centros estadísticos de Hispanoamérica. Todo ello ha conducido a que se le conozca como “El Padre de la Estadística en España”. Sin



Figura 4: El profesor Sixto Ríos el día de su ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

duda su mejor legado es haber creado y formado la mayor Escuela de Estadística e Investigación Operativa en España, siendo muchos los que nos consideramos sus discípulos.

1.2. El Profesor Jiménez Salas

Se da también la circunstancia de que, como Ingeniero de Caminos, he sido también discípulo del profesor José Antonio Jiménez Salas, Académico de Número de esta Casa y creador e impulsor de la escuela de geotecnia española, en cuyo grupo di mis primeros pasos de investigación y realicé mi tesis doctoral española, y a quien debo, entre otras muchas cosas, mi Doctorado en la Universidad de Northwestern, ya que él me facilitó los contactos y me consiguió la Beca en dicha Universidad. Ello me dio la posibilidad de realizar la tesis (Castillo [59]) con el profesor Raymond Krizek, de la Academia de Ingeniería estadounidense (NAE), experiencia que, sin duda, marcó mi vida científica.



Figura 5: El profesor Sixto Ríos con el profesor Luis Santaló y Fernando Chueca Goitia (Presidente del Instituto de España).



Figura 6: El profesor Sixto Ríos con sus Majestades los Reyes de España.

Nunca olvidaré que al marchar a Chicago en 1970, el prof. Jiménez Salas fue a despedirme al aeropuerto de Barajas y que, según me informó un familiar, subió a



Figura 7: Cuadro del profesor Jiménez Salas que se exhibe en la sala de profesores de la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid.

la terraza del aeropuerto y no se marchó hasta ver despegar el avión. Sin duda, ello refleja las muchas esperanzas que había puesto en mi persona. Espero no haberlas defraudado.

A la vuelta de la Universidad de Northwestern, trabajé con él en el informe geotécnico de la central nuclear de Almaraz y me apoyó mucho en mi tesis doctoral, dirigida por el profesor Santiago Uriel. Aún recuerdo cómo disfrutaba cuando le mostraba los primeros gráficos de ordenador realizados con un “plotter” en el que se veían los diagramas de flechas, momentos y esfuerzos cortantes en las diferentes etapas de la excavación de sótanos realizados con pantallas y que formaron parte de mi tesis española (Castillo [60]).

Mi primer contacto con esta Real Academia fue precisamente con motivo de asistir al Acto de su toma de posesión el 17 de marzo de 1982.

1.3. Elección del tema del discurso

Cuando me propuse escribir este discurso de entrada en la Real Academia, no tuve dudas de que éste debería consistir en un recorrido por mi experiencia con la Matemática, pues se trata de un hito muy importante en mi vida, y merece toda la

intensidad de que soy capaz. Por ello, consideré que nada mejor que recopilar mi modesta experiencia personal de muchos años para poder transmitir con entusiasmo mi granito de arena a lo que dicha ciencia merece. Durante estos años he disfrutado de la Matemática y sus aplicaciones y quiero hoy compartir con ustedes los motivos de esta satisfacción. Me propongo pues hacer un recorrido sobre mis trabajos utilizando un lenguaje lo más sencillo posible que deje fuera el rigor matemático y se centre en las ideas para que todos lo entiendan. Recorreré las diferentes especialidades en las que he trabajado.

2. Probabilidad y Estadística

Ya he indicado que la Probabilidad, la Estadística y sus aplicaciones han sido las especialidades a las que más tiempo he dedicado, y también que ello fue debido en buena parte al Prof. Sixto Ríos.

2.1. Estadística de valores extremos

Por el hecho de ser Ingeniero de Caminos, enseguida me di cuenta de la importancia de los llamados “valores extremos”, ya que en la ingeniería las obras fallan cuando las solicitaciones alcanzan valores muy altos o las resistencias, valores muy bajos, por lo que son los extremos los que determinan el diseño. Los extremos en estadística tienen un trato muy diferente a los valores medios, por lo que necesitan métodos especiales. Uno de mis primeros trabajos en Santander (véase Castillo et al. [101]) consistió precisamente en desarrollar un modelo para reproducir el comportamiento de las olas con vistas al dimensionamiento de obras marítimas. El modelo reproducía la ocurrencia poissoniana de tormentas que contenían un número aleatorio de estados de mar, en los que el número de olas era a su vez poissoniano, distribuyéndose éstas según una ley de Rayleigh. El trabajo consistía en encontrar la ley de las mayores alturas de ola para usarlas en el diseño de obras marítimas.

Poco más tarde, me preocupó el ajuste de las colas de las distribuciones, pues en la práctica ingenieril era necesario extrapolar los modelos fuera del alcance de los datos existentes. Ello me llevó a publicar dos trabajos en los que se aproximaban las colas desde diferentes puntos de vista y con varios criterios, y se estudiaban y clasificaban los infinitésimos de las colas (véase Castillo et al. [103] y Castillo et al. [107]).

En esa etapa tuvo una gran importancia para mí el libro de Janos Galambos, miembro de la Academia de Ciencias húngara, que me resultó muy interesante, aunque no fue fácil entenderlo, especialmente en lo que se refiere a las posibles aplicaciones de los resultados teóricos.



Figura 8: Efecto del oleaje sobre las obras marítimas.

En 1983 tuvo lugar en Vimeiro (Portugal) una importante conferencia sobre extremos, a la que asistieron, entre otros muchos especialistas, Janos Galambos, de la Universidad de Temple, y Barry Arnold, de la Universidad de California (Riverside). Allí les conocí y se gestó con Janos lo que poco después sería mi estancia de año sabático en Filadelfia. En principio, íbamos a escribir un libro conjunto nuevo sobre extremos, pero la editorial de su libro (Galambos [217]) no se lo permitió, tal como se explica en el prólogo de mi libro (Castillo [62]). Total que tuvimos que contentarnos con algunos artículos realizados durante ese año y alguno posterior (véase Castillo y Galambos [73, 74, 76, 75, 77, 78], Castillo et al. [112, 118]).

En el libro (Castillo [62]) traté de poner al alcance de físicos e ingenieros algunos de los resultados teóricos que tenían aplicaciones prácticas interesantes. También me preocupé de incluir muchos ejemplos con datos reales. Entre las principales contribuciones novedosas del libro destacaré un teorema que permite determinar el límite de atracción de una distribución dada y obtener un conjunto de sucesiones que permiten la convergencia a la distribución límite, para lo que antes se empleaban tres teoremas, uno para la distribución de Weibull, otro para la de Gumbel y otro para la de Frechet, y el método de la curvatura que persigue el mismo objetivo, pero basándose en los datos. El método de la curvatura, además de en el libro, lo presentamos en Oberwolfach en 1987 (Castillo et al. [112]), y el teorema es como sigue.

Teorema 1 (Caracterización de dominios de atracción (máximos)) *Una condición necesaria y suficiente para que una función de distribución continua $F(x)$ pertenezca al dominio maximal de atracción, $H_\kappa(x)$, es decir, para que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [F(a_n + b_n x)]^n = H_\kappa(x), \quad \forall x \quad (1)$$

es que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F^{-1}(1 - \varepsilon) - F^{-1}(1 - 2\varepsilon)}{F^{-1}(1 - 2\varepsilon) - F^{-1}(1 - 4\varepsilon)} = 2^{-\kappa}, \quad (2)$$

donde κ es el parámetro de forma de la distribución límite asociada.

Esto implica que

1. Si $\kappa > 0$, $F(x)$ pertenece al dominio maximal de atracción de Weibull
2. Si $\kappa = 0$, $F(x)$ pertenece al dominio maximal de atracción de Gumbel, y
3. If $\kappa < 0$, $F(x)$ pertenece al dominio maximal de atracción de Fréchet maximal.

Las sucesiones a_n y b_n pueden elegirse como:

1. Weibull:

$$a_n = w(F) \quad y \quad b_n = w(F) - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad (3)$$

2. Gumbel:

$$a_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad y \quad b_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{ne}\right) - a_n, \quad (4)$$

3. Fréchet:

$$a_n = 0 \quad y \quad b_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad (5)$$

donde $w(F) = \sup\{x | F(x) < 1\}$ es el extremo superior de $F(x)$.

Para mi sorpresa, el libro ha recibido ya más de 500 citas y lo curioso es que el número de citas/año está subiendo en vez de bajando, tras haber transcurrido 22 años.

A la vuelta de mi año sabático en Filadelfia, la revista Estadística Española me invitó a escribir un artículo sobre extremos (Castillo [61]).

En 1993 Janos Galambos, que era consultor del NIST (National Institute of Standards and Technology) organizó una conferencia en dicho Instituto en Gaithersburg, Maryland, invitándome a impartir el curso de extremos, una de las conferencias invitadas (Castillo [63]), a presentar un sistema experto para el análisis de extremos

(Castillo et al. [120])¹ y a formar parte de la mesa redonda sobre el futuro de los extremos que clausuró la conferencia. Ello motivó que luego me invitaran a escribir un artículo sobre alturas de ola extremas en el Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology (Castillo y Sarabia [99]).

Posteriormente, también trabajé en el tema de extremos con Barry Arnold y José María Sarabia en Arnold et al. [28] y en Arnold et al. [28]. Más tarde saqué en 2005 la segunda versión del libro con Ali S. Hadi de la Universidad de Cornell, N. Balakrishnan de la Universidad Mc Master (Canada) y J. M. Sarabia de la Universidad de Cantabria, que ha superado ya las 100 citas.

En Castillo et al. [132], Castillo et al. [128], Castillo et al. [135] y Castillo et al. [134] propuse varios métodos para estimar probabilidades en las colas de una función de ciertas variables aleatorias. Uno de ellos consiste en simular muestras de dichas colas y ajustar una distribución generalizada de Pareto con los datos simulados. El método está justificado en un resultado muy importante de Pickands [255], según el cual la distribución de las excedencias de un cierto umbral es una distribución generalizada de Pareto, independientemente de la distribución poblacional.

2.2. Especificación condicional de distribuciones

Mi primer contacto con la especificación condicional de distribuciones surgió también en la Universidad de Temple en Filadelfia, trabajando con el Profesor Janos Galambos. Había un congreso en la Penn State University y me invitó a presentar un trabajo. El problema que me planteé fue el siguiente. Puesto que es sabido que las distribuciones condicionales de una distribución normal bivariada son todas normales, me pregunté si habría otras distribuciones bivariadas que cumplieren esa condición. Para ello, procedí como sigue.

Supongamos una distribución bivariada absolutamente continua cuyas funciones de densidad conjunta marginales y condicionales son, respectivamente,

$$f_{(X,Y)}(x, y), g(x), h(y), f_{X|Y}(x|y) \text{ y } f_{Y|X}(y|x).$$

Es evidente que

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_{X|Y}(x|y)h(y) = f_{Y|X}(y|x)g(x). \quad (6)$$

Si se suponen todas las distribuciones condicionales normales resulta

$$f_{Y|X}(y|x)g(x) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{y - a(x)}{b(x)} \right]^2 \right\}}{b(x)} g(x)$$

¹Este trabajo se publicó también en castellano en Castillo et al. [119].

$$= f_{X/Y}(x|y)h(y) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{x - d(y)}{c(y)} \right]^2 \right\} h(y)}{c(y)}, \quad (7)$$

donde $b(x) > 0, c(y) > 0$ y $a(x)$ y $d(y)$ definen las líneas de regresión y $b(x)$ y $c(y)$ las correspondientes desviaciones típicas. Resolviendo esta ecuación funcional en seis funciones incógnitas se obtiene:

$$a(x) = -\frac{A + Bx + Cx^2}{D + 2Ex + Fx^2}; \quad (8)$$

$$d(y) = -\frac{H + By + Ey^2}{J + 2Cy + Fy^2}; \quad (9)$$

$$b^2(x) = \frac{1}{D + 2Ex + Fx^2}; \quad (10)$$

$$c^2(y) = \frac{1}{J + 2Cy + Fy^2}; \quad (11)$$

$$u(x) = -\frac{1}{2} \left[G + 2Hx + Jx^2 - \frac{(A + Bx + Cx^2)^2}{D + 2Ex + Fx^2} \right]; \quad (12)$$

$$v(y) = -\frac{1}{2} \left[G + 2Ay + Dy^2 - \frac{(H + By + Ey^2)^2}{J + 2Cy + Fy^2} \right]; \quad (13)$$

$$g(x) = (D + 2Ex + Fx^2)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{-\frac{G+2Hx+Jx^2}{D+2Ex+Fx^2}}{2} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{\frac{(A+Bx+Cx^2)^2}{D+2Ex+Fx^2}}{2} \right\}; \quad (14)$$

$$h(y) = (J + 2Cy + Fy^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{G + 2Ay + Dy^2}{2} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\frac{(H+By+Ey^2)^2}{J+2Cy+Fy^2}}{2} \right\}; \quad (15)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{G}{2} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [2Hx + 2Ay + Jx^2 + Dy^2] \right\} \cdot \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [2Bxy + 2Cx^2y + 2Exy^2 + Fx^2y^2] \right\}. \quad (16)$$

Para que la función $f(x, y)$ sea una función de densidad, las constantes

$$\{A, B, C, D, E, F, G, H, J\}$$

deben satisfacer las condiciones:

$$(i) F = E = C = 0, D > 0, J > 0, B^2 < DJ,$$

$$(ii) F > 0, FD > E^2, JF > C^2.$$

El modelo (i) es el modelo bivariado normal. El modelo (ii) tiene las siguientes propiedades:

- Las líneas de regresión no son líneas rectas
- las distribuciones marginales no son normales.
- La moda o modas están en la intersección de las líneas de regresión.

La figura 9 muestra tres ejemplos de distribuciones con condicionales normales mostrando las funciones de densidad conjuntas, las marginales, como proyecciones horizontales, y las líneas de regresión en proyección vertical. La figura superior corresponde al caso normal. Las otras dos no son normales, siendo una unimodal y la otra un ejemplo interesante de bimodal.

Estos resultados fueron publicados en ese congreso (Castillo y Galambos [73]). El Profesor Barry Arnold de la Universidad de California estaba en esa conferencia y poco tiempo después nos escribió solicitando permiso para publicar un artículo inspirado en el nuestro, en el que hacía lo mismo pero con la distribución exponencial (véase Arnold y Strauss [26]). También publicamos estos resultados en otro congreso en El Cairo (Castillo y Galambos [76]) y una extensión a la caracterización de distribuciones normales en Castillo y Galambos [77]. Poco después resolvimos el caso de la distribución de Weibull en Castillo y Galambos [78], de la gamma en Castillo et al. [118], la beta tipo dos en Castillo y Sarabia [97] y la logarítmico-normal Sarabia et al. [269].

Puesto que el profesor Barry Arnold estaba trabajando en el mismo tema que nosotros, José María Sarabia y yo decidimos ponernos en contacto con él y proponerle escribir una monografía sobre el tema, a lo que accedió gustoso y tras varias reuniones en Santander, salió a la luz una monografía de 150 páginas en la serie *Lecture Notes in Statistics* (Castillo y Sarabia [98]) que se agotó en poco tiempo. Durante ese periodo publicamos con él una larga serie de trabajos que incluyen la familia de Pareto generalizada (Arnold et al. [19]) y otras (Arnold et al. [35], Arnold et al. [38], Arnold et al. [41], etc.). A ellas siguieron otras publicaciones relacionadas con la caracterización de distribuciones, especialmente la normal, tales como Arnold et al. [20], Arnold et al. [21], Arnold et al. [22], Arnold et al. [30], Arnold et al. [34] y Arnold et al. [40].

Puesto que dos familias de condicionales no son en general compatibles, estudiamos en varios trabajos las condiciones de compatibilidad, como en Arnold et al. [31] y Arnold et al. [37].

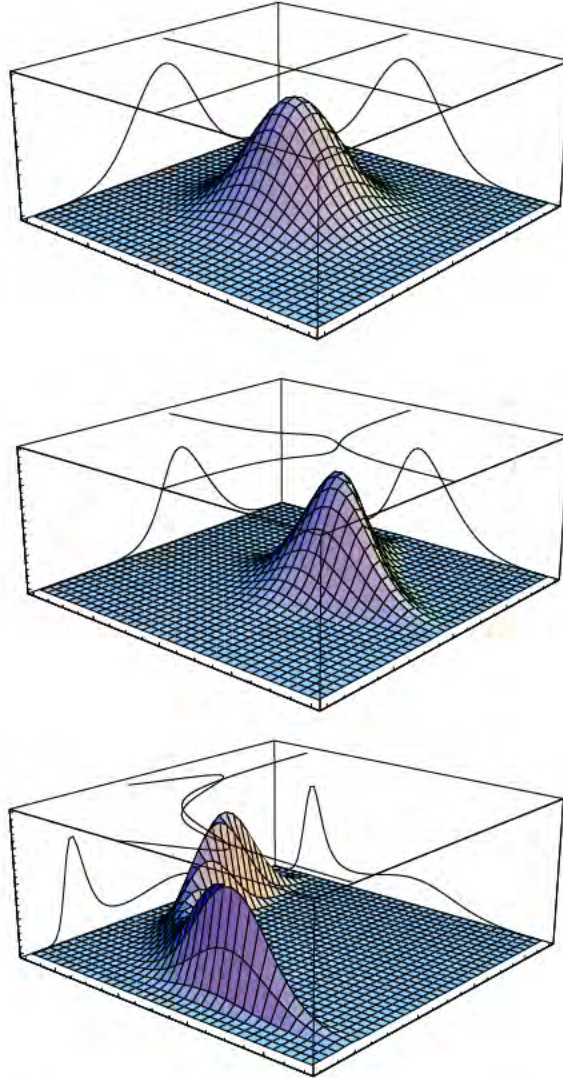


Figura 9: Ejemplos de distribuciones con condicionales normales mostrando las funciones de densidad conjuntas, las marginales, como proyecciones horizontales, y las líneas de regresión en proyección vertical. La figura superior corresponde al caso normal. Las otras dos no son normales, siendo una unimodal y la otra un ejemplo interesante de bimodal.

También nos interesamos por la especificación de distribuciones mediante combinaciones de marginales y condicionales (Arnold et al. [24]), o una familia de con-

dicionales y los percentiles o las modas de la otra (Arnold et al. [42]), y también de distribuciones multivariadas definidas en función de sus curvas de nivel (Arnold et al. [43]).

Todos estos trabajos, aparte de la ya mencionada monografía, dieron lugar a un libro publicado por Springer (Arnold et al. [44]) y un artículo invitado en la revista *Statistical Science* (Arnold et al. [33]), que tuvieron una gran resonancia.

Tengo que decir que todo este trabajo fue posible por mi descubrimiento de las ecuaciones funcionales, por lo que debo reconocer la contribución del profesor Janos Aczél, que lo hizo posible.

2.3. Redes Bayesianas

Hacia 1984 tiene lugar otro suceso de gran importancia en mi vida profesional. Cae en mis manos el libro de Judea Pearl [253], miembro de la Academia de Ingeniería estadounidense (NAE), en el que descubro las redes probabilísticas y en particular las redes bayesianas, quedando impresionado por sus posibilidades. Una red bayesiana es una pareja constituida por un grafo dirigido acíclico y un conjunto de probabilidades condicionales, que permite, por un lado, escribir la distribución conjunta de todas las variables aleatorias implicadas, y por otro, decidir si un conjunto de variables es condicionalmente independiente de otro conjunto de variables, dado un tercer conjunto de ellas, a partir del grafo. Además de esto, los métodos asociados a estas redes permiten obtener de forma rápida las probabilidades condicionales de todas las variables dado un conjunto de ellas (variables observadas). Esto tiene una gran trascendencia en las aplicaciones pues permite reproducir de forma rápida y eficaz la estructura de dependencia de las variables aleatorias de un problema dado, así como evaluar las probabilidades de estas variables a medida que se van conociendo los valores de otras.

Un ejemplo ilustrativo de red bayesiana (véase Castillo et al. [139]) para evaluar el nivel de daño de una viga de hormigón a partir de una serie de datos se muestra en la figura 10 en la que se dan el grafo, que da la estructura de dependencia de las variables, y la tabla de probabilidades condicionales de cada nodo, dados los padres. En la Tabla 1 se dan el significado de las variables, sus tipos y sus rangos.

La figura 11 muestra la predicción del nivel de daño sin información inicial y cómo va evolucionando ésta a medida que se van conociendo 5, 11, 12 y 16 datos sobre la misma.

Al descubrir el interés y la aplicabilidad de las redes bayesianas a muchos problemas, dediqué unos años a investigar en este tema, lo que nos llevó a escribir el libro Castillo et al. [125] en el que se resumen mis trabajos de los primeros años y que tiene ya más de 500 citas.

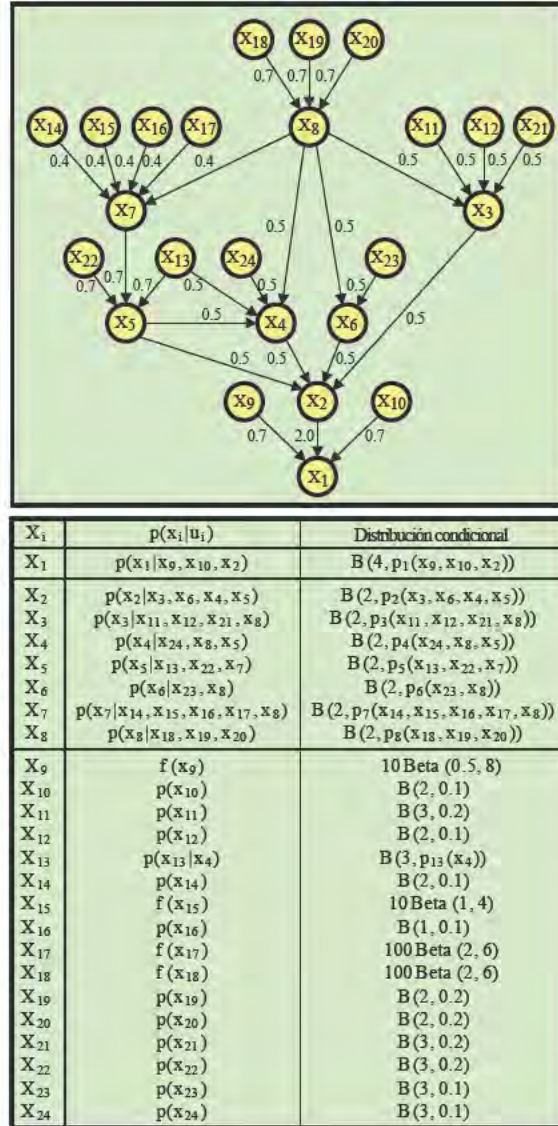


Figura 10: Ejemplo de red bayesiana para analizar el nivel de daño en una viga de hormigón. La parte superior es el grafo dirigido acíclico, y la parte inferior son las probabilidades condicionales de cada nodo dados sus padres.

2.3.1. Propagación simbólica de la evidencia por simulación

En Bouckaert et al. [54] se propone un método aproximado para propagar la evidencia en redes bayesianas basado en una modificación del método de muestreo

X_i	Tipo	Valores	Definición
X_1	Discreta	{0, 1, 2, 3, 4}	Daño de la viga
X_2	Discreta	{0, 1, 2}	Estado de agrietamiento
X_3	Discreta	{0, 1, 2}	Agrietamiento por cortante
X_4	Discreta	{0, 1, 2}	Corrosión del acero
X_5	Discreta	{0, 1, 2}	Agrietamiento por flexión
X_6	Discreta	{0, 1, 2}	Agrietamiento por retracción
X_7	Discreta	{0, 1, 2}	Peor grieta por flexión
X_8	Discreta	{0, 1, 2}	Estado de corrosión
X_9	Continua	(0 – 10)	Elasticidad de la viga
X_{10}	Discreta	{0, 1, 2}	Flecha de la viga
X_{11}	Discreta	{0, 1, 2, 3}	Posición de la peor grieta de cortante
X_{12}	Discreta	{0, 1, 2}	Tamaño de la peor grieta de cortante
X_{13}	Discreta	{0, 1, 2, 3}	Posición de la peor grieta de flexión
X_{14}	Discreta	{0, 1, 2}	Tamaño de la peor grieta de flexión
X_{15}	Continua	(0 – 10)	Longitud de la peor grieta de flexión
X_{16}	Discreta	{0, 1}	Recubrimiento
X_{17}	Continua	(0 – 100)	Edad de la estructura
X_{18}	Continua	(0 – 100)	Humedad
X_{19}	Discreta	{0, 1, 2}	PH del aire
X_{20}	Discreta	{0, 1, 2}	Contenido de cloro en el aire
X_{21}	Discreta	{0, 1, 2, 3}	Número de grietas de cortante
X_{22}	Discreta	{0, 1, 2, 3}	Número de grietas de flexión
X_{23}	Discreta	{0, 1, 2, 3}	Retracción
X_{24}	Discreta	{0, 1, 2, 3}	Corrosión

Tabla 1: Definiciones de las variables que intervienen en el problema de la evaluación del daño en vigas de hormigón armado.

estratificado. El método utiliza una muestra perfecta determinista calculándose el número de veces que se repite en ella la misma combinación de valores, lo que evita la repetición que resulta en el modelo estratificado estándar. Se compara el comportamiento teórico de este método con el estándar, resultando mucho más favorable. Además, se da el tamaño de muestra necesario para un error determinado.

2.3.2. Propagación simbólica de la evidencia, sensibilidad y acotación

En Castillo et al. [130] y Castillo y Kjelruff [88] se descubre para el caso de redes normales la estructura funcional de las probabilidades condicionales de cada

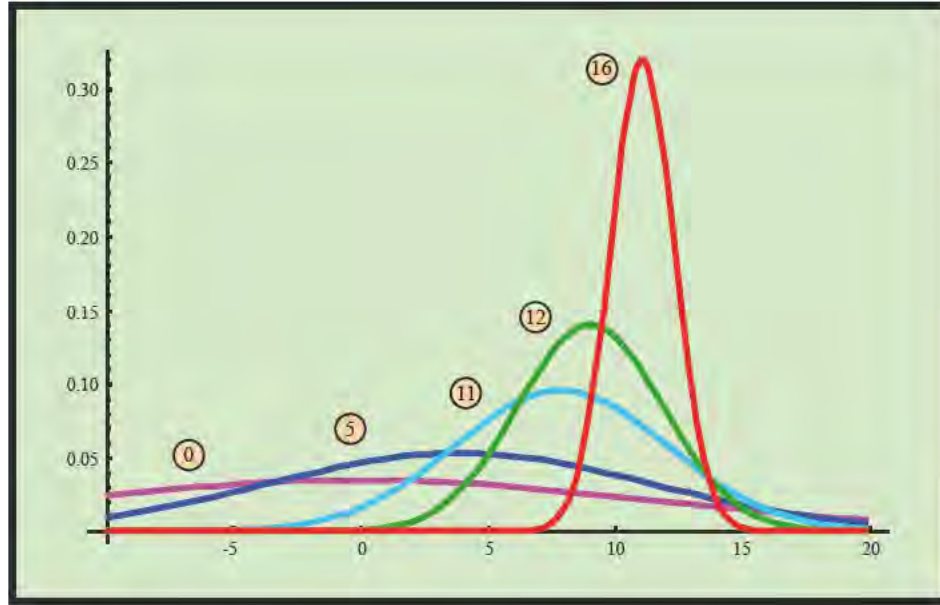


Figura 11: Evolución de la incertidumbre sobre el nivel de daño en una viga de hormigón al ir conociendo datos (0, 5, 11, 12 y 16) sobre la misma.

variable, dado un conjunto de variables observadas, probando que se trata de una función racional. El resultado preciso se da en el teorema siguiente.

Teorema 2 (Estructura simbólica de probabilidades condicionales) *Considérese una red bayesiana normal definida sobre un conjunto de variables $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ con vector de medias μ y matriz de covarianzas Σ . Si se particiona X , μ , y Σ mediante $X = \{Y, Z\}$,*

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_Y \\ \mu_Z \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{YY} & \Sigma_{YZ} \\ \Sigma_{ZY} & \Sigma_{ZZ} \end{pmatrix},$$

donde μ_Y y Σ_{YY} son los vectores de medias y varianzas de Y , μ_Z y Σ_{ZZ} son los vectores de medias y varianzas de Z , y Σ_{YZ} es la matriz de covarianzas de Y y Z . Si Z es el conjunto de nodos evidenciales, entonces la distribución condicional de cualquier variable $X_i \in Y$ dado Z es normal cuya media y varianza son funciones racionales, es decir, cociente de polinomios en las variables evidenciales y los parámetros en μ y Σ . Los polinomios son de grado a lo sumo uno en las variables evidenciales, en la media y en las varianzas, y de grado dos a lo sumo en las covarianzas, conteniendo al menos una variable evidencial en Z . Finalmente, el polinomio denominador es el mismo para todos los nodos y para las medias y varianzas condicionadas.

En resumen, se tiene que

$$\mu_{Y|E=e} = \frac{\mu_Y |\Sigma_{EE}| + \Sigma_{YE} |adj\Sigma_{EE}| (e - \mu_E)}{|\Sigma_{EE}|}. \quad (17)$$

$$\Sigma_{Y|E=e} = \frac{\Sigma_{YY} |\Sigma_{EE}| - \Sigma_{YE} |adj\Sigma_{EE}| \Sigma_{EY}}{|\Sigma_{EE}|}. \quad (18)$$

Por ello, se puede concluir que:

1. Los parámetros en μ_Y y μ_E aparecen en el numerador de las medias condicionales en forma lineal.
2. Los parámetros de Σ_{YY} aparecen en el numerador de las varianzas condicionales en forma lineal.
3. Los parámetros de Σ_{YE} aparecen en el numerador de las medias y varianzas condicionales en forma lineal y cuadrática, respectivamente.
4. Las varianzas y covarianzas en Σ_{EE} aparecen en el numerador y denominador de las medias y varianzas condicionales en forma lineal, o lineal y cuadrática, respectivamente.
5. Los valores evidenciales aparecen sólo en el numerador de las medias condicionales en forma lineal.

Finalmente, el polinomio denominador es el mismo para todos los nodos y para las medias y varianzas condicionadas.

Todo ello permite determinar los coeficientes de dichos polinomios numéricamente, con lo que se obtiene una fórmula cerrada para las probabilidades condicionales, lo que facilita además obtener las sensibilidades de dichas probabilidades con respecto a cualquier parámetro con sólo derivar, obteniendo fórmulas explícitas para estas sensibilidades. Además, al disponer de fórmulas cerradas, pueden acotarse éstas.

Para el caso de redes bayesianas discretas, en Castillo et al. [126], Castillo et al. [129] y Castillo et al. [124] se identifica la estructura funcional de las probabilidades condicionales de cualquier variable dado un conjunto cualquiera de variables evidenciales. El resultado es que dichas probabilidades son también polinomios o funciones racionales de los parámetros. Como no todos ellos forman parte de dichos polinomios, se dan métodos para identificar cuáles están y cuáles no. Los coeficientes de los polinomios pueden calcularse utilizando métodos numéricos de propagación de la evidencia, con lo que se obtienen las fórmulas de cálculo en vez de valores numéricos. Ello permite implantar un método simbólico de propagación de la evidencia, en

el que a medida que se va conociendo información, se van actualizando las funciones racionales. Como en el caso de las redes normales, el análisis de sensibilidad puede hacerse mediante derivación de estas funciones y también pueden acotarse estas probabilidades, lo que es de gran valor en la práctica.

2.3.3. Estimación de probabilidades extremas

En Castillo et al. [145] se desarrollan métodos de cálculo de probabilidades extremas y estimación de percentiles extremos en redes bayesianas, que se basan en las aproximaciones de primero y segundo orden (FORM/SORM) y que tienen especial aplicación en la determinación de probabilidades de ocurrencia del nodo raíz en árboles de fallos. El método permite obtener intervalos de confianza unilaterales para probabilidades extremas, con aplicación a estudios de fiabilidad, especialmente en centrales nucleares, en el diseño de las cuales se exigen probabilidades de fallo muy pequeñas (10^{-6} , 10^{-7} , etc.). Otros métodos alternativos para resolver el mismo problema y problemas similares se presentaron en Castillo et al. [133].

2.3.4. Especificación coherente de redes bayesianas múltiples

En Castillo et al. [144] se trata de la especificación coherente de redes bayesianas que comparten conjuntos de nodos comunes. Esto tiene mucho interés, ya que en la práctica pueden intervenir muchos expertos en la definición de la función de distribución conjunta de las variables y, si no se tiene mucho cuidado, aparecerán inconsistencias. La idea es proceder secuencialmente, de forma que cuando varios expertos han suministrado información, se elabora ésta y se informa al nuevo experto acerca de los límites de su conocimiento, es decir, se le indica cuando su aportación contradice la ya existente. En ese caso, si el nuevo experto no está de acuerdo, se puede volver atrás y obligar a los demás expertos a modificar su contribución al sistema. De esta forma, se tiene un control exhaustivo de la coherencia del sistema y se puede controlar la calidad del conocimiento que suministran los diferentes expertos.

2.3.5. Aplicaciones

Un problema interesante es el de la marginalización que tratamos en Castillo et al. [143]. Dado un hipergrafo que refleja la estructura de dependencia de una variable aleatoria n -dimensional, se trata de obtener un grafo para un subconjunto de ellas, a partir del grafo de partida, que conserve la estructura de dependencia de éstas.

Un caso de modelos espacio-temporales lo tratamos en Ferrándiz et al. [213] y el caso de problemas dinámicos con variables no observables en Castillo et al. [155]. Una de las últimas aplicaciones de las redes bayesianas ha sido al problema del tráfico en ciudades y zonas abiertas (véase Castillo et al. [196]), que se discute en la sección 11.2.



Figura 12: El profesor Sixto Ríos (padrino) con el profesor Javier Girón el día de su ingreso en la Academia.

Otros ejemplos de redes bayesianas aplicadas a problemas de ingeniería se discuten en Castillo et al. [121].

2.4. Métodos Bayesianos

Como es bien sabido, la escuela de estadística bayesiana es una de las de más solera y lleva este nombre en honor de Thomas Bayes, contando hoy con muchos adeptos en todo el mundo. Uno de los más eminentes es el profesor Javier Girón (figura 12), que ha publicado notables trabajos en importantes revistas, algunos en la Revista de esta Real Academia, como son los que se refieren a fundamentos de la Estadística bayesiana en Girón [223], Girón [224], Ruiz et al. [260], Casella et al. [56], Moreno et al. [251], Girón et al. [222], a temas tan variados como la autoría de textos literarios en Girón et al. [229], Girón y Ríos [226], a los sistemas electorales en Girón y Bernardo [225], a los modelos dinámicos en Girón et al. [228], Girón y Rojano [227], etc.

Los métodos bayesianos tienen el atractivo de poder combinar la experiencia y el conocimiento previo (distribuciones “a priori”) con la objetividad de los datos, lo que los hace muy útiles en las aplicaciones.

Tengo que decir que es casi imposible trabajar en temas estadísticos sin encontrarse alguna vez con algo bayesiano.

Entre mis trabajos, también existen algunas contribuciones a la filosofía bayesiana. En particular, en el trabajo Arnold et al. [23] encontramos la familia exponencial más general de distribuciones “a priori” que es conjugada con respecto a otra familia exponencial. Como es sabido, la idea de las familias conjugadas es que las distribuciones “a priori” y las distribuciones “a posteriori” pertenezcan a la misma familia, con lo cual al incorporar el conocimiento aportado por los datos no nos salimos de un marco determinado. Todo ello se hace por conveniencia matemática.

Nuestro teorema es:

Teorema 3 (Conjugadas de familias exponenciales) *La familia ℓ -paramétrica exponencial más general de distribuciones “a priori” para $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ que es conjugada con respecto a verosimilitudes de la familia exponencial*

$$f(\mathbf{x}; \theta) = \exp \left[n\lambda(\theta) + \sum_{j=0}^m g_j(\theta)T_j(\mathbf{x}) \right]; m < \ell, \quad (19)$$

donde por convención $g_0(\theta) = 1$ y $\{T_j(x); j = 0, 1, \dots, m\}$ es un conjunto de funciones linealmente independientes, es

$$q(\theta|\eta) = \exp \left[\nu(\eta) + u(\theta) + \sum_{i=1}^m \eta_i g_i(\eta) + \eta_{m+1} \lambda(\theta) + \sum_{i=m+2}^{\ell} \eta_i s_i(\eta) \right], \quad (20)$$

donde $s_{m+2}(\theta), \dots, s_{\ell}(\theta)$, $\nu(\eta)$ y $u(\theta)$ son funciones arbitrarias y $\eta_1, \dots, \eta_{\ell}$ son los hiperparámetros. Además, el vector de hiperparámetros “a posteriori” es

$$(\eta_1 + T_1(\mathbf{x}), \dots, \eta_m + T_m(\mathbf{x}), \eta_{m+1} + n, \eta_{m+2}, \dots, \eta_{\ell}). \quad (21)$$

Más tarde, en Arnold et al. [27] nos planteamos el problema de las familias de distribuciones posteriores convenientes, para la misma familia de verosimilitudes, es decir, aquellas que pertenecen a una familia conveniente, que debe ser exponencial.

El teorema es:

Teorema 4 (Posteriores convenientes) *Considérense conjuntos de datos de n observaciones $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ posiblemente vectores procedentes de una familia exponencial m -paramétrica de la forma*

$$f(\mathbf{x}; \theta) = \exp \left[\lambda(\theta) + \sum_{j=0}^m \theta_j T_j(\mathbf{x}) \right], \quad (22)$$

donde $\theta_0 = 1$. Entonces,

$$f(\theta; \mathbf{c}) = \exp \left[c_{00} - \lambda(\theta) + g_0(\theta) + \sum_{i=1}^t c_{i0} g_i(\theta) \right], \quad (23)$$

es la forma más general de la familia de distribuciones “a priori” de Θ que conducen a densidades “a posteriori” de θ que pertenecen a la familia exponencial t -paramétrica de la forma

$$f(\theta, \eta) = \exp \left[\theta(\eta) + \sum_{s=0}^t \eta_s g_s(\theta) \right], t \leq m \quad (24)$$

donde $\eta_0 = 1$ y

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{01} & c_{11} & \cdots & c_{t1} \\ c_{02} & c_{12} & \cdots & c_{t2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0m} & c_{1m} & \cdots & c_{tm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0(\theta) \\ g_1(\theta) \\ \vdots \\ g_t(\theta) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Además, los hiperparámetros de la distribución “a posteriori” resultan

$$\begin{bmatrix} \eta_1(\mathbf{x}) \\ \eta_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \eta_t(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ c_{20} & c_{21} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{t0} & c_{t1} & \cdots & c_{tm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0(\mathbf{x}) \\ T_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ T_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Estos resultados los aplicamos en Sarabia et al. [267] al caso particular de familias de Dirichlet en Castillo et al. [127] mostrando una aplicación para predecir la tasa de paro en España.

En Arnold et al. [29] propusimos la especificación condicional de distribuciones “a priori” para poder enriquecer la estructura de dependencia de estas distribuciones. La idea se entiende mejor con un ejemplo. Supóngase que los datos disponibles son n variables independientes e idénticamente distribuidas con media μ y precisión τ . Si τ fuera conocida, una familia “a priori” conjugada para μ sería una normal. Si μ fuera conocida, una familia “a priori” conjugada para τ sería la gamma. Esto sugiere que una familia “a priori” conjugada para (μ, τ) (suponiendo que ambas son desconocidas) sería una familia en la que la distribución condicional de μ dada τ fuera normal y en la que la distribución condicional de τ dada μ fuera gamma. Esa familia de distribuciones gamma-normal fue discutida extensivamente en Castillo y Galambos [76].

Lo importante es que el hecho de que se utilicen distribuciones conjugadas para μ dado τ y para τ dado μ implica que la familia especificada condicionalmente es también conjugada (véase Arnold et al. [36]) y que además incluye los casos particulares clásicos. Este resultado se aplicó en Arnold et al. [29] a los casos de la familia de Pareto y al modelo de regresión clásico.

2.5. Inferencia estadística

La inferencia estadística ha ocupado también un papel importante en mi trabajo de investigación.

Los métodos clásicos de estimación, tales como los de la máxima verosimilitud o los de los momentos en sus diferentes versiones funcionan muy bien en muchos casos prácticos en los que se da una cierta regularidad. Sin embargo, cuando esta regularidad falla presentan graves problemas que los hacen inviables. Para abordar este problema, en Castillo y Hadi [83] propusimos un método general de estimación que resolvía estos casos singulares y difíciles mediante una técnica en dos etapas: en la primera se obtenían una serie de estimaciones basadas en igualar los percentiles de la población con los de la muestra mediante un conjunto de estimaciones básicas o elementales, que luego se ordenaban para obtener una estimación robusta en la segunda etapa. Este método lo aplicamos a casos particulares importantes para la ingeniería, tales como la distribución generalizada de extremos en Castillo y Hadi [81], que tiene mucha importancia en teoría de valores extremos, o el de la distribución generalizada de Pareto en Castillo y Hadi [80], que es muy importante para el estudio de las excedencias. Una aplicación a un modelo de fatiga la dimos en Castillo y Hadi [82], en el que se suponía una distribución de Pareto generalizada, un método de estimación en dos pasos y otro de regresión. En Castillo et al. [131], aunque no era trivial, extendimos la idea de los métodos anteriores al caso bivariado y multivariado, y la aplicamos a casos interesantes de familias de distribuciones como las bivariadas logísticas, Pareto generalizada y exponencial.

En el trabajo Castillo et al. [158] tratamos el problema de la estimación en familias que son combinaciones lineales convexas de distribuciones dadas. Aparte del problema clásico de elegir estas familias y estimar los coeficientes a utilizar, consideramos el caso de restricciones lineales en forma de desigualdades en percentiles, momentos o esperanzas de ciertas funciones y probabilidades, dando métodos para analizar la compatibilidad del problema (existencia o no de solución) y para obtener todas las soluciones posibles, basadas en la teoría de conos y conos duales. Además demostramos que el problema inicial puede reducirse a un problema nuevo equivalente del mismo tipo pero sin restricciones.

En Castillo et al. [183] describimos una metodología para analizar la sensibilidad local en problemas de estimación, que incluyen los métodos de máxima verosimilitud y los de los momentos en sus diferentes variantes, con y sin restricciones adicionales. En Castillo et al. [181] tratamos el problema del análisis de la sensibilidad local en modelos con parámetros ordenados y sometidos a otros tipos de restricciones. Los resultados los aplicamos a detectar valores anómalos (“outliers”).

El problema del análisis de la sensibilidad en problemas de regresión lineal en sus versiones de mínimos cuadrados, minimax y suma de errores absolutos lo abordamos en Castillo et al. [182], analizando las sensibilidades de las funciones objetivo (ca-

alidad del ajuste) a los datos e interpretando los problemas duales de los dos últimos métodos.

Una extensión de todos estos métodos al caso de regresión no lineal lo realizamos en Castillo et al. [200], en el que analizamos, además de las sensibilidades de la función objetivo (calidad del ajuste), las de los parámetros estimados y las variables duales con respecto a los datos. Finalmente, en Castillo et al. [161] generalizamos estos métodos a problemas de estimación de parámetros en algunas familias como la de Weibull.

En Castillo et al. [199], además de comenzar con dos teoremas de unicidad de solución para los problemas de regresión basados en las normas ℓ_1 y ℓ_∞ , que también se trataron posteriormente en Castillo et al. [154] y Castillo et al. [198], discutimos el problema de los modelos combinados de regresión, entendiendo por tales aquellos que minimizan la suma de cuadrados de los errores, la suma de los valores absolutos de los errores o el máximo error y están además sometidos a restricciones del error en los otros dos sentidos. En este trabajo, analizamos también la influencia de los datos en el resultado, señalando qué datos concretos determinan la solución y cuáles no tienen influencia alguna.

En Arnold et al. [39] extendimos un método desarrollado por Jones [232] al caso multivariado. La idea de Jones consistía en enriquecer familias de distribuciones univariadas mediante la sustitución de la distribución uniforme U en la relación $F^{-1}(U)$ por una distribución beta. La forma natural de extender este método se basaba en la distribución de Rosenblatt para conseguir la biunivocidad. Las familias resultantes eran muy fáciles de estimar y enriquecían otras familias multivariadas existentes.

Otras aplicaciones multivariantes de interés se presentaron en Arnold et al. [45] y Arnold et al. [46] en los que se definían estadísticos de orden multivariado según diferentes criterios y se aplican al problema de muestreo en conjuntos ordenados (“ranked set sampling”), y en Arnold et al. [32] en el que se daba una versión multivariada de la identidad de Stein con aplicaciones al cálculo de momentos y a la estimación de distribuciones especificadas condicionalmente.

3. Ecuaciones funcionales

A pesar de su enorme importancia, las ecuaciones funcionales son bastante desconocidas, no sólo por la generalidad de los investigadores, sino también por muchos matemáticos.

Mi descubrimiento del libro de Aczél [1], miembro de la Academia de Ciencias de Hungría, que tuvo lugar en la Biblioteca de la Escuela de Santander y me sorprendió muy favorablemente, supuso para mí algo muy importante, que tendría una gran trascendencia en mi trabajo posterior. Ni en la carrera de Ingeniería de Caminos, ni en la de Ciencias Matemáticas había estudiado las ecuaciones funcionales.

Quiero reconocer explícitamente al Profesor Janos Aczél y mostrarle mi agradecimiento por su trabajo y publicaciones, por su profunda influencia en mi trayectoria investigadora y por haberme transmitido la afición por las ecuaciones funcionales. Ello me llevó a escribir los libros Castillo y Ruiz-Cobo [96] y Castillo et al. [166] y el trabajo Castillo [65] para La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, en los que se resumen algunas aplicaciones de las ecuaciones funcionales, para divulgarlas y hacer posible que otros muchos puedan compartir este placer.

Las ecuaciones funcionales han estado presentes en muchos de mis trabajos de ingeniería, especialmente en la modelización (véase Castillo y Ruiz-Cobo [96] y Castillo et al. [166]). De hecho, otras muchas aplicaciones de Janos Aczél influirían mi trabajo, tales como Aczél et al. [16], Aczél [2], Aczél [3], Aczél y Saaty [15], Aczél [4], Aczél [5], Aczél [6], Aczél [7], Aczél [8], Aczél [9], Aczél [10], Aczél y Alsina [11], Aczél y Alsina [12], Aczél y Dhombres [13], Aczél y Forte [14].

3.1. Las fórmulas de las áreas del rectángulo y del trapecio

Una de las primeras sorpresas que tuve con las ecuaciones funcionales fue al descubrir que si se plantea mediante un sistema de dos ecuaciones funcionales, la fórmula del área de un rectángulo en función de la longitud de su base b y su altura a , resulta $Area = c \times b \times a$ con c una constante arbitraria, y no $Area = b \times a$, que era lo que nos enseñaron de niños en la escuela. El hecho de que las ecuaciones funcionales me hicieran darme cuenta de que si la base está en pies, la altura en metros y se desea el área en hectáreas, la fórmula aprendida en la escuela debe corregirse mediante una constante c , que sirve para corregir las unidades empleadas, me llamó mucho la atención, pues no me había parado a pensar en que la fórmula más general del área del rectángulo fuera otra que la que todos sabíamos y utilizábamos.

Poco después, deduje la fórmula del área del trapecio, en la que aparecen dos constantes arbitrarias, ya que el área depende de las longitudes de las bases y de la altura, es decir de una variable más, resultando la fórmula

$$Area = f(b_1, b_2, a) = (k_1 \times b_1 + k_2 \times b_2) \times a,$$

que para $k_1 = k_2 = 1/2$ resulta la conocida fórmula:

“semisuma de las bases por la altura”.

Para deducirla, utilicé el sistema de ecuaciones

$$f(b_1 + b'_1, b_2 + b'_2, a) = f(b_1, b_2, a) + f(b'_1, b'_2, a) \quad (27)$$

$$f(b, b, a_1 + a_2) = f(b, b, a_1) + f(b, b, a_2) \quad (28)$$

$$f(sb_1, sb_2, sa) = s^2 f(b_1, b_2, a), \quad (29)$$

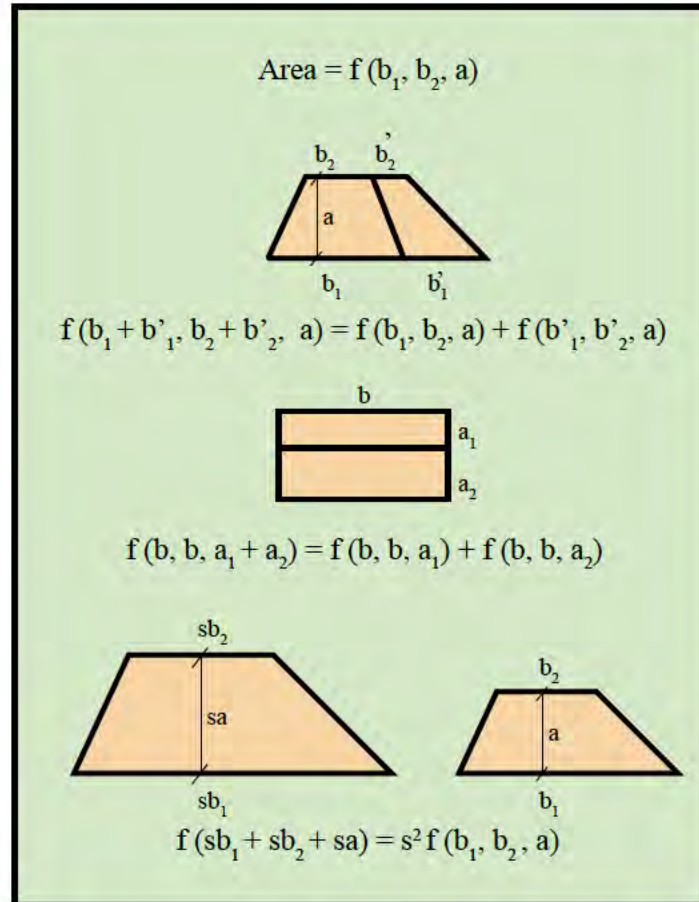


Figura 13: Casos particulares utilizados para deducir la fórmula general del área de un trapecio y que la caracterizan.

que juntas caracterizan el área del trapecio y que corresponden, respectivamente, a dividir un trapecio en dos verticalmente, a considerar el caso de un rectángulo como caso particular de trapecio, y a cambiar de escala un trapecio como muestra la figura 13.

3.2. Ecuación funcional de los modelos de fatiga

Algún tiempo después, estando en la ETH de Zürich en 1984 investigando con el profesor Alfonso Fernández Canteli de la Universidad de Oviedo, nos salió una

condición de compatibilidad, que no era otra cosa que la ecuación funcional en seis funciones incógnitas

$$[a(x)y + b(x)]^{c(x)} = [d(y)x + e(y)]^{f(y)}.$$

Al recordar el libro de Janos Aczél, lo buscamos en la biblioteca de la ETH, pero no la encontramos resuelta. Allí se puede decir que se inició una nueva etapa de nuestra investigación, en la que empezamos a ver ecuaciones funcionales por doquier, donde antes no veíamos ninguna. Fue entonces cuando yo tomé conciencia de las ecuaciones funcionales y de su gran importancia.

Esta aparentemente simple, pero compleja ecuación funcional, la resolveríamos en Castillo y Galambos [75] para el caso de que

$$1 - \exp \left\{ - [a(x)y + b(x)]^{c(x)} \right\} = 1 - \exp \left\{ - [d(y)x + e(y)]^{f(y)} \right\}; \quad \forall x, y \quad (30)$$

fuese una función de distribución como función de y para todo x y, a la vez, una función de distribución como función de x para todo y , resultando que ésta debe pertenecer a una de las dos familias siguientes:

$$1 - \exp \left[-D(Ex + F)^{C \log(Ay+B)} \right] \quad (31)$$

o

$$1 - \exp \left\{ - [C(x - A)(y - B) + D]^E \right\}, \quad (32)$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes.

Una aplicación del primer modelo a problemas de fatiga se da en Castillo et al. [142]

Finalmente, en Arnold et al. [25] tratamos el tema de construir un modelo de fatiga por consenso de varios grupos de investigadores utilizando ecuaciones funcionales.

3.3. Software de ecuaciones funcionales

Como desgraciadamente no existían programas de ordenador para resolver ecuaciones funcionales, hicimos un primer intento con los trabajos Castillo et al. [123] y Castillo e Iglesias [85], que eran programas implementados en Mathematica. Con ellos podían resolverse algunas ecuaciones funcionales sencillas. No conocemos de la existencia de otro paquete para resolver estas ecuaciones.

3.4. Caracterización de familias de superficies

En Castillo e Iglesias [86] se caracterizan clases de superficies cuyas secciones paralelas a los planos coordenados pertenecen a ciertas familias. Un ejemplo lo muestra el teorema siguiente.

Teorema 5 (Superficies en forma implícita) *La familia más general de superficies en forma implícita $f(x, y, z) = 0$, tales que sus intersecciones con los planos $z = z_0$, $y = y_0$, y $x = x_0$ son combinaciones lineales de los conjuntos de funciones de las otras dos variables*

$$\mathcal{U} = \{u_1(y, z), u_2(y, z), \dots, u_I(y, z)\},$$

$$\mathcal{V} = \{v_1(z, x), v_2(z, x), \dots, v_J(z, x)\}$$

y

$$\mathcal{W} = \{w_1(x, y), w_2(x, y), \dots, w_K(x, y)\},$$

es decir, tales que

$$f(x, y, z) \equiv \sum_{i=1}^I \alpha_i(x) u_i(y, z) = \sum_{j=1}^J \beta_j(y) v_j(z, x) = \sum_{k=1}^K \gamma_k(z) w_k(x, y), \quad (33)$$

donde los conjuntos $\{\alpha_i(x); i = 1, \dots, I\}$, $\{\beta_j(y); j = 1, \dots, J\}$ y $\{\gamma_k(z); k = 1, \dots, K\}$ pueden suponerse sin pérdida de generalidad, conjuntos de funciones linealmente independientes, es de la forma

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [C_{ijk} \alpha_i(x) \beta_j(y) \gamma_k(z)], \quad (34)$$

donde $\alpha(x)$, $\beta(y)$ y $\gamma(z)$ son vectores de funciones arbitrarias y C_{ijk} son constantes. Además, las funciones \mathcal{U} , \mathcal{V} y \mathcal{W} no pueden ser arbitrarias, sino de la forma

$$u_i(y, z) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [C_{ijk} \beta_j(y) \gamma_k(z)]; \quad i = 1, \dots, I, \quad (35)$$

$$v_j(z, x) = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K [C_{ijk} \alpha_i(x) \gamma_k(z)]; \quad j = 1, \dots, J, \quad (36)$$

$$w_k(x, y) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [C_{ijk} \alpha_i(x) \beta_j(y)]; \quad k = 1, \dots, K. \quad (37)$$

Otros ejemplos de caracterización de superficies mediante ecuaciones funcionales se dan en Castillo e Iglesias [84]. Un ejemplo gráfico se muestra en la figura 14.

Otras aplicaciones de las ecuaciones funcionales se incluyen en las secciones siguientes.

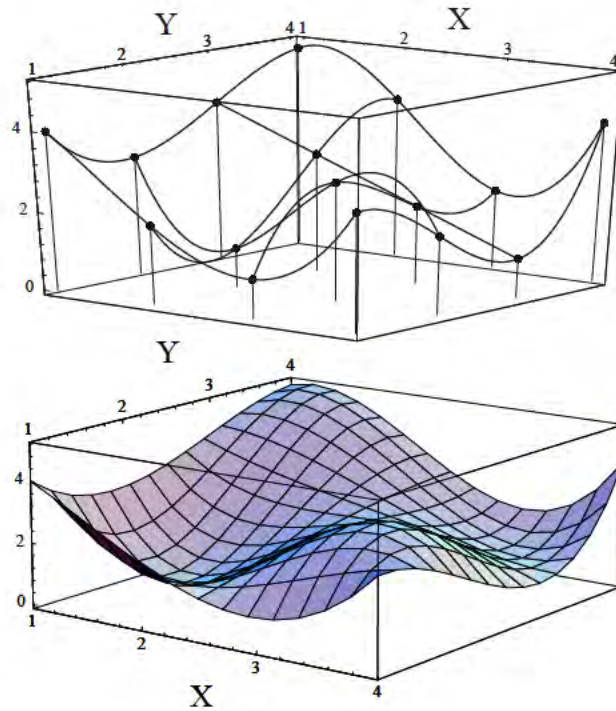


Figura 14: Ejemplo de superficie cuyas secciones paralelas a los planos coordenados son combinaciones lineales de curvas dadas.

4. Inteligencia artificial

4.1. Sistemas expertos

Desde su nacimiento, me llamaron la atención la inteligencia artificial y los sistemas expertos, que permiten reproducir el razonamiento humano y facilitan enormemente la toma de decisiones. Mis primeros pasos los di con el diagnóstico médico, desarrollando un sistema experto probabilístico en colaboración con el cirujano Ángel Naranjo, que dio lugar a su tesis doctoral (Naranjo [252]). Apple Computer estuvo a punto de incluirlo como software gratuito en todos sus ordenadores, pero se echó atrás al considerar posibles responsabilidades derivadas de su uso por personas no especialistas en ciencias médicas.

En 1989 publicamos uno de los primeros libros de sistemas expertos en castellano (Castillo y Alvarez [67]). Un año más tarde, en Castillo y Alvarez [68] y Alvarez y Castillo [17], planteamos el problema de dotar a un sistema experto con medidas de incertidumbre discutiendo varias posibilidades, tales como la probabilidad, las medidas de credibilidad, las de plausibilidad, medidas de necesidad y posibilidad, etc. y el problema de la propagación de la evidencia.

Mi formación estadística aparece en Castillo et al. [122] cuando describimos cómo pueden utilizarse los modelos logarítmico lineales para tratar el problema de la incertidumbre en sistemas expertos, dando varios métodos de estimación de los parámetros y describiendo técnicas de aprendizaje estructural y paramétrico. También se vislumbra esta formación en el trabajo Jubete y Castillo [235] cuando presentamos un sistema experto probabilístico en el que el conocimiento se incorpora mediante sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales, lo que permitía definir restricciones en su estructura probabilística. El motor de inferencia resolvía un problema de optimización que permitía obtener las soluciones más probables y obtener cotas de las diferentes probabilidades, suministrando al usuario información probabilista y estadística.

También, preocupados por la enseñanza asistida por ordenador, desarrollamos en 2001 un sistema experto que generaba problemas de programación lineal aleatorios con dificultad controlada, los resolvía y los explicaba al alumno paso a paso (Castillo et al. [152]). Incluso los alumnos podían plantear problemas al sistema y recibir la misma información sobre el problema planteado.

4.2. Redes neuronales

Las redes neuronales es un tema en el que también he trabajado. Como ejemplo, considérese la red neuronal de la figura 15, en la que se supone que las funciones neuronales f_1, f_2, \dots, f_J son invertibles. El sistema de ecuaciones que relaciona las entradas con las salidas es

$$y_{js} = f_j(w_{0j} + \sum_{i=1}^I w_{ij}x_{is}); \quad j = 1, 2, \dots, J; \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad (38)$$

donde w_{0j} y $w_{ij}; i = 1, 2, \dots, I$, son los valores umbral y los pesos asociados a las neuronas j (para $j = 1, 2, \dots, J$).

El sistema (38) tiene $J \times S$ ecuaciones en $J \times (I + 1)$ incógnitas. Sin embargo, puesto que el número de datos S es en la práctica elevado ($S \gg I + 1$), este conjunto de ecuaciones en w_{ij} no es compatible, y consecuentemente, no tiene solución.

Por ello, estamos obligados a considerar los errores, δ_{js} , es decir, transformamos la ecuación (38) en

$$\delta_{js} = y_{js} - f_j(w_{0j} + \sum_{i=1}^I w_{ij}x_{is}); \quad j = 1, 2, \dots, J; \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad (39)$$

y, para estimar (aprender) los pesos, minimizamos la suma de cuadrados de los errores:

$$Q_1 = \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^J \delta_{js}^2 = \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^J \left(y_{js} - f_j(w_{0j} + \sum_{i=1}^I w_{ij}x_{is}) \right)^2. \quad (40)$$

Es importante hacer notar que, debido a la presencia de las funciones neuronales f_j , la función que aparece en (40) es no-lineal en los pesos w_{ij} . Por ello, no está garantizado que Q_1 tenga un óptimo global. De hecho, normalmente tiene muchos óptimos locales.

4.2.1. Aprendizaje de la inversa de la función neuronal como una alternativa

Para resolver este problema, en el artículo Castillo et al. [157] propusimos un método alternativo para estimar los pesos.

La idea central del método es la siguiente. El sistema de ecuaciones mide los errores en la escala de salida (en unidades de las variables y_{js}), y puede alternativamente escribirse como:

$$\epsilon_{js} = w_{j0} + \sum_{i=1}^I w_{ji}x_{is} - f_j^{-1}(y_{js}); \quad s = 1, 2, \dots, S; \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (41)$$

que mide los errores en la escala de entrada (en unidades de las variables x_{is}).

Nuestra alternativa consistió en: Minimizar la suma de cuadrados de los errores

$$Q_{2j} = \sum_{s=1}^S \epsilon_{js}^2 = \sum_{s=1}^S \left(w_{j0} + \sum_{i=1}^I w_{ji}x_{is} - f_j^{-1}(y_{js}) \right)^2, \quad (42)$$

que conduce al sistema de ecuaciones lineales:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial w_{jp}} = \begin{cases} 2 \sum_{s=1}^S \left(w_{j0} + \sum_{i=1}^I w_{ji}x_{is} - f_j^{-1}(y_{js}) \right) x_{ps} = 0 & \text{if } p > 0 \\ 2 \sum_{s=1}^S \left(w_{j0} + \sum_{i=1}^I w_{ji}x_{is} - f_j^{-1}(y_{js}) \right) = 0 & \text{if } p = 0, \end{cases} \quad (43)$$

que tiene solución única. El problema de este método consiste en que una vez estimadas las funciones $f_j^{-1}(y_{js})$, tienen que ser invertidas para recuperar las funciones neuronales. Sin embargo, esto puede hacerse numéricamente.

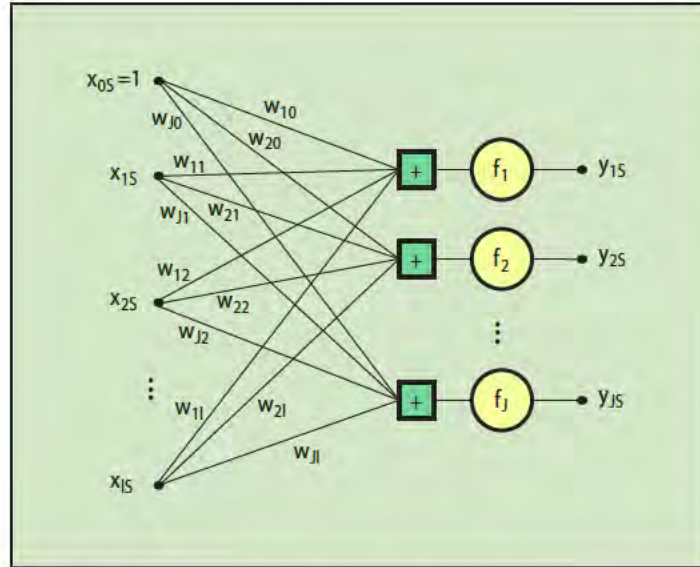


Figura 15: Una red neuronal con diferentes funciones neuronales.

Los tiempos de cpu requeridos para resolver el problema por esta alternativa oscila en muchos casos entre un mínimo de 1/10000 y un máximo de 1/100 del tiempo requerido por otros métodos, tal como se muestra en Castillo et al. [157].

Estas mismas ideas se utilizaron para iniciar el aprendizaje de redes neuronales en Erdogmus et al. [208].

4.2.2. Aprendizaje de las funciones neuronales

Independientemente de todo lo anterior, puede obtenerse una mejora importante si además se estiman las funciones inversas f_j^{-1} en vez de suponer que son funciones conocidas (véase Castillo et al. [157]). Más precisamente, pueden suponerse combinaciones lineales convexas de un conjunto

$$\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_R(x)\}$$

de funciones invertibles básicas, es decir:

$$f_j^{-1}(x) = \sum_{r=1}^R \alpha_{jr} \phi_r(x); \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (44)$$

donde $\{\alpha_{jr}; r = 1, 2, \dots, R\}$ es el conjunto de coeficientes asociados a la función f_j^{-1} , que deben ser elegidos para que la función resultante f_j^{-1} sea invertible. Sin

pérdida de generalidad se puede suponer que sea creciente, por lo que se puede minimizar, con respecto a $w_{ji}; i = 0, 1, \dots, I$ y $\alpha_{jr}; r = 1, 2, \dots, R$, la función objetivo

$$Q_{2j} = \sum_{s=1}^S \epsilon_{js}^2 = \sum_{s=1}^S \left(w_{j0} + \sum_{i=1}^I w_{ji} x_{is} - \sum_{r=1}^R \alpha_{jr} \phi_r(y_{js}) \right)^2, \quad (45)$$

sometida a la restricción

$$\sum_{r=1}^R \alpha_{jr} \phi_r(y_{js_1}) \leq \sum_{r=1}^R \alpha_{jr} \phi_r(y_{js_2}); \quad \forall y_{js_1} < y_{js_2},$$

que fuerza a las funciones candidatas f_j^{-1} a ser crecientes, al menos en los correspondientes puntos.

4.2.3. Un método lineal de aprendizaje basado en sensibilidades

El método de aprendizaje que se propone en esta sección se basa en las fórmulas de sensibilidad que pueden utilizarse ventajosamente para desarrollar un nuevo método para redes neuronales de dos capas tal como sigue (véase Castillo et al. [172]).

Considérese la red neuronal de la figura 16 en la que I es el número de entradas, J el número de salidas, K el número de unidades ocultas, $x_{0s} = 1, z_{0s} = 1, S$ el tamaño de muestra y los superíndices (1) y (2) se usan para referirse a la primera y segunda capa, respectivamente. Esta red puede considerarse compuesta de dos redes unicapa. Por lo tanto, suponiendo que las salidas de la capa intermedia \mathbf{z} son conocidas y usando la ecuación (42), se define una nueva función objetivo de la forma

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{z}) &= Q^{(1)}(\mathbf{z}) + Q^{(2)}(\mathbf{z}) = \\ &= \sum_{s=1}^S \left[\sum_{k=1}^K \left(\sum_{i=0}^I w_{ki}^{(1)} x_{is} - f_k^{(1)-1}(z_{ks}) \right)^2 \right] \\ &\quad + \left[\sum_{j=1}^J \left(\sum_{k=0}^K w_{jk}^{(2)} z_{ks} - f_j^{(2)-1}(y_{js}) \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Por tanto, utilizando las salidas z_{ks} se pueden aprender, independientemente para cada capa, los pesos $w_{ki}^{(1)}$ y $w_{jk}^{(2)}$ resolviendo los correspondientes sistemas lineales. Seguidamente, se calculan las sensibilidades con respecto a z_{ks} mediante:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{Z}} \right) = -2 \left((\mathbf{F}_1(\mathbf{Z}))' \square \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} \right) \quad (47)$$

$$\left(\frac{\partial Q^{(2)}}{\partial \mathbf{Z}} \right) = 2 \mathbf{W}^{(2)T} \boldsymbol{\epsilon}^{(2)}, \quad (48)$$

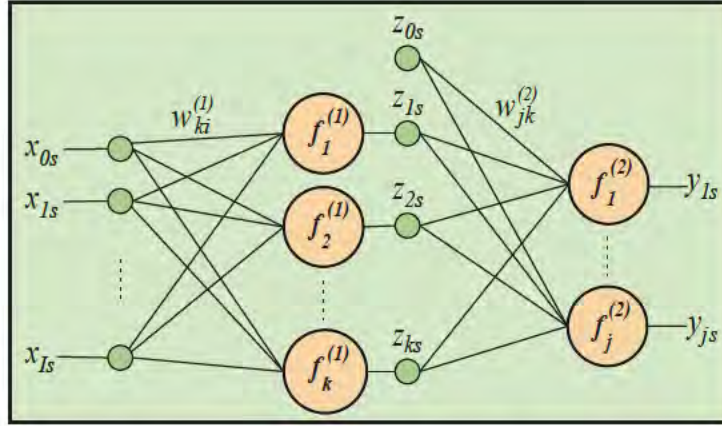


Figura 16: Red neuronal de dos capas.

donde \square es el producto matricial de Schur o Hadamard (elemento por elemento), $\mathbf{F}_1^T(\mathbf{Z})$ contiene los elementos $f_k^{(1)-1}(z_{ks})$, $\mathbf{W}^{(2)}$ es la matriz de los pesos $w_{jk}^{(2)}$, y $\varepsilon^{(1)}$ y $\varepsilon^{(2)}$ son las matrices de los residuos de las dos capas.

Seguidamente, se modifican los valores de las salidas intermedias \mathbf{z} utilizando una aproximación de Taylor:

$$Q(\mathbf{z} + \Delta\mathbf{z}) = Q(\mathbf{z}) + \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^S \frac{\partial Q(\mathbf{z})}{\partial z_{ks}} \Delta z_{ks} \approx 0, \quad (49)$$

que conduce a los incrementos siguientes

$$\Delta\mathbf{z} = -\rho \frac{Q(\mathbf{z})}{\|\nabla Q\|^2} \nabla Q, \quad (50)$$

donde ρ es un factor de relajación para facilitar la convergencia.

Este método, además de ser de utilidad general, es muy rápido, ya que utiliza sistemas lineales de ecuaciones para el aprendizaje de las dos redes por separado.

4.2.4. La descomposición ANOVA de Sobol

En Castillo et al. [179] se presenta un método de redes neuronales basado en la descomposición ANOVA de Sobol, miembro de la Academia de Ciencias rusa.

Según Sobol [271] cualquier función de cuadrado integrable $f(x_1, \dots, x_n)$ definida en el cubo unidad $[0, 1]^n$ puede ser escrita mediante la expresión

$$y = f(x_1, \dots, x_n) = f_0 + \sum_{\nu=1}^{2^n-1} f_\nu(\mathbf{x}_\nu), \quad (51)$$

donde $\{\mathbf{x}_\nu | \nu = 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ es la clase de todos los posibles subconjuntos de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. En el caso $\nu = 0$, que corresponde al conjunto vacío, la función $f_\nu(\mathbf{x}_\nu)$ no tiene argumentos, y se asocia a la función constante f_0 .

La descomposición (51) se llama ANOVA si y sólo si

$$\int_0^1 f_\nu(\mathbf{x}_\nu) dx_i = 0; \quad \forall x_j \in \mathbf{x}_\nu \quad i \neq j \quad \forall \nu \quad (52)$$

Entonces, las funciones correspondientes a los diferentes sumandos son *únicas* y ortogonales, es decir:

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f_{\nu_1}(\mathbf{x}_{\nu_1}) f_{\nu_2}(\mathbf{x}_{\nu_2}) d\mathbf{x}_{\nu_1} d\mathbf{x}_{\nu_2} = 0; \quad \forall \nu_1 \neq \nu_2$$

Es importante señalar que las condiciones (52) son suficientes para que las diferentes componentes sean ortogonales. Nótese que, puesto que la descomposición anterior incluye términos con todas las interacciones posibles entre las variables x_1, x_2, \dots, x_n , permite determinar éstas.

La principal ventaja de esta descomposición es que existen fórmulas explícitas y cerradas para obtener los diferentes sumandos o componentes de $f(x_1, \dots, x_n)$. Sobol [271] da estas expresiones:

$$f_0 = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (53)$$

$$f_i(x_i) = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) \prod_{k \neq i} dx_k - f_0, \quad (54)$$

$$f_{ij}(x_i, x_j) = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) \prod_{k \neq i, j} dx_k - f_0 - \sum_{k=i, j} f_k(x_k) \quad (55)$$

y así sucesivamente.

En otras palabras, la función $f(x_1, \dots, x_n)$ puede escribirse siempre como la suma de 2^n sumandos ortogonales

$$y = f(x_1, \dots, x_n) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i < j}^n f_{ij}(x_i, x_j) \quad (56)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{i < j}^{n-1} \sum_{j < k}^n f_{ijk}(x_i, x_j, x_k) + \dots + f_{12\dots n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (57)$$

Puesto que si $f(x_1, \dots, x_n)$ es de cuadrado integrable, entonces todas las funciones $f_\nu(\mathbf{x}_\nu)$; $\nu = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ también lo son, elevando al cuadrado $f(x_1, \dots, x_n)$ e integrando en $[0, 1]^n$ se obtiene:

$$\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f^2(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n - f_0^2 = \sum_{\nu=1}^{2^n-1} \int_0^1 f_\nu^2(\mathbf{x}_\nu) d\mathbf{x}_\nu \quad (58)$$

y llamando

$$D = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f^2(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n - f_0^2, \quad (59)$$

$$D_\nu = \int_0^1 f_\nu^2(\mathbf{x}_\nu) d\mathbf{x}_\nu; \quad \nu = 1, 2, \dots, 2^n - 1, \quad (60)$$

resulta

$$D = \sum_{\nu=1}^{2^n-1} D_\nu. \quad (61)$$

La constante D se llama varianza, porque en el caso de que (x_1, \dots, x_n) sea una variable aleatoria uniforme en el hipercubo unidad, entonces D es la varianza de la función. Con esto, el conjunto siguiente de índices de sensibilidad global, que suman la unidad, pueden definirse como

$$S_\nu = \frac{D_\nu}{D}; \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, 2^n - 1. \quad (62)$$

La importancia práctica de la descomposición ANOVA de Sobol se fundamenta en los siguientes hechos:

1. Toda función de cuadrado integrable puede descomponerse como suma de funciones ortogonales que incluyen todas las posibles interacciones.
2. Esta descomposición es única.
3. Hay fórmulas cerradas para determinar esta descomposición en función de $f(x_1, \dots, x_n)$.
4. La varianza de la función inicial puede obtenerse como suma de las varianzas de las funciones componentes, lo que permite asignar índices de sensibilidad global a cada una de ellas, que suman la unidad.

Por ello, se puede medir la importancia de cada término f_ν (tipo de interacción entre las variables) por medio de D_ν , y despreciar aquellos con valores de D_ν menores que un cierto valor umbral. Con estos medios se puede construir una red neuronal que incluya sólo las interacciones más importantes.

4.3. Redes funcionales

Las redes funcionales constituyen un paradigma de la inteligencia artificial que descubrí en 1998 por casualidad y gracias a mi conocimiento de las ecuaciones funcionales, ya que sin éste no hubiera sido posible.

Se da la circunstancia de que simultáneamente había tenido una idea parecida un alumno de último año de carrera en Méjico. Se me ocurrió buscar en Internet “redes funcionales” y apareció el nombre de Ruslán Gómez Nesterkin, un alumno mejicano que publicaba un trabajo fin de carrera. Al verlo me quedé impresionado, pues su idea era muy parecida a la mía. Por ello, me puse en contacto con él y le invité a visitarnos, a lo que accedió. Durante su corta visita de una semana, desarrollamos el trabajo conjunto Castillo et al. [146], que se publicó en la revista *Networks*, y le invité a hacer el doctorado con nosotros, pero desgraciadamente ya estaba comprometido con una universidad belga y, que yo sepa, no ha vuelto a trabajar en este tipo de ecuaciones.

Mis primeras ideas sobre ecuaciones funcionales las publiqué en el trabajo Castillo [64]; un poco más tarde extendí el método con José Manuel Gutiérrez en *Physics Letters* (Castillo y Gutiérrez [79]) y luego en Castillo et al. [141], trabajo en el que se ve cómo los problemas de ecuaciones diferenciales pueden resolverse también mediante ecuaciones funcionales y viceversa.

Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones que surgen en muchos casos de imponer el balance o el equilibrio en un elemento de dimensiones muy pequeñas (diferenciales) y luego obligar a que se cumpla en un determinado dominio. Si en vez de considerar un elemento diferencial se consideran elementos de dimensión finita y se impone ese mismo balance o equilibrio para todos estos elementos de dimensión cualquiera, se tienen las ecuaciones funcionales. Por tanto, muchos problemas permiten ambos planteamientos, que son en realidad equivalentes.

A estos trabajos siguieron los Castillo et al. [147] y Castillo et al. [148].

En 2001 publicamos un trabajo en *Technometrics* (Castillo et al. [153]) en el que introdujimos estas redes en la comunidad estadística, que fue considerado como el mejor trabajo del año e invitado a ser presentado en el congreso de la ASA (American Statistical Association) de 2001 en Atlanta.

Otros trabajos han sido publicados en Fontenla-Romero et al. [214] y Castillo et al. [191].

Para motivar las redes funcionales se presenta a continuación un ejemplo sencillo de diagnóstico médico.

Ejemplo 1 (Diagnóstico médico) *Supóngase que se desea conocer la probabilidad de que un paciente tenga una cierta enfermedad basándose en tres síntomas continuos X, Y, Z , que toman valores numéricos x, y y z , respectivamente. Denótese a*

esta probabilidad mediante $Q(x, y, z)$, esto es, una función de los valores numéricos de los síntomas medidos.

Además, se supone que la información contenida en una tripleta $\{X, Y, Z\}$ es acumulativa; es decir, el valor $Q(x, y, z)$ se puede obtener combinando dos de los síntomas para obtener un nuevo valor (mediante una función) y, posteriormente, combinar este nuevo valor con el valor del síntoma restante. Más precisamente, se supone que existen funciones F, G, H, K, L y M tales que

$$Q(x, y, z) \equiv F[G(x, y), z] = K[x, N(y, z)] = L[y, M(x, z)]. \quad (63)$$

De esta manera, la probabilidad $Q(x, y, z)$ de que el paciente tenga la enfermedad puede calcularse por medio de una función F de $G(x, y)$ (un resumen de las influencias de los síntomas X e Y) y el valor z asociado al síntoma Z . En otras palabras, si en un instante dado se conocen los valores asociados a los síntomas X e Y , se pueden calcular las influencias de estos dos síntomas sobre Q por medio de $G(x, y)$, y más tarde incorporar la influencia del síntoma Z por medio de una función F . Se supone que el mismo argumento es válido para cualquier permutación de los síntomas X, Y, Z .

Si los valores de las variables síntomas están directamente relacionados con la enfermedad, es razonable suponer que las funciones F, K, L, G, N y M son invertibles (estrictamente monótonas) con respecto a ambas variables. Esto significa que a mayor (menor) nivel de un síntoma mayor (menor) probabilidad de la enfermedad.

Al representar gráficamente las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones funcionales descubro que tienen una estructura de red, lo que me llevó a pensar en las redes funcionales. En efecto, las ecuaciones (63) sugieren la red de la figura 17(a), donde I se usa para hacer referencia a la función identidad $I(x) = x$ y las tres flechas convergentes en la unidad u se usan para indicar valores coincidentes, es decir, los valores que llegan de cada una de las conexiones tienen que ser iguales.

Las conexiones coincidentes en la unidad u o, equivalentemente, las Ecuaciones (63) establecen fuertes condiciones sobre las funciones neuronales F, G, K, L, M y N .

Luego descubrimos que trabajar con redes funcionales requiere los siguientes pasos:

Paso 1 (Planteamiento del problema): En este paso crucial se ha de analizar el problema a resolver de modo que pueda ser planteado en la forma necesaria para su resolución.

Paso 2 (Topología inicial): Basado en el conocimiento del problema, se selecciona la topología inicial de la red funcional. Esta selección no es como en las redes neuronales, en las que se usan varias topologías hasta que los errores sean pequeños y

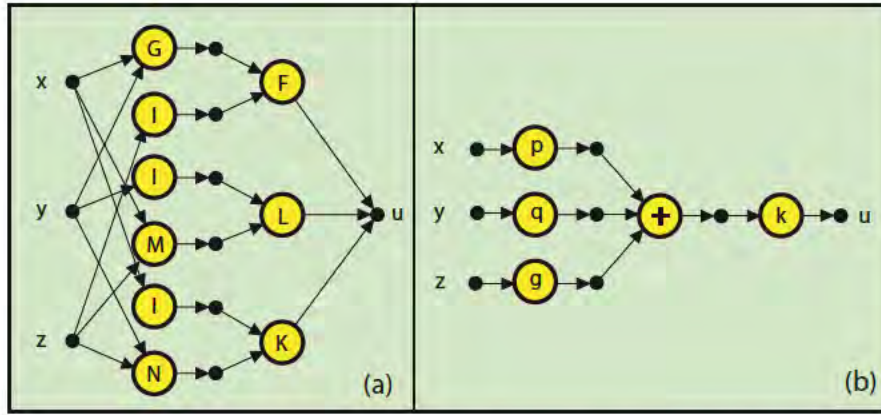


Figura 17: Redes funcionales equivalentes que resultan de un problema de diagnóstico.

equilibrados con respecto al número de grados de libertad. La selección de la topología de una red funcional está basada normalmente en propiedades del modelo que, usualmente, conduce a una clara y única estructura de red (diseño dirigido por el problema). En el caso del ejemplo, la topología sale directamente de la ecuación (63), que se representa en la figura 17 (a).

Paso 3 (Simplificación o aprendizaje estructural): La red funcional inicial se simplifica usando ecuaciones funcionales. Dada una red funcional, un problema interesante consiste en determinar cuándo existe otra red funcional que produzca las mismas salidas para idénticas entradas. Esto conduce al concepto de redes funcionales equivalentes. Dos redes funcionales se dice que son equivalentes si tienen las mismas capas de entrada y de salida y dan la misma salida para cada posible entrada. La importancia práctica del concepto de redes funcionales equivalentes es que permite definir clases, esto es, conjuntos de redes funcionales equivalentes. Entonces, para cada aplicación práctica se podrá elegir la red más simple de cada clase.

En nuestro caso, la solución general continua del sistema de ecuaciones funcionales (63) es

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= k[f(x) + g(y)], & G(x, y) &= f^{-1}[p(x) + q(y)], \\
 K(x, y) &= k[p(x) + n(y)], & N(x, y) &= n^{-1}[q(x) + g(y)], \\
 L(x, y) &= k[q(x) + m(y)], & M(x, y) &= m^{-1}[p(x) + g(y)],
 \end{aligned} \tag{64}$$

donde k, g, p y q son funciones arbitrarias y f, m y n son funciones arbitrarias invertibles. Las dos primeras líneas de (64) son las soluciones de la primera ecuación

funcional de (63), y las dos últimas líneas de (64) son las soluciones de la última ecuación funcional de (63).

Reemplazando esto en (63) se llega a

$$Q(x, y, z) = k[p(x) + q(y) + g(z)], \quad (65)$$

que sugiere la red funcional de la figura 17 (b) y que muestra que las redes funcionales de las Figuras 17(a) y (b) son equivalentes, en el sentido de que dan las mismas salidas para cada entrada. No obstante, nótese que tanto la topología de la red, mostrada en la figura 17(b), como su estructura son mucho más sencillas que las de la figura 17(a).

Paso 4 (Unicidad de representación): Antes del aprendizaje de una red funcional es necesario asegurarse de que ésta admite una representación única. Este problema surge porque para una topología dada (estructura) pueden existir varias funciones neuronales que conducen exactamente a la misma salida para cada entrada. Para evitar problemas de estimación es necesario conocer qué condiciones tienen que cumplirse para la unicidad. Si hay dos conjuntos de funciones $\{k_1, p_1, q_1, g_1\}$ y $\{k_2, p_2, q_2, g_2\}$ tales que

$$k_1[p_1(x) + q_1(y) + g_1(z)] = k_2[p_2(x) + q_2(y) + g_2(z)], \quad (66)$$

entonces debe ser (véase Aczél [1] y Castillo et al. [166])

$$\begin{aligned} k_2(u) &= k_1 \left(\frac{u - b - c - d}{a} \right), \\ p_2(x) &= ap_1(x) + b, \\ q_2(y) &= aq_1(y) + c, \\ g_2(z) &= ag_1(z) + d, \end{aligned} \quad (67)$$

donde a, b, c y d son constantes arbitrarias, lo que implica que para poder tener unicidad hay que imponer cuatro condiciones, como, por ejemplo, fijar los valores de las funciones k, p, q, g en un punto.

Paso 5 (Recogida de datos): Para que el aprendizaje sea posible, se requiere una cierta información. En este paso se recopilan los datos.

Paso 6 (Aprendizaje paramétrico): Las funciones neuronales son estimadas basándose en los datos disponibles. Esto se resuelve considerando combinaciones lineales de familias funcionales apropiadas y usando algunos métodos de minimización para obtener los coeficientes óptimos sometidos a las condiciones de unicidad anteriores.

Paso 7 (Validación del modelo): Se realiza la comprobación de la calidad y/o la validación cruzada del modelo. Comprobando el error obtenido es importante ver si la familia de funciones elegida para aproximar es adecuada o no. Una validación cruzada del modelo, con un conjunto alternativo de datos, también es importante. Esto permite decidir sobre la existencia del problema de sobreajuste.

Paso 8 (Uso del modelo): Si el proceso de validación es satisfactorio, el modelo está preparado para ser usado.

Los detalles de todo este proceso pueden verse, junto con varios ejemplos, en Castillo et al. [137, 138].

5. Economía

La Economía es una ciencia en la que la Matemática juega un papel muy relevante. Por ello, también he dedicado un cierto tiempo a problemas y modelos en Economía.

5.1. Modelos de demanda

En Castillo et al. [145, 149] se presentan modelos generales para funciones de demanda en un mercado duopolista de un único producto, en la que se consideran los precios de cada una de las empresas y sus respectivas inversiones en propaganda suponiendo demandas fijas o ilimitadas. Los modelos se obtienen utilizando ecuaciones funcionales, suponiendo que cambios aditivos o multiplicativos en los precios o las inversiones conducen a incrementos aditivos o multiplicativos independientes en las ventas. De esta forma se dan ocho modelos diferentes para los que se obtienen las estrategias de equilibrio del duopolio (Curnot y Stackelberg) y se proponen algunos modelos para la estimación de los parámetros.

5.2. Curvas de Lorenz

Mi relación con José María Sarabia y arrastrado por él, me ha llevado a trabajar con curvas de Lorenz, que sirven para medir la desigualdad en la distribución de la riqueza.

En Sarabia et al. [270] se generan familias de Lorenz mediante la expresión $L(p; \alpha, \gamma) = p^\alpha L_0(p)^\gamma$ donde $L_0(p)$ es una curva de Lorenz. Si se utiliza $L_0(p) = 1 - (1 - p)^k$ se llega a lo que llamamos familia de Pareto-Lorenz que contiene casos particulares importantes de curvas de Lorenz y cuyos parámetros pueden estimarse fácilmente.

En Sarabia et al. [265] se introduce una familia exponencial de curvas de Lorenz, se comentan algunas de sus propiedades y se dan métodos de estimación. En Sarabia et al. [266] se da una ordenación de las curvas de Lorenz propuestas por McDonald [247].

El problema de la estimación de los parámetros de una familia general de curvas de Lorenz se aborda en Castillo et al. [140] introduciendo el método de los percentiles y aplicándolo a algunos ejemplos particulares interesantes.

Una nueva clase de curvas de Lorenz mediante una mezcla de una curva inicial de Lorenz $L_0(p)$ y una función de probabilidad gamma, suponiendo la existencia de un factor de heterogeneidad, se propone en Sarabia et al. [268]. En particular se eligen como $L_0(p)$ las curvas de Lorenz potencial, la clásica de Pareto y una propuesta por Gupta, comparando la curva inicial con las mezclas.

En Sarabia y Castillo [264] se analiza la clase más general de distribuciones estables frente a máximos y se proponen como distribuciones de ingresos, obteniendo expresiones explícitas para las curvas de Lorenz y los índices de Gini. Además se dan métodos de inferencia apropiados.

5.3. Modelos dinámicos

Los modelos dinámicos constituyen una importante rama de las ecuaciones diferenciales en la que hay multitud de aplicaciones. Motivado por María Sarabia, una economista, consideramos en Castillo et al. [180] un mercado competitivo en el que dos empresas competían por los clientes y analizamos la dinámica del sistema en función de tres variables: la cuota de mercado s , la cuota de inversión r de la empresa y el nivel de peligro de ser eliminada ésta por su contrincante d . Las ecuaciones diferenciales

$$d' = f(s, d); \quad r' = g(d, r); \quad s' = h(s, r), \quad (68)$$

que regulan el sistema fueron elegidas cuidadosamente para reflejar el comportamiento real de la empresa. Se supuso que el cambio en el nivel de peligro percibido era una función del nivel actual y de la cuota de mercado, que el cambio en la cuota de mercado era función de la cuota de mercado actual y de la cuota de inversión y, finalmente, que el cambio en la cuota de inversión dependía de la cuota de inversión actual y del nivel de peligro percibido. Estas relaciones se ilustran en la figura 18. Finalmente, la figura 19 muestra cómo evoluciona el mercado hacia su equilibrio en cinco hipótesis, que van desde el caso de monopolio al de aniquilación de la empresa por su competidora.

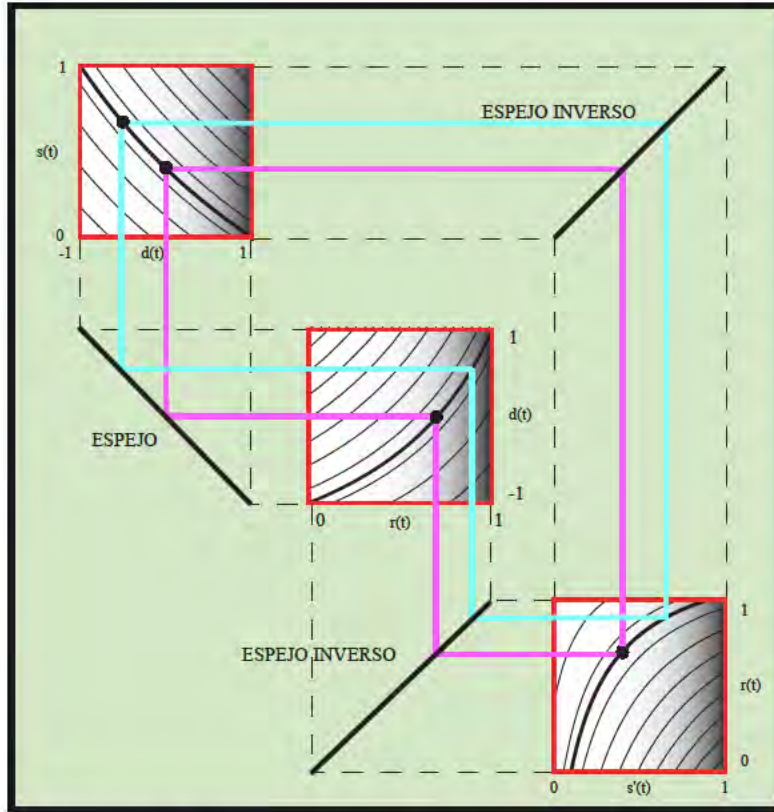


Figura 18: Ilustración de cómo interaccionan las funciones activadoras del nivel de daño $d' = f(s, d)$, de la inversión $r' = g(d, r)$ y de la reacción del mercado $s' = h(s, r)$, mostrando en grueso la zona de equilibrio.

6. Fiabilidad y diseño en ingeniería civil

6.1. Introducción

Uno de los problemas más importantes en ingeniería es el de diseño y proyecto de obras civiles, en el cuál el estudio de fiabilidad de las mismas es crucial. Tradicionalmente se ha utilizado el coeficiente de seguridad para garantizar la seguridad de las obras. Para ello se supone un conjunto de modos de fallo y se asegura que las fuerzas resistentes sean mayores que las que conducen a la rotura o el fallo de la obra. El coeficiente de seguridad no es otra cosa que el cociente entre ambas. Si éste es mayor que la unidad, la obra no falla, si es menor tenemos el fallo. Durante muchos años la discusión de cuál debe ser este coeficiente para las diferentes obras ha sido

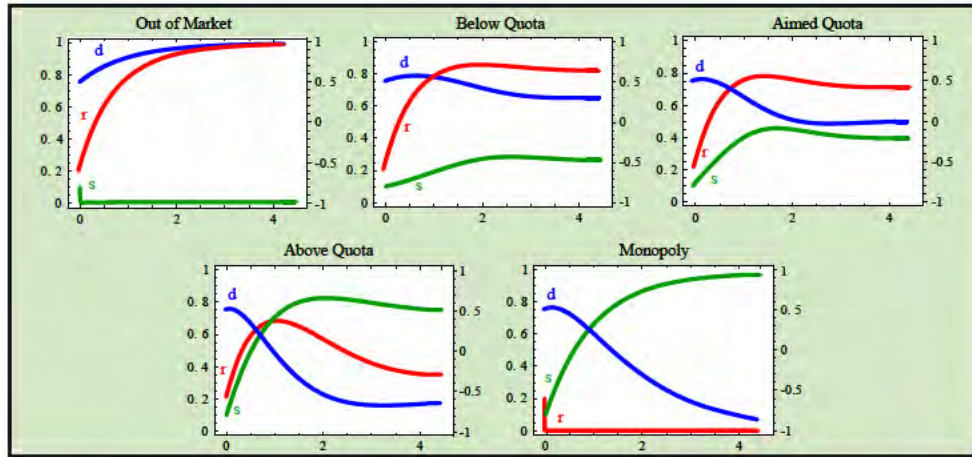


Figura 19: Evolución de $s(t)$, $d(t)$ y $r(t)$ para cinco casos que van desde el caso de monopolio al de aniquilación de la empresa por su competidora.

una constante en muchas publicaciones. Es claro que dicho coeficiente debe depender de la magnitud del daño causado y del grado de desconocimiento que se tenga sobre los materiales, las solicitaciones, etc. Esta técnica tradicional del coeficiente de seguridad ha chocado con una nueva forma de ver las cosas que consiste en utilizar probabilidades de fallo asociadas a los diferentes modos y la probabilidad global de fallo, que no son fáciles de calcular (véase Castillo et al. [156]). Las discusiones y divergencias entre los seguidores de ambas escuelas son bien conocidas.

No creo que desvele ningún secreto, si digo que soy un ferviente defensor del uso de la probabilidad en ingeniería. Mis primeros pasos en Santander ya revelan esta tendencia cuando me dedico con Jaime Puig-Pey y Miguel Losada a desarrollar un método probabilístico de diseño de obras marítimas que se publica en dos trabajos en la Revista de Obras Públicas (Castillo et al. [102], Losada et al. [239]) y se presentan en un congreso en Trondheim (Noruega).

Recientemente, motivados por la polémica suscitada entre las dos escuelas y dado el interés de la misma, decidimos combinar ambas en un mismo modelo añadiendo además la optimización (véase Castillo et al. [162], Castillo et al. [163], Castillo et al. [167] y Mínguez et al. [250]), es decir, se trata de encontrar la estructura que satisface una ciertas condiciones geométricas y de seguridad y que al mismo tiempo optimiza una cierta función objetivo, no necesariamente de coste.

Al resolver estos problemas nos dimos cuenta de que ambos métodos, es decir, los basados en probabilidades de fallo y los basados en coeficientes de seguridad, son equivalentes, pues existe una correspondencia biunívoca entre coeficientes de seguri-

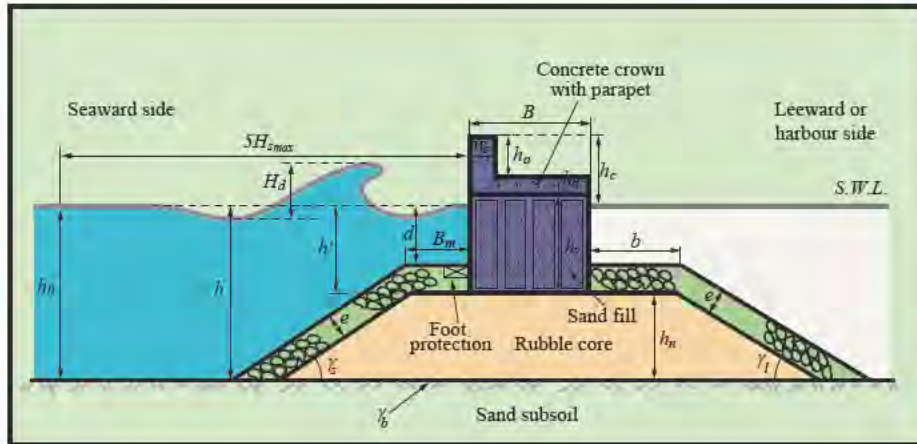


Figura 20: Dique de escollera mostrando las variables que definen sus dimensiones y que hay que fijar para que se satisfagan las condiciones de seguridad y al mismo tiempo se obtenga el mínimo coste.

dad y probabilidades del mismo tipo de fallo que conducen a las mismas soluciones. De todas formas, sugerimos emplear ambas condiciones para poder controlarlas adecuadamente. En otras palabras, si un coeficiente de seguridad es insuficiente porque conduce a probabilidades de fallo muy altas o muy alto por implicar costes elevados, la probabilidad de fallo nos lo indica. Análogamente, si una probabilidad de fallo es muy alta o muy baja, también los coeficientes de seguridad nos lo señalan. De esta forma se consigue una calibración de ambos métodos y se tiene una doble seguridad en los cálculos.

Como ilustración, en la figura 20 se muestra el caso de un dique de escollera y en la figura 21 ésta y los siete modos de fallo considerados en su diseño. Para resolver este caso hay que aplicar un método iterativo en el que además de resolver el problema principal (problema maestro) de minimizar el coste, hay que resolver un problema de optimización por cada modo para poder calcular las probabilidades de fallo (subproblemas).

Si además del coste de la obra se tiene en cuenta su mantenimiento y reparación, surgen nuevos problemas, ya que en la función objetivo además del coste de construcción de la obra aparecen las probabilidades de fallo, que deben calcularse mediante la resolución de otros problemas de optimización. Ello implica la necesidad de emplear otras técnicas, llamadas de descomposición, como la descomposición de Benders. Estos temas fueron tratados en Mínguez and Castillo [248], Castillo et al. [58]. Véase también Mínguez et al. [249].

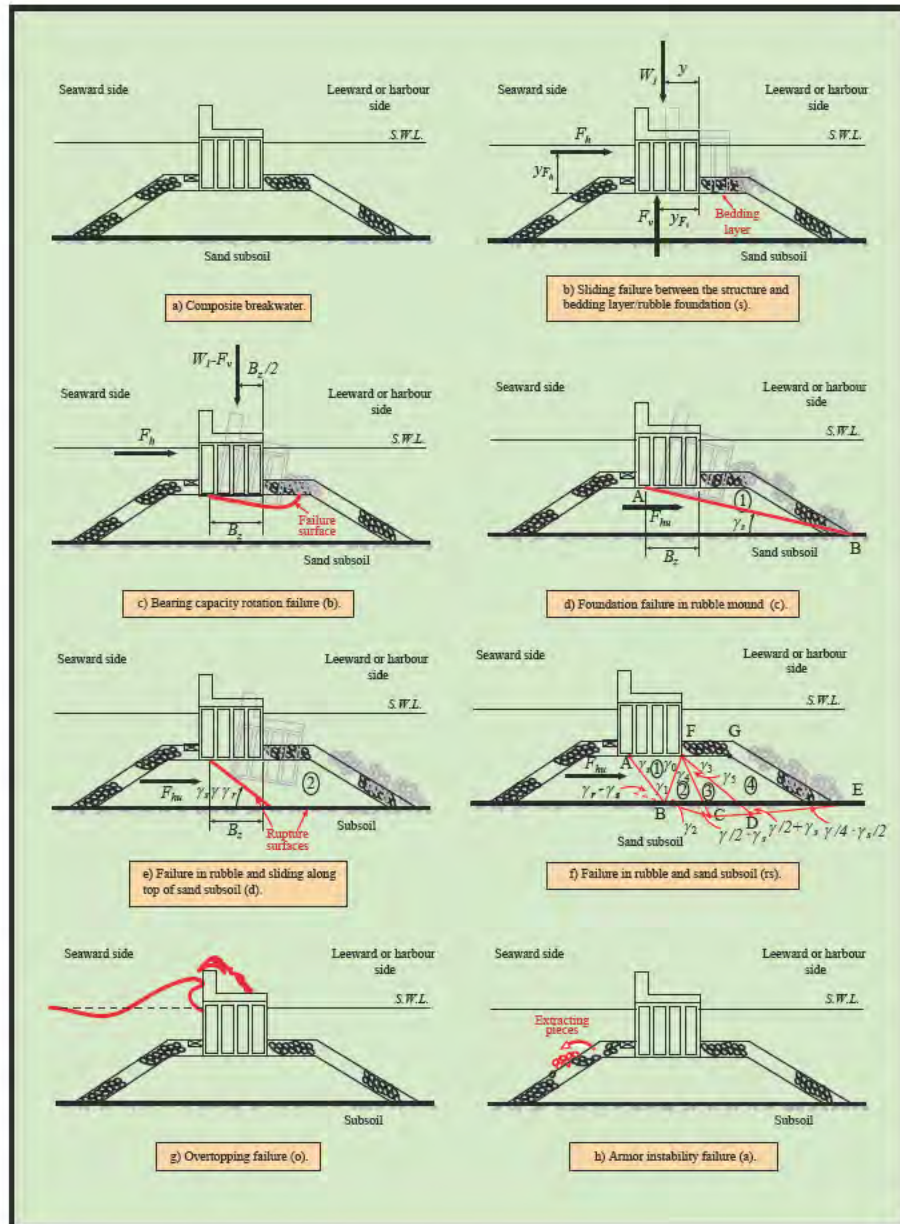


Figura 21: Modos de fallo de un dique de escollera.

6.2. Análisis de sensibilidades

Aparte de informar al ingeniero de cuáles son las dimensiones de la obra que conducen a una obra segura y de mínimo coste, es muy conveniente, y cada vez se exige más, determinar cuáles son las sensibilidades de costes, coeficientes de seguridad, probabilidades de fallo, y dimensiones de la obra a los coeficientes de seguridad y probabilidades exigidas por las normas vigentes, así como a los costes unitarios de los materiales y unidades de obra. Con esta información puede conocerse inmediatamente cómo los cambios de precios inciden en los costes y cómo los cambios en las normativas vigentes influyen no solo en los costes, sino también en la seguridad. Ello permite, por un lado gestionar la obra a constructores y administraciones y, por otro, a los legisladores decidir ciertos cambios en función del bien común (coste más seguridad). Ello, nos llevó a realizar un gran esfuerzo en incorporar los estudios de sensibilidad a la práctica de la ingeniería (véase, por ejemplo, Castillo et al. [160], Castillo et al. [163] y Castillo et al. [197]).

6.3. Otras aplicaciones

Nuestra relación con Cristalería Española nos llevó también a analizar la seguridad de estructuras acristaladas de gran magnitud en Castillo et al. [115] y en Castillo et al. [116]. En este tipo de materiales tiene una importancia fundamental la orientación, ya que hay direcciones predominantes de grietas.

Un accidente durante la construcción de una presa en el que fallecieron once obreros nos implicó en un informe judicial, que posteriormente motivó una investigación sobre la estabilidad de taludes rocosos en los que la estructura es de bloques definidos por las redes de diaclasas dando lugar a la publicación de los resultados en Castillo y Serrano [100].

La discusión entre ingenieros defensores de los métodos deterministas frente a los probabilistas y viceversa dio lugar al trabajo Castillo y Alonso [66] tratando de armonizar esas dos tendencias en el caso de la estabilidad de taludes.

6.4. Modelos de fatiga

En esta sección se consideran nuestras contribuciones al problema de la fatiga de materiales al que he dedicado muchos años.

6.4.1. Modelo S-N para un nivel de tensiones fijo

En noviembre de 1982 tuvo lugar otro hecho importante en mi vida científica: el profesor Alfonso Fernández-Canteli de la Universidad de Oviedo, del que ya he

hablado, se presentó en mi despacho pidiendo ayuda para resolver un problema estadístico de fatiga de materiales. Esa entrevista fue el comienzo de una colaboración muy fructífera que dura hasta hoy. Él había realizado la tesis doctoral en la ETH de Zürich y comenzaba su investigación en la Escuela de Ingenieros Industriales de Gijón. Tras algunos trabajos previos, me sugirió que pasase un verano en la ETH para trabajar juntos y con el Profesor Bruno Thürlimann, miembro de la Academia de Ingeniería estadounidense (NAE). Ya he comentado que allí nos surgió la primera ecuación funcional al formular una condición de compatibilidad.

6.4.1.1. Condición de compatibilidad. Curvas percentiles. El problema de fatiga que estudiábamos consistía en obtener un modelo para analizar la influencia del nivel de tensión $\Delta\sigma$ en la vida a fatiga N^* al someter una probeta a ciclos alternantes de tensión. La experimentación en laboratorio ponía de manifiesto una relación como la de la figura 22, es decir, una relación decreciente de la vida a fatiga con $\Delta\sigma$. Tras analizar el problema, nos dimos cuenta de que podían considerarse dos familias de variables aleatorias, la $N^*|\Delta\sigma$ y la $\Delta\sigma|N^*$, es decir, N^* para $\Delta\sigma$ fijo y viceversa. Sin embargo, descubrimos que tenía que cumplirse una condición de compatibilidad entre las funciones de distribución de las dos variables, ya que estas dos funciones provienen de las mismas curvas percentiles y no son independientes. Nótese en la figura 22 que cualquiera de las trayectorias que entran por el segundo cuadrante indicado, tienen que salir por el cuarto cuadrante, por lo que las frecuencias asociadas deben ser idénticas. Por ello, dichas curvas deben satisfacer la condición, que se ilustra en la figura 22 mediante las áreas sombreadas, que deben ser iguales para cualquier punto que se considere del campo S-N.

Dado que, como se muestra en la figura 22, la media y la varianza de N^* dependen de $\Delta\sigma^*$ y la media y la varianza de $\Delta\sigma^*$ dependen de N^* , si se supone la misma familia de distribuciones de localización y escala $h^*((x - \mu)/\sigma)$ para ambas, la condición de compatibilidad puede escribirse como

$$p = h^* \left(\frac{N^* - \mu_1^*(\Delta\sigma^*)}{\sigma_1^*(\Delta\sigma^*)} \right) = h^* \left(\frac{\Delta\sigma^* - \mu_2^*(N^*)}{\sigma_2^*(N^*)} \right), \quad (69)$$

donde $\mu_1^*(\Delta\sigma^*)$, $\sigma_1^*(\Delta\sigma^*)$ y $\mu_2^*(N^*)$, $\sigma_2^*(N^*)$ son, respectivamente, los parámetros de localización y escala de N^* dado $\Delta\sigma^*$ y de $\Delta\sigma^*$ dado N^* , o, equivalentemente,

$$\frac{N^* - \mu_1^*(\Delta\sigma^*)}{\sigma_1^*(\Delta\sigma^*)} = \frac{\Delta\sigma^* - \mu_2^*(N^*)}{\sigma_2^*(N^*)}, \quad (70)$$

que es una ecuación funcional en cuatro funciones incógnitas, cuya solución conduce a las dos familias de modelos siguientes (véase Castillo et al. [111] y Castillo y

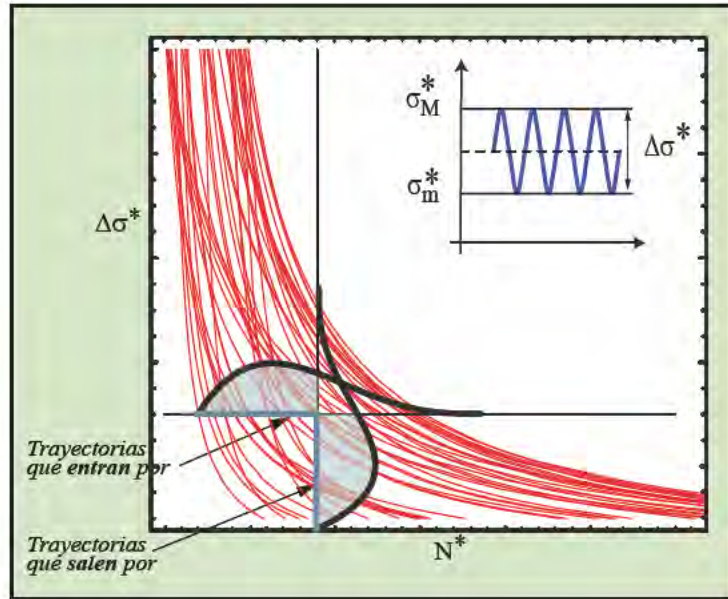


Figura 22: Ilustración de la condición de compatibilidad en el campo S-N.

Fernández-Canteli [69]):

$$\text{Modelo 1: } p = h^* \left(\frac{(N^* - B^*)(\Delta\sigma^* - C^*) - \lambda^*}{\delta^*} \right), \quad (71)$$

$$\text{Modelo 2: } p = h^* (A^*N^* + B^*\Delta\sigma^* + C^*), \quad (72)$$

donde λ^* y δ^* son los parámetros de localización y escala, respectivamente, y A^* , B^* y C^* son también parámetros. Esto ocurre independientemente de cuál sea la función h^* , por lo que las funciones μ_1^* , σ_1^* , μ_2^* y σ_2^* no pueden darse en forma arbitraria si debe satisfacerse la relación de compatibilidad (70).

Obsérvese que las curvas percentiles en el Modelo 1 son hipérbolas con asíntotas comunes $N^* = B^*$ y $\Delta\sigma^* = C^*$, y que las curvas percentiles en el Modelo 2 son rectas paralelas, como consecuencia de la condición de compatibilidad y la coincidencia de las familias de localización y escala elegidas.

Es importante darse cuenta de que estas curvas son así, independientemente de las hipótesis distribucionales que se hagan para N^* dado $\Delta\sigma^*$ y para $\Delta\sigma^*$ dado N^* .

6.4.1.2. Consideraciones estadísticas de valores extremos. Consideraciones adicionales, tales como propiedades límites o asintóticas, y el principio del eslabón más débil, que establece que el tiempo de vida de un sistema en serie de n elementos es

el tiempo de vida de su elemento con vida mínima, conducen a las distribuciones de Weibull o Gumbel para h^* cuando n es grande, y finalmente a la familia siguiente de curvas S-N de Weibull:

$$p = 1 - \exp \left[- \left(\frac{(N^* - B^*)(\Delta\sigma^* - C^*) - \lambda^*}{\delta^*} \right)^{\beta^*} \right], \quad (73)$$

siendo $N^* = \log(N/N_0)$, o al modelo de Gumbel asociado

$$p = 1 - \exp \left[- \exp \left(\frac{(N^* - B^*)(\Delta\sigma^* - C^*) - \lambda^*}{\delta^*} \right) \right]. \quad (74)$$

En resumen, la condición de compatibilidad (70) junto con el principio del eslabón más débil y algunas consideraciones estadísticas y físicas nos permiten obtener la forma funcional de los modelos de las curvas S-N dados en (73) y (74). Nótese que para deducir estos modelos no se han utilizado hipótesis arbitrarias.

6.4.2. Modelo S-N para nivel de tensiones variable

El procedimiento habitual para caracterizar un material a fatiga consiste en ensayar muestras a σ_m^* constante o σ_M^* constante. Esto permite ajustar dos modelos de la forma (73) o (74) para los correspondientes valores de referencia constantes de σ_m^* y σ_M^* .

Para ilustrar mejor estas ideas, en la figura 23 se muestran las curvas percentiles que resultan de cuatro combinaciones de ensayos, dos para σ_m^* constante (líneas a trazos), y dos para σ_M^* constante (líneas continuas) destacándose una condición de compatibilidad importante: las cuatro familias de curvas deben intersectarse, dos a dos, según líneas horizontales (véase la figura), puesto que las correspondientes funciones de densidad deben ser coincidentes. Esto es cierto porque a cada intersección común de valores de $\Delta\sigma^*$ le corresponde un ensayo que puede entenderse como un ensayo para σ_M^* fijo o como un ensayo para σ_m^* fijo. Como se verá, esta condición de compatibilidad va a jugar un papel relevante en la deducción del modelo general de fatiga para niveles y rangos de tensión arbitrarios.

6.4.2.1. Condición de compatibilidad. Curvas percentiles. Para establecer la condición de compatibilidad, resulta conveniente reemplazar el conjunto $\{\Delta\sigma^*, \sigma_\ell^*\}$ de la ecuación (71) por el conjunto $\{\sigma_m^*, \sigma_M^*\}$, que es equivalente. Tras el reemplazo, de (71) se obtiene

$$p = h^* \left(\frac{(N^* - B^*)(\sigma_m^* - \sigma_M^* - C^*) - \lambda^*}{\delta^*} \right), \quad (75)$$

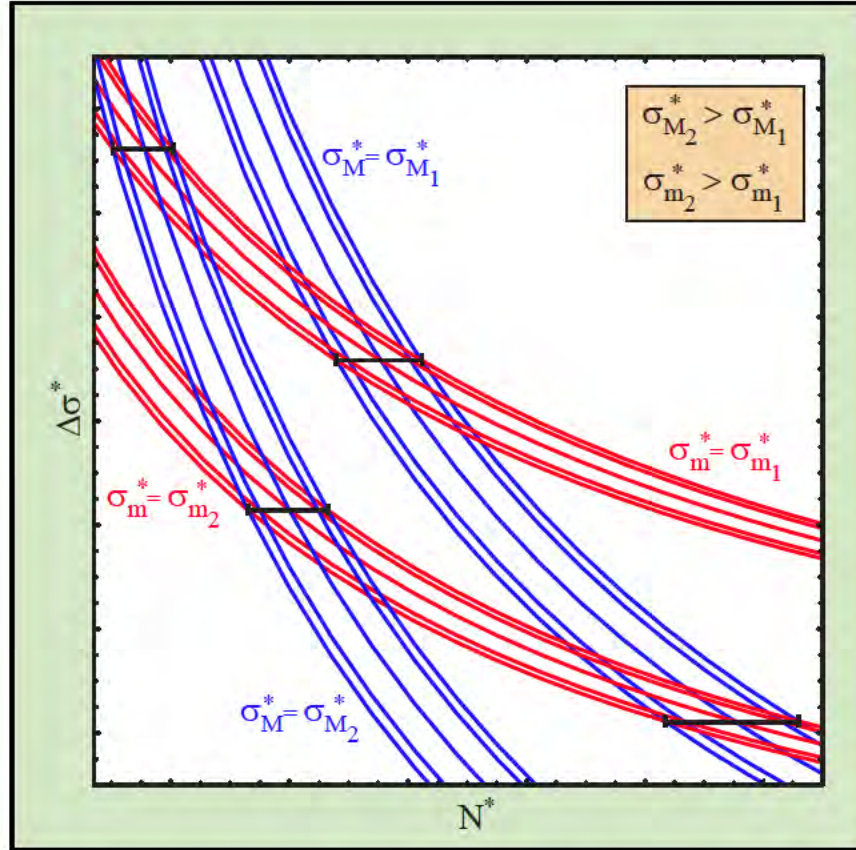


Figura 23: Representación esquemática de las curvas percentiles S-N $\{0.01, 0.05, 0.5, 0.95, 0.99\}$ para σ_M^* constante ($\sigma_{M_1}^* < \sigma_{M_2}^*$ líneas continuas) o σ_m^* constante ($\sigma_{m_1}^* < \sigma_{m_2}^*$ líneas de trazos), ilustrando la condición de compatibilidad.

donde σ_ℓ^* será ahora σ_m^* o σ_M^* , dependiendo de que sea σ_m^* o σ_M^* la tensión que se mantiene constante.

En consecuencia, la condición de compatibilidad, independientemente de cuál sea la función de distribución h^* , viene dada por la relación

$$h^* \left(\frac{(N^* - B_m^*(\sigma_m^*))(\sigma_m^* - \sigma_M^* - C_m^*(\sigma_m^*)) - \lambda_m^*(\sigma_m^*)}{\delta_m^*(\sigma_m^*)} \right) = h^* \left(\frac{(N^* - B_M^*(\sigma_M^*))(\sigma_m^* - \sigma_M^* - C_M^*(\sigma_M^*)) - \lambda_M^*(\sigma_M^*)}{\delta_M^*(\sigma_M^*)} \right). \quad (76)$$

Los parámetros B^* , C^* , λ^* y δ^* son ahora funciones de σ_m^* o σ_M^* , según se indica mediante los correspondientes subíndices. La ecuación (76) es una ecuación funcional, cuya solución conduce a (véase Castillo et al. [188])

$$p = h^*(r^*(\sigma_m^*, \sigma_M^*) + s^*(\sigma_m^*, \sigma_M^*)N^*), \quad (77)$$

donde

$$r^*(\sigma_m^*, \sigma_M^*) = C_0^* + C_1^*\sigma_m^* + C_2^*\sigma_M^* + C_3^*\sigma_m^*\sigma_M^*, \quad (78)$$

$$s^*(\sigma_m^*, \sigma_M^*) = C_4^* + C_5^*\sigma_m^* + C_6^*\sigma_M^* + C_7^*\sigma_m^*\sigma_M^*, \quad (79)$$

C_0^* a C_7^* son constantes, y $N^* = \log(N/N_0)$.

6.4.2.2. Consideraciones estadísticas de valores extremos. Finalmente, teniendo en cuenta el principio del eslabón más débil y las distribuciones de extremos de Weibull y Gumbel, se obtienen los dos modelos siguientes:

$$\boxed{\text{Modelo 1 : } p = 1 - \exp \left[- (r^*(\sigma_m^*, \sigma_M^*) + s^*(\sigma_m^*, \sigma_M^*)N^*)^\beta \right]} \quad (80)$$

y

$$\boxed{\text{Modelo 2 : } p = 1 - \exp \{ - \exp [r^*(\sigma_m^*, \sigma_M^*) + s^*(\sigma_m^*, \sigma_M^*)N^*] \}}. \quad (81)$$

Obsérvese que los modelos (80) y (81) permiten predecir estadísticamente el comportamiento a fatiga para cualquier combinación de σ_m^* y σ_M^* .

Una conclusión importante, resultante del razonamiento anterior, es que la función trilineal², que se obtiene de sustituir (78) y (79) en (80) y (81), no ha sido elegida arbitrariamente, sino que surge como resultado de la condición de compatibilidad. Más importante aún es que la selección de una función que no sea trilineal conducirá inevitablemente a una situación de incompatibilidad.

Estos modelos se han publicado en Castillo y Fernández-Canteli [72] y Castillo et al. [189], habiendo sido validados experimentalmente en el EMPA (Dübendorf (Switzerland) by Koller et al. [237], y se han extendido para el caso de distribuciones exponenciales en Balakrishnan et al. [50].

6.4.3. Curvas de crecimiento de grieta para σ_m^* y σ_M^* constantes

El objetivo de esta sección es obtener un modelo

$$a^* = h^*(a_0^*, N^*, Q^*)$$

²Lineal en las tres variables N^* , σ_m^* y σ_M^* .

que proporcione la evolución del tamaño de grieta a^* en función del tamaño inicial de grieta a_0^* y del número de ciclos N^* para un factor de carga adimensional Q^* dado, suponiendo que el proceso es determinista y que los parámetros que lo determinan permanecen constantes durante todo el ensayo (véase Castillo et al. [187]).

De esta función $h^*(a_0^*, N^*, Q^*)$ conocemos alguna información. Por ejemplo, sabemos que tiene que ser creciente en a_0^* , en N^* y en Q^* , puesto que el tamaño de grieta a^* será mayor para N^* y Q^* fijos, si comenzamos con un tamaño de grieta inicial a_0^* mayor, será también creciente si aplicamos un mayor número de ciclos N^* para un tamaño inicial a_0^* y una carga Q^* dados, y, finalmente, ocurrirá lo mismo si aplicamos una carga mayor Q^* para a_0^* y N^* dados.

6.4.3.1. Compatibilidad para cualquier daño inicial. Para obtener la forma de la función $a^* = h^*(a_0^*, N^*, Q^*)$, se aplica una ecuación funcional, que se formula considerando la siguiente condición de consistencia a satisfacer por esta función:

Si un elemento con tamaño inicial de grieta a_0^* se somete a $N^* = N_1^* + N_2^*$ ciclos, el tamaño final de grieta, según la definición de la función $h^*(\cdot)$, será $a^* = h^*(a_0^*, N_1^* + N_2^*, Q^*)$.

Sin embargo, el valor a^* puede obtenerse también en dos etapas:

1. Aplicando N_1^* ciclos al elemento, con lo que el tamaño de grieta aumenta hasta $h^*(a_0^*, N_1^*, Q^*)$,
2. Aplicándole otros N_2^* ciclos a este nuevo tamaño inicial, de modo que usando la misma función $h^*(\cdot)$, el tamaño final será

$$h^*(h^*(a_0^*, N_1^*), N_2^*, Q^*).$$

Puesto que ambos valores tienen que coincidir, independientemente de los valores de N_1^* y N_2^* , se debe satisfacer la ecuación funcional siguiente:

$$a^* = h^*(a_0^*, N_1^* + N_2^*, Q^*) = h^*(h^*(a_0^*, N_1^*), N_2^*, Q^*). \quad (82)$$

Esta expresión es la conocida ecuación de traslación, cuya solución general es

$$a^* = h^*(a_0^*, N^*, Q^*) = \phi(\phi^{-1}(a_0^*) + N^*, Q^*); \quad \forall a_0^*, N^*,$$

en la que $\phi(\cdot, \cdot)$ es una función arbitraria pero invertible con respecto a su primer argumento.

Esta solución, que tiene un gran interés práctico, demuestra que no se puede elegir una función arbitraria de tres argumentos $h^*(\cdot, \cdot, \cdot)$ para representar el problema del crecimiento de grieta, sino que el margen de libertad se reduce a una función de dos argumentos $\phi(\cdot, \cdot)$.

Esta expresión es la conocida ecuación de traslación (véase Aczél [1, 4], Castillo y Ruiz-Cobo [96] y Castillo et al. [166]), cuya solución general, ya deducida en la etapa 4, es

$$a^* = h^*(a_0^*, N^*, Q^*) = \phi(\phi^{-1}(a_0^*, Q^*) + N^*, Q^*); \quad \forall a_0^*, N^*, \quad (83)$$

en la que $\phi(\cdot, \cdot)$ es una función arbitraria pero invertible con respecto a su primer argumento. Esta solución, que tiene un gran interés práctico, demuestra que no se puede elegir una función arbitraria de tres argumentos $h^*(\cdot, \cdot, \cdot)$ para representar el problema del crecimiento de grieta, sino que el margen de libertad se reduce a una función de dos argumentos $\phi(\cdot, \cdot)$.

Por otro lado, de (83) se obtiene N^* en función de los tamaños de grieta a^* y a_0^* , mediante

$$N^* = \phi^{-1}(a^*, Q^*) - \phi^{-1}(a_0^*, Q^*). \quad (84)$$

Para obtener la forma analítica de las curvas de crecimiento de grieta para un par de tensiones $T^* = (\sigma_m^*, \sigma_M^*)$, se considera otra ecuación funcional diferente, que representa una condición de compatibilidad que también deben satisfacer estas curvas (véase Castillo et al. [187]).

6.4.3.2. Condición de compatibilidad de $N^*|a^*$ y $a^*|N^*$. Para obtener la condición de compatibilidad se utilizan dos variables aleatorias diferentes involucradas en el problema de crecimiento de grieta, el tamaño de grieta, $a^*|N^*$, dado el número de ciclos, y el número de ciclos, $N^*|a^*$, dado el tamaño de grieta. La idea principal de esta condición de compatibilidad se basa en el hecho de que las funciones de densidad de estas dos variables no son independientes, sino relacionadas, tal como se muestra en la figura 24, en la que las áreas sombreadas deben coincidir.

Esta condición es muy similar a la ilustrada en la figura 22, pero hay una diferencia importante: en el caso de la figura 22, se trata de dos leyes de mínimo, una para $N^*|\Delta\sigma^*$ y otra para $\Delta\sigma^*|N^*$, que están asociadas al principio del eslabón más débil, mientras que aquí se trata de una ley de mínimo $N^*|a^*$, y una de máximo $a^*|N^*$, puesto que a^* es el mayor tamaño de grieta existente en la pieza considerada. Por ello, se debe considerar una ley de máximos en vez de una de mínimos para a^* , y la condición de compatibilidad correspondiente se puede escribir como

$$p = q_{max} \left(\frac{a^* - \mu_1^*(N^*)}{\sigma_1^*(N^*)} \right) = 1 - q_{min} \left(\frac{N^* - \mu_2^*(a^*)}{\sigma_2^*(a^*)} \right), \quad (85)$$

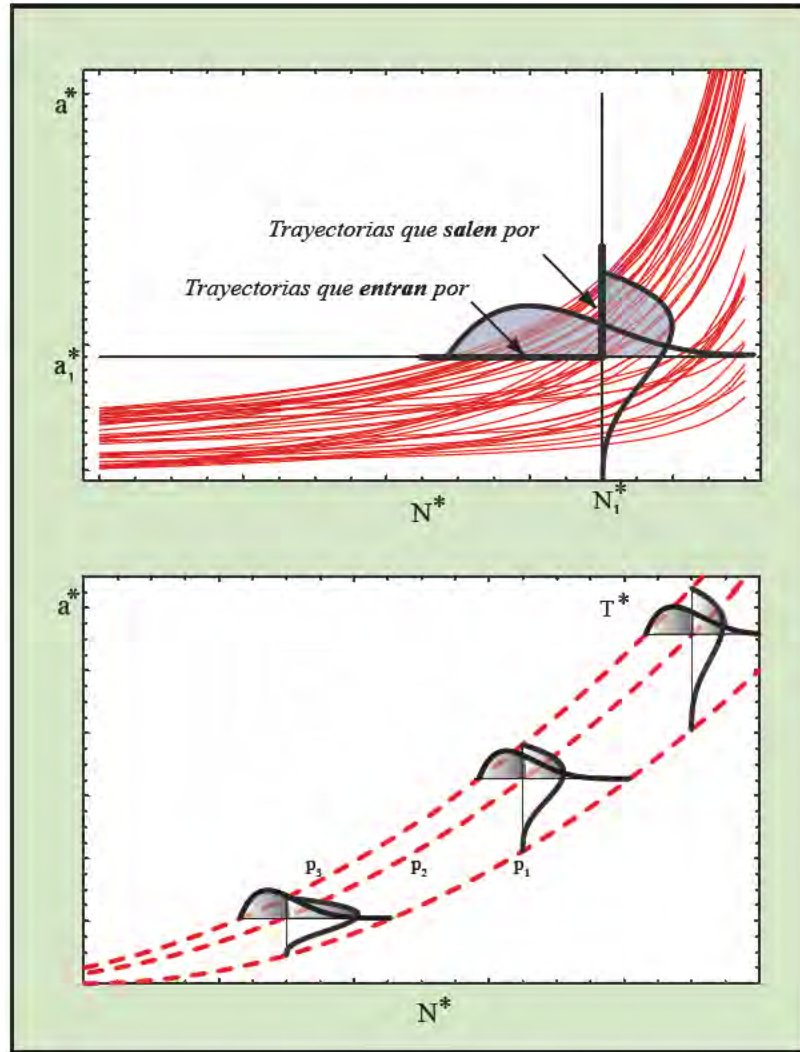


Figura 24: Ilustración de la condición de compatibilidad mostrando las áreas (probabilidades) de las dos funciones de densidad, que deben ser iguales.

donde q_{max} y q_{min} son distribuciones para máximos y mínimos, respectivamente. Teniendo en cuenta que estas distribuciones deben satisfacer la condición (ver Castillo [62] y Castillo et al. [165])

$$q_{max}(x) = 1 - q_{min}(-x), \quad (86)$$

de (85) y (86) se obtiene

$$q_{max} \left(\frac{a^* - \mu_1^*(N^*)}{\sigma_1^*(N^*)} \right) = q_{max} \left(\frac{\mu_2^*(a^*) - N^*}{\sigma_2^*(a^*)} \right), \quad (87)$$

que implica

$$\frac{a^* - \mu_1^*(N^*)}{\sigma_1^*(N^*)} = \frac{\mu_2^*(a^*) - N^*}{\sigma_2^*(a^*)}, \quad (88)$$

lo que representa una ecuación funcional, cuya solución conduce a dos posibles modelos:

$$\textbf{Modelo 1 : } p = q_{max} \left(\frac{a^* + \gamma^* N^* - \eta^*}{\rho^*} \right), \quad (89)$$

que muestra curvas de crecimiento de grieta dadas por *familias de rectas*, donde γ^* , η^* y ρ^* son parámetros, y

$$\textbf{Modelo 2 : } p = q_{max} \left(\frac{(N^* - M^*)(a^* - a_{th}^*) - \eta^*}{\rho^*} \right), \quad (90)$$

que muestra curvas de crecimiento de grieta dadas por *familias de hipérbolas*, donde M^* , a_{th}^* , η^* y ρ^* son parámetros.

6.4.3.3. Condiciones límites estadísticas. El principio del eslabón más débil justifica una distribución *minimal* de extremos de Weibull o de Gumbel. Razones similares justifican aquí una distribución *maximal* de extremos de Weibull o de Gumbel, puesto que las grietas que dan lugar a la rotura son las grietas de mayor tamaño. Por ello, los modelos resultantes son (89) y (90), donde

$$q_{max}(x) = \exp \left[-(-x)^\beta \right] \quad (91)$$

o

$$q_{max}(x) = \exp \left[-\exp(-x) \right], \quad (92)$$

que hay que sustituir en (89) y (90). Dos de ellos son el **Modelo 1** :

$$F_{a^*|N^*,Q^*}(a^*, N^*) = \exp \left[- \left(- \frac{a^* - \gamma^* N^* - \eta^*}{\rho^*} \right)^{\beta^*} \right], \quad (93)$$

y el **Modelo 2** :

$$F_{a^*|N^*,Q^*}(a^*, N^*) = \exp \left[- \left(- \frac{(M^* - N^*)(a^* - a_{th}^*) - \eta^*}{\rho^*} \right)^{\beta^*} \right], \quad (94)$$

donde los parámetros γ^* , β^* , η^* , ρ^* , M^* y a_{th}^* dependen del factor de carga Q^* .

De (93) resulta

$$N^* = Ba^* - Ba_0^*, \quad (95)$$

y utilizando (94) se llega a

$$N^* = \frac{C}{a_0^* - a_{th}} - \frac{C}{a^* - a_{th}}, \quad (96)$$

donde B y C son constantes. Finalmente, comparando (95) y (96) con (84) se obtienen inmediatamente las funciones $\phi(\cdot)$ para estos dos modelos, que resultan ser.

$$\phi(a^*) = a^*/B \quad (97)$$

$$\phi(a^*) = -C/(a^* - a_{th}^*), \quad (98)$$

donde B , C y a_{th}^* son constantes.

6.4.4. Densidades del daño independientes de la historia de cargas

Además de la condición de compatibilidad anterior, puede establecerse otra condición de independencia de la función de densidad del daño acumulado con respecto a la historia de cargas, es decir, que idénticas funciones de densidad del tamaño de grieta puedan alcanzarse mediante diferentes historias de carga. Esta hipótesis es muy conveniente para acumulación de daño (véase Castillo y Fernández-Canteli [71]) y se ilustra en la figura 25, en la que se ven ejemplos de densidades idénticas para tres historias de carga.

En Castillo et al. [178] se discuten varias medidas de daño y se analiza su conveniencia.

6.4.5. Compatibilidad de los modelos S-N y de crecimiento de grieta

Los modelos S-N y los de crecimiento de grieta mencionados no son independientes, pudiéndose pasar de uno a otro y viceversa. Esta idea la hemos desarrollado en varios trabajos. El pionero fue Castillo et al. [110] en 1984 y luego se han extendido, bastantes años después, en Castillo et al. [201].

6.4.6. Modelos E-N

Los modelos E-N (deformación-vida a fatiga) se han desarrollado tradicionalmente mediante la descomposición de las deformaciones en sus componentes elástica y plástica, lo cual supone una gran complicación y requiere hipótesis adicionales, que son realmente innecesarias. Nosotros en Castillo y Fernández-Canteli [71] y con un grupo portugués en De Jesus et al. [206] hemos extendido los modelos S-N a este

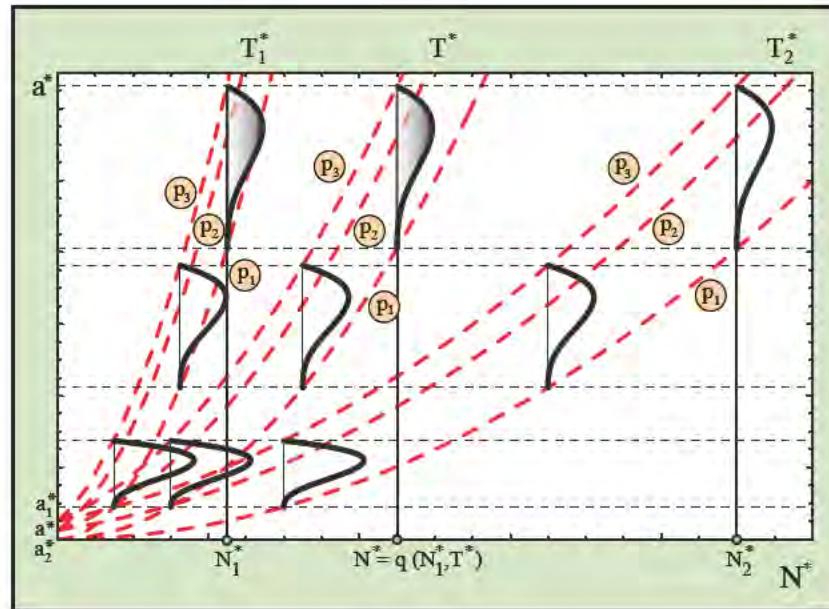


Figura 25: Ilustración de la condición de compatibilidad basada en la función de densidad de a^* para tres valores diferentes de T^* .

caso, mostrando que son mucho más simples y eficientes, habiéndolos aplicado a la reparación de puentes metálicos antiguos en Portugal.

La figura 27 muestra el modelo usado descomponiendo los dos tramos rectilíneos y el modelo que hemos propuesto.

6.4.7. Efecto de la longitud en la vida a fatiga de elementos longitudinales

Uno de los problemas más interesantes en el estudio de la fatiga de elementos longitudinales es el efecto de escala, es decir, la influencia de la longitud en la resistencia a fatiga. Hay que tener en cuenta que, debido al principio del eslabón más débil, la rotura de esos elementos tiene lugar por la zona más débil. Por ello, un aumento de la longitud implica un aumento de la probabilidad de fallo. El problema consiste en que las probetas utilizadas en los ensayos de laboratorio son mucho más pequeñas que los elementos estructurales utilizados en la realidad, lo que exige una extrapolación, y en consecuencia debe tenerse un modelo realista para el estudio del efecto de la longitud. En Castillo et al. [173] se demuestra que la longitud tiene influencia sólo en los parámetros de escala y se dan algunos contrastes de independencia. En Castillo et al. [117] se presenta un modelo de Poisson para estudiar esta dependencia aleatoria. En

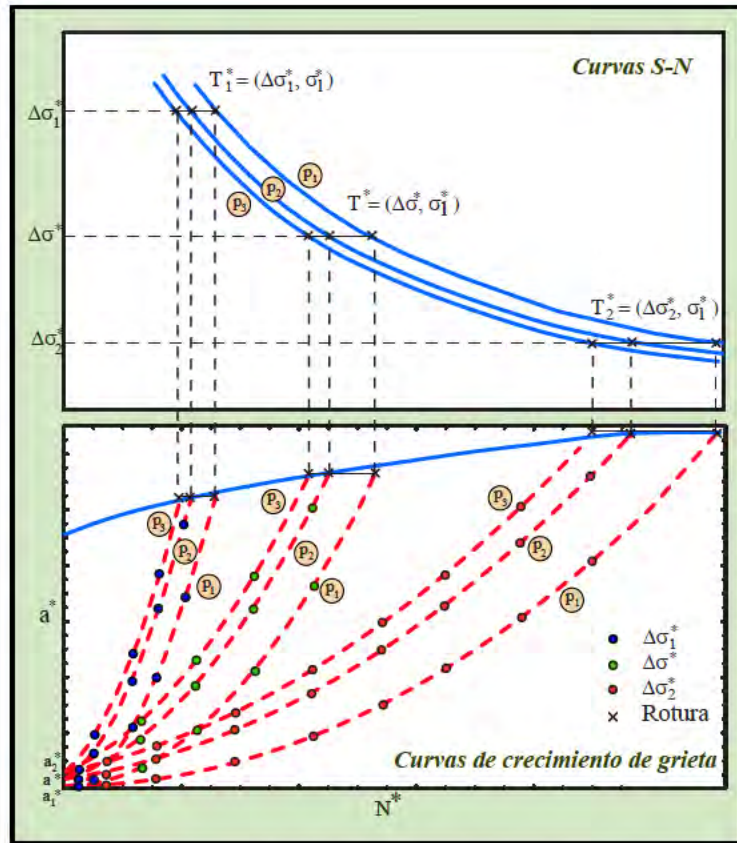


Figura 26: Ilustración de la condición de compatibilidad que resulta de la coincidencia de los percentiles de las curvas S-N y de las curvas de crecimiento de grieta.

Castillo y Fernández-Canteli [70] se utiliza una ecuación funcional para obtener un modelo de dependencia, y en Castillo et al. [108, 113] se utiliza un modelo de series temporales para analizar ésta y se aplica al caso de puentes atirantados. También tiene mucho interés estudiar el efecto de tensiones variables, ya que es el que más aparece en la práctica. En Castillo et al. [105] se analiza la combinación de las tensiones variables y el efecto de la longitud en la vida a fatiga. Otro caso de gran interés es el caso de los tendones, que incorporan multitud de alambres y funcionan como grupos de elementos resistentes individuales. El caso de fatiga de tendones lo hemos tratado en Castillo et al. [104], Castillo et al. [106], Castillo et al. [111], Castillo et al. [106] y Castillo et al. [109].

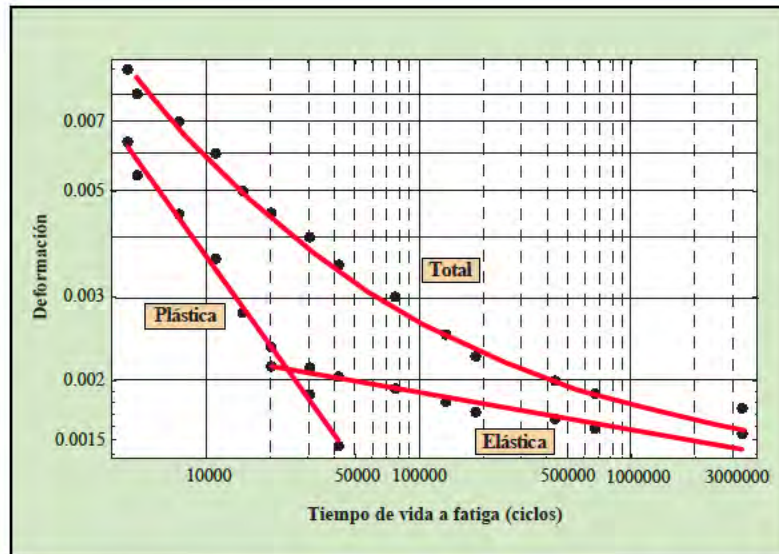


Figura 27: Ilustración del modelo basado en descomponer las deformaciones en sus componentes elástica y plástica, junto con el modelo conjunto.

7. Álgebra y aplicaciones

Mis primeros conocimientos de álgebra nacieron cuando estudiaba el curso pre-universitario en el colegio San José de los H.H. Maristas de Madrid. Allí me introdujeron en las primeras estructuras algebraicas. Un año más tarde el Profesor Díaz Hernando en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, nos daba un curso magnífico de Álgebra, en el que tuvo la habilidad de atraer mi atención y de que fuera capaz de ir descubriendo casi todo lo que él iba a decir con posterioridad, habilidad nada común por parte de un profesor. Allí se gestó mi preferencia por el Álgebra frente al Análisis, quedando claro el papel y la responsabilidad de los profesores, que pueden influir decisivamente en la vocación de sus alumnos y discípulos. Sin embargo, durante muchos años, sólo impartí durante un curso la asignatura “Álgebra Lineal” en la Escuela de Santander, pues gané una cátedra de Matemáticas I, pero en un plazo breve obtuve la Cátedra de Matemáticas III, que entonces era la que más me interesaba. Al cabo de los años volví a esta asignatura pero con un enfoque muy diferente.

7.1. Los algoritmos de Jubete

Algunos años después se produce otro hecho relevante en mi vida profesional, que describo a continuación. Recibo la visita de Francisco Jubete, un ingeniero de caminos que reside en Santander y que me trae un libro escrito por él (Jubete [233]), a dos colores, cuyo costo de impresión lo había financiado personalmente y que ascendía a dos millones de pesetas, es decir, muy alto para la época en que fue escrito. El libro, que había distribuido por varias universidades españolas esperando comentarios y sugerencias, era un jeroglífico. Recuerdo que algunas páginas sólo tenían expresiones matemáticas sin ningún texto y era de muy difícil lectura. En uno de esos largos puentes decidí meterme con el dichoso libro y tratar de ver qué contenía. Para ello, apuntaba en unas hojas el significado de todos los símbolos, a modo de diccionario, pues era como leer algo en chino sin conocer ese idioma, por lo que tenía que recurrir a dichas hojas muy frecuentemente para poder entender algo de lo que leía. Tras un gran esfuerzo, empecé a darme cuenta de que lo que allí había era muy valioso y de que merecía realmente la pena dedicarle algo de tiempo. Llamé a Francisco y le comuniqué que podría estar interesado en echarle una mano, aunque todavía en aquél momento no entendía muy bien la totalidad de las contribuciones de su libro. Ello, dio lugar a varios encuentros y al trabajo conjunto, durante el cual aprendí mucho de Francisco, que me maravillaba cuando resolvía problemas de programación lineal de cierta envergadura no sólo a mano sino también muy rápidamente.

7.1.1. Algoritmo para obtener los subespacios ortogonal y complementario de uno dado

Una de las primeras contribuciones de Jubete consiste esencialmente en un sencillo algoritmo que permite obtener los subespacios ortogonal y complementario de uno dado. Aparte de la importancia que tiene el tema de la ortogonalidad, lo interesante de este algoritmo es que permite resolver la inmensa mayoría de los problemas clásicos de álgebra lineal. En eso ha consistido nuestro trabajo conjunto, en descubrir todas estas posibilidades (véase Castillo et al. [150]) que permiten obtener la inversa y el determinante de una matriz, calcular su rango y determinar qué combinaciones lineales hay entre las filas de una matriz, obtener una base, actualizar inversas y determinantes cuando se cambian filas y columnas en un solo paso (Castillo et al. [136]), estudiar la compatibilidad de sistemas de ecuaciones lineales incluso con términos simbólicos, resolverlas obteniendo la estructura algebraica de todas las soluciones, resolver todos los subsistemas de ecuaciones de un sistema dado con muy pocos cálculos adicionales, etc.

Una ilustración de este algoritmo se da en la figura 28, en la que se aplica éste para invertir la matriz A . Para ello se van introduciendo en cada iteración las filas de la matriz y se realiza una operación de pivotaje, análoga a la eliminación de Gauss

e igual de compleja. Las matrices que resultan en cada iteración son las inversas de la matriz resultante de ir reemplazando en la matriz identidad sus filas por las de la nueva matriz. Además en cada iteración se obtienen las bases de los subespacios ortogonal y complementario, resultando en la iteración final la matriz inversa \mathbf{A}^{-1} , a partir de la cual pueden obtenerse bases de los subespacios ortogonal y complementario de los espacios generados por cualquier subconjunto de vectores filas de \mathbf{A} . El determinante de la matriz se obtiene por producto de los pivotes y un posible cambio de signos debido al orden del pivotaje. En caso de no poder pivotar en alguna iteración se descubre no sólo qué filas son combinación lineal de las anteriores, sino también qué coeficientes hay que usar para obtenerla, lo que permite obtener el rango de la matriz (igual al número de pivotajes posibles). En el ejemplo, también se ve que el método obtiene en este caso las inversas de las matrices parciales indicadas, sin necesidad de cálculos adicionales.

La figura 29 muestra cómo puede actualizarse la inversa de una matriz cuando se altera una fila, en un único paso. Para ello se introduce la nueva fila, se pivota con la misma columna y se obtiene la nueva inversa. En caso de no poder pivotar, la nueva matriz es singular. El determinante se actualiza multiplicando el anterior por el nuevo pivote.

Finalmente, la figura 30 muestra cómo a partir de los datos de la iteración 6 pueden resolverse todos los subsistemas de ecuaciones resultantes del primer sistema (superior).

7.1.2. Algoritmo para obtener el cono dual de uno dado

Sin embargo, Jubete da también otro algoritmo mucho más potente, que él bautiza como algoritmo gamma (Castillo y Jubete [87]), que extiende el anterior para obtener el cono dual de un cono dado en su representación mínima (como suma de un espacio vectorial y un cono agudo). Este algoritmo es similar al de doble descripción, pero con algunas diferencias. Puesto que el cono dual de un subespacio es su subespacio ortogonal, este algoritmo permite resolver todos los problemas del anterior y otros muchos.

La figura 31 ilustra el método, en el que en cada iteración se obtiene el cono dual del cono generado por los vectores columna que se van introduciendo junto con los anteriores. Los vectores denotados por \mathbf{v}_j^i son los generadores de la componente de espacio vectorial del cono dual, y los denotados por \mathbf{w}_j^i son los generadores de la componente del cono agudo. Los conjuntos I^j dan los índices de los vectores \mathbf{a}_i que son ortogonales a los correspondientes \mathbf{v}_j^j o \mathbf{w}_j^j . Es interesante señalar que el algoritmo suministra siempre representaciones mínimas, es decir, una base y un conjunto de aristas, respectivamente. Esta propiedad permite obtener la representación mínima de un cono obteniendo el dual del dual muy fácilmente una vez conocido éste, como

Iteración 1						Iteración 2					
\mathbf{a}_1	\mathbf{v}_1^1	\mathbf{v}_2^1	\mathbf{v}_3^1	\mathbf{v}_4^1	\mathbf{v}_5^1	\mathbf{a}_2	\mathbf{w}_1^2	\mathbf{v}_1^2	\mathbf{v}_2^2	\mathbf{v}_3^2	\mathbf{v}_4^2
-1	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	-1	0
-1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
-1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
\mathbf{t}^1	-1	-1	0	-1	0	\mathbf{t}^2	0	1	0	1	0
Iteración 3						Iteración 4					
\mathbf{a}_3	\mathbf{w}_1^3	\mathbf{w}_2^3	\mathbf{v}_1^3	\mathbf{v}_2^3	\mathbf{v}_3^3	\mathbf{a}_4	\mathbf{w}_1^4	\mathbf{w}_2^4	\mathbf{w}_3^4	\mathbf{v}_1^4	\mathbf{v}_2^4
0	-1	-1	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0
0	0	1	0	-1	0	2	0	1	0	-1	0
-1	0	0	1	0	0	1	0	0	-1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
\mathbf{t}^3	0	0	-1	1	1	\mathbf{t}^4	1	3	-1	-1	1
Iteración 5						Iteración 6					
\mathbf{a}_5	\mathbf{w}_1^5	\mathbf{w}_2^5	\mathbf{w}_3^5	\mathbf{w}_4^5	\mathbf{v}_1^5		\mathbf{w}_1^6	\mathbf{w}_2^6	\mathbf{w}_3^6	\mathbf{w}_4^6	\mathbf{w}_5^6
1	-1	-1	0	0	0		-1	-1	0	0	0
1	-1	-2	1	1	-1		-2	-2	1	1	-1
0	1	3	-2	-1	2		3	3	-2	-1	2
1	1	3	-1	-1	1		2	3	-1	-1	1
1	0	0	0	0	1		1	0	0	0	1
\mathbf{t}^5	-1	0	0	0	1		1	-1	1	1	1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c|c|c} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^5 p_i = -1 \times 1 \times -1 \times -1 \times 1 = -1.$$

Figura 28: Ilustración de cómo se invierte una matriz y se calcula el determinante. Las filas de la matriz a invertir aparecen en la primera columna de las respectivas iteraciones. La matriz inversa aparece en la iteración 6. El determinante se obtiene en este caso multiplicando los pivotes.

se muestra en la parte inferior de la figura 31, que indica que los vectores \mathbf{a}_3 y \mathbf{a}_5 son interiores al cono, y por tanto, puede prescindirse de ellos como generadores.

Finalmente indicar que el algoritmo gamma permite identificar todas las hipercaras de un polígono de cualquier dimensión. Un ejemplo se da en la figura 33, en la que

Iteración 6						Iteración 7				
\mathbf{a}_6	\mathbf{w}_1^6	\mathbf{w}_2^6	\mathbf{w}_3^6	\mathbf{w}_4^6	\mathbf{w}_5^6	\mathbf{w}_1	\mathbf{w}_2	\mathbf{w}_3	\mathbf{w}_4	\mathbf{w}_5
-1	-1	-1	0	0	0	-1	-1	0	0	0
1	-2	-2	1	1	-1	-3	-1	0	1	-2
0	3	3	-2	-1	2	4	2	-1	-1	3
0	2	3	-1	-1	1	3	2	0	-1	2
2	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
\mathbf{t}^6	1	-1	1	1	1					

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^{*-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 29: Ilustración de cómo actualiza la inversa tras cambiar la cuarta fila. Se introduce la fila nueva en la iteración 6 y se pivota con la columna cuarta para obtener la nueva inversa en la iteración 7.

se muestra el polítopo generado por los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_9$ de la figura 31, cuyas caras aparecen en el conjunto I que aparece bajo los generadores del cono dual.

De los trabajos conjuntos saldrá una versión modificada que da también los conos complementarios y muchas aplicaciones, tales como la compatibilidad de un sistema lineal de inecuaciones, obtener todas las soluciones de un sistema lineal de inecuaciones (Castillo et al. [174]), resolver cualquier subsistema de inecuaciones de uno dado con pocos cálculos adicionales (Castillo et al. [159]), tal como se muestra en la figura 32, en la que se ilustra cómo obtener las soluciones de todos los posibles subsistemas de inecuaciones a partir de las diferentes tablas de cada iteración.

Después Jubete publicaría otro libro sobre el polítopo, su estructura geométrica y volumen exacto (Jubete [234]) y juntos extenderíamos sus resultados (Jubete y Castillo [236]).

Iteración 6				
w_1^6	w_2^6	w_3^6	w_4^6	w_5^6
-1	-1	0	0	0
-2	-2	1	1	-1
3	3	-2	-1	2
2	3	-1	-1	1
1	0	0	0	1

SISTEMA	SOLUCIÓN GENERAL
$\begin{array}{rcl} -x_1 & -x_2 & -x_4 = 0 \\ & x_2 & +x_4 = 0 \\ & & -x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 0 \\ x_1 + x_2 & & +x_4 = -1 \end{array}$	NO TIENE SOLUCIÓN
$\begin{array}{rcl} -x_1 & -x_2 & -x_4 = 0 \\ & x_2 & +x_4 = 0 \\ & & -x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{array}{rcl} -x_1 & -x_2 & -x_4 = 0 \\ & & -x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 0 \end{array}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\begin{array}{rcl} & x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 & & = -1 \end{array}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \rho_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$x_1 + x_2 + x_4 = -1$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \rho_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \rho_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Figura 30: Ilustración de cómo se resuelven subsistemas de ecuaciones a partir de la tabla de la iteración 6.

7.2. Álgebra tensorial

Una contribución interesante corresponde al Profesor Juan Ramón Ruiz Tolosa, q.e.p.d. al que convencí tras mucho trabajo de que publicara sus conocimientos y

Iteración 1					Iteración 2					Iteración 3					Iteración 4				
a_1	v_1^1	v_2^1	v_3^1	v_4^1	a_2	v_1^2	v_2^2	v_3^2	w_1^2	a_3	w_1^3	v_1^3	v_2^3	w_2^3	a_4	w_1^4	w_2^4	v_1^4	w_3^4
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	-1	-2	-3	1	2	1	-2	-1	1
0	0	1	0	0	2	0	1	0	0	1	0	1	0	0	2	-1	1	-1	0
0	0	0	1	0	3	0	0	1	0	2	0	0	1	0	4	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	-1
t^1	0	0	0	1	t^2	1	2	3	-1	t^3	-1	-1	-1	0	t^4	0	-2	0	1
I^1	1	1	1		I^2	1	1	1		I^3	1	1	1	2	I^4	1	1	1	2
													2	2	3				3
																			4
																			4

Iteración 5					Iteración 6					Iteración 7				
a_5	w_1^5	w_2^5	v_1^5	w_3^5	a_6	w_1^6	w_2^6	w_3^6	w_4^6	a_7	w_1^7	w_2^7	w_3^7	w_4^7
1	1	-2	-1	0	0	1	-1	-1	1	0	1	-1	1	0
1	-1	1	-1	1	1	-1	2	-1	2	2	-1	2	2	-2
1	0	0	1	0	2	0	-1	1	-1	1	0	-1	-1	1
1	0	0	0	-2	1	0	0	0	-2	1	0	0	-2	0
t^5	0	-1	-1	-1	t^6	-1	0	1	-2	t^7	-2	3	1	-3
I^5	1	1	1	2	I^6	1	1	1	2	I^7	1	1	2	1
	3	2	2	4		3	2	2	4		3	2	4	3
	4		3			4	5	3	5		4	5	5	4
	5		4			5	6	4			5	6		6

Iteración 8									Iteración 9								
a_8	w_1^8	w_2^8	w_3^8	w_4^8	w_5^8	w_6^8	w_7^8	w_8^8	a_9	w_1^9	w_2^9	w_3^9	w_4^9	w_5^9	w_6^9	w_7^9	w_8^9
3	1	0	-1	1	-1	-2	3	0	3	0	-1	-1	-2	0	4	-2	
2	-1	-2	0	1	0	1	3	1	0	-2	0	0	1	1	-6	3	
0	0	1	1	-2	0	1	-2	0	0	1	1	0	1	0	1	-6	
1	0	0	-2	0	0	-3	-4	-2	1	0	-2	0	-3	-2	0	0	
t^8	1	-4	-5	5	-3	-7	11	0	t^9	0	-5	-9	-9	-2	12	-6	
I^8	1	1	2	1	1	2	4	2	I^9	1	2	1	2	2	1	1	
	3	3	4	5	6	6	5	4		3	4	6	6	4	3	7	
	4	4	6	7	7	7	7	7		4	6	7	7	7	4	8	
	5	6						8		6				8	8		
										9							

Cono Dual									Cono inicial (Bidual)								
w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
0	-1	-1	-2	0	-2	4	0		0	1	1	2	1	0	0	3	3
-2	0	0	1	1	3	0	0		0	2	1	2	1	1	2	2	0
1	1	0	1	0	-6	1	-1		0	3	2	4	1	2	1	0	0
0	-2	0	-3	-2	0	-12	0		1	1	1	1	1	1	1	1	1
I	1	2	1	2	2	1	4	1	I	1	2	1	1	1	3	5	1
	3	4	6	6	4	7	8	8		3	4		2	2	4	6	7
	4	6	7	7	7	8	9	9		6	5		5	3	5	7	8
	6									8			7	4	6	8	
	9																

Figura 31: Ilustración de cómo se obtiene el cono dual.

Cono Dual								
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8
	0	-1/2	-1	-2/3	0	-2	1/3	0
	-2	0	0	1/3	1/2	3	0	0
	1	1/2	0	1/3	0	-6	1/12	-1
	0	-1	0	-1	-1	0	-1	0
I	1	2	1	2	2	1	4	1
	3	4	6	6	4	7	8	8
	4	6	7	7	7	8	9	9
	6				8			
	9							

SISTEMA	SOLUCIÓN GENERAL
$\begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_3 \leq 1 \\ x_1+x_2+2x_3 \leq 1 \\ 2x_1+2x_2+4x_3 \leq 1 \\ x_1+x_2+x_3 \leq 1 \\ x_1+x_2+2x_3 \leq 1 \\ x_1+2x_2+x_3 \leq 1 \\ 3x_1+2x_2 \leq 1 \\ 3x_1 \leq 1 \end{array}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \pi_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \pi_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \pi_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \pi_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\ + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1/12 \end{pmatrix}$ <p>(véase la tabla del cono dual)</p>
$\begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_3 \leq 1 \\ x_1+x_2+2x_3 \leq 1 \\ 2x_1+2x_2+4x_3 \leq 1 \\ x_1+x_2+x_3 \leq 1 \end{array}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \pi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \pi_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \pi_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ <p>(véase la tabla de la iteración 6)</p>
$\begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_3 \leq 1 \\ x_1+x_2+2x_3 \leq 1 \end{array}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \pi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \pi_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>(véase la tabla de la iteración 4)</p>

Figura 32: Ilustración de cómo se resuelven subsistemas de inecuaciones a partir de la tabla del cono dual correspondiente. Los coeficientes ρ son números reales (combinaciones lineales), los π son no-negativos (combinaciones lineales no-negativas) y los λ son no-negativos y suman la unidad (combinaciones lineales convexas).

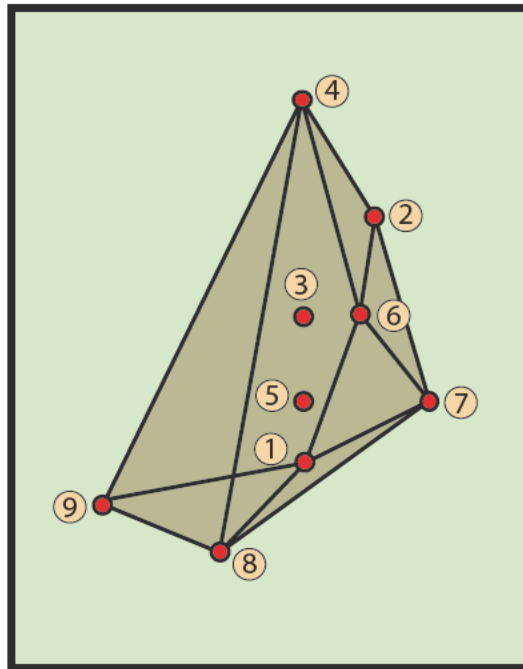


Figura 33: Proyección de un polígono degenerado definido en un espacio de dimensión seis mostrando sus hipercaras y algunos generadores superfluos.

descubrimientos sobre tensores en el libro “From vectors to tensors” (Ruíz-Tolosa y Castillo [261]). Juan Ramón ha sido la persona más inteligente que he conocido, pero se resistía a publicar como resultado de una mala experiencia con alguno de los sabios oficiales que trató de humillarlo. Desgraciadamente, ese hecho ha impedido que conozcamos su trabajo en una buena parte.

En ese libro se incorporan grandes novedades del álgebra tensorial, empezando por la notación semafórica, que es clave para poder trabajar con tensores, así como la representación vectorial de los tensores mediante técnicas de estirado y condensación; también se plantean las ecuaciones tensoriales (Ruiz-Tolosa y Castillo [262]), se introducen nuevos conceptos tensoriales, tales como la rotación de tensores, el tensor trasponedor, los autotensores, el tensor de permutación, las álgebras exteriores mixtas, etc.

7.3. Observabilidad

Motivados por problemas surgidos en el análisis del tráfico en núcleos urbanos y zonas abiertas, así como en el estudio de las redes de distribución de energía eléctrica y su control, tuvimos que investigar el problema de la observabilidad. Dado un conjunto de variables relacionadas mediante sistemas de ecuaciones e inecuaciones, se trata de saber qué variables hay que observar para conocer los valores que toman otras variables dadas, y conocer qué variables pueden determinarse en función del conocimiento de los valores que toman otras variables. Asociado a éste está el problema de la compatibilidad, es decir, saber si existe solución al problema o si los datos erróneos la hacen imposible. Nuestro primer trabajo en Castillo et al. [164] consiste en dar una técnica para estimar el estado de una red de distribución de energía eléctrica que se reduce, tras linealización, a un sistema lineal de ecuaciones. Allí damos una solución posible basada en el núcleo del sistema.

En Castillo et al. [171] propusimos un algoritmo de pivotaje que permitía analizar, paso a paso, el problema de la observabilidad y determinar las islas observables.

En Castillo et al. [176] se planteó el problema de la observabilidad en general para el caso de sistemas lineales de ecuaciones e inecuaciones, dando técnicas basadas en el núcleo del sistema y en la teoría de los conos duales y poliedros. Más precisamente, supóngase un sistema de ecuaciones y/o inecuaciones lineales en el que algunas de las incógnitas y algunos de los términos independientes son conocidos. Se quiere saber qué subconjunto de las restantes variables y de términos independientes pueden ser determinados y cuáles no.

Más tarde, en Castillo et al. [186] nos preocupamos por los datos erróneos y su incidencia en el problema de la observabilidad, en el que propusimos utilizar información redundante para permitir la corrección automática de los errores mediante técnicas de programación lineal binaria.

Preocupados por los problemas de grandes dimensiones, nos vimos obligados a mejorar los métodos en Solares et al. [272] y a utilizar técnicas binarias (métodos topológicos), que consideran sólo las relaciones cualitativas en vez de las cuantitativas entre las variables. Ello produce una notable mejora en cuanto a reducción de la memoria requerida y a tiempo de la unidad central de proceso (cpu). Además, se eliminan importantes problemas tales como los de precisión y detección de ceros (pivotes).

8. Investigación operativa y análisis de sensibilidad

Un problema muy importante y de gran interés práctico es el de la sensibilidad en problemas de optimización, que se analiza en esta sección. Como prueba de ello, algunos de los métodos aquí desarrollados se han aplicado en Castillo et al. [114] y

Castillo et al. [177] al problema de la fatiga, en el que se aplican estos métodos para realizar un análisis de sensibilidad de los datos resultantes de ensayos de laboratorio a los modelos estimados, siendo útiles en particular para la detección de datos anómalos (outliers).

8.1. Planteamiento del problema

Considérese el siguiente problem primal de optimización no lineal

$$\text{Minimizar } Z_P = f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \quad (99)$$

\mathbf{x}

sujeto a

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{b} \quad (100)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq \mathbf{c}, \quad (101)$$

donde las negritas se refieren a matrices y $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = (h_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \dots, h_\ell(\mathbf{x}, \mathbf{a}))^T$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = (g_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \dots, g_m(\mathbf{x}, \mathbf{a}))^T$ son matrices de funciones suficientemente regulares para que los desarrollos siguientes sean válidos. Se supone también que el problema (99)–(101) tiene un óptimo en \mathbf{x}^* .

Todo problema primal (99)–(101), tiene un dual:

$$\text{Maximizar } Z_D = \text{Inf}_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) - \mathbf{b}) + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) - \mathbf{c})\} \quad (102)$$

$\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$

sujeto a

$$\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}, \quad (103)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$, son las variables duales.

8.2. Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

El problema primal (99)–(101) y el dual (102)–(103), respectivamente, pueden ser resueltos mediante las condiciones de primer orden de Karush-Kuhn-Tucker (véase, por ejemplo, Luenberger [245], Bazaraa et al. [51]), Castillo et al. [151] (2001)):

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}) + \boldsymbol{\lambda}^{*T} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}) + \boldsymbol{\mu}^{*T} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad (104)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}) = \mathbf{b} \quad (105)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}) \leq \mathbf{c} \quad (106)$$

$$\boldsymbol{\mu}^{*T} (\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{a}) - \mathbf{c}) = 0 \quad (107)$$

$$\boldsymbol{\mu}^* \geq \mathbf{0}, \quad (108)$$

donde \mathbf{x}^* y $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ son las soluciones de los problemas primal y dual, respectivamente, $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*; \mathbf{a})$ es el gradiente (vector de derivadas parciales) de $f(\mathbf{x}^*; \mathbf{a})$ con respecto a \mathbf{x} , evaluados en el valor óptimo \mathbf{x}^* . Los vectores $\boldsymbol{\mu}^*$ y $\boldsymbol{\lambda}^*$ se llaman los multiplicadores de *Kuhn–Tucker*. La condición (104) dice que el gradiente de la función Lagrangiana evaluada en la solución óptima \mathbf{x}^* debe ser nulo. Las condiciones (105)–(106) son llamadas *las condiciones de factibilidad* primales, la condición (107) se conoce como *la condición de holgura complementaria*, las condiciones (108) requieren la no-negatividad de los multiplicadores asociados a las desigualdades, y se llaman *condiciones de factibilidad dual*.

8.3. Un método práctico para obtener las sensibilidades de la función objetivo

Un método muy ingenioso (véase Conejo et al. [202]), que descubrimos para obtener las sensibilidades de la función objetivo a los parámetros, consiste en convertirlos en variables artificiales añadiendo además restricciones que fijan dichas variables a los valores de los correspondientes parámetros. De esta forma las variables duales correspondientes dan estas sensibilidades.

Más precisamente, nuestro problema de optimización inicial (99)–(101) es equivalente al siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & z_P = f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{a}}) \\ & \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{a}} \end{aligned} \quad (109)$$

sujeto a

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{a}}) = \mathbf{b} \quad (110)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{a}}) \leq \mathbf{c} \quad (111)$$

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} : \boldsymbol{\eta}, \quad (112)$$

donde ahora las sensibilidades de la función objetivo respecto a \mathbf{a} son los valores de las variables duales correspondientes $\boldsymbol{\eta}$.

8.4. Fórmula general para la sensibilidad de la función objetivo

El teorema siguiente, que publicamos en Conejo et al. [202], Castillo et al. [170] y Castillo et al. [169], suministra una fórmula cerrada para las sensibilidades locales de la función objetivo respecto a cualquier parámetro. Es una alternativa al método descrito en la sección anterior.

Teorema 6 (Sensibilidades de la función objetivo.) *La sensibilidad de la función objetivo del problema primal (99)–(101) con respecto al parámetro \mathbf{a} es:*

$$\frac{\partial z_P^*}{\partial \mathbf{a}} = \nabla_{\mathbf{a}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (113)$$

que es la derivada parcial de la función Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) - \mathbf{b}) + \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) - \mathbf{c}) \quad (114)$$

con respecto a \mathbf{a} evaluada en los puntos óptimos \mathbf{x}^* , $\boldsymbol{\lambda}^*$, y $\boldsymbol{\mu}^*$.

8.5. Método general para todas las sensibilidades

El método anterior sólo vale para la función objetivo. Por simplificar, a partir de este punto, suponemos que los parámetros \mathbf{b} y \mathbf{c} , en (99)-(101) y (104)-(108), están englobados en \mathbf{a} .

Para obtener las fórmulas generales de sensibilidad, se perturba el problema de optimización. En efecto, perturbando las condiciones KKT y obligando a que las perturbaciones satisfagan también las condiciones KKT, se llega al sistema

$$M\delta\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}\mathbf{x} & \mathbf{F}\mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{F}\mathbf{x}\mathbf{x} & \mathbf{F}\mathbf{x}\mathbf{a} & \mathbf{H}\mathbf{x}^T & \mathbf{G}\mathbf{x}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}\mathbf{x} & \mathbf{H}\mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}\mathbf{x}^1 & \mathbf{G}\mathbf{a}^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{a}} \\ \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\mathbf{a}} \\ \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\mathbf{a}} \\ \frac{dz}{d\mathbf{a}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (115)$$

$$N\delta\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}\mathbf{x}^0 & \mathbf{G}\mathbf{a}^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{m_J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{a}} \\ \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\mathbf{a}} \\ \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\mathbf{a}} \\ \frac{dz}{d\mathbf{a}} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}, \quad (116)$$

donde $m_J = \text{card}(J)$ es el número de restricciones de desigualdad activas y el significado de las matrices M y N es aparente en el sistema (115)-(116), en el que las submatrices son (las dimensiones correspondientes se dan en paréntesis)

$$\mathbf{F}\mathbf{x}_{(1 \times n)} = (\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}))^T \quad (117)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{a}_{(1 \times p)} = (\nabla_{\mathbf{a}} f(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}))^T \quad (118)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{x}\mathbf{x}_{(n \times n)} = \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k^* \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}} h_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}) + \sum_{j=1}^{m_J} \mu_j^* \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}} g_j(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}) \quad (119)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{x}\mathbf{a}_{(n \times p)} = \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{a}} f(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k^* \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{a}} h_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}) +$$

$$\sum_{j=1}^{m_J} \mu_j^* \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{a} g_j(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}) \quad (120)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{x}}(\ell \times n) = (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}))^T \quad (121)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{a}}(\ell \times p) = (\nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}))^T \quad (122)$$

$$\mathbf{G}_{\mathbf{x}}(m_J \times n) = (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}))^T \quad (123)$$

$$\mathbf{G}_{\mathbf{a}}(m_J \times p) = (\nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}))^T, \quad (124)$$

donde $\mathbf{G}_{\mathbf{x}}^0$ y $\mathbf{G}_{\mathbf{a}}^0$ son las submatrices de $\mathbf{G}_{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{G}_{\mathbf{a}}$, respectivamente, asociadas a los μ multiplicadores nulos de las restricciones activas, $\mathbf{G}_{\mathbf{x}}^1$ y $\mathbf{G}_{\mathbf{a}}^1$ son las submatrices de $\mathbf{G}_{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{G}_{\mathbf{a}}$, respectivamente, correspondientes a los μ -multiplicadores no-nulos de las restricciones activas, y $-\mathbf{I}_{m_J}^0$ es la matriz unidad cambiada de signo que resulta tras eliminar todos los ceros $j \in J$ tales que $\mu_j^* \neq 0$.

Un punto óptimo $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \mathbf{z}^*)$ puede ser clasificado como sigue:

Punto regular: La solución \mathbf{x}^* , $\boldsymbol{\lambda}^*$, $\boldsymbol{\mu}^*$ y \mathbf{z}^* es un punto regular si los vectores gradiente de las restricciones activas son linealmente independientes. Bajo esta circunstancia, el punto óptimo puede ser degenerado o no:

1. **No degenerado:** Cuando los multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\mu}^*$ de las restricciones de desigualdad activas son no nulas, no hay matriz \mathbf{V} y existe la matriz \mathbf{U}^{-1} .
2. **Degenerado:** Si los multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\mu}^*$ de las restricciones de desigualdad activas son no nulas, no hay matriz \mathbf{V} y no existe la matriz \mathbf{U}^{-1} . Alternativamente, algunos de los multiplicadores de Lagrange de las restricciones de desigualdad activas en $\boldsymbol{\mu}^*$ son nulos y no existe la matriz \mathbf{U}^{-1} porque \mathbf{U} no es cuadrada.

Punto no regular: Si los vectores gradiente de las restricciones activas son linealmente dependientes. En este caso las condiciones KKT no caracterizan adecuadamente este caso porque existen infinitas combinaciones de multiplicadores de Lagrange que las cumplen. En este caso no tiene sentido diferenciar entre degeneración o no, porque la matriz \mathbf{U} nunca es invertible.

Algunas aplicaciones de toda esta teoría a problemas ingenieriles pueden verse en Conejo et al. [203], Castillo et al. [163] o Castillo et al. [197].

8.6. El caso particular de programación lineal

Considérese el siguiente problema de programación lineal (LP) (véase Castillo et al. [175]):

$$\text{Minimizar } z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (125)$$

sujeto a

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} : \boldsymbol{\lambda}, \quad (126)$$

donde $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \geq \mathbf{0}$, \mathbf{A} es una matriz de dimensión $m \times n$ con elementos a_{ij} ; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, y $\boldsymbol{\lambda}$ son las variables duales.

Entonces, las sensibilidades locales resultan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial c_j} &= x_j; & \frac{\partial z}{\partial a_{ij}} &= \lambda_i x_j; & \frac{\partial z}{\partial b_i} &= -\lambda_i, \\ \frac{\partial x_j}{\partial c_k} &= 0; & \frac{\partial x_j}{\partial a_{ik}} &= -a^{ji} x_k & \frac{\partial x_j}{\partial b_i} &= a^{ji}, \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_j} &= -a^{ji}; & \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{\ell j}} &= -a^{ji} \lambda_\ell; & \frac{\partial \lambda_i}{\partial b_\ell} &= 0, \end{aligned} \quad (127)$$

donde a^{ji} son los elementos de \mathbf{A}^{-1} .

Obsérvese que las ecuaciones (127) suministran las sensibilidades de la función objetivo y de las variables primales y duales con respecto a todos los parámetros que aparecen en (125)–(126).

9. Ecuaciones en derivadas parciales

9.1. Puentes con planta curva

Mi primer trabajo de investigación en el que aparecían ecuaciones en derivadas parciales fue uno realizado con Samartín et al. [263] en el que resolvíamos el problema elástico de la losa ortótropa curva apoyada en los bordes radiales y con unas condiciones de sustentación muy generales en sus bordes curvos, que además de un interés *per se*, sirvió de base para obtener, por superposición, el caso de apoyos intermedios. Para resolver el problema trabajamos en coordenadas cilíndricas, adoptamos una solución tipo Levy, es decir, utilizando un desarrollo en serie de Fourier, y consideramos los casos de carga uniforme y cuchillos de cargas radiales. Lo aplicamos al caso de un puente con vigas de borde y lo resolvimos numéricamente en un ordenador de 16 Kbytes con un programa escrito en lenguaje Basic. Hay que decir que hasta



Figura 34: Puente y presa de Alcántara en Cáceres mostrando cómo se busca la perpendicularidad de los puentes y las luces mínimas.

muy recientemente, las carreteras pasaban los ríos perpendicularmente a su cauce mediante puentes rectos (véase la figura 34) por dos razones: (a) era la solución más barata, y (b) no se sabía calcular los puentes con planta curva. Desde esa época, los puentes no tienen esas restricciones (véase la figura 35).

9.2. Ecuaciones diferenciales con condiciones de rango

En el trabajo Castillo et al. [168], recientemente publicado en SIAM Review, abordamos el caso de problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en los que las condiciones auxiliares se definen mediante rangos, es decir, en vez de fijar los valores de la función y sus derivadas en determinados puntos, se fijan solamente sus rangos. Ello da lugar, por una parte, a que el número de condiciones pueda ser ilimitado, y, por otra, a que puedan existir infinitas soluciones. En el artículo se describe el problema de una viga elástica sometida a carga uniforme y se resuelve, demostrando que el conjunto de soluciones es en general un conjunto poliédrico, es decir, la suma de tres componentes, un espacio vectorial, un cono y un polítopo, pero que en los casos reales degenera en un polítopo al tratarse normalmente de deformaciones finitas.

En la figura 36 se muestra el conjunto de soluciones generadoras del polítopo solución para el caso de una viga cuyas flechas y giros en los apoyos están acotados.



Figura 35: Enlace M-40 con N-I, Madrid mostrando puentes curvos.

Puesto que no existen ni apoyos, ni empotramientos perfectos, ni fuerzas, ni momentos exactos, en la práctica es mucho más realista suponer que flechas, giros, momentos y cortantes oscilan en ciertos rangos.

10. Cálculo de variaciones

Tengo que empezar diciendo que he tenido la suerte de trabajar en cálculo de variaciones porque afortunadamente el programa de segundo curso de carrera en la ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid incluía en los años 60 una parte dedicada a esta bella especialidad de la matemática. Desgraciadamente, los alumnos de estas escuelas ya no tienen hoy esta posibilidad.

10.1. Aplicaciones a Geotecnia

Tras trasladarme a Santander, tuve la suerte de dirigir la primera tesis doctoral de la ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Cantabria, que trataba sobre el tema de la estabilidad de taludes mediante cálculo de variaciones.

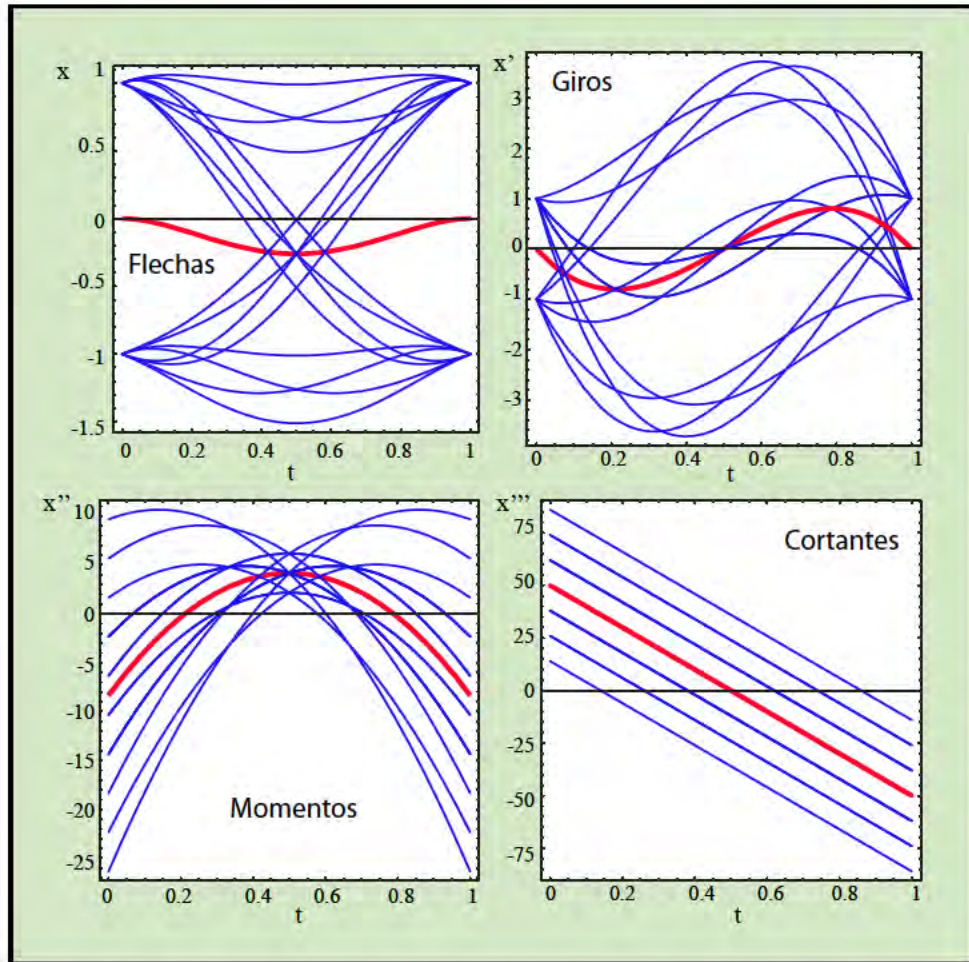


Figura 36: Ilustración de los generadores del polítopo de todas las soluciones de flechas, giros, momentos y cortantes.

Un talud es estable si las fuerzas deslizantes son menores que las resistentes (véase la figura 37); en caso contrario, el talud desliza y esto ocurre por la superficie o línea de mínima resistencia (véase la figura 38). Es por tanto necesario determinar esta curva de deslizamiento, que es la que minimiza el cociente entre fuerzas estabilizadoras y deslizantes, es decir, un cociente de funcionales.



Figura 37: Deslizamiento de un talud y efecto sobre la línea férrea.

Castillo y Revilla [57] y Revilla y Castillo [256], basándose en el método de Janbu [231], propusieron el siguiente funcional implícito (véase la figura 38):

$$F = \frac{\int_a^b \frac{[c + \gamma(\bar{z}(u) - z(u)) \tan \phi] (1 + z'^2(u))}{\gamma \left(1 + \frac{z'(u) \tan \phi}{F}\right)} du}{\int_a^b (\bar{z}(u) - z(u)) z'(u) du}, \quad (128)$$

donde F es el coeficiente de seguridad, $\bar{z}(u)$ es el perfil del talud, $z(u)$ es la ordenada de la curva de deslizamiento, c es la cohesión del terreno, ϕ es el ángulo de rozamiento interno del suelo, γ es el peso específico del suelo, y a y b son las coordenadas de la curva de deslizamiento en los puntos de salida.

El funcional (128) para el caso particular de terreno puramente cohesivo resulta

$$F = \frac{Q_N}{Q_D} = \frac{c \int_a^b (1 + z'^2(u)) du}{\gamma \int_a^b (\bar{z}(u) - z(u)) z'(u) du}, \quad (129)$$

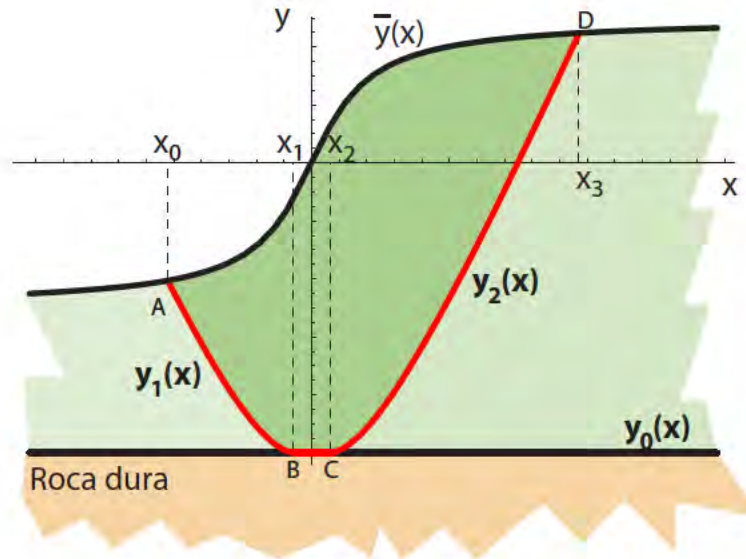


Figura 38: Talud y línea de deslizamiento en contacto con una capa de roca.

donde el numerador y el denominador representan las fuerzas estabilizadoras y volcadoras, respectivamente, que debe ser minimizado con respecto a la curva de deslizamiento.

La figura 39 muestra un ejemplo en el que se presentan las curvas de deslizamiento para varios valores de la cohesión del terreno, para el caso puramente cohesivo.

Castillo y Luceño [93] demuestran que este funcional satisface las condiciones necesarias y suficientes de mínimo, y consecuentemente que es válido para diseño en ingeniería. También demuestran que otros funcionales no son válidos.

Puesto que la teoría clásica del cálculo de variaciones se refiere a un funcional de la forma (véase, por ejemplo, Elsgolc [207], Gelfand y Fomin [219], Forray [215], Forsyth [216], Krasnov et al. [238])

$$I(a, b, z(u)) = \int_a^b f(u, z(u), z'(u)) du, \quad (130)$$

y no a un cociente de funcionales, aquella no era válida para este caso, por lo que fue necesario generalizar la teoría clásica para resolverlo.

Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un mínimo del problema (130) son bien conocidas (véase, por ejemplo, Euler [212], Forsyth [216], Els-

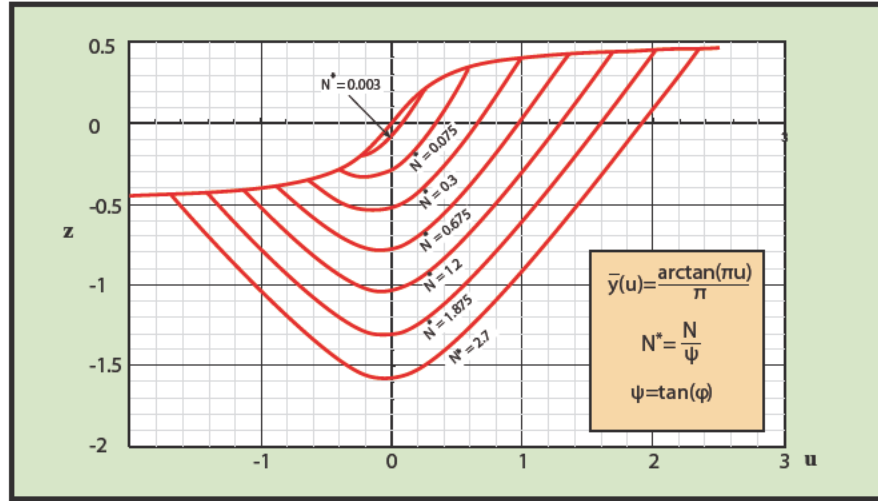


Figura 39: Diferentes líneas de deslizamiento para diferentes resistencias del suelo.

golc [207], Gelfand y Fomin [219], Forray [215], Bolza [52], Giaquinta y Hildebrandt [220, 221], Dacorogna [204], o MacCluer [246]).

En particular, condiciones necesarias de primer orden tales como las siguientes pueden verse en la literatura existente:

1. La *ecuación de Euler-Lagrange*, a satisfacer por cualquier extremal que minimice (130):

$$f_z - \frac{d}{du} f_{z'} = 0. \tag{131}$$

2. La *condición natural*, a satisfacer en cualquier punto extremo $u = u_0$ cuando $z(u_0)$ es libre (véase Gelfand y Fomin [219], página 26):

$$f_{z'}(u_0, z_0(u_0), z'_0(u_0)) = 0. \tag{132}$$

3. La *condición de transversalidad*, a satisfacer cuando un punto extremo $u = u_0$ está en una curva $z = \bar{z}(u)$ (véase Gelfand y Fomin [219], página 60):

$$f(u_0, z_0(u_0), z'_0(u_0)) + (\bar{z}'(u_0) - z'_0(u_0)) f_{z'}(u_0, z_0(u_0), z'_0(u_0)) = 0. \tag{133}$$

4. Las *condiciones de esquina de Weierstrass-Erdmann*, a satisfacerse en cualquier punto angular $u = c$ (véase Gelfand y Fomin [219], página 63):

$$f_{z'}(u, z_0(u), z'_0(u)) \Big|_{u=c-0} - f_{z'}(u, z_0(u), z'_0(u)) \Big|_{u=c+0} = 0 \tag{134}$$

$$\begin{aligned} & (f(u, z_0(u), z'_0(u)) - z' f_{z'}(u, z_0(u), z'_0(u)))|_{u=c-0} \\ & - (f(u, z_0(u), z'_0(u)) - z' f_{z'}(u, z_0(u), z'_0(u)))|_{u=c+0} = 0 \quad (135) \end{aligned}$$

5. La *condición de empalme* para restricciones unilaterales del tipo $z \geq \phi(u)$, a satisfacerse en el punto de empalme \bar{u} (véase Bonnard y Caillau [53], página 53):

$$\begin{aligned} & [f(u, z_0(u), z'_0(u)) - f(u, z_0(u), \phi'(u)) \\ & - (\phi'(u) - z'_0(u)) f_{z'}(u, z_0(u), z'_0(u))] |_{u=\bar{u}} = 0. \quad (136) \end{aligned}$$

Además, otras condiciones necesarias de segundo orden, tales como las de Legendre o Jacobi, y condiciones suficientes, tales como las de Legendre o Hilbert (véase Bolza [52], capítulos 2 y 3 de Gelfand y Fomin [219], capítulos 5 y 6 de Forsyth [216], o capítulo 4 de Giaquinta y Hildebrandt [220, 221]) son bien conocidas para los funcionales del tipo (130).

Dada la dificultad del nuevo problema, consideramos inicialmente las condiciones necesarias, es decir, generalizamos la ecuación de Euler-Lagrange y el resto de condiciones clásicas al caso del cociente. Los resultados de aplicar estas condiciones necesarias dieron lugar a soluciones con sentido físico.

En esa época, los profesores Baker y Garber del Instituto Tecnológico (Technion) de Haifa (Israel) trabajaban en el mismo problema y aplicando técnicas similares, de forma que se originó una cierta competencia entre ellos y nosotros, por lo que alternamos los descubrimientos en trabajos sucesivos, tales como Castillo y Revilla [94], Castillo y Revilla [95], Garber y Baker [218], Revilla y Castillo [256], Baker y Garber [47], Castillo y Revilla [57], Baker y Garber [48] y Luceño y Castillo [244], en el que siempre cada resultado mejoraba el siguiente.

En un momento dado, el grupo de Haifa saca un artículo en el que los resultados parecen muy importantes, pero desgraciadamente descubrimos que el funcional utilizado no cumplía las condiciones suficientes. Como nosotros teníamos las mismas dificultades, decidimos invitar a R. Baker a corregir su trabajo en uno conjunto, por lo que viajé a Haifa y escribimos un artículo conjunto Baker et al. [49] para aclarar el problema.

En ese momento, la investigación sufría una importante crisis, que nos forzó a ambos grupos a dedicarnos de lleno a establecer las condiciones suficientes de los funcionales cociente, problema que no era nada fácil. En un corto plazo conseguimos encontrar otro funcional que sí las cumplía, con lo que se resolvió el problema de forma satisfactoria.

La experiencia nos impulsó a comparar diferentes métodos de análisis de la estabilidad en Mecánica del suelo (Luceño y Castillo [242], Castillo y Luceño [93], Castillo y Luceño [92], Luceño y Castillo [243], Castillo y Luceño [91], Castillo y

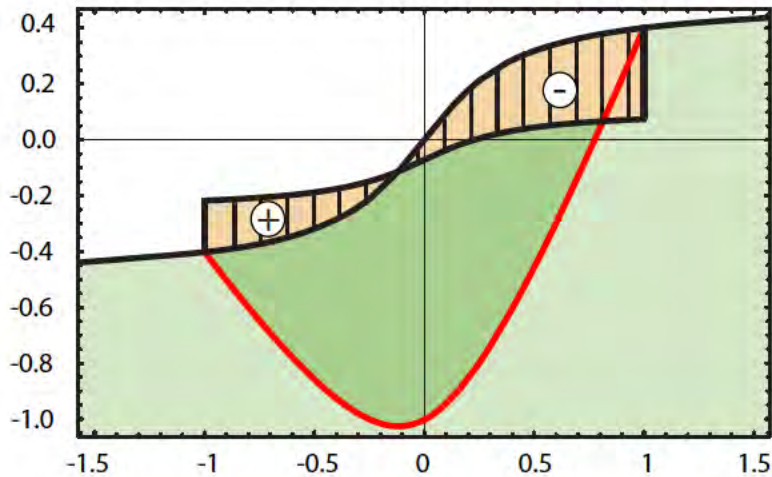


Figura 40: Ilustración del análisis de sensibilidad.

Luceño [90], Luceño y Castillo [241]), y también a aplicar los métodos del cálculo de variaciones al caso de zapatas (véase Castillo y Luceño [89], Luceño y Castillo [240]), ya que es un problema similar al de la estabilidad de taludes.

10.2. Análisis de sensibilidad

Los importantes resultados de análisis de sensibilidad obtenidos para el caso de problemas de optimización de funciones, nos hicieron plantearnos la pregunta de si eran o no, extensibles al caso de cálculo de variaciones, ya que era también un problema de optimización, aunque en este caso se trataba de funcionales. El trabajo realizado (véase Castillo et al. [184]) muestra que efectivamente estos resultados son extensibles, y como ilustración se aplican a los problemas de taludes.

En la figura 40 se muestra cómo afecta una variación del perfil del talud al coeficiente de seguridad del mismo. El gráfico es muy interesante ya que muestra de forma inequívoca cómo actuar para estabilizar el talud, quitando peso de su zona alta y colocándolo en la baja, al tiempo que cuantifica la mejora resultante.

10.3. Generalización de la teoría clásica

Cuando al final de la década de los 70 trabajábamos en cálculo de variaciones y considerábamos el caso de funcionales cociente éramos ajenos a que ya Euler [212] en 1744 había concebido esa posibilidad. Recientemente, y me refiero al año 2006, volvemos a replantearnos algunos problemas de cálculo de variaciones. Buscando en la bibliografía, ahora con muchos más medios que anteriormente (véase Brechtken-Manderscheid [55], Dacorogna [205], Giaquinta y Hildebrandt [220], Giaquinta y Hildebrandt [221], Ambrosio y Dancer [18], Dacorogna [204] or MacCluer [246]), descubrimos un trabajo de Euler en latín, en el que ya hablaba de funcionales producto y cociente y obtenía las ecuaciones Euler-Lagrange correspondientes, es decir, las condiciones necesarias. Da la casualidad de que el Académico de esta casa Alberto Dou, había traducido una parte de este trabajo al castellano.

Motivados por el hecho de que hay muchos problemas interesantes en el que los funcionales a minimizar no son de la forma clásica (130), en Castillo et al. [193] extendimos la teoría clásica a funcionales de la forma

$$I(a, b, z(u)) = H \left(\int_a^b f(u, z(u), z'(u)) du \right), \quad (137)$$

donde f tiene n componentes $f = (f_1, \dots, f_n)$ y H tiene n variables independientes. En particular, dos casos particulares interesantes para $n = 2$, son el funcional producto

$$P(a, b, z(u)) = \left(\int_a^b f_1(u, z(u), z'(u)) du \right) \left(\int_a^b f_2(u, z(u), z'(u)) du \right), \quad (138)$$

y el funcional cociente

$$Q(a, b, z(u)) = \frac{\int_a^b f_1(u, z(u), z'(u)) du}{\int_a^b f_2(u, z(u), z'(u)) du}. \quad (139)$$

Es interesante observar que algunos funcionales de la forma (137) ya fueron tratados por Euler [212]. Sin embargo, es sorprendente que la comunidad científica parece desconocerlo. De hecho, resulta curioso comprobar que a pesar de haber transcurrido tantos años, muy pocos autores — sólo hemos encontrado Petrov [254] y Goldstine [230] — citan este importante trabajo de Euler, pero lo hacen como si se tratara de una contribución secundaria y además aparece algo escondido en sus publicaciones.

En este trabajo tratamos del problema de minimizar este tipo de funcionales dando pasos que continuaron el trabajo iniciado por Euler. En particular, contestamos a preguntas tales como:

1. ¿Cuáles son las ecuaciones de Euler-Lagrange para este tipo de problemas?

2. ¿Cuáles son las condiciones naturales, las de transversalidad, las de Weierstrass-Erdmann y las de empalme para estos problemas?
3. ¿Pueden reducirse estos problemas a otros de cálculo de variaciones?
4. ¿Existen conjuntos de condiciones suficientes que garanticen la existencia de soluciones óptimas?

11. Modelos de transporte

En esta última etapa, mi colaboración con el grupo de transportes de la Universidad de Castilla-La Mancha, dirigido por el profesor José María Menéndez, me ha llevado a trabajar en problemas de transporte, utilizando mis conocimientos de optimización y de álgebra para resolver una serie de problemas muy interesantes.

11.1. Tráfico de trenes

Uno de ellos es el problema de la organización del transporte ferroviario, especialmente de alta velocidad, y la confección de horarios (véase la Figure 45). Resulta sorprendente que este problema pueda plantearse como un problema de optimización, en el que la función objetivo se elige para minimizar el tiempo total de viaje, y las restricciones vienen dadas por la topología de la red y de los andenes de las estaciones, los tiempos de parada, las distancias de seguridad, las velocidades máximas de los trenes, las horas de salida fijadas o limitadas, las condiciones para evitar colisiones entre trenes, etc. En Castillo et al. [190] se analiza el caso de simple dirección que luego se extiende a doble dirección. Resulta interesante demostrar que la capacidad de las líneas de dirección única aumenta mucho si se construyen estaciones intermedias o tramos dobles de longitud limitada (figuras 41 y 42), y que fijar los horarios de salidas coincidiendo con horas, medias y cuartos de hora es un error desde el punto de vista de la eficiencia. También sorprende observar que en algunos tramos recientemente inaugurados no sería necesaria la vía doble (véanse las figuras 43, 44 y 45). Además, es interesante ver cómo determinadas técnicas de resolución del problema, como limitar inteligentemente las variables binarias y acotar la función objetivo, reduce sustancialmente el tiempo de cálculo haciendo posible el re-cálculo inmediato en caso de incidencias extraordinarias en las líneas.

11.2. Tráfico de automóviles

El segundo tema de trabajo, al que nos hemos dedicado con cierta intensidad, es el del tráfico de vehículos en zonas urbanas y áreas abiertas. Uno de los problemas

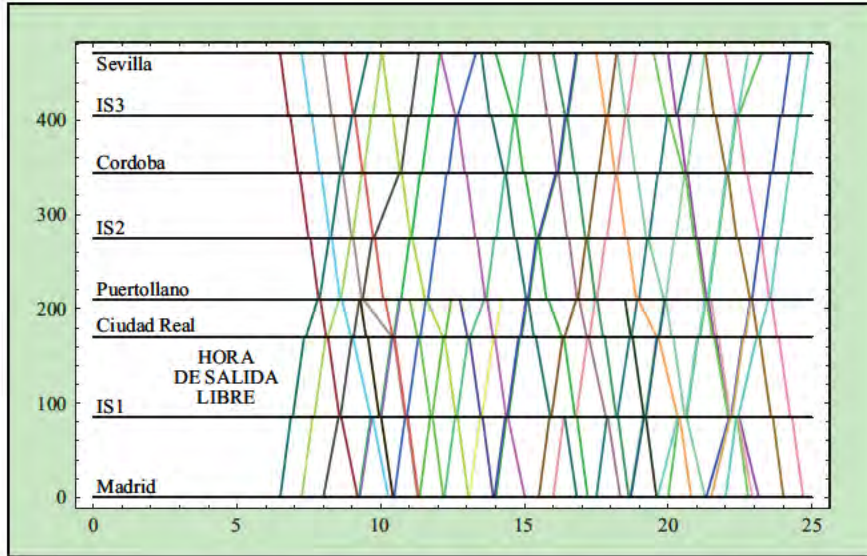


Figura 41: Ilustración del rendimiento de tramos con vía simple y estaciones intermedias de cruce en el tramo Madrid-Sevilla, mostrando la presencia de lanzaderas Madrid-Puertollano y viceversa para el caso de horas de salida libres.

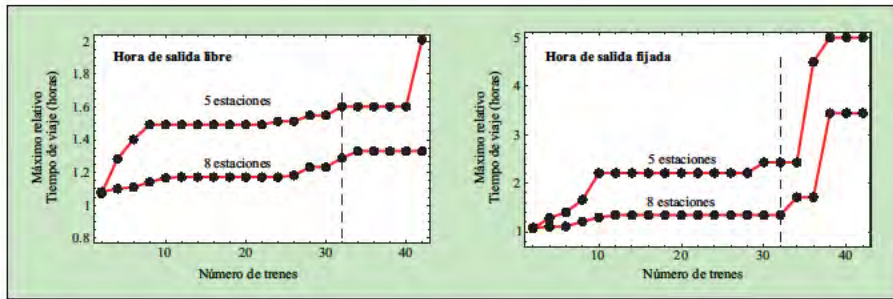


Figura 42: Ilustración de la mejora en los tiempos de viaje producida por la inclusión de estaciones intermedias y horarios de salida libres.

que se plantean es el de estimar los orígenes y destinos de los usuarios, así como saber qué rutas utilizan y predecir el nivel de congestión de los diferentes tramos de carreteras y autovías. Para resolver éste problema pueden utilizarse los aforadores normales que cuentan el número de vehículos que pasan por una sección dada o recurrir a otro tipo de sistemas más complejos, como el de registrar matrículas y hacer un seguimiento de los vehículos. Las redes bayesianas se han mostrado muy

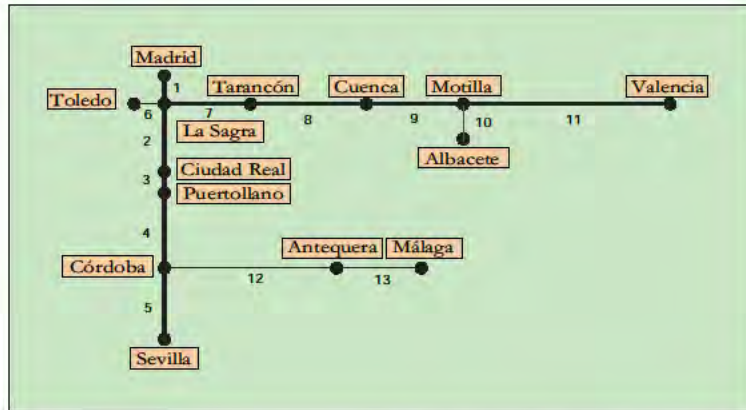


Figura 43: Propuesta de itinerarios entre Madrid y Málaga, Córdoba-Sevilla, Toledo y Valencia.

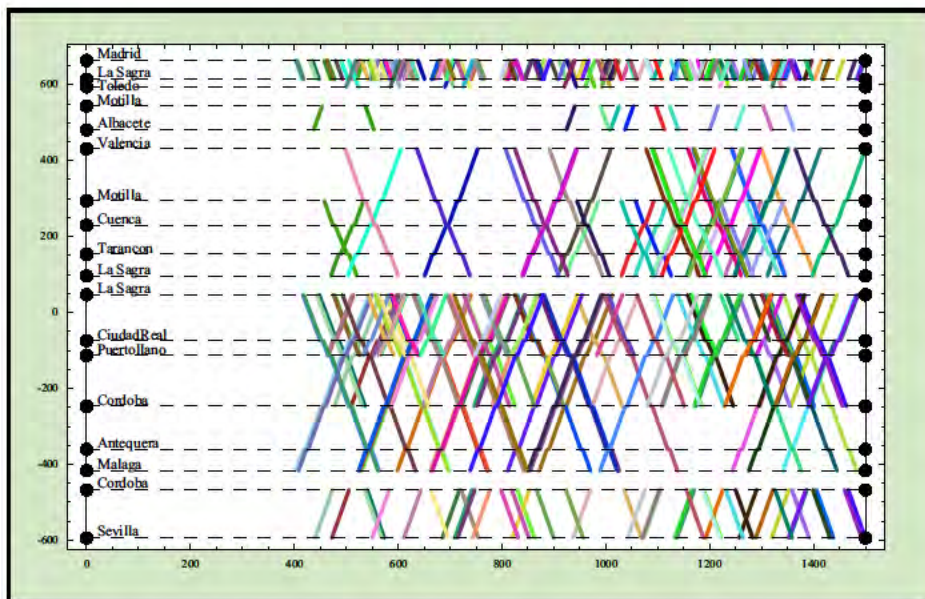


Figura 44: Ilustración de un horario de trenes entre Madrid y Málaga, Córdoba-Sevilla, Toledo y Valencia, mostrando cuatro tramos de vía simple y nueve tramos de vía doble.

útiles para predecir tráfico en diferentes tramos y para actualizar esta información a medida que se van conociendo datos en otros tramos. La estructura de dependencia de

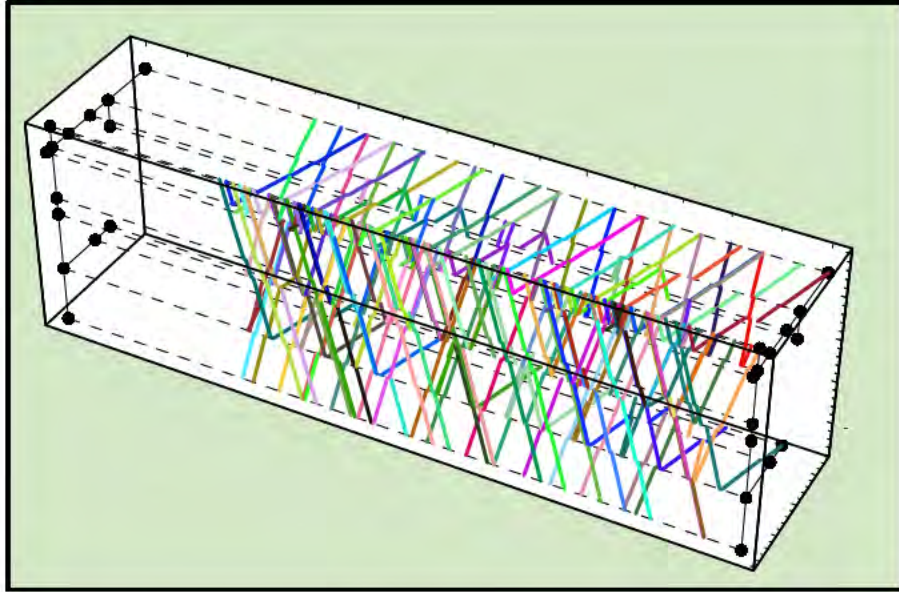


Figura 45: Ilustración de horarios de trenes entre Madrid y Málaga, Córdoba-Sevilla, Toledo y Valencia, representado en tres dimensiones.

los diferentes flujos de tráfico se reproduce fácilmente mediante las redes bayesianas (véase Castillo et al. [196]).

Hemos realizado algunas contribuciones interesantes, tales como Castillo et al. [194], al proponer el registro de matrículas y el seguimiento de los vehículos, ya que ello hace posible abordar muchos problemas que antes era imposible resolver de una forma eficaz sólo con aforadores estándar. También hemos aportado métodos nuevos para elegir el conjunto de puntos de registro óptimos (en número y situación) de forma que se pueda obtener la información de tráfico deseada, desarrollando métodos matemáticos que resuelven una serie de problemas muy interesantes de álgebra e investigación operativa.

En Castillo et al. [185] aplicamos estas técnicas al problema del tráfico, para estimar los orígenes y destinos de los usuarios, las rutas que utilizan, la congestión de las vías de acceso, etc. Luego, en Castillo et al. [192] extendimos los métodos topológicos a estos problemas de tráfico.

Finalmente, aparte de otras contribuciones más teóricas, tales como Castillo et al. [195], descubrimos que si se toman como base los números de usuarios de las diferentes rutas, las matrices iniciales que relacionan los diferentes flujos de tráfico contienen sólo ceros y unos, y que si se cuida el proceso de pivotaje, pueden obte-

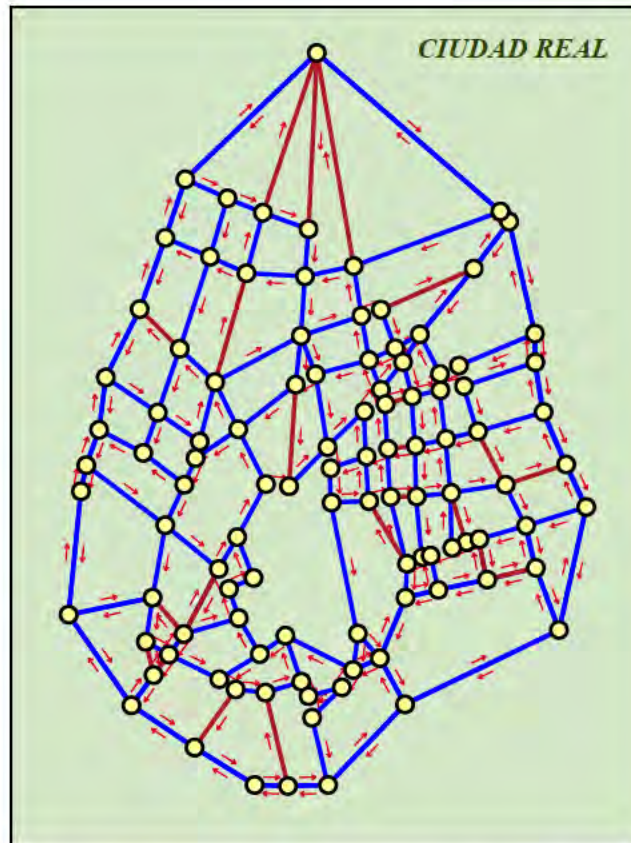


Figura 46: Red de Ciudad Real mostrando el conjunto de 22 calles a aforar para poder identificar los flujos de tráfico en las 219 calles.

nerse matrices intermedias en las que su mayoría sólo contienen unos, ceros y menos unos. Esto permite una aritmética ternaria que hemos desarrollado con la que se obtiene un gran ahorro de memoria, de tiempo de cálculo y se evitan los problemas de precisión y de detección de posibles pivotes (ceros).

Todos estos resultados se han aplicado ya a al estudio del tráfico en algunas ciudades españolas, como Ciudad Real y Cuenca. En la figura 46 se da la red de calles de Ciudad Real mostrando el conjunto de 22 calles (destacadas en rojo en la figura) a aforar para poder identificar los flujos de tráfico en las 219 calles.

12. Epílogo

Llega ya el momento de concluir este discurso tras el repaso a mis incursiones en el mundo de la Matemática y sus aplicaciones.

He tratado de describir cómo surgió cada uno de los trabajos realizados, y creo ha quedado patente el papel relevante de las personas que aparecen en la vida de un estudiante e investigador, motivando y dando lugar a cambios de rumbo en su trayectoria investigadora, convirtiéndose en verdaderos maestros. He indicado ya que muchos de ellos fueron académicos de diferentes academias y países, lo que considero que no es una mera casualidad, sino el resultado de la excelencia, que debe ser cuidada. También he destacado el papel de los libros que hacen posible que los conocimientos que uno tiene lleguen a muchos, produciendo un efecto que el autor, cuando los escribe, no puede ni siquiera imaginar.

Concluyo ya agradeciendo a todos ellos esta labor tan beneficiosa para nuestra sociedad, e invitando a que surjan nuevos maestros y escritores que arrastren a los jóvenes a dedicarse al maravilloso mundo de la Matemática.

Tengo también que decir que todo este trabajo no hubiese sido posible sin la dedicación de mis padres a mi educación, el apoyo de mi familia, y la paciencia y el cariño de mi esposa Mary Carmen y mis hijos, a los que he restado mucho tiempo para poder dedicarlo a la enseñanza y la investigación. Vaya para todos ellos, mi agradecimiento y reconocimiento.

Sólo me queda ya insistir una vez más en mi gratitud, expresada al comienzo de este discurso, por mi nombramiento como Académico de Número de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y a todos ustedes por su presencia en este acto.

Muchas gracias.

13. Bibliografía

13.1. Referencias

- [1] J. Aczél. *Lectures on functional equations and their applications*. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 19. Academic Press, New York, 1966.
- [2] J. Aczél. Some recent applications of functional equations to geometry. *J. Geometry*, 1:127–142, 1971.
- [3] J. Aczél. Some recent applications of functional equations to combinatorics, probability distributions, information measures and to the theory of index numbers in mathematical economics, pages 565–590. Physica-Verlag, Würzburg, 1978.
- [4] J. Aczél. On history, applications and theory of functional equations. In *Functional equations: history, applications and theory*, Math. Appl., pages 3–12. Reidel, Dordrecht, 1984.
- [5] J. Aczél. On weighted synthesis of judgements. *Aequationes Math.*, 27(3): 288–307, 1984.
- [6] J. Aczél. On the general form of the laws of science without dimensional constants. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 55:23–35 (1988), 1985.
- [7] J. Aczél. Scale-invariant equal sacrifice in taxation and conditional functional equations. *Aequationes Math.*, 32(2-3):336–349, 1987.
- [8] J. Aczél. *A short course on functional equations*. Theory and Decision Library. Series B: Mathematical and Statistical Methods. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
- [9] J. Aczél. Basics of functional equations arising from recent applications to economics and to other sciences. In *XII Symposium on Operations Research (Passau, 1987)*, volume 59 of *Methods Oper. Res.*, pages 3–14. Athenäum-/Hain/Hanstein, Königstein, 1989.
- [10] J. Aczél. Some recent applications of functional equations to the social and behavioral sciences. Further problems. *Aequationes Math.*, 50(1-2):38–49, 1995.
- [11] J. Aczél and C. Alsina. Short Communications: Characterizations of some classes of quasilinear functions with applications to triangular norms and to synthesizing judgements. *Aequationes Math.*, 25(1):313–315, 1982.

- [12] J. Aczél and C. Alsina. Synthesizing judgements: a functional equations approach. *Math. Modelling*, 9(3-5):311–320, 1987. The analytic hierarchy process.
- [13] J. Aczél and J. Dhombres. *Functional equations in several variables*, volume 31 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [14] J. Aczél and B. Forte. Generalized entropies and the maximum entropy principle. In *Maximum entropy and Bayesian methods in applied statistics (Calgary, Alta., 1984)*, pages 95–100. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- [15] J. Aczél and T. L. Saaty. Procedures for synthesizing ratio judgements. *J. Math. Psych.*, 27(1):93–102, 1983.
- [16] J. Aczél, M. Hosszú, and E. G. Straus. Functional equations for products and compositions of functions. *Publ. Math. Debrecen*, 8:218–224, 1961.
- [17] E. Alvarez and E. Castillo. Uncertainty measures in expert systems. *Journal of Microcomputers in Civil Engineering*, 9:359–366, 1994.
- [18] L. Ambrosio and N. Dancer. *Calculus of variations and partial differential equations*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [19] B. Arnold, E. Castillo, and J.M. Sarabia. Multivariate distributions with generalized Pareto conditionals. *Statistics and Probability Letters*, 17:361–368, 1993.
- [20] B. Arnold, E. Castillo, and J. M. Sarabia. Conditional characterization of the Mardia multivariate Pareto distribution. *Pakistan Journal of Statistics*, 10:143–145, 1994.
- [21] B. Arnold, E. Castillo, and J.M. Sarabia. A conditional characterization of the multivariate normal distribution. *Statistics and Probability Letters*, 19:313–315, 1994.
- [22] B. Arnold, E. Castillo, and J.M. Sarabia. Multivariate normality via conditional specification. *Statistics and Probability Letters*, 20:353–354, 1994.
- [23] B. Arnold, E. Castillo, and J.M. Sarabia. Conjugate exponential family priors for exponential family likelihoods. *Statistics*, 25:71–77, 1994.
- [24] B. Arnold, E. Castillo, and J.M. Sarabia. Specification of distributions by combinations of marginal and conditional distributions. *Statistics and Probability Letters*, 26:153–157, 1996.

- [25] B. Arnold, E. Castillo, and J.M. Sarabia. Modelling the fatigue life of longitudinal elements. *Naval Research Logistic Quarterly*, 43:885–895, 1996.
- [26] B. C. Arnold and D. Strauss. Bivariate distributions with exponential conditionals. *Journal of the American Statistical Association*, 83(402):522–527, 1988.
- [27] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. María Sarabia. Priors with convenient posteriors. *Statistics*, 28(4):347–354, 1996.
- [28] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. M. Sarabia. Some alternative bivariate Gumbel models. *Environmetrics*, 9(6):599–616, 1998.
- [29] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. M. Sarabia. Bayesian analysis for classical distributions using conditionally specified priors. *Sankhya*, B60:228–245, 1998.
- [30] B. C. Arnold, E. Castillo, J. M. Sarabia, and L. González-Vega. Multiple modes in densities with normal conditionals. *Statistics and Probability Letters*, 49(4): 355–363, 2000.
- [31] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. M. Sarabia. Quantification of incompatibility of conditional and marginal information. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 30(3):381–395, 2001.
- [32] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. M. Sarabia. A multivariate version of Stein’s identity with applications to moment calculations and estimation of conditionally specified distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 30(12):2517–2542, 2001.
- [33] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. María Sarabia. Conditionally specified distributions: an introduction. *Statist. Sci.*, 16(3):249–274, 2001. With comments and a rejoinder by the authors.
- [34] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. María Sarabia. Compatibility and near compatibility in multiple assessment of Bayesian networks. *Journal of Propagations in Probability and Statistics*, 2:161–176, 2002.
- [35] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. María Sarabia. Conditionally specified multivariate skewed distributions. *Sankhya*, 64:206–226, 2002.
- [36] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. María Sarabia. Bayesian inference using conditionally specified priors. In *Handbook of applied econometrics and statistical inference*, volume 165 of *Statist. Textbooks Monogr.*, pages 1–26. Dekker, New York, 2002.

- [37] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. M. Sarabia. Compatibility of partial or complete conditional probability specifications. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 123(1):133–159, 2004.
- [38] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. M. Sarabia. Distributions with conditionals in truncated weighted families. *Statistics*, 39(2):133–147, 2005.
- [39] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. M. Sarabia. Families of multivariate distributions involving the Rosenblatt construction. *Journal of the American Statistical Association*, 101(476):1652–1662, 2006.
- [40] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. María Sarabia. Variations on the classical multivariate normal theme. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137(11):3249–3260, 2007.
- [41] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. M. Sarabia. Distributions with generalized skewed conditionals and mixtures of such distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 36(8):1493–1503, 2007.
- [42] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. M. Sarabia. Bivariate distributions characterized by one family of conditionals and conditional percentile or mode functions. *Journal of Multivariate Analysis*, pages 1383–1392, 2008.
- [43] B. C. Arnold, E. Castillo, and J. M. Sarabia. Multivariate distributions defined in terms of contours. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138(12):4158–4171, 2008.
- [44] B.C. Arnold, E. Castillo, and J.M. Sarabia. *Conditional Specification of Statistical Models*. Springer Verlag, New York, 1999.
- [45] B.C. Arnold, E. Castillo, and J. María Sarabia. On multivariate order statistics. Application to ranked set sampling. *Computational Statistics and Data Analysis*, 53(12):4555–4569, 2009.
- [46] B.C. Arnold, E. Castillo, and J.M. Sarabia. Multivariate order statistics via multivariate concomitants. *Journal of Multivariate Analysis*, 100(5):946–951, 2009.
- [47] R. Baker and M. Garber. Variational approach to slope stability. In *Proceedings of the 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering*, volume 2, pages 9–12, Tokyo, 1977.
- [48] R. Baker and M. Garber. Theoretical analysis of the stability of slopes. *Geotechnique*, 28(4):395–411, 1978.

- [49] R. Baker, A. Luceño, and E. Castillo. Limit equilibrium methods and upper bound theorem. Technical Report 3, Universidad de Cantabria, Avda. Castros s/n, 1981.
- [50] N. Balakrishnan, E. Castillo, A. Fernández-Canteli, and M. Kateri. An exponential model for damage accumulation. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 38(2):215–232, 2009.
- [51] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty. *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, New York, second edition, 1993.
- [52] O. Bolza. *Lectures on the Calculus of Variations*. Chelsea Publishing Company, New York, 1973.
- [53] B. Bonnard and J. B. Caillau. In *Advanced topics in control systems theory*, volume 328 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, chapter Introduction to nonlinear optimal control, pages 1–60. A. Loria, F. Lamnabhi and E. Panteley eds. Springer-Verlag, 2006.
- [54] R. Bouckaert, E. Castillo, and J. M. Gutiérrez. A modified simulation scheme for inference in Bayesian networks. *International Journal of Approximate Reasoning*, 14(1):55–80, 1995.
- [55] U. Brechtken-Manderscheid. *Introduction to the calculus of variations*. Chapman and Hall Mathematics Series. Chapman & Hall, London, 1991. Translated from the German by P. G. Engstrom.
- [56] G. Casella, F. J. Girón, M. L. Martínez, and E. Moreno. Consistency of Bayesian procedures for variable selection. *Ann. Statist.*, 37(3):1207–1228, 2009.
- [57] E. Castillo and J. Revilla. One application of the calculus of variations to the stability of slopes. In *Proceedings of the 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering*, volume 2, pages 25–30, Tokyo, 1977.
- [58] C. Castillo, R. Mínguez, E. Castillo, and M. A. Losada. An optimal engineering design method with failure rate constraints and sensitivity analysis. Application to composite breakwaters. *Coastal Engineering*, 53(1):1–25, 2006.
- [59] E. Castillo. *Dispersion of a contaminant in jointed rock*. PhD thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois, 1972.
- [60] E. Castillo. *Sobre la influencia de las deformaciones en el comportamiento de pantallas continuas de hormigón*. PhD thesis, Escuela de Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 1973.

- [61] E. Castillo. Estadística de valores extremos. Distribuciones asintóticas. *Estadística Española*, 29(116):5–34, 1988.
- [62] E. Castillo. *Extreme value theory in Engineering*. Academic Press, San Diego, California, 1988.
- [63] E. Castillo. Extremes in engineering applications, extreme value theory and applications. In J. Galambos, J. Lechner, E. Simiu, and N. Macri, editors, *Proceedings of the Conference on Extreme Value Theory and Applications*, pages 15–42, Gaithersburg Maryland 1993, 1994. Kluwer Academic Publishers.
- [64] E. Castillo. Functional networks. *Neural Processing Letters*, 7(3):151–159, 1998.
- [65] E. Castillo. Constructing models and solving problems with functional equations. *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 4(1):27–66, 2001.
- [66] E. Castillo and E. Alonso. Hacia la confluencia de las formulaciones probabilistas y deterministas en Geotecnia. *Boletín de la Sociedad Española de Mecánica del Suelo y Cimentaciones*, 77:17–29, 1985.
- [67] E. Castillo and E. Alvarez. *Sistemas Expertos. Aprendizaje e Incertidumbre*. Editorial Paraninfo, S.A., Madrid, 1989.
- [68] E. Castillo and E. Alvarez. Uncertainty methods in expert systems. *Microcomputers in Civil Engineering*, 5(1):43–58, 1990.
- [69] E. Castillo and A. Fernández-Canteli. A statistical model for lifetime analysis. *Elektrika*, 84:5–21, 1986.
- [70] E. Castillo and A. Fernández-Canteli. Statistical models for fatigue analysis of long elements. In International Association for Bridge and Structural Engineering, editors, *Proceedings of the IABSE Workshop*, pages 15–32, El Paular, Madrid, 1992.
- [71] E. Castillo and A. Fernández-Canteli. A general regression model for lifetime evaluation and prediction. *International Journal of Fracture*, 107(2):117–137, 2001.
- [72] E. Castillo and A. Fernández-Canteli. A parametric lifetime model for the prediction of high-cycle fatigue based on stress level and amplitude. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 29(12):1031–1038, 2006.

- [73] E. Castillo and J. Galambos. Modeling and estimation of bivariate distributions with normal conditionals based on their marginals. In *Conference on weighted distributions*, Penn State University, 1985.
- [74] E. Castillo and J. Galambos. The characterization of a regression model associated with fatigue problems. In *Conference on Weighted Distributions*, Penn. State University, 1986.
- [75] E. Castillo and J. Galambos. Lifetime regression models based on a functional equation of physical nature. *Journal of Applied Probability*, 24:160–169, 1987.
- [76] E. Castillo and J. Galambos. Bivariate distributions with normal conditionals. In *Proceedings of the IASTED International Symposium: Simulation, Modeling and Development - SMD '87*, pages 59–62, Cairo, 1987. ACTA Press.
- [77] E. Castillo and J. Galambos. Conditional distributions and the bivariate normal distribution. *Metrika, International Journal for Theoretical and Applied Statistics*, 36(3):209–214, 1989.
- [78] E. Castillo and J. Galambos. Bivariate distributions with Weibull conditionals. *Analysis Mathematica*, 16(1):3–9, 1990.
- [79] E. Castillo and J. M. Gutiérrez. Nonlinear time series modeling and prediction using functional networks. extracting information masked by chaos. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 244(1-3):71–84, 1998.
- [80] E. Castillo and A. S. Hadi. Fitting the generalized Pareto distribution to data. *Journal of the American Statistical Association*, 92(440):1609–1620, 1997.
- [81] E. Castillo and A.S. Hadi. Parameter and quantile estimation for the generalized extreme-value distribution. *Environmetrics*, 5:417–432, 1995.
- [82] E. Castillo and A.S. Hadi. Modelling lifetime data with applications to fatigue models. *Journal of the American Statistical Association*, 90:1041–1054, 1995.
- [83] E. Castillo and A.S. Hadi. A method for estimating parameters and quantiles of distributions of continuous random variables. *Computational Statistics and Data Analysis*, 20:421–439, 1995.
- [84] E. Castillo and A. Iglesias. Some applications of functional equations to the characterization of families of surfaces. In D. Lasser, editor, *CAGD'94 1st Peruvian Workshop on Computer Aided Geometric Design*, pages 153–169, Aachen, 1994. Verlag Shaker.

- [85] E. Castillo and A. Iglesias. Some characterizations of families of surfaces using functional equations. *ACM Transactions on Graphics*, 16(3):296–318, 1997.
- [86] E. Castillo and A. Iglesias. A package for symbolic solution of real functional equations of real variables. *Aequationes Math*, 54(1-2):181–198, 1997.
- [87] E. Castillo and F. Jubete. The Γ -algorithm and some applications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(3):369–389, 2004.
- [88] E. Castillo and U. Kjelruff. Sensitivity analysis in Gaussian Bayesian networks using a symbolic-numerical technique. *Reliability Engineering and System Safety*, 79(2):139–148, 2003.
- [89] E. Castillo and A. Luceño. One application of the calculus of variations to bearing capacity of foundations. In *Second International Conference on Applied Numerical Modeling*, pages 1–11, Madrid, 1978.
- [90] E. Castillo and A. Luceño. Application of the calculus of variations to the vertical cut off in cohesive frictionless soil (discussion). *Geotechnique*, 30(1):1–16, 1980.
- [91] E. Castillo and A. Luceño. Nuevos mecanismos de rotura para la resolución de problemas de estabilidad. *Boletín del Laboratorio del Transporte y Mecánica del Suelo José Luis Escario*, 46(140):3–14, 1980.
- [92] E. Castillo and A. Luceño. Theoretical analysis of the stability of slopes (discussion). *Geotechnique*, 30:118–121, 1981.
- [93] E. Castillo and A. Luceño. A critical analysis of some variational methods in slope stability analysis. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 6:195–209, 1982.
- [94] E. Castillo and J. Revilla. El cálculo de variaciones y la estabilidad de taludes. *Boletín del Laboratorio del Transporte y Mecánica del Suelo José Luis Escario*, 108:31–37, 1975.
- [95] E. Castillo and J. Revilla. Una aplicación del cálculo de variaciones a la estabilidad de taludes. *Revista del Laboratorio del Transporte y Mecánica del Suelo José Luis Escario*, 115:3–23, 1976.
- [96] E. Castillo and R. Ruiz-Cobo. *Functional Equations in Science and Engineering*. Marcel Dekker, New York, 1992.

- [97] E. Castillo and J.M. Sarabia. Bivariate distributions with second kind beta conditionals. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 19(9):3433–3445, 1990.
- [98] E. Castillo and J.M. Sarabia. Engineering analysis of extreme value data. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 118(2):129–146, 1992.
- [99] E. Castillo and J.M. Sarabia. Extreme value analysis of wave heights. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 99:445–454, 1994.
- [100] E. Castillo and A. Serrano. Análisis probabilístico de la estabilidad de taludes rocosos. *Boletín del Laboratorio del Transporte y Mecánica del Suelo José Luis Escario*, 100:9–20, 1973.
- [101] E. Castillo, M. Losada, and J. Puig-Pey. Probabilistic analysis of the number of waves and their influence on the design wave height of marine structures under dynamic loading. In *Safety of structures under dynamic loading*, Trondheim (Norway), 1977.
- [102] E. Castillo, M. Losada, and J. Puig-Pey. Análisis probabilístico del número de olas y su influencia en la altura de ola de cálculo de obras marítimas. *Revista de Obras Públicas*, 119(3148):639–648, 1977.
- [103] E. Castillo, E. Moreno, and J. Puig-Pey. Criterios mínimo-cuadráticos de ajuste de distribuciones de probabilidad a datos experimentales. *Revista de Obras Públicas*, 129:433–439, 1982.
- [104] E. Castillo, A. Ascorbe, and A. Fernández-Canteli. Static progressive failure in multiple tendons. A statistical approach. In *44th Session of ISI*, Madrid, 1983.
- [105] E. Castillo, A. Fernández-Canteli, A. Ascorbe, and E. Mora. Influence of stress distribution on the strength of wires, statistical analysis. In *44th Session of ISI*, Madrid, 1983.
- [106] E. Castillo, A. Fernández-Canteli, A. Ascorbe, and E. Mora. The Box-Jenkins model and the progressive fatigue failure of large parallel elements stay-tendons. In *ASI-NATO, Statistical extremes and applications*, Vimeiro, Lisbon, 1983.
- [107] E. Castillo, E. Moreno, and J. Puig-Pey. Nuevos modelos de distribuciones de extremos basados en aproximaciones en las ramas. *Trabajos de Estadística e Investigación Operativa*, 34:6–24, 1983.

- [108] E. Castillo, A. Fernández-Canteli, A. Ascorbe, and E. Mora. Aplicación de los modelos de series temporales al análisis estadístico de la resistencia de tendones de puentes atirantados. *Anales de Ingeniería Mecánica*, 2:379–382, 1984.
- [109] E. Castillo, A. Fernández-Canteli, E. Mora, and A. Ascorbe. Influencia de la longitud en la resistencia a fatiga de tendones de puentes atirantados. *Anales de Ingeniería Mecánica*, 2:383–389, 1984.
- [110] E. Castillo, A.V. Unzué Pérez, F. Gutiérrez-Solana, and Fernández Canteli. Estudio de la relación existente entre dos métodos clásicos del análisis de la resistencia a fatiga de elementos estructurales. *Anales de Ingeniería Mecánica*, 2(1):150–156, 1984.
- [111] E. Castillo, A. Fernández-Canteli, V. Esslinger, and B. Thurliman. Statistical model for fatigue analysis of wires, strands and cables. *IABSE Proceedings P-82/85*, pages 1–40, 1985.
- [112] E. Castillo, J. Galambos, and J.M. Sarabia. The selection of the domain of attraction of an extreme value distribution from a set of data, proceedings, oberwolfach, Extreme Value Theory. *Lecture Notes in Statistics*, 51, 1987.
- [113] E. Castillo, A. Luceño, A. Montalbán, and A. Fernández-Canteli. A dependent fatigue lifetime model. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 16(4):1181–1194, 1987.
- [114] E. Castillo, A. Montalbán, A. Fernández, and A. Arroyo. Two-step estimation method for a five parameter fatigue Weibull regression model. In *The First International Conference on Statistical Computing (ICOSCO-I)*, volume 2, pages 293–308, Cesme, Izmir-Turkey, 1987. American Sciences Press.
- [115] E. Castillo, J. Rodríguez-Pérez, I. Vi na, and A. Fernández-Canteli. Modelling the random failure of plates and beams under non-constant stress distributions. In *The First International Conference on Statistical Computing (ICOSCO-I)*, volume 1, pages 223–235, Cesme, Izmir-Turkey, 1987. American Sciences Press.
- [116] E. Castillo, J. Velasco, J. Vi na, and A. Fernández-Canteli. Statistical modelling approach to the behaviour of large sized glass plates. In *XV International Congress on Glass*, volume 3, pages 235–240, Leningrad, 1989.
- [117] E. Castillo, A. Fernández-Canteli, J.R. Ruiz-Tolosa, and J.M. Sarabia. Statistical models for analysis of fatigue life of long elements. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 116(5):1036–1049, 1990.

- [118] E. Castillo, J. Galambos, and J.M. Sarabia. Caracterización de modelos bivariantes con distribuciones condicionadas tipo gamma. *Estadística Española*, 32(124):439–450, 1990.
- [119] E. Castillo, E. Alvarez, A. Cobo, and M.T. Herrero. An expert system prototype for the analysis of extreme value problems. In J. Galambos, J. Lechner, E. Simiu, and C. Hagwood), editors, *Extreme value theory and applications. Proceedings of the Conference on Extreme Value Theory and Its Applications, Volume 3*, pages 85–93, Gaithersburg (USA), 1994. National Institute of Standards and Technology, Special Publication 866.
- [120] E. Castillo, E. Alvarez, A. Cobo, and T. Herrero. An expert system prototype for the analysis of extreme value problems. *National Institute of Standards and Technology, NIST Special Publication*, 866:85–93, 1994.
- [121] E. Castillo, A. Cobo, J.M. Gutiérrez, A. Iglesias, and H. Sagástegui. Causal networks models in expert systems. *Journal of Microcomputers in Civil Engineering*, 9:315–328, 1994.
- [122] E. Castillo, E. Mora, and E. Alvarez. Log-linear models in expert systems. *Journal of Microcomputers in Civil Engineering*, 9:347–357, 1994.
- [123] E. Castillo, J.M. Gutiérrez, and A. Iglesias. Solving a functional equation. *The Mathematica Journal*, 5:82–86, 1995.
- [124] E. Castillo, J. M. Gutiérrez, and A. S. Hadi. A new method for efficient symbolic propagation in discrete Bayesian networks. *Networks*, 28(1):31–43, 1996.
- [125] E. Castillo, J.M. Gutiérrez, and A.S. Hadi. *Expert Systems and Probabilistic Network Models*. Springer Verlag, 1996.
- [126] E. Castillo, J.M. Gutiérrez, and A.S. Hadi. A new method for efficient symbolic propagation in discrete Bayesian networks. *Networks*, 28:31–43, 1996.
- [127] E. Castillo, A. S. Hadi, and C. Solares. Learning and updating of uncertainty in Dirichlet models. *Machine Learning*, 26:43–56, 1996.
- [128] E. Castillo, C. Solares, and P. Gómez. Tail sensitivity analysis in Bayesian networks. In *Proceedings of the Twelfth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'96)*, Portland (Oregon), 1996. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, California.
- [129] E. Castillo, J. M. Gutiérrez, and A. S. Hadi. Sensitivity analysis in discrete Bayesian networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part A: Systems and Humans*, 27(4):412–423, 1997.

- [130] E. Castillo, J. M. Gutiérrez, A. S. Hadi, and C. Solares. Symbolic propagation and sensitivity analysis in Gaussian Bayesian networks with application to damage assessment. *Artificial Intelligence in Engineering*, 11(2):173–181, 1997.
- [131] E. Castillo, J. M. Sarabia, and A. S. Hadi. Fitting continuous bivariate distributions to data. *Journal of the Royal Statistical Society Series D: The Statistician*, 46(3):355–369, 1997.
- [132] E. Castillo, C. Solares, and P. Gómez. Estimating extreme probabilities using tail simulated data. *International Journal of Approximate Reasoning*, 17:163–189, 1997.
- [133] E. Castillo, C. Solares, and P. Gómez. Tail uncertainty analysis in complex systems. *Artificial Intelligence*, 96(2):395–419, 1997.
- [134] E. Castillo, C. Solares, and P. Gómez. Estimating extreme probabilities using tail simulated data. *International Journal of Approximate Reasoning*, 17(2-3): 163–189, 1997.
- [135] E. Castillo, C. Solares, and P. Gómez. High-probability one-sided confidence intervals in reliability models. *Nuclear Science and Engineering*, 126(2):158–167, 1997.
- [136] E. Castillo, A. Cobo, A. Fernández-Canteli, F. Jubete, and E. Pruneda. Updating inverses in matrix analysis of structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(8):1479–1504, 1998.
- [137] E. Castillo, A. Cobo, J. M. Gutiérrez, and E. Pruneda. *Introducción a las redes funcionales con aplicaciones*. Thompson-Paraninfo, Madrid, 1998.
- [138] E. Castillo, A. Cobo, J. M. Gutiérrez, and E. Pruneda. *Functional Networks with Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 1998.
- [139] E. Castillo, J. M. Gutiérrez, and A. S. Hadi. Modeling probabilistic networks of discrete and continuous variables. *Journal of Multivariate Analysis*, 64(1): 48–65, 1998.
- [140] E. Castillo, A. S. Hadi, and J. M. Sarabia. A method for estimating Lorenz curves. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 27(8):2037–2063, 1998.

- [141] E. Castillo, A. Cobo, J. Manuel Gutiérrez, and E. Pruneda. Working with differential, functional and difference equations using functional networks. *Applied Mathematical Modelling*, 23(2):89–107, 1999.
- [142] E. Castillo, A. Fernández-Canteli, and A. S. Hadi. On fitting a fatigue model to data. *International Journal of Fatigue*, 21(1):97–106, 1999.
- [143] E. Castillo, J. Ferréndiz, and P. Sanmartín. Potential approach in marginalizing Gibbs models. *International Journal of Approximate Reasoning*, 21(3):257–290, 1999.
- [144] E. Castillo, A. S. Hadi, F. Jubete, and C. Solares. An expert system for coherent assessment of probabilities in multigraph models. *Networks*, 33(3):193–206, 1999.
- [145] E. Castillo, J. M. Sarabia, C. Solares, and P. Gómez. Uncertainty analyses in fault trees and Bayesian networks using FORM/SORM methods. *Reliability Engineering and System Safety*, 65(1):29–40, 1999.
- [146] E. Castillo, A. Cobo, R. Gómez-Nesterkin, and A. S. Hadi. A general framework for functional networks. *Networks*, 35(1):70–82, 2000.
- [147] E. Castillo, A. Cobo, J. M. Gutiérrez, and E. Pruneda. Functional networks: A new network-based methodology. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 15(2):90–106, 2000.
- [148] E. Castillo, J. M. Gutierrez, A. Cobo, and C. Castillo. Some learning methods in functional networks. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 15(6):427–439, 2000.
- [149] E. Castillo, J. M. Sarabia-Alegría, J. M. Sarabia-Alzaga, and A. M. González. Some demand functions in a duopoly market with advertising. In Th. Rassias, editor, *Functional Equations and Inequalities*, pages 31–54. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [150] E. Castillo, A. Cobo, F. Jubete, R. E. Pruneda, and C. Castillo. An orthogonally based pivoting transformation of matrices and some applications. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 22(3):666–681, 2001.
- [151] E. Castillo, A. Conejo, P. Pedregal, R. García, and N. Alguacil. *Building and Solving Mathematical Programming Models in Engineering and Science*. John Wiley & Sons Inc., New York, 2001. Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts.

- [152] E. Castillo, M. Esquivel, and R. E. Pruneda. Automatic generation of linear programming problems for computer aided instruction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32, 2001.
- [153] E. Castillo, A. S. Hadi, J. M. Gutiérrez, and B. Lacruz. Some applications of functional networks in statistics and engineering. *Technometrics*, 43(1):10–24, 2001.
- [154] E. Castillo, A. S. Hadi, and B. Lacruz. Regression diagnostics for the least absolute deviations and the minimax methods. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 30(6):1197–1225, 2001.
- [155] E. Castillo, B. Lacruz, P. Lasala, and A. Lekuona. Estimating transition-probabilities in a dynamic graphic model with unobservable variables. *IEEE Transactions on Reliability*, 50(2):135–144, 2001.
- [156] E. Castillo, A. Fernández-Canteli, and R. Mínguez. Computing failure probabilities. Applications to reliability analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 77(2):131–141, 2002.
- [157] E. Castillo, O. Fontenla-Romero, B. Guijarro-Berdiñas, and A. Alonso-Betanzos. A global optimum approach for one-layer neural networks. *Neural Computation*, 14(6):1429–1449, 2002.
- [158] E. Castillo, A. S. Hadi, B. Lacruz, and J. M. Sarabia. Constrained mixture distributions. *Metrika*, 55(3):247–269, 2002.
- [159] E. Castillo, F. Jubete, R. E. Pruneda, and C. Solares. Obtaining simultaneous solutions of linear subsystems of inequalities and duals. *Linear Algebra Appl.*, 346:131–154, 2002.
- [160] E. Castillo, A. J. Conejo, R. Mínguez, and C. Castillo. An alternative approach for addressing the failure probability-safety factor method with sensitivity analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 82(2):207–216, 2003.
- [161] E. Castillo, A. Conejo, A. S. Hadi, and A. Fernández-Canteli. A general method for local sensitivity analysis with application to regression models and other optimization problems. *Technometrics*, 46(4):430–444, 2004.
- [162] E. Castillo, M. A. Losada, R. Mínguez, C. Castillo, and A. Baquerizo. Optimal engineering design method that combines safety factors and failure probabilities: Application to rubble-mound breakwaters. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 130(2):77–88, 2004.

- [163] E. Castillo, R. Mínguez, A. Ruiz Terán, and A. Fernández-Canteli. Design and sensitivity analysis using the probability-safety-factor method. an application to retaining walls. *Structural Safety*, 26(2):159–179, 2004.
- [164] E. Castillo, A. J. Conejo, R. E. Pruneda, and C. Solares. State estimation observability based on the null space of the measurement jacobian matrix. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(3):1656–1658, 2005.
- [165] E. Castillo, A. S. Hadi, N. Balakrishnan, and J. M. Sarabia. *Extreme Value and Related Models with Applications in Engineering and Science*. Wiley, New York, 2005.
- [166] E. Castillo, A. Iglesias, and R. Ruiz-Cobo. *Functional Equations in Applied Sciences*. Mathematics in Science and Engineering Elsevier, Madrid, 2005.
- [167] E. Castillo, R. Mínguez, A. Ruiz-Terán, and A. Fernández-Canteli. Design of a composite beam using the failure probability-safety factor method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(9):1148–1182, 2005.
- [168] E. Castillo, A. J. Conejo, C. Castillo, and R. Mínguez. Solving ordinary differential equations with range conditions. Applications. *SIAM Review*, 48(2):307–317, 2006.
- [169] E. Castillo, A. J. Conejo, C. Castillo, R. Mínguez, and D. Ortigosa. Perturbation approach to sensitivity analysis in mathematical programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 128(1):49–74, 2006.
- [170] E. Castillo, A. J. Conejo, R. Mínguez, and C. Castillo. A closed formula for local sensitivity analysis in mathematical programming. *Engineering Optimization*, 38(1):93–112, 2006.
- [171] E. Castillo, A. J. Conejo, R. E. Pruneda, and C. Solares. Observability analysis in state estimation: A unified numerical approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, 21(2):877–886, 2006.
- [172] E. Castillo, B. Guijarro-Berdiñas, O. Fontenla-Romero, and A. Alonso-Betanzos. A very fast learning method for neural networks based on sensitivity analysis. *Journal of Machine Learning Research*, 7:1159–1182, 2006.
- [173] E. Castillo, M. López-Aenlle, A. Ramos, A. Fernández-Canteli, R. Kieselbach, and V. Esslinger. Specimen length effect on parameter estimation in modelling fatigue strength by Weibull distribution. *International Journal of Fatigue*, 28(9):1047–1058, 2006.

- [174] E. Castillo, R. E. Pruneda, C. Solares, and R. Mínguez. Interpreting linear systems of equalities and inequalities. Application to the water supply problem. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 13(5):361–397, 2006.
- [175] E. Castillo, A. J. Conejo, C. Castillo, and R. Mínguez. Closed formulas in local sensitivity analysis for some classes of linear and non-linear problems. *TOP*, 15(2):355–371, 2007.
- [176] E. Castillo, A. J. Conejo, R. Eva Pruneda, and C. Solares. Observability in linear systems of equations and inequalities: Applications. *Computers and Operations Research*, 34:1708–1720, 2007.
- [177] E. Castillo, A. Fernández-Canteli, A. S. Hadi, and M. López-Aenlle. A fatigue model with local sensitivity analysis. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 30(2):149–168, 2007.
- [178] E. Castillo, A. Fernández-Canteli, M. López-Aenlle, and M. L. Ruiz Ripoll. Some fatigue damage measures for longitudinal elements based on the Wöhler field. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 30(11):1063–1075, 2007.
- [179] E. Castillo, N. Sánchez-Marroño, A. Alonso-Betanzos, and C. Castillo. Functional network topology learning and sensitivity analysis based on ANOVA decomposition. *Neural Computation*, 19(1):231–257, 2007.
- [180] E. Castillo, M. Sarabia, and E. Alvarez. The danger model: Application to a competitive market. *Computational Management Science*, 4(4):301–312, 2007.
- [181] E. Castillo, C. Castillo, and A. S. Hadi. Sensitivity analysis in ordered and restricted parameter models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138(6):1556–1576, 2008.
- [182] E. Castillo, C. Castillo, A. S. Hadi, and R. Mínguez. Duality and local sensitivity analysis in least squares, minimax, and least absolute values regressions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 78(10):887–909, 2008.
- [183] E. Castillo, C. Castillo, A. S. Hadi, and J. M. Sarabia. Local sensitivity analysis in estimation problems. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 17(3):703–725, 2008.
- [184] E. Castillo, A. J. Conejo, and E. Aranda. Sensitivity analysis in calculus of variations. Some applications. *SIAM Review*, 50(2):294–312, 2008.

- [185] E. Castillo, A. J. Conejo, J. M. Menéndez, and P. Jiménez. The observability problem in traffic network models. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 23(3):208–222, 2008.
- [186] E. Castillo, A. J. Conejo, R. E. Pruneda, C. Solares, and J. M. Menéndez. m-r robust observability in state estimation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 23(2):296–305, 2008.
- [187] E. Castillo, A. Fernández-Canteli, H. Pinto, and M. L. Ruiz-Ripoll. A statistical model for crack growth based on tension and compression Wöhler fields. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(15):4439–4449, 2008.
- [188] E. Castillo, A. Fernández-Canteli, and M. L. Ruiz-Ripoll. A general model for fatigue damage due to any stress history. 30:150–164, 2008.
- [189] E. Castillo, A. Fernández-Canteli, and M. L. Ruiz-Ripoll. A general model for fatigue damage due to any stress history. *International Journal of Fatigue*, 30(1):150–164, 2008.
- [190] E. Castillo, I. Gallego, J. M. Ureña, and J. M. Coronado. Timetabling optimization of a single railway track line with sensitivity analysis. *TOP*, pages 1–32, 2008.
- [191] E. Castillo, A. S. Hadi, B. Lacruz, and R. E. Pruneda. Semi-parametric nonlinear regression and transformation using functional networks. *Computational Statistics and Data Analysis*, 52(4):2129–2157, 2008.
- [192] E. Castillo, P. Jiménez, J. M. Menéndez, and A. J. Conejo. The observability problem in traffic models: Algebraic and topological methods. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 9(2):275–287, 2008.
- [193] E. Castillo, A. Luceño, and P. Pedregal. Composition functionals in calculus of variations. Application to products and quotients. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(1):47–75, 2008.
- [194] E. Castillo, J. M. Menéndez, and P. Jiménez. Trip matrix and path flow reconstruction and estimation based on plate scanning and link observations. *Transportation Research Part B: Methodological*, 42(5):455–481, 2008.
- [195] E. Castillo, J. M. Menéndez, P. Jiménez, and A. Rivas. Closed form expressions for choice probabilities in the Weibull case. *Transportation Research Part B: Methodological*, 42(4):373–380, 2008.

- [196] E. Castillo, J. M. Menéndez, and S. Sánchez-Cambronero. Predicting traffic flow using Bayesian networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, 42(5):482–509, 2008.
- [197] E. Castillo, R. Mínguez, and C. Castillo. Sensitivity analysis in optimization and reliability problems. *Reliability Engineering and System Safety*, 93(12):1788–1800, 2008.
- [198] E. Castillo, R. Mínguez, C. Castillo, and A. S. Cofiño. Dealing with the multiplicity of solutions of the l_1 and l_∞ regression models. *European Journal of Operational Research*, 188(2):460–484, 2008.
- [199] E. Castillo, C. Castillo, A.S. Hadi, and J.M. Sarabia. Combined regression models. *Computational Statistics*, 24(1):37–66, 2009.
- [200] E. Castillo, A. S. Hadi, and Mínguez. Diagnostics for nonlinear regressions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 79(9):1109–1128, 2009.
- [201] E. Castillo, A. Fernández-Canteli, and C. Mozos. A new probabilistic model for crack propagation under fatigue loads and its connection with Wöhler fields. *International Journal of Fatigue*, 32:744–753, 2010.
- [202] A. Conejo, E. Castillo, R. Mínguez, and R. García-Bertrand. *Decomposition Techniques in Mathematical Programming. Engineering and Science Applications*. Springer, Berlin, 2004.
- [203] A. J. Conejo, E. Castillo, R. Mínguez, and F. Milano. Locational marginal price sensitivities. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(4):2026–2033, 2005.
- [204] B. Dacorogna. *Introduction to the calculus of variations*. Imperial College Press, London, 2004.
- [205] Bernard Dacorogna. *Introduction au calcul des variations*, volume 3 of *Cahiers Mathématiques de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne [Mathematical Papers of the École Polytechnique Fédérale de Lausanne]*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1992.
- [206] A.M.P. De Jesus, H. Pinto, A. Fernández-Canteli, Castillo, E., and J.A.F.O. Correia. Fatigue assessment of a riveted shear splice based on a probabilistic model. *International Journal of Fatigue*, 32(2):453–462, 2010.
- [207] L. Elsgolc. *Calculus of Variations*. Pergamon Press, London-Paris-Frankfurt, 1962.

- [208] D. Erdogmus, O. Fontenla-Romero, J. C. Principe, A. Alonso-Betanzos, and E. Castillo. Linear-least-squares initialization of multilayer perceptrons through backpropagation of the desired response. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 16(2):325–337, 2005.
- [209] *Primeros intentos para la organización de la enseñanza de la Estadística en España: Cursos de Estadística y sus aplicaciones, 1950-52*, Historia de la Probabilidad y la Estadística, 193–204, Ediciones AC, Madrid, 2002.
- [210] M. C. Escribano Ródenas and A. I. Busto Caballero, *La creación en España de la primera escuela de Estadística*, Historia de la Probabilidad y la Estadística, 205–220, Ediciones AC, Madrid, 2002.
- [211] *Sixto Ríos García: el matemático que impulsó la Estadística española en el siglo xx*, La Gaceta de la RSME 12:(2) 369–391, 2009.
- [212] L. Euler. “*Metod Nakhozhdeniia Krivyykh Linii, Obladaiushchikh Svoistvami Maksimuma Libo Minimuma, Ili Reshenie Izoperimetricheskoi Zadachi Vziatoi v Samom Shirokom Smysle*”. GITTL, 1744. Translated from the 1744 ed.
- [213] J. Ferrándiz, E. F. Castillo, and P. Sanmartín. Temporal aggregation in chain graph models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 133(1):69–93, 2005.
- [214] O. Fontenla-Romero, E. Castillo, A. Alonso-Betanzos, and B. Guijarro-Berdiñas. A measure of fault tolerance for functional networks. *Neurocomputing*, 62(1-4):327–347, 2004.
- [215] M. J. Forray. *Variational Calculus in Science and Engineering*. Mc Graw Hill book Company, New York, 1968.
- [216] A. R. Forsyth. *Calculus of Variations*. Dover, New York, 1960.
- [217] J Galambos. *The asymptotic theory of extreme order statistics*. John Wiley and Sons, New York, 1978.
- [218] M. Garber and R. Baker. Bearing capacity by variational method. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 103(11):1209–1225, 1977.
- [219] I. M. Gelfand and S. V. Fomin. *Calculus of Variations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963.
- [220] M. Giaquinta and S. Hildebrandt. *Calculus of Variations. Vol. 1: The Lagrangian Formalism*. Springer-Verlag, New York, 1995.

- [221] M. Giaquinta and S. Hildebrandt. *Calculus of Variations. Vol. 2: The Hamiltonian Formalism*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [222] F. J. Girón, E. Moreno, G. Casella, and M. L. Martínez. Consistency of objective Bayes factors for nonnested linear models as the model dimension grows. *Revista de la Real Academia de Ciencias, Serie A: Matemáticas (RACSAM)*, 104:57–67, 2010.
- [223] F. J. Girón. On the duality of decision criteria. *Trabajos Estadíst. Investigación Oper.*, 26(1-3):205–228, 1975.
- [224] F. J. Girón. Probability and utility: dual concepts in decision theory. *Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fís. Natur. Madrid*, 73(2):225–230, 1979. ISSN 0034-0596.
- [225] F. J. Girón and J. M. Bernardo. Lasa matemáticass de los sistemas electorales. *Rev. Real Academia de Ciencias*, 101:21–33, 2007.
- [226] F. J. Girón and M. J. Ríos. Determining “somewhere in La Mancha” as a statistical problem. *Bol. Soc. Estad. Investig. Oper.*, 22(1):23–29, 2006.
- [227] F. J. Girón and J. C. Rojano. Bayesian Kalman filtering with elliptically contoured errors. *Biometrika*, 81(2):390–395, 1994.
- [228] F. J. Girón, M. L. Martínez, and J. C. Rojano. Dynamical linear models and mixtures of distributions. *Estadíst. Española*, 31(121):165–206, 1989. ISSN 0014-1151. With comments and a rejoinder by the authors.
- [229] F. J. Girón, J. Ginebra, and A. Riba. Bayesian analysis of a multinomial sequence and homogeneity of literary style. *Amer. Statist.*, 59(1):19–30, 2005.
- [230] H. H. Goldstine. *A history of the calculus of variations from the 17th to the 19th Century*. Springer Verlag, New York, Heildelberg, Berlin, 1980.
- [231] N. Janbu. Earth pressure and bearing capacity calculations by generalized procedure of slices. In *Proceedings of the 4th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering*, London, 1957.
- [232] M. C. Jones. Families of distributions arising from distributions of order statistics. *Test*, 13(1):1–43, 2004.
- [233] F. Jubete. *El cono poliédrico convexo. Su incidencia en el álgebra lineal y la programación no lineal*. Editoria CIS, Santander, 1991.

- [234] F. Jubete. *El Politopo. Su estructura geométrica y volumen exacto*. Editorial CIS, Santander, 1993.
- [235] F. Jubete and E. Castillo. Linear programming and expert systems. *Journal of Microcomputers in Civil Engineering*, 9:335–345, 1994.
- [236] F. Jubete and E. Castillo. A complete description of cones and polytopes including hypervolumes of all facets of a polytope. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(1):85–102, 2007.
- [237] R. Koller, M. L. Ruiz-Ripoll, A. García, A. Fernández-Canteli, and E. Castillo. Experimental validation of a statistical model for the Wöhler field corresponding to any stress level and amplitude. *International Journal of Fatigue*, 31(2): 231–241, 2009.
- [238] M. A. Krasnov, G. I. Makarenko, and A. I. Kiselev. *Calculus of Variations*. Nauka, Moscow, 1973.
- [239] M. Losada, E. Castillo, and J. Puig-Pey. Incidencia de los datos disponibles en la fiabilidad de la estimación de la ola de cálculo en las obras marítimas. *Revista de Obras Públicas*, 125(3161):667–671 and 779–781, 1978.
- [240] A. Luceño and E. Castillo. Determinación de la carga de hundimiento de zapatas mediante el cálculo de variaciones. *Revista del Laboratorio de Transporte y Mecánica del Suelo José Luis Escario*, 125:3–8, 1978.
- [241] A. Luceño and E. Castillo. Análisis crítico de los métodos variacionales aplicados a la estabilidad de taludes. *Boletín del Laboratorio de Transporte y Mecánica del Suelo José Luis Escario*, 45:3–14, 1980.
- [242] A. Luceño and E. Castillo. Evaluation of variational methods in slope stability. In *International symposium on landslides*, volume 4, pages 255–258, New Delhi, 1980.
- [243] A. Luceño and E. Castillo. Extreme value problems of limiting equilibrium (discussion). *Journal of the Geotechnical Engineering Division (ASCE)*, pages 1155–1171, 1980.
- [244] A. Luceño and E. Castillo. Métodos variacionales basados en el teorema de la cota superior. *Revista de Obras Públicas*, 130:275–290, 1983.
- [245] D. G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, second edition, 1984.

- [246] Charles R. MacCluer. *Calculus of variations. Mechanics, control, and other applications*. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2005.
- [247] J. B. McDonald. Some generalized functions for the size distribution of income. *Econometrica*, 52:647–663, 1984.
- [248] R. Mínguez and E. Castillo. Reliability-based optimization in engineering using decomposition techniques and FORMS. *Structural Safety*, 31(3):214–223, 2009.
- [249] R. Mínguez, E. Castillo, and A. S. Hadi. Solving the inverse reliability problem using decomposition techniques. *Structural Safety*, 27(1):1–23, 2005.
- [250] R. Mínguez, E. Castillo, C. Castillo, and M. A. Losada. Optimal cost design with sensitivity analysis using decomposition techniques. Application to composite breakwaters. *Structural Safety*, 28(4):321–340, 2006.
- [251] E. Moreno, F.J. Girón, and G. Casella. Consistency of objective Bayes test as the model dimension grows. *Annals of Statistics*, 38(4):1937–1952, 2010.
- [252] A. Naranjo. *Aplicación de los sistemas expertos al diagnóstico médico y a la enseñanza de la Medicina*. PhD thesis, Universidad de Cantabria, Santander, 1988.
- [253] J. Pearl. *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*. Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1988.
- [254] I. P. Petrov. *Variational methods in optimum control theory*. Academic Press, New York and London, 1968. Translated from the Russian by M. D. Friedman and H. J. Zeldam.
- [255] J. Pickands. Statistical inference using extreme order statistics. *Annals of Statistics*, 3:119–131, 1975.
- [256] J. Revilla and E. Castillo. The calculus of variations applied to stability of slopes. *Geotechnique*, 27(1):1–11, 1977.
- [257] S. Ríos. *Métodos Estadísticos*. Mc Graw Hill y Ediciones del Castillo, quinta edition, 1967.
- [258] S. Ríos. *Matemática Aplicada*. Paraninfo, 1975.
- [259] S. Ríos. *Procesos de decisión multicriterio*. Eudema, Madrid, 1990.

- [260] M. Ruiz, F. J. Girón, C. J. Pérez, J. Martín, and C. Rojano. A Bayesian model for multinomial sampling with misclassified data. *J. Appl. Stat.*, 35(3-4):369–382, 2008.
- [261] J. R. Ruíz-Tolosa and E. Castillo. *From vectors to tensors*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [262] J. R. Ruiz-Tolosa and E. Castillo. Stretching and condensing tensors. Application to tensor and matrix equations. *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, 1(1-4): 109–139, 2006.
- [263] A. Samartín, V. Jaria, and E. Castillo. Losa ortótropa circular. *Hormigón y Acero*, 118:111–129, 1976.
- [264] J. M. Sarabia and E. Castillo. About a class of max-stable families with applications to income distributions. *Metron*, 63(3):505–527, 2005.
- [265] J. M. Sarabia, E. Castillo, and D. J. Slottje. An exponential family of Lorenz curves. *Southern Economic Journal*, 67(3):748–756, 2001.
- [266] J. M. Sarabia, E. Castillo, and D. J. Slottje. Lorenz ordering between McDonald’s generalized functions of the income size distribution. *Economics Letters*, 75(2):265–270, 2002.
- [267] J. M. Sarabia, E. Castillo, E. Gómez-Déniz, and F. J. Vázquez-Polo. A class of conjugate priors for log-normal claims based on conditional specification. *Journal of Risk and Insurance*, 72(3):479–495, 2005.
- [268] J. M. Sarabia, E. Castillo, M. Pascual, and M. Sarabia. Mixture Lorenz curves. *Economics Letters*, 89(1):89–94, 2005.
- [269] J. M. Sarabia, E. Castillo, M. Pascual, and M. Sarabia. Bivariate income distributions with lognormal conditionals. *Journal of Economic Inequality*, 5(3): 371–383, 2007.
- [270] J.M. Sarabia, E. Castillo, and D. J. Slottje. An ordered family of Lorenz curves. *Journal of Econometrics*, 91(1):43–60, 1999.
- [271] I. M. Sobol. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their monte carlo estimates. *Mathematics and Computers in Simulation*, 55: 271–280, 2001.
- [272] C. Solares, A.J. Conejo, E. Castillo, and R.E. Pruneda. Binary-arithmetic approach to observability checking in state estimation. *IET Generation, Transmission and Distribution*, 3(4):336–345, 2009.

**CONTESTACIÓN
DEL EXCMO. SR.
D. FRANCISCO JAVIER GIRÓN GONZÁLEZ-TORRE**

Excelentísimo Señor Presidente
Excelentísimos Señores Académicos
Señoras y Señores:

El que nuestra Real Academia me haya designado para dar la bienvenida en su nombre al profesor Enrique Castillo Ron, me llena de satisfacción y de agradecimiento por un doble motivo: en primer lugar, porque va a ocupar la medalla número 12, vacante por el fallecimiento del que siempre he considerado mi maestro, el profesor Sixto Ríos García, al que siempre estuve unido, primero, como estudiante y, posteriormente, como profesor del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la universidad Complutense de Madrid, relación que prosiguió hasta su fallecimiento. Fue precisamente D. Sixto quien contestó a mi discurso de ingreso en esta casa, en la ya lejana fecha de marzo de 1991, a la que de algún modo me siento transportado en este acto, ésta vez sentado al otro lado del estrado. El segundo motivo de satisfacción se debe a la excepcional trayectoria académica, científica y humana, del profesor Enrique Castillo.

Es costumbre que la contestación a un discurso de ingreso haga una semblanza de los méritos del beneficiario y glose una parte del contenido de éste. La enumeración de sus méritos y logros científicos es una tarea fácil, pero larga, por ser aquellos muchos y de gran valor; sin embargo, por su doble condición de matemático aplicado e ingeniero de Caminos, Canales y Puertos y por haber abarcado una ingente cantidad de ramas y especialidades de las Matemáticas y haber contribuido al desarrollo de muchas de sus áreas, en especial a la estadística, la tarea de glosar su discurso resulta harto difícil ya que, en él, Enrique Castillo nos ha hecho un relato muy pormenorizado de toda una vida dedicada a las Matemáticas y sus aplicaciones, lo que hace que mi labor sea complicada, dada mi condición de matemático especializado en una sola — aunque muy extensa — disciplina, que es la estadística. No obstante, he de señalar que sus trabajos relacionados con la estadística y la investigación operativa, junto con las

numerosas aplicaciones de estas dos ramas, sobre todo a la ingeniería, suponen algo más del 70 % de su producción científica que —como el ha expuesto y comentaré con más detalle posteriormente— es realmente impresionante en calidad y cantidad.

Enrique Castillo nació 17 de octubre de 1946, en la calle Preguntoiro, 24 de Santiago de Compostela, de madre gallega y padre madrileño. A los ocho días de nacer, su familia se traslada a Madrid. Sus raíces son, en gran medida, gallegas, de las que se siente muy orgulloso y a las que nunca ha renunciado pues sus recuerdos de la niñez están ligados a los veranos que pasaba en las playas de Galicia y en la finca de su abuela materna en Cacheiras, aunque sus otras etapas: adolescencia, juventud y madurez se han repartido entre las ciudades de Madrid y Santander con alguna breve incursión en Ciudad Real. Precisamente, como reconocimiento a sus raíces gallegas de las que tan orgulloso se siente, el pasado verano fue investido *cofrade de la Orden de la Viera*, institución que aglutina a lo más granado de la diáspora gallega.

Realizó sus estudios de primaria y bachillerato en el Colegio San José de los Hermanos Maristas de Madrid. Allí le formaron no sólo en Física, Matemáticas, Química, Literatura y otras disciplinas sino también en valores, como la honradez, la solidaridad, el espíritu de sacrificio, el respeto a los otros y un largo etcétera. Como muchos de los de nuestra generación, lo que hoy somos, el cómo pensamos y actuamos es, en buena parte, fruto de la influencia familiar y del colegio donde estudiamos y nos formamos.

Probablemente, a Enrique Castillo su vocación de Ingeniero de Caminos le vino del entorno familiar; en concreto, de su padre que era Ingeniero Industrial. En su casa le veía trabajar en sus proyectos para la RENFE y para Correos rodeado de planos, lo que le indujo a estudiar alguna rama de la ingeniería, aunque inicialmente dudó entre hacerse Ingeniero Industrial o Ingeniería de Caminos; finalmente, se decantó por cursar esta última en Madrid, la única escuela existente en España en los años 60. Fue estudiante de la primera promoción del nuevo plan de estudios de 1964. Cuando cursaba quinto curso de carrera, colaboró con nuestro recordado compañero en esta casa, el prof. Jiménez Salas, en la impartición de la asignatura de Geotecnia; fue un encuentro providencial, como Enrique Castillo nos describe en su discurso, que le conduciría a estudiar y realizar cursos de doctorado en la Universidad Northwestern. La decisión de ir a los E.E. U.U. le indujo a adelantar la fecha de su boda con María del Carmen, su novia, justo antes de emprender el viaje, obligándose además a estudiar un curso intensivo de inglés poco antes de partir. No le resultó fácil tomar la decisión de irse al extranjero pero, visto a posteriori, fue una decisión acertada que tuvo mucha influencia en su futuro profesional y académico. Una vez terminada su tesis doctoral, en 1972, volvió a España.

A la vuelta de los Estados Unidos, el prof. Jiménez Salas le ofreció trabajar con él en el Laboratorio del Transporte y Mecánica del Suelo y también como asesor en un proyecto de cimentación de la Central Nuclear de Almaraz. Como anécdota de ese

período, el prof. Jiménez Salas le pidió que realizase unos ensayos de permeabilidad para conocer el número de bombas que serían necesarias para evacuar el agua durante la excavación de la cimentación. Tras gastar una millonada en realizar solamente dos ensayos, los cálculos le dan dos pozos en uno de ellos y en el otro doscientos. Se preguntó: ¿qué hacer ante semejante resultado? Si decía que hacían falta dos y en realidad fuesen cien, haría el ridículo; pero si dijera que se necesitaban 200 y realmente fuesen 2, también lo haría; además, la media de los resultados, 101, tampoco sería una solución si finalmente resultase que fuesen necesarios 2 o 200. Esta situación le produjo bastante desasosiego pero, a cambio, le sirvió como revulsivo para interesarse por las Matemáticas, lo que posteriormente ocurrió, en parte también, por azar, debido a que se le presentó la oportunidad de trasladarse a la Escuela de Ingenieros de Caminos de Santander al haber una plaza vacante de Estadística y Cálculo Numérico.

Como se trataba de enseñar Matemáticas en la Escuela, decidió estudiar también la carrera de Ciencias Matemáticas, cursando la especialidad de Estadística, en la Universidad Complutense de Madrid. Tuvo que realizar un esfuerzo enorme para hacer la carrera a distancia, matriculándose en las numerosas asignaturas que no le convalidaron y, en un solo curso académico, terminó la licenciatura en 1974. Poco más tarde, en 1974, se vio obligado a terminar una segunda tesis doctoral, pues no le convalidaron la tesis de la Universidad de Northwestern. Defendió ésta en 1974, obteniendo el Premio Extraordinario de Doctorado y el Premio Entrecanales a la mejor tesis doctoral sobre Mecánica del Suelo.

Al llegar a la Universidad de Santander —como entonces se llamaba, antes de convertirse en la Universidad de Cantabria—, como profesor interino, organizó cursos de doctorado en la Universidad y en la Escuela de Caminos y dirigió su primera tesis doctoral.

En el breve período de tiempo comprendido entre junio de 1976 y mayo de 1977, Enrique Castillo se presentó a tres cátedras que obtuvo en primera instancia en las tres ocasiones: una de Instituto de Enseñanza Media y dos de Universidad de materias diferentes. Finalmente, optó por la cátedra de Matemática Aplicada de la Universidad de Cantabria, donde se encuentra en la actualidad, compaginando su labor docente con la impartición de clases en la Escuela de Caminos de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Entre sus numerosos premios y condecoraciones cabe destacar su pertenencia como miembro fundador y Académico de Número de la Real Academia de Ingeniería desde 1994, el doctorado Honoris Causa por la Universidad de Oviedo, otorgado por sus contribuciones a la Estadística y a la Modelización, recibido en 1999; la medalla de plata de la Universidad de Cantabria otorgada en 2005, el premio nacional de investigación Leonardo Torres Quevedo de 2010 y su próximo doctorado Honoris Causa por la Universidad de Castilla-La Mancha en reconocimiento a sus méritos, a

su labor docente y a la labor de puesta en marcha de la Escuela de Ingenieros de Caminos de esa Universidad. Con anterioridad, esta Universidad le concedió la medalla de oro en 2002, en reconocimiento de su labor en pro de la nueva Universidad.

Es además miembro de diversas sociedades científicas de carácter internacional, entre las que destacan la American Statistical Association, el International Statistical Institute, la American Mathematical Society, la Sociedad Española de Mecánica del Suelo y Cimentaciones, la Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería, de la que es socio fundador, y la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa.

Los temas en los que ha trabajado Enrique Castillo desde sus comienzos hasta hoy abarcan un gran número de especialidades de las Matemáticas, de la Ingeniería y, por supuesto, de sus aplicaciones. Una buena parte de sus libros, monografías y trabajos los ha realizado en colaboración con colegas y discípulos.

Sin ser exhaustivos, una primera aproximación enumeraría los temas siguientes: Cálculo de variaciones. Estadística aplicada a la ingeniería. Métodos numéricos. Resolución numérica y simbólica de sistemas de ecuaciones e inecuaciones. Estadística de los valores extremos. Ecuaciones funcionales. Tensores. Inteligencia artificial y sistemas expertos. Redes funcionales. Optimización. Análisis de sensibilidad. Redes bayesianas. Investigación operativa. Programación. Cálculo simbólico. Cálculo de estructuras. Mecánica del suelo. Puentes. Diseño en ingeniería, Fatiga de materiales. Ingeniería eléctrica. Fiabilidad. Enseñanza asistida por ordenador. Modelos de tráfico.

Además, sus contactos con profesionales de otras disciplinas, le han llevado a publicar artículos en revistas de Física y de Economía.

Entre la ingente cantidad de temas en los que ha investigado el prof. Castillo hay uno que llama poderosamente la atención y son las denominadas *ecuaciones funcionales* que se encuentran presentes en muchos de sus trabajos teóricos y aplicados, sobre todo a problemas de la ingeniería. Las ecuaciones funcionales constituyen uno de los campos de la Matemática menos explorado e infrautilizado, ausente casi siempre de las carreras de matemáticas. Fue la casualidad —y su insaciable curiosidad— la que hizo que Enrique Castillo descubriese el libro de Janos Aczél y se percatase de sus posibilidades y aplicaciones a multitud de problemas aparentemente dispares. Al repasar las publicaciones de Enrique Castillo, uno descubre que esta herramienta la ha aplicado a problemas de diversa índole e incluso le han servido para crear conceptos novedosos dentro del área de la *Inteligencia Artificial*, como son las *redes funcionales* introducidas por él en 1998.

El amplio abanico de sus aplicaciones permite establecer un cierto paralelismo entre las ecuaciones diferenciales —herramienta de uso casi universal en la Matemática Aplicada— y las ecuaciones funcionales que pueden considerarse como dos enfoques completamente distintos pero, a su vez, complementarios entre el razonamiento con elementos muy pequeños, infinitésimos o diferenciales (las ecuaciones diferenciales) y elementos finitos (las ecuaciones funcionales).

Un hecho realmente sorprendente del planteamiento con ecuaciones funcionales es que éstas, tras cambiar una de las variables por una diferencia finita (incremento), pueden considerarse como ecuaciones en diferencias finitas que son además exactas para cualquier valor del incremento que se considere; es decir, sin necesidad de que éstos sean pequeños. Por tanto, sorprende que todavía se busquen las mejores aproximaciones de las ecuaciones diferenciales mediante ecuaciones en diferencias finitas, cuando existen ecuaciones en diferencias finitas exactas, es decir, cuyas soluciones son las mismas que las de las ecuaciones diferenciales de procedencia.

A modo de anécdota sobre las posibilidades de aplicación de las ecuaciones funcionales a un tema que nos afecta a todos cada año, aproximadamente por las mismas fechas, quisiera glosar una sorprendente aplicación que Enrique Castillo refleja en su discurso; se trata del problema de la declaración de la renta.

El origen de su interés por este problema fue su indignación por lo injusto del sistema impositivo español que hacía posible que las personas trabajadoras fueran castigadas frente a los menos trabajadores —los *vagos*, como textualmente escribe en su discurso Enrique Castillo— por un cálculo absurdo de la base imponible y también por la molestia de tener que hacer dos declaraciones cada año, la conjunta y la separada, para compararlas. Se le ocurrió estudiar la cuestión de cómo debería ser la normativa a aplicar para que siempre la declaración conjunta diera lugar a un impuesto menor o igual que la separada.

Para ello, contando con la colaboración de los profesores Reyes Ruiz y Claudi Alsina, entre los tres diseñaron un sistema de 15 ecuaciones e inecuaciones funcionales que permitieran que ciertas condiciones de sentido común fueran satisfechas, tales como la progresividad y la convexidad respecto a los ingresos por capital y trabajo, la independencia con respecto al tipo de declaración (conjunta y/o separada) o respecto a los plazos de la declaración, la monotonidad respecto del ingreso neto, el tratamiento idéntico referente al trabajo y al capital, etc. La solución obtenida era muy sencilla y consistía en sumar los ingresos de los dos cónyuges y dividirlos por dos, pagando cada uno de ellos la mitad, tanto de los ingresos del capital como de los del trabajo. Demostraron, además, que esta solución era la única posible y que curiosamente coincidía con la que aplicaban en Alemania al comienzo de los años noventa del pasado siglo. De lo que no estaban seguros es de si *ellos* —la Hacienda pública, que somos todos, como rezaba un eslogan de hace tiempo— sabían o no, que esa era la única solución que cumplía todos los requisitos.

Otra de las constantes en la trayectoria de Enrique Castillo, además de la influencia que sobre él han tenido personalidades tan relevantes como Janos Aczél, Janos Galambos, Judea Pearl, Sixto Ríos y Enrique Becerril, ha sido el descubrimiento de ciertos libros de estos y otros autores —además del ya mencionado de Aczél, de ecuaciones funcionales— que han marcado e influido en su trayectoria científica en momentos clave de su vida académica, curiosamente muchos de ellos escritos por

miembros de las más variadas Academias europeas y americanas.

Comenté, al principio de mi intervención, que la estadística, y sus numerosas aplicaciones, ha sido desde el principio de su actividad investigadora, el área de conocimiento en la que el nuevo académico ha trabajado con mayor frecuencia e intensidad motivado en buena parte, como nos explica en su discurso, por la personalidad e influencia indirecta del profesor Sixto Ríos y, también, por la influencia directa del libro más conocido del prof. Ríos, al menos entre los estadísticos de mi generación, sus *Métodos Estadísticos*.

Sus primeros trabajos en estadística tuvieron que ver con aplicaciones a la ingeniería, en concreto con aplicaciones de la llamada teoría de los *valores extremos*, una rama de la Estadística que se centra en el estudio de las distribuciones de los máximos y mínimos de ciertas distribuciones que aparecen, de modo natural, en el análisis de problemas de fiabilidad, tan frecuentes en las ingenierías y cuyas herramientas y metodología son muy distintas de las correspondientes al estudio de los promedios. Enrique Castillo estudió esta teoría en el clásico libro de Galambos. Más tarde, una estancia sabática en la universidad de Temple en Filadelfia, con el autor del libro, le permitió a su vez escribir un libro sobre la teoría y aplicaciones de los valores extremos, publicado en el año 1988. Curiosamente, Galambos no pudo participar como coautor del libro de Enrique Castillo porque su editorial le prohibió participar en él al versar sobre el mismo tema y que iba a ser publicado por otra editorial. Este libro, *Extreme Value Theory in Engineering* publicado por la editorial *Academic Press*, se convirtió rápidamente en un texto de referencia de la teoría y aplicaciones de los valores extremos y, a pesar del tiempo transcurrido desde su publicación, continúa siendo uno de los libros más citados de su autor. En 2005, a fin de poner al día el texto e incluir resultados de última hora, sacó una nueva edición en colaboración con los profesores Hadi, Balakrishnan y Sarabia, con los que, en el interín, había trabajado en la teoría y aplicaciones de los valores extremos.

Poco después, inició otra línea de investigación completamente diferente, referida al amplio dominio de la teoría de distribuciones de probabilidad. Este es un amplísimo campo de estudio que afecta por igual a la Estadística y a la Teoría de la Probabilidad, que es la que nutre de modelos probabilísticos a la primera con el fin de analizar datos cada más numerosos y complejos y constituye un casi inabarcable campo de investigación teórica y aplicada. Basta recordar la colección de carácter enciclopédico, o catálogo de distribuciones estadísticas, iniciada por Johnson y Kotz en los años 70 del pasado siglo, en la que se enumeran sus propiedades, se estudian las relaciones entre las diversas familias de distribuciones y en la que, además, se encuentra un sin fin de información útil tanto para los estadísticos como para los probabilistas, que la convirtieron en la más completa enciclopedia sobre el tema, de obligada consulta para cualquier estadístico teórico o aplicado. Con el paso de los años, la colección inicial de cuatro tomos no muy gruesos, se ha ido ampliando y

poniendo al día hasta convertirse en una auténtica obra de referencia a la que se han unido nuevos editores de prestigio como, por ejemplo, N. Balakrishnan.

El tema concreto de investigación que se planteó se refiere al estudio de distribuciones multivariantes que tienen distribuciones condicionadas especificadas de antemano. El adentrarse en este tema, junto con su discípulo José María Sarabia, tuvo también como consecuencia el establecer una relación fructífera y perdurable con el profesor Barry Arnold de la universidad de California Riverside que, por otra parte, trabajaba en temas relacionados. Esta colaboración dio lugar posteriormente a una monografía publicada por la editorial Springer y a numerosos artículos de investigación conjuntos.

También, en esta ocasión, el conocimiento y dominio de las ecuaciones funcionales fueron factores decisivos para enfocar y solucionar el tipo de problemas que se habían planteado. Como puede comprobarse a lo largo de su discurso, las ecuaciones funcionales han sido un *leit motiv* —un motivo recurrente en su larga trayectoria científica—, desde que las descubrió y estudió en profundidad, y que ha aplicado con asiduidad y éxito en múltiples ocasiones, en situaciones y en problemas aparentemente dispersos que, a priori, no muestran relación entre ellos, como los modelos de fatiga de materiales una de las áreas de la ingeniería civil a las que más ha aportado el profesor Castillo con sus investigaciones.

Antes de adentrarme en analizar el resto de las contribuciones del profesor Castillo a la Estadística y la Investigación Operativa quisiera hacer un brevísimo recorrido sobre las dos formas actuales de enfocar la Estadística como disciplina científica ya que él ha contribuido con artículos originales a ambas, sobre todo a la primera. Me refiero a la estadística frecuentista y a la bayesiana.

A muchos científicos les podría resultar extraño que a estas alturas del desarrollo de la Estadística —que les sirve para abordar los problemas que se sus disciplinas les plantean— haya dos escuelas de pensamiento con enfoques metodológicos tan dispares, aunque los resultados prácticos son muchas veces idénticos o similares. La mayoría de los científicos usa los métodos estadísticos como una herramienta auxiliar que permite extraer conclusiones de los datos generados por sus ensayos, estimar los parámetros de aquellos modelos que creen más plausibles o convenientes para describir sus datos y corroborar o descartar teorías científicas que se plantean sobre la disciplina o especialidad que cultivan y, salvo excepciones, no se interesan por cuestiones filosóficas que afectan a los fundamentos de la Estadística.

Aunque ya ha pasado el tiempo de los enconados debates entre los defensores y detractores de ambas escuelas de pensamiento y actualmente se hayan aproximado las posturas entre frecuentistas y bayesianos en muchos aspectos, motivado quizás porque muchos creemos que lo más importante, sobre todo en estos momentos, es dar soluciones a los problemas de índole estadística que prácticamente todas las disciplinas plantean y, aunque hay muchas más cosas que nos unen que las que nos separan,

existe todavía un aspecto en el que el consenso no se ha logrado del todo.

Me refiero, en concreto, a lo que habitualmente se ha denominado *contrastes de hipótesis estadísticas*, aquella parte de la inferencia inductiva de especial importancia en las ciencias aplicadas a la hora de contrastar teorías científicas, bien aceptando el paradigma actual frente a posibles alternativas o rechazándolo para sustituirlo por uno nuevo. Esta parte de la inferencia científica se engloba, actualmente, en lo que se conoce como *métodos de selección de modelos* que contiene a los contrastes de hipótesis como caso particular.

Un ejemplo, simple pero importante, de la discrepancia que quiero señalar, que a veces puede resultar en incompatibilidad entre el enfoque frecuentista y bayesiano es la rutinaria aplicación de los contrastes de hipótesis que se haya presente en muchos artículos científicos cuyos resultados o hipótesis han sido estadísticamente contrastados. En su mayoría, las hipótesis propuestas por los autores de estos artículos se corroboran o no, habitualmente, basándose en el cálculo de los p -valores proporcionados por ciertos estadísticos de contraste; incluso a veces, nos encontramos con la frase publicitaria de que ciertos productos —sobre todo los de tipo farmacológico— han sido *científicamente testados* [sic], como puede verse en más de una ocasión en los anuncios de la televisión.

El uso del p -valor —una medida de la evidencia a favor de la hipótesis nula— es prácticamente ubicuo en la literatura científica e ingenieril; el procedimiento generalmente seguido para tomar la decisión de aceptar o rechazar la hipótesis propuesta, es comparar el valor numérico del p -valor —que suele ser una salida del programa estadístico utilizado— con ciertos *niveles de significación*, previamente establecidos. Los puntos de corte —los niveles de significación— se suelen establecer o fijar habitualmente, por razones históricas que ahora no hacen al caso, en $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.01$ o $\alpha = 0.001$, donde la elección de uno de ellos dependería, en principio, de las consecuencias negativas que tendría el rechazar la hipótesis nula si ésta fuese cierta. Pero el p -valor, aunque es una medida de la evidencia en contra de la hipótesis nula, no se sabe calibrar; se sabe que cuanto más pequeño sea el p -valor mayor es la evidencia en contra de la hipótesis nula pero ¿qué significa *más pequeño* cuando se trata de una medida ordinal como es el p -valor? Los niveles de significación que hemos especificado antes para aceptar o rechazar una hipótesis son inmutables y no tienen en cuenta factores tan importantes a la hora de calibrar el p -valor como son el tamaño muestral y la dimensión de las hipótesis que se quieren contrastar: de la nula y de la alternativa. Los frecuentistas son conscientes de este problema, en especial del primero de ellos, pero no saben como *calibrar* el efecto del tamaño de la muestra ni mucho menos la diferencia entre las dimensiones de la hipótesis nula y la alternativa. Solo intuyen que cuanto mayor sea el tamaño muestral, menor ha de ser el nivel de significación, o punto de corte, fijado para rechazar la hipótesis nula.

En el enfoque bayesiano a los contrastes de hipótesis, la decisión de aceptar o re-

chazar la hipótesis nula se basa en el valor numérico de la *probabilidad a posteriori* de la hipótesis nula y, si ha lugar, también en la consideración de las pérdidas asociadas a los errores de tipo I y II que pueden acompañar al contraste de hipótesis. Al ser una medida de probabilidad ésta está automáticamente calibrada y es, además, fácilmente interpretable, a diferencia del p -valor. Por otra parte, y de forma automática, la probabilidad a posteriori tiene en cuenta el tamaño muestral y las dimensiones de las hipótesis que se comparan. La dificultad mayor para el cálculo de la probabilidad a posteriori es el cálculo previo del factor de Bayes asociado a las dos hipótesis que se quiere contrastar, para lo que es necesario la especificación de distribuciones a priori objetivas especialmente adaptadas al contraste de hipótesis que, en general, suelen ser distintas de las que se utilizan en los problemas de estimación.

Hay una extensa literatura sobre el tema de la reconciliación entre los métodos frecuentistas y los bayesianos en el contraste de hipótesis, es decir en el estudio de cuándo los dos enfoques — p -valores y probabilidades a posteriori obtenidas de ciertas distribuciones a priori— producen el mismo resultado. En mi opinión, aunque este aspecto tiene su importancia, ese no es el camino adecuado a seguir. Una solución más prometedora, que hemos explorado parcialmente, es construir las *curvas de calibrado* que relacionan las probabilidades a posteriori de la hipótesis nula con el correspondiente p -valor a través del estadístico suficiente, caso de que éste exista, y estudiar el comportamiento de estas curvas como función de los estadísticos ancillarios como son el tamaño muestral y las dimensiones de las hipótesis nula y alternativa. En muchas circunstancias la existencia de las denominadas *regiones de compatibilidad* de estas curvas permiten obtener los mismos resultados independientemente de si se usan p -valores o probabilidades a posteriori, aunque no siempre es así, sobre todo cuando *el peso de la evidencia* es débil.

Por otra parte, muchos de los problemas más interesantes de la Estadística pueden considerarse casos particulares del más general de selección de modelos, empezando por los clásicos contrastes de hipótesis a veces llamados simplificación de modelos, los contrastes de hipótesis múltiples asociados al *Análisis de la Varianza*, pasando por el análisis y detección de observaciones atípicas o anómalas, la elección de métodos de inferencia estadística robustos, los problemas de detección de puntos de cambio en series temporales, el importante problema de selección de regresores en modelos lineales generalizados, la regresión no paramétrica via *splines*, los métodos de clasificación supervisada o de análisis discriminante, hasta llegar a los problemas más complejos de análisis no supervisado o análisis de conglomerados.

La mayor dificultad que presentan estos problemas es la de comparar modelos que pueden o no estar anidados y tienen, en general, dimensionalidad distinta. Para estos casos, no hay una metodología frecuentista adecuada que corrija de modo automático y eficiente la distinta dimensión de los modelos que se comparan, y que se agrava más aún en el caso de que los modelos no estén necesariamente anidados. Los enfoques

basados en verosimilitudes marginales, perfiladas o penalizadas no dan respuestas generales satisfactorias a los problemas que hemos enumerado. Por otra parte, el enfoque bayesiano objetivo de los mismos es una tarea sumamente difícil, sobre todo por el problema de especificar las distribuciones a priori de un elevado número de parámetros que caracterizan a los diferentes modelos que se quiere comparar, al que se añade la asignación de probabilidades a priori discretas sobre la clase de todos los modelos, generalmente muy numerosa, para los cuales la simple asignación de una distribución uniforme discreta, que sería el enfoque natural, no es normalmente de recibo. En esta dirección, sin embargo, se están realizando importantes aportaciones desde la perspectiva de los llamados métodos bayesianos objetivos.

Aunque las incursiones del profesor Castillo en el campo de la estadística bayesiana han sido breves, cabe aquí mencionar sus trabajos sobre familias conjugadas de familias exponenciales, en los que se da la expresión más general de éstas así como ciertas extensiones a otras familias de distribuciones no regulares y a las que Enrique Castillo ha contribuido con publicaciones, libros y monografías.

La llamada *Inteligencia Artificial* es una disciplina relativamente reciente que se nutre de muchas otras especialidades, en particular de la lógica matemática, de la estadística y de los conjuntos difusos, entre otras, a la que Enrique Castillo ha contribuido decisivamente con sus trabajos sobre sistemas expertos, redes bayesianas y redes neuronales. De especial relevancia en el campo de la *Inteligencia Artificial*, que merece ser destacada, es una contribución totalmente original que ha denominado con el nombre de *redes funcionales*. De nuevo, el conocimiento de las ecuaciones funcionales le permitió crear el concepto de red funcional y establecer conexiones con otras áreas de la Matemática Aplicada, como las ecuaciones diferenciales y proporcionar posibles aplicaciones a la Estadística y la Teoría de la Decisión. No solamente las redes funcionales se aplican en la Inteligencia Artificial sino a problemas estadísticos como el diagnóstico médico.

También ha contribuido con numerosas publicaciones a los *sistemas expertos* y a las *redes neuronales*, desarrollando algoritmos de estimación de los parámetros o pesos asociados a las neuronas de la red alternativos a los ya conocidos, más sencillos y computacionalmente más eficientes.

De mayor calado aún son sus contribuciones, de una gran originalidad, a las redes bayesianas, introducidas en los años 80 del pasado siglo por Judea Pearl. Tras publicar varios artículos sobre sus posibilidades de aplicación en diferentes contextos, su interés por el tema le llevó a escribir un libro en 1996, que resultó ser un éxito por las numerosas citas y referencias que obtuvo. De entre los numerosos resultados originales, destaca especialmente la caracterización de la estructura simbólica de las probabilidades condicionales en redes bayesianas normales y su equivalente para las redes discretas.

Su contribución más importante a la Investigación Operativa la constituye el con-

junto de artículos en los que se propone un método muy general para el análisis de sensibilidad en los problemas de optimización con restricciones, que tiene aplicaciones importantes al problema de la detección de datos anómalos en los problemas de fatiga de materiales y al importante problema estadístico de la detección de observaciones anómalas.

Una característica muy destacable de nuestro nuevo académico, aparte de su extensa e influyente labor investigadora que hemos glosado, reflejada no solamente en sus numerosos artículos de investigación sino también en sus libros y monografías, es su devoción por comunicar y transmitir sus conocimientos a los estudiantes y a los posibles lectores, como queda demostrado en sus numerosos libros de texto. Y lo ha hecho en español y en inglés. En más de una ocasión me ha comentado que, al igual que algunos libros de su época de formación le marcaron el camino a seguir e influyeron decisivamente en su trayectoria futura, cree su deber hacer lo mismo con las futuras generaciones. Desafortunadamente, no sabemos en qué manos van a caer los libros que ha publicado pero él está seguro de que siempre puede haber algún estudiante que repare en ese libro de texto y que en un momento determinado puede incluso cambiar su vida o su trayectoria vital; y que esa sola posibilidad ya, de por sí, justifica la existencia del libro. Opina que si se tienen ideas nuevas y prometedoras, el plasmarlas en un libro de texto podría suponer una aportación más importante que muchos artículos especializados, que solamente puedes compartir con un número muy reducido de tus colegas. En este sentido es una pena que, hoy en día, muchas personas que podrían aportar ideas nuevas a las futuras generaciones dedican todo su tiempo a la investigación, pero descuidan su labor de divulgación a través de los libros de texto.

Otro aspecto asimismo muy notable de la personalidad científica del profesor Castillo es su aproximación a los problemas teóricos y aplicados a los que se ha enfrentado; en general, casi siempre adopta una perspectiva intelectualmente fresca, sin prejuicios, y, en muchas ocasiones, lo hace sin dejarse llevar por lo establecido, por lo rutinario. Esto supone, de una parte, tener mucha experiencia y, sobre todo, disponer de pensamiento original —¿cómo se abordaría el problema que se tiene entre las manos con el bagaje científico y la experiencia acumulada hasta este momento?— y, de otra parte, disponer de un arsenal de herramientas matemáticas muy amplio y riguroso.

Una constante permanente en la carrera de Enrique Castillo es su desbordante curiosidad científica que le ha hecho primero estudiar un elevado número de ramas de la Matemática, sugeridas muchas veces por problemas que el mismo —o algún otro colega— le han planteado y que le han llevado, inicialmente a soluciones o propuestas originales sobre el tema, cuyos resultados termina recogiendo en una monografía especializada o, más frecuentemente, las recoge en un libro de texto en el que expone su visión del tema y, generalmente, lo ilustra con una gran variedad de aplicaciones

prácticas. Esta manera de proceder es —así lo pienso— una forma de rendir homenaje a sus predecesores —que escribieron libros de texto que fueron importantes y determinantes en su formación y la de muchos de nuestra generación—, con la esperanza de que alguno de sus libros vuelva a ejercer la misma fascinación que el sintió de estudiante, o posteriormente, al leerlos y estudiarlos. Probablemente, esto último explique el apabullante número de libros que ha publicado: treinta, hasta la fecha.

No quisiera terminar mi discurso sin hablar de un aspecto que revela otra faceta muy notable de su carácter y personalidad, distinta de su perfil investigador y docente, que creo debe destacarse; a saber, su lado más humano.

Enrique Castillo es, además de un insigne ingeniero y matemático, una persona que se ha solidarizado con frecuencia con los más necesitados y ha sentido una enorme inquietud por transmitir y compartir sus conocimientos dentro y fuera de los ambientes académicos en países menos desarrollados.

Así, dentro de las actividades académicas de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Santander, organizó a partir de 1993, unas *Maestrías en Informática y Computación* (programas de Master) dirigidas a alumnos extranjeros. La idea era que alumnos sudamericanos vinieran a España, cursaran estos estudios y volvieran a sus países de origen con el fin de favorecer su desarrollo. La realidad demostró que un elevado porcentaje de los alumnos que venían se quedaba en España y no retornaban a sus países. Al comprobar esta situación, se decidió terminar con estas Maestrías, al considerar que no se alcanzó el objetivo que se pretendía con ellas, el de que estos alumnos, a su vuelta, contribuyeran al desarrollo de sus respectivos países.

Por este motivo se buscó una nueva fórmula y tras varias experiencias de cursos aislados en Argentina, Chile, Cuba y Colombia, quedó claro que se necesitaba algo más que impartir cursos aislados, de modo que se organizaron cursos anuales en Colombia (Bogotá y Manizales) y Bolivia (La Paz y Potosí). Finalmente, tras descubrir que los alumnos necesitaban un título, se creó el *Programa Itinerante de Informática y Computación*, que era y todavía es un Programa de Master. Este programa se impartió en la Universidad Nacional del Nordeste en Corrientes (Argentina) y, posteriormente, en la Universidad Nacional de Misiones, en Posadas. Más tarde, aunque contando con ayuda española —en una prueba de madurez por parte de ellos—, se hicieron cargo del programa en la Universidad Nacional de Pilar en Pilar (Paraguay) y en la Universidad Nacional de Este en Ciudad del Este (Paraguay). Recientemente, su preocupación por los más necesitados le ha llevado a viajar a África con la finalidad de participar en trabajos de colaboración. En sus visitas a Togo y Benín ha tratado de demostrar que la ingeniería actual puede ser una fuente de progreso que puede contribuir en gran medida al desarrollo de los países del tercer mundo. Según él, uno de los problemas más urgentes que ha observado, es el del mantenimiento de las infraestructuras, tales como puentes, carreteras, pozos, etc. Las inversiones se hacen normalmente en obras nuevas que se inauguran, pero que al cabo de poco tiempo

resultan inservibles o de poco rendimiento, ya que no se suele prever su mantenimiento. Por ello opina que una reducida partida de gasto en mantenimiento realizado a tiempo puede ser muy rentable. Fruto de esta idea son las colaboraciones, financiadas por el Ayuntamiento de Santander, encaminadas al mantenimiento de puentes y caminos en Togo.

A finales del pasado año, su familia decidió emplear el importe del Premio Nacional de investigación *Leonardo Torres Quevedo*, que le fue concedido en noviembre de 2010, en organizar un sistema sostenible de adquisición de moto-taxis en Porto Novo y Cotonou (Benín), iniciativa que permite dar trabajo, de la noche a la mañana, a muchos padres de familia, de modo que con los beneficios que obtienen se aseguran el mantenimiento de sus familias. La idea ha consistido en comenzar con 160 motos e intentar que el proceso se haga sostenible mediante la devolución de los costes, de manera que cada semana puedan adjudicarse dos nuevas moto-taxis. También ha organizado un sistema de micro-créditos en Cinkassé (Togo) y Porto Novo (Benín) en el que grupos de seis mujeres se responsabilizan de cada micro-crédito solidariamente, ya que en África sólo las mujeres son garantía de éxito en este tipo de iniciativas. Como supervisores y garantes del buen funcionamiento de estos proyectos se encargan las comunidades de religiosos de los Salesianos y de las Adoratrices afincados en estos países.

El profesor Enrique Castillo va a ocupar, a partir de hoy, la vacante de uno de los que podríamos considerar académicos históricos de la casa, con el honor que eso supone y, también, con la responsabilidad que ello conlleva. Estoy seguro de que no solamente contribuirá con su tesón y dedicación a continuar e impulsar la labor en pro de la estadística y la investigación operativa que D. Sixto Ríos inició tan brillantemente en esta Academia, como bien expuso su maestro, D. Julio Rey Pastor, en el discurso de contestación a su ingreso en 1961, sino que, además, estoy convencido de que D. Sixto Ríos se alegraría y se sentiría plenamente satisfecho de que el profesor Castillo sea su sucesor en nuestra Academia. En nombre de todos los que van a ser tus compañeros, te doy la más cordial bienvenida.