REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

UNA HISTORIA BREVE DE LA MECÁNICA GEOMÉTRICA

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
COMO ACADÉMICO DE NÚMERO POR EL

EXCMO. SR. D. MANUEL DE LEÓN RODRÍGUEZ

Y CONTESTACIÓN DEL

EXCMO. SR. D. PEDRO LUIS GARCÍA PÉREZ

EL DÍA 29 DE NOVIEMBRE DE 2017

MADRID
Domicilio de la Academia
Valverde, 22

ISSN: 0214-9540
ISBN: 978-84-87125-64-5
Depósito legal: M-32957-2017

Una historia breve de la Mecánica Geométrica

Manuel de León

Dedicado a mi hija Isabel

Índice general

Excelentísimo Señor Presidente, Excelentísimos Señores y Señoras Académicos, Señoras y señores:

Quiero que mis primeras palabras sean de agradecimiento para esta Real Academia, no sólo por el gran honor que me dispensa acogiéndome entre sus miembros, sino sobre todo por el enorme cariño que siempre he encontrado en esta casa, ya desde el momento en que fui elegido Académico Correspondiente.

En segundo lugar, deseo también expresar mis excusas por el retraso en presentar en este discurso. Las circunstancias así lo han demandado y no es el momento ahora de recordar sucesos que nunca se deberían haber producido y que no se corresponden con lo que debe ser la vida académica en su sentido mas extenso. Pero hoy es una ocasión para el júbilo, en la que solo debe imperar la alegría.

Mi vida ha transcurrido en dos ámbitos muy diferentes, aunque estrechamente relacionados: la Universidad de Santiago de Compostela, donde estudié la licenciatura de Matemáticas y me doctoré en 1978, y el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, al que me incorporé en febrero de 1986.

Probablemente, mi vida hubiera transcurrido por senderos más tranquilos si hubiera proseguido mi carrera universitaria, pero quisieron los hados que se cruzara en mi camino el CSIC. Era un momento difícil para las matemáticas en esa casa. Con la desaparición del Instituto Jorge Juan de Matemáticas parecía haberse cerrado el ciclo de esta disciplina en el principal organismo público de investigación de nuestro país. Y esa desaparición afectaba también a otra institución que llevaba una vida paralela a la del instituto, la Real Sociedad Matemática Española. Es así como, desde el primer momento en pisar el campus de la calle Serrano, mi conciencia colectiva fué estimulada, y dio comienzo una lucha personal de años para que la situación cambiara. No es éste el lugar para los detalles, pero en 1996 iniciamos la reconstrucción de la RSME y en 2007 se creó el Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT). La RSME es hoy en día una sociedad respetada internacionalmente, y el ICMAT fue el primer instituto del CSIC en conseguir el galardón de excelencia Severo Ochoa en la primera convocatoria de este programa, y el primero en renovarlo. En este largo camino de mas de cuatro décadas, quedan muchos otros logros conseguidos por la comunidad matemática española, en los que he participado activamente y de los que me siento, por qué no decirlo, muy orgulloso.

Comparezco aquí hoy ante ustedes para impartir mi discurso de recepción a la medalla número 36 de esta Real Academia. Una medalla que tiene numerosos antecesores ilustres, siendo esa impresionante lista de académicos:

- Excmo. Sr. D. LORENZO GÓMEZ PARDO Y ENSENYAT (1847)
- Excmo. Sr. D. JOSÉ SUBERCASE Y JIMÉNEZ. Discurso de recepción: "Leyes que rigen el movimiento y la resistencia de los fluido" (1862)
- Excmo. Sr. D. MANUEL BECERRA Y BERMÚDEZ. Discurso de recepción: "Evolución de la Matemática e influencia que en los progresos de esta ciencia ejerció la civilización árabe" (1886)
- Excmo. Sr. D. VICENTE VENTOSA Y MARTINEZ DE VELASCO. Discurso de recepción: "Exposición de los conocimientos adquiridos acerca de los movimientos estelares" (1905)
- Excmo. Sr. D. ANTONIO VELA HERRANZ. Discurso de recepción: "Magnitudes estelares" (1920)
- Excmo. Sr. D. JOSÉ GABRIEL ÁLVAREZ UDE. Discurso de recepción: "Seguros sociales, especialmente en lo que a la Matemática se refiere" (1928)
- Excmo. Sr. D. GERMÁN ANCOCHEA QUEVEDO. Discurso de recepción: "Estructuras algebraicas" (1966)
- Excmo. Sr. D. JOSÉ JAVIER ETAYO MIQUEO. Discurso de recepción: "Pequeña historia de las conexiones geométricas" (1983)

El primero de esta lista es D. Lorenzo Gómez Pardo y Ensenyat, quien no pudo impartir su discurso de entrada por fallecimiento, pero que fue Diputado a Cortes y Académico fundador, uno de los primeros dieciocho. D. José Subercase y Jiménez hizo importantes contribuciones en Geología y Metereología. ¡Qué decir de D. Manuel Becerra y Bermúdez, dos veces ministro de Ultramar y una de Fomento! O de D. Vicente Ventosa y Martínez de Velasco, Primer Astrónomo y Director del Observatorio de Madrid. Le sucedió D. Antonio Vela Herranz, Catedrático de Astronomía Física en la Universidad Central, y Consejero de Instrucción Pública. De D. José Gabriel Álvarez Ude, decir que me une con él que haya sido Director del Laboratorio Matemático, de la Sección de Matemáticas en el Instituto-Escuela y de la Revista Matemática Hispano-Americana; une CSIC (entonces todavía Junta de Ampliación de Estudios) y Real Sociedad Matemática Española. De D. Germán Ancochea Quevedo baste citar la enorme calidad de sus trabajo de investigación en Geometría, disciplina en la que ha sido uno de los pioneros en España. Y yo aspiro ahora a ocupar el lugar de una persona muy querida para mí, el profesor D. José Javier Etayo Miqueo, otro pionero de la Geometría Diferencial en España, y con el que tuve un excelente contacto profesional. D. Javier siempre me trató con enorme cariño, y solía encontrarlo paseando por el barrio ya que hemos sido vecinos en la castiza Avenida de la Reina Victoria. Él fue también director del Instituto Jorge Juan, en una época muy diferente, pero a la que me siento conectado de manera natural, ya que el ICMAT es el heredero natural tanto del Laboratorio-Seminario Matemático de la Junta de Ampliación de Estudios (JAE), como del Jorge Juan.

Me referiré ahora a los inicios de mi carrera investigadora, bajo la dirección de otro geómetra de referencia en nuestro país y vinculado también a esta Real Academia, el profesor D. Enrique Vidal Abascal. Vidal Abascal creó una importante escuela de Geometría Diferencial en Santiago de Compostela, que luego tuvo sus ramificaciones a través de sus discípulos en otras universidades, como Valencia, Granada, La Laguna, Murcia, País Vasco y Sevilla. Siempre digo que fui el último estudiante de doctorado del Profesor Vidal Abascal, y de él aprendí no sólo geometría, sino una forma de entender la vida académica como un ejercicio de servicio a la comunidad, y de cómo no debemos nunca conformarnos con la situación en la que nos toque trabajar. Al contrario, siempre debemos estar atentos a cómo podemos mejorarla. Nos enseñó también el valor de la colaboración, y algo que entonces no era tan evidente: la importancia del espacio común europeo.

Describiré ahora brevemente los temas de mi investigación. Aunque inicialmente no tenía como objetivo las aplicaciones, sin embargo el estudio de las estructuras geométricas de los fibrados tangentes de orden superior me llevó directamente a la formulación geométrica (simpléctica) de los resultados de M. V. Ostrogradsky sobre la descripción hamiltoniana de los sistema lagrangianos de orden superior [111]. Mi vida investigadora se ha movido desde entonces siempre entre esas dos vertientes, la geométrica y la mecánica, incorporando a esta última también la mecánica de los medios continuos.

En esta memoria que presento a esta Real Academia he querido trazar un breve recorrido de la mecánica desde los primeros tiempos de la humanidad y su relación con la geometría, y que ha dado lugar a un área de investigación que podemos llamar apropiadamente como Mecánica Geométrica, es decir, el uso de la geometría para plantear y tratar de resolver las ecuaciones de la Mecánica. No he pretendido ser exhaustivo, y tampoco he incorporado la mecánica de medios continuos, que por sí sola requeriría un tratado completo.

Finalmente, quiero expresar mi agradecimiento a los Señores Académicos D. Fernando Bombal Gordón, D. Manuel López Pellicer y D. Pedro Luis García Pérez, por haberme propuesto para formar parte de esta querida institución.

Introducción

> *"The mathematician plays a game in which he himself invents the rules while the physicist plays a game in which the rules are provided by nature, but as time goes on it becomes increasingly evident that the rules which the mathematician finds interesting are the same as those which nature has chosen."*
>
> – Paul A.M. Dirac

El nacimiento de la Mecánica como una disciplina puede datarse en la más remota antigüedad, ya que desde siempre el hombre ha tenido necesidad de crear instrumentos con los que buscar medios de subsistencia, defenderse de las inclemencias del tiempo, los animales o las amenazas de otros hombres.

La Mecánica como teoría explicativa de los fenómenos asociados al movimiento de los cuerpos, a su composición y sus propiedades así como la necesidad de dar cuenta de los acontecimientos celestes, puede decirse que nace con los griegos. Tras un periodo con pocos progresos en el que destaca las aportaciones de los árabes, la revolución científica tiene lugar por la obra de personajes como Copérnico, Galileo Galilei, Kepler e Isaac Newton.

Y es finalmente en los siglos XVIII y XIX, fundamentalmente gracias a los desarrollos de los matemáticos franceses, cuando la Mecánica toma el rango de una disciplina con nombre propio. La Mecánica es una especie de "meeting point", en el que convergen las más diversas disciplinas: la geometría, el análisis matemático, la física, la computación. Sin embargo, es a lo largo del siglo XX cuando surge lo que ahora hemos dado en llamar Mecánica Geométrica. El poner en acción todas estas disciplinas interactuando entre sí, es lo que determina un espectacular avance en la Mecánica, sobre todo en la segunda mitad del siglo XX.

Sus hitos fundacionales en este siglo podrían enumerarse así ([1]):

(i) Por una parte, el uso de formas diferenciales en Mecánica en 1922, por obra de Elie Cartan.

(ii) La primera exposición moderna sobre sistemas hamiltonianos en variedades simplécticas, que apareció en un artículo de G. Reeb en 1952.

(iii) Una versión moderna inicial de los sistemas hamiltonianos, que se encuentra en el trabajo de G. Mackey (1963), y también en los de F. Gallisot (1952) y J. Klein (1962, 1963). De hecho, la formulación simpléctica de la Mecánica era un tema conocido en los círculos matemáticos de ese tiempo, tal y como se menciona en una carta de Richard Palais.

(iv) Finalmente, recordamos que el primer tratado sistemático de la mecánica en variedades de Riemann se debe a J.J. Synge (1926).

Hoy en día la Mecánica, y en particular la Mecánica Geométrica, son ampliamente cultivadas en todo el mundo.

Desde la más remota antigüedad, el hombre ha tenido una necesidad de disponer de máquinas (utensilios) para la pesca, la caza, las guerras, o la construcción de refugios. Para ello, inventa la lanza, el arco y las flechas, los carros de guerra en Mesopotamia (hace 5000 años), o construye las pirámides en Egipto (hace 3000 años). La fabricación de todos estos utensilios y las construcciones arquitectónicas están basadas en la Mecánica. Por ejemplo, el uso del hacha, el sistema de locomoción de los carros o los remos de una embarcación están basados en las leyes de las palancas.

¿Cómo podríamos definir la Mecánica? ¿Cómo ha ido evolucionando esta disciplina desde esos tiempos antiguos hasta nuestros días? Podemos decir que la Mecánica es la ciencia que trata del comportamiento de los cuerpos cuando se les somete a fuerzas o desplazamientos. Y sus orígenes (con desarrollos que podríamos calificar ya de auténticamente científicos) se remontan a la Grecia antigua, en particular a los trabajos de Aristóteles y Arquímedes. Posteriormente, Galileo, Kepler y muy especialmente Newton, pusieron los fundamentos de la moderna Mecánica.

Hoy en día, la Mecánica es una disciplina a caballo entre la Física, las Matemáticas y la Ingeniería, con muchísimas ramificaciones. En Física ha predominado más la Mecánica Cuántica; en la Ingeniería, la Mecánica de Medios Continuos, mientras que en Matemáticas ha llevado a desarrollar campos tan relevantes como los Sistemas Dinámicos o la Geometría Simpléctica.

Trataremos en las siguientes páginas de trazar un recorrido histórico fijándonos particularmente en las contribuciones de los científicos más relevantes en esta disciplina, pero sin la intención de desarrollar una historia exhaustiva de la misma.

En la redacción de las notas históricas de varios de los capítulos se usan contenidos de los libros [31, 32, 33].

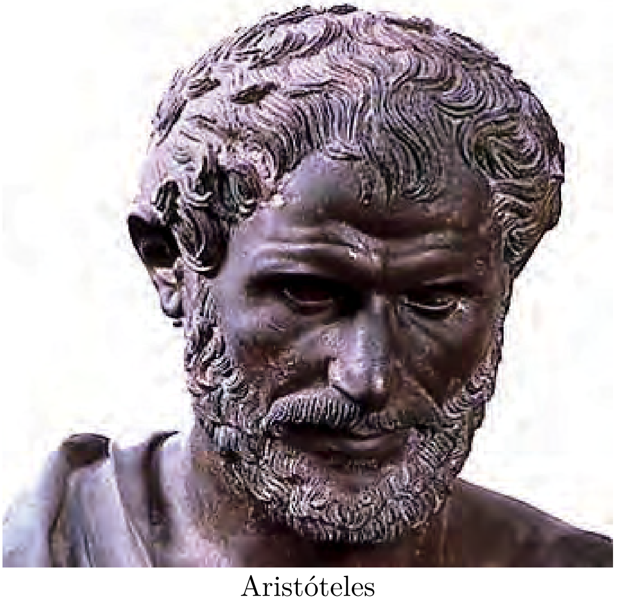
1

La Mecánica en el mundo antiguo

1.1. Aristóteles

Aristóteles (384 a.C.-322 d.C.) estableció los principios generales del cambio que gobiernan a los cuerpos, tanto vivos como inanimados, tanto terrestres como celestes:

- Sus movimientos y cambios de lugar,
- sus cambios de tamaño,
- y, cómo se generan o desaparecen.



Aristóteles

Aristóteles fue un filósofo griego, estudiante de Platón y tutor de Alejandro Magno. Escribió sobre casi todo: física, metafísica, teatro, poesía, música, lógica, biología, etc.

Sin duda alguna, Sócrates, Platón y Aristóteles han sido las personas más influyentes de la época antigua en nuestro mundo occidental. La influencia en particular de Aristóteles llegó en algunos campos hasta el siglo XIX, y fueron los logros de Galileo y Newton los que abrieron el camino de la nueva Física, rompiendo muchas de las ideas aristotélicas.

Cicerón describe el estilo literario de Aristóteles como un “río de oro", pero desgraciadamente la mayoría de sus escritos se ha perdido.

Aportaremos algunos datos biográficos sobre este gran pensador y científico.

Aristóteles nació en Estagira, de donde proviene su sobrenombre, el Estagirita. Su padre, Nicómaco, era médico de la corte de Amintas III, padre de Filipo y, por tanto, abuelo de Alejandro Magno. Huérfano de padre y madre en plena adolescencia, fue adoptado por Proxeno. En el año 367 a.C., con diecisiete años de edad, fue enviado a Atenas para estudiar en la Academia de Platón, y se sospecha de su relación con éste no era muy buena.

A la muerte de Platón, en el 348 a.C., Aristóteles contaba treinta y seis años de edad, y se trasladó a la ciudad de Axos, en Asia Menor, para trabajar en la colonización griega. Allí pasó tres años dedicado a la enseñanza y al estudio, casándose además dos veces. Tuvo dos hijos: una hija, Pitias; y un hijo, Nicómaco, a quién le dedicó su *Ética.*

En el 345 a.C., Aristóteles se instaló en Mitilene (isla de Lesbos), dedicándose al estudio de la Biología. Fue en el 343 a.C. cuando Filipo de Macedonia le contrató para que se hiciese cargo de la educación de su hijo Alejandro, a la sazón de trece años de edad.

La obra principal de Aristóteles en lo que se refiere a este ensayo que el lector tiene en sus manos, es la *Física* [2], en la que, frente a autores anteriores como Heráclito, Parménides y Platón, define los conceptos, principios, acciones, elementos, posibilidades de toda realidad. Reproducimos aquí por su interés el inicio de este libro:

LIBRO 1

1. Objeto y método de la Física

> *Puesto que en toda investigación sobre cosas que tienen principios, causas o elementos, el saber y la ciencia resultan del conocimiento de éstos - ya que sólo creemos conocer una cosa cuando conocemos sus primeras causas y sus primeros principios, e incluso sus elementos-, es evidente que también en la ciencia de la naturaleza tenemos que intentar determinar en primer lugar cuanto se refiere a los principios.*

La vía natural consiste en ir desde lo que es más cognoscible y más claro para nosotros hacia lo que es más claro y más cognoscible por naturaleza; porque lo cognoscible con respecto a nosotros no es lo mismo que lo cognoscible en sentido absoluto. Por eso tenemos que proceder de esta manera: desde lo que es menos claro por naturaleza, pero más claro para nosotros, a lo que es más claro y cognoscible por naturaleza.


ΦΥΣΙΚΗΣ ἈΚΡΟΑΣΕΩΣ Α.

ἘΠΕΙΔΗ τὸ εἰδέναι καὶ τὸ ἐπίστασθαι συμβαίνει περὶ πάσας τὰς μεθόδους, ὧν εἰσὶν ἀρχαὶ ἢ αἴτια ἢ στοιχεῖα, ἐκ τοῦ ταῦτα γνωρίζειν (τότε γὰρ οἰόμεθα γινώσκειν ἕκαστον, ὅταν τὰ αἴτια γνωρίσωμεν τὰ πρῶτα καὶ τὰς ἀρχὰς τὰς πρώτας καὶ μέχρι τῶν στοιχείων), δῆλον ὅτι καὶ τῆς περὶ φύσεως ἐπιστήμης πειρατέον διορίσασθαι πρῶτον τὰ περὶ τὰς ἀρχάς. Πέφυκε δὲ ἐκ τῶν γνωριμωτέρων ἡμῖν ἡ ὁδὸς καὶ σαφεστέρων ἐπὶ τὰ σαφέστερα τῇ φύσει καὶ γνωριμώτερα· οὐ γὰρ ταὐτὰ ἡμῖν τε γνώριμα καὶ ἁπλῶς. Διόπερ ἀνάγκη τὸν τρόπον τοῦτον προάγειν ἐκ τῶν ἀσαφεστέρων μὲν τῇ φύσει ἡμῖν δὲ σαφεστέρων ἐπὶ τὰ σαφέστερα τῇ φύσει καὶ γνωριμώτερα. Ἔστι δ' ἡμῖν πρῶτον δῆλα καὶ σαφῆ τὰ συγκεχυμένα μᾶλλον· ὕστερον δ' ἐκ τούτων γίνεται γνώριμα τὰ στοιχεῖα καὶ αἱ ἀρχαὶ διαιροῦσι ταῦτα. Διὸ ἐκ τῶν καθόλου ἐπὶ τὰ καθ' ἕκαστα δεῖ προϊέναι. Τὸ γὰρ ὅλον κατὰ τὴν αἴσθησιν γνωριμώτερον, τὸ δὲ καθόλου ὅλον τί ἐστιν· πολλὰ γὰρ περιλαμβάνει ὡς μέρη τὸ καθόλου. Πέπονθε δὲ ταὐτὸ τοῦτο τρόπον τινὰ καὶ τὰ ὀνόματα πρὸς τὸν λόγον· ὅλον γάρ τι καὶ ἀδιορίστως σημαίνει, οἷον ὁ κύκλος· ὁ δὲ ὁρισμὸς αὐτοῦ διαιρεῖ εἰς τὰ καθ' ἕκαστα. Καὶ τὰ παιδία τὸ μὲν πρῶτον προσαγορεύει πάντας τοὺς ἄνδρας πατέρας καὶ μητέρας τὰς γυναῖκας, ὕστερον δὲ διορίζει τούτων ἑκάτερον.

VOL. II. B

La Física de Aristóteles

1.2. Arquímedes

Arquímedes nació y murió en la ciudad de Siracusa, en Sicilia. Está considerado como uno de los científicos mas sobresalientes de la historia; de hecho, el historiador Plutarco le atribuía una inteligencia sobrehumana.

Una de las anécdotas mas conocidas sobre Arquímedes se recoge en la obra de Vitrubio. El rey Herón II le encomendó averiguar si una corona de oro que había encargado estaba adulterada o no. Arquímedes encontró la solución cuando estaba en una casa de baños, al darse cuenta de que la cantidad de agua desplazada en la bañera por un objeto era una medida del volumen del cuerpo introducido. Vitrubio cuenta que salió corriendo desnudo por las calles de Siracusa gritando ¡Eureka! !Eureka!", que significa “Lo he encontrado, lo he encontrado!". La corona sumergida habría desplazado una cantidad de agua igual a su volumen. Dividiendo el peso de la corona por el volumen de agua desplazada se obtendría la densidad de la corona, y esta densidad debería ser menor que la del oro en caso de que se hubiesen añadido metales de baja calidad. Arquímedes cogió un trozo de plata con el mismo peso que la corona y otro equivalente en peso de oro. Llenó un recipiente de agua hasta el borde, e introdujo la pieza de plaza y midió la cantidad de agua que se desbordó. Hizo lo mismo con la pieza de oro. Repitió el experimento pero ahora con la corona que había construido el joyero. Y el resultado fue que el volumen de agua desplazada por la corona estaba entre las dos cantidades desplazadas por las piezas de oro y plata. Ajustó sus cálculos y consiguió obtener la cantidad exacta de oro y plata que el joyero había usado para hacer la corona, demostrándole al rey que aquél le había tratado de engañar.

Los logros de Arquímedes en mecánica son numerosos, pero para poner en evidencia su importancia, basta citar estos tres:

- Las leyes de las palancas y de otras máquinas elementales.
- El estudio de la Dinámica y la Estática.
- La creación de los fundamentos de la Hidrodinámica.

Las palancas de Arquímedes

Una palanca es, esencialmente, una barra rígida que oscila sobre un punto de apoyo (llamado fulcro) debido a la acción de dos fuerzas contrapuestas, que denominemos potencia y resistencia. Los usos de las palancas son básicamente para vencer fuerzas (por ejemplo, elevar pesos grandes) o conseguir desplazamientos. Se denomina el brazo de potencia (BP), a la distancia entre el punto en el que aplicamos la potencia y el fulcro, y brazo de resistencia (BR), a la distancia entre el punto en el que aplicamos la resistencia y el fulcro.

La Ley de la palanca dice que:

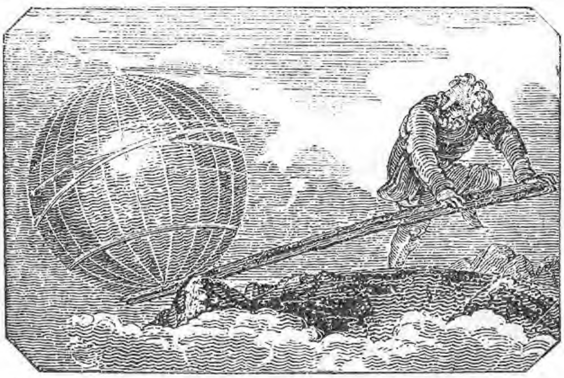
La potencia por su brazo es igual a la resistencia por el suyo.

Las palancas se clasifican en tres categorías:

- Palanca de primer grado, cuando colocamos el fulcro entre la potencia y la resistencia. Por ejemplo, unos alicates.
- Palanca de segundo grado, cuando colocamos la resistencia entre la potencia y el fulcro. Como ejemplo, una carretilla.
- Palanca de tercer grado, cuando ejercemos la potencia entre el fulcro y la resistencia. Como ejemplo de este tipo de palanca tenemos una caña de pescar.

Cuando Arquímedes descubrió la ley de la palanca, su entusiasmo le llevó a afirmar:

"Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo".



La palanca de Arquímedes

Pero Arquímedes fue además un excelente matemático, considerado, ee hecho, por muchos como el primer matemático aplicado de la historia. Entre sus logros matemáticos podemos citar el desarrollo del método exhaustivo, que usó para el cálculo aproximado del número π, o la cuadratura de la parábola, o la relación entre el volumen de la esfera y el cilindro circunscrito (este último lo consideró un logro tan importante que se dice se recogió en su tumba).

La relevancia de Arquímedes queda muy clara si recordamos que es el protagonista del premio mas importante que concede la comunidad matemática cada cuatro años, la medalla Fields.

En la cara se puede ver un relieve de Arquímedes con una inscripción que dice: **TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI** (Trascender el espíritu y domeñar el mundo). En el reverso se lee: **CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA**

TRIBUERE (Los matemáticos de todo el mundo reunidos aquí le rinden tributo por su trabajo sobresaliente).

Finalicemos esta sección recordando su muerte, según la leyenda, a manos de un soldado en el sitio de Siracusa, en el que se dice que Arquímedes usó las leyes de la óptica para quemar las naves romanas con grandes espejos que concentraban los rayos solares. La imagen muestra a Arquímedes ensimismado en sus cálculos obviando la presencia del soldado que acabó con su vida. Se dice que el general romano, Marcelo, se enfureció al saber que había acabado con la vida de Arquímedes ya que era consciente de que con él desaparecía un brillante sabio. Se dice también que las últimas palabras de Arquímedes fueron: ‘No toques mis círculos (Noli turbare circulos meos)", en referencia al problema matemático que tenía ante sí y que probablemente el soldado estaría pisando.

La muerte de Arquímedes

1.3. Herón de Alejandría

Herón nació en la ciudad de Alejandría, en el año 10, falleciendo en el año 70 ya de la era cristiana. Herón fue un personaje muy singular, al que se le atribuyen inventos como la primera máquina de vapor (la llamada eolípila) o la primera máquina de venta automática de la historia (la llamada Fuente de Herón, en la que introduciendo una moneda en una ranura se dispensaba agua sagrada).

Herón es muy conocido como matemático, y estudió las áreas de las superficies y los volúmenes de los cuerpos. Desarrolló también técnicas de cálculo, tomadas de los babilonios y egipcios, como el cálculo de raíces cuadradas mediante iteraciones. Una de sus fórmulas (o teoremas) más conocidas es la llamada Fórmula de Herón, en la que se establece la relación entre el área de un triángulo y la longitud de sus lados y que hoy se enseña todavía en las escuelas.

En óptica, Herón propuso en su obra *Catóptrico* que la luz viaja siguiendo el camino geométricamente más corto. Es decir, si un rayo de luz va del punto A al punto B en un mismo medio de propagación, entonces el rayo sigue el camino más corto posible. Se estaba adelantando más de mil años a los principios que formularon, primero Alhacén, y posteriormente Pierre de Fermat en 1662. Herón no solo fue un teórico, sino que realizó numerosos experimentos para poner a prueba sus teorías, en la línea del método científico moderno.

1.4. Ptolomeo

Uno de los astrónomos más influyentes del mundo griego fue Claudio Ptolomeo, de cuya biografía se sabe muy poco. Fue el creador de una teoría geocéntrica que prevaleció durante casi 1.400 años. Ptolomeo nació en Egipto (aunque no se conoce el lugar exacto) y murió en Alejandría, y se le supone vinculado a la Biblioteca y Museo alejandrinos.

En la Biblioteca tuvo acceso a una cantidad ingente de información de geómetras y astrónomos, muchos de ellos hoy tristemente perdidos para la ciencia. Su estudio no fue sólo recopilatorio, sino que aportó un gran modelo geocéntrico que culminó en su obra el *Almagesto*, cuyo título original era *Colección Matemática*, y, posteriormente, *Gran Compilación Matemática de la Astronomía*, pero que desde siempre se ha conocido por su traducción al árabe (*al-Magisti*, que significa “el más grande").

En esta obra dividida en 13 libros presenta la teoría geocéntrica que se mantuvo en vigor hasta la crítica realizada por Nicolás Copérnico en su libro *De revolutionibus* (1543), posteriormente reforzada y ampliada por Galileo y Kepler. El trabajo de Ptolomeo es notablemente ambicioso, pues en el *Almagesto* estudia el movimiento del Sol, de la Luna, de los planetas conocidos, mejora el catálogo de estrellas de Hiparco, describe instrumentos astronómicos como el astrolabio, calcula la distancia del Sol y la Luna a la Tierra, y desarrolla una teoría de eclipses. No es de extrañar que se convirtiese en la fuente principal de conocimiento astronómico durante siglos.

El *Almagesto* de Ptolomeo comparte con los *Elementos* de Euclides la gloria de ser los textos científicos más usados de la historia. Desde su gestación en el siglo segundo hasta el final del Renacimiento, su trabajo estableció la astronomía como ciencia. Durante este tiempo el Almagesto no fue únicamente un trabajo más de astronomía; sino que la materia estuvo definida tal como se describía en el Almagesto.

El movimiento de los planetas suponía una complicación para Ptolomeo, pues debía combinar los epiciclos de Apolonio con una nueva aportación de Ptolomeo, el ecuante. Así, la trayectoria de un planeta consistía en el movimiento circular en el epiciclo y a su vez el centro del epiciclo moviéndose alrededor de la Tierra. Quizás la aportación más brillante de Ptolomeo fue hacer que el centro de este último círculo no sea el centro de la Tierra, como anteriores modelos, sino que fuese un punto imaginario llamado ecuante. Volveremos a este tema en cuanto hablemos de Copérnico. La complejidad del modelo se hacía enorme: Ptolomeo empleó más de 80 círculos, entre deferentes y epiciclos, para describir el movimiento de los astros alrededor de la Tierra y además, ahora, en cierto modo, se estaba perdiendo el principio de simetría y uniformidad.

La razón fundamental para admitir la inmovilidad de la Tierra era la ausencia de movimiento de las estrellas fijas, que suponían habría sido advertido por la modificación del ángulo con que éstas se observaban desde la Tierra. No sabían entonces que las estrellas estaban mucho más lejos de lo que ellos pensaban.

Ptolomeo también publicó unas tablas de mano, obtenidas de las teorías del Almagesto, las cuáles sólo se conocen por referencias escritas. Fue muy popular su *Tetrabiblos* dedicado a la astrología, en la que aparecen adivinaciones y pronósticos sobre distintos acontecimientos.

También fue un divulgador de la época, como muestra su obra *Hipótesis de los planetas*, escrita en lenguaje sencillo para aquellos que no dominaban el lenguaje matemático, dando un modelo físico, no sólo geométrico, del universo. Ptolomeo cometió en sus cálculos errores importantes, y se le acusa de haber adaptado las tablas de Metón e Hiparco sin haber hecho él mismo sus propias comprobaciones, tal y como, sin embargo, afirmó. Recibió críticas virulentas de Tycho Brahe y también de Newton, que lo acusó de mistificador científico, capaz de retocar los datos para que encajaran en su teoría y no modificar esta cuando los datos la contradecían.

La Iglesia católica consideró las teorías de Ptolomeo como el modelo del universo, al estar de acuerdo con la Biblia. Debido a la influencia de la propia Iglesia en cualquier ámbito, ya fuese científico como social, esto supuso la aceptación universal, lo que explica la pervivencia del modelo ptolemaico. La Inquisición persiguió a aquellos científicos que se atrevieron a contradecir esta teoría. Galileo fue uno de los que tuvo que sufrir esta cerrazón a las nuevas ideas.

2

Del mundo antiguo al moderno

2.1. La época romana

Se suele decir que la ciencia en la antigua Roma era de carácter muy práctico, y no basada, como la griega, en el pensamiento abstracto. De manera que se tiene a los romanos como depositarios de los desarrollos griegos (que al final bebían también de las fuentes babilonias y egipcias) pero no como innovadores. Sin embargo, los romanos destacaron en el caso que nos ocupa por construir una sofisticada red de carreteras, viaductos, minas, edificios magníficos, probando un desarrollo muy importante en los aspectos prácticos de la mecánica.

2.2. La aportación de los árabes

La aportación árabe a la ciencia se quiere a veces reducir a un papel de mera transmisora de la ciencia griega a Europa. Sin embargo, esa imagen no es ajustada, y en los campos de las matemáticas (y también de la mecánica) desarrollaron una enorme cantidad de conceptos nuevos que pusieron una base importante para la revolución que iban a llevar a cabo posteriormente Copérnico, Galileo, Kepler o Newton.

Podemos citar aquí algunos de los hitos en referencia a la mecánica:

- Abu Rayhan al-Biruni, en la primera parte del siglo XI, introduce el método científico experimental en la estática y en la dinámica, y combina la hidrostática con la dinámica para crear la hidrodinámica. También hace avances en el concepto de aceleración para cuerpos sujetos a movimientos no uniformes.

- En el mismo periodo, Alhacén y Avicena desarrollan los conceptos de inercia y de cantidad de movimiento.
- En la primera mitad del siglo XII, Avempace introduce el concepto de fuerza de reacción.
- Al Jazarí, científico de origen kurdo, famoso por haber escrito *El libro del conocimiento de dispositivos mecánicos ingeniosos.*
- Hibat Allah Abu'l-Barakat al-Baghdaadi hace notar que la fuerza es proporcional a la aceleración, en lugar de a la velocidad.
- En 1121 Al-Khazini publica *El Libro del Equilibrio de la Sabiduría*, en la que se desarrolla los conceptos de energía potencial gravitatoria y de gravedad a distancia.

2.3. La Edad Media

En la Edad Media, se trató la llamada "Ciencia de los pesos"(la manera de referirse a la Mecánica), debida al alemán Jordanus de Nemore (o Nemorarius), a finales del siglo XII, de cuya vida se conocen pocos detalles, aunque escribió varios tratados sobre matemáticas y mecánica. En su obra *Elementa super demonstrationem ponderum*, introduce los conceptos de gravedad posicional y el de fuerza, y se le atribuye usar ya la noción de desplazamiento virtual. En esta obra se adelanta en muchos años a los trabajos posteriores de Galileo sobre el equilibrio de pesos en planos inclinados.

Otro nombre importante es Jean Buridan (1300-1358), cuyo nombre latino era Joannes Buridanus, filósofo escolástico francés, que formuló una noción de inercia intentando explicar el movimiento con lo que él llamaba teoría del ímpetu.

3

El nacimiento de la Mecánica moderna

3.1. Copérnico

Nicolás Copérnico nació en la ciudad polaca de Torun (que pertenecía a Prusia en esa época) en 1473, y falleció en Frombork, en 1543.) Fue astrónomo y matemático, además de jurista, clérigo y administrador, y desarrolló la teoría heliocéntrica del Sistema Solar (que previamente había sido propuesta por Aristarco de Samos).

Copérnico nació en una familia acomodada, y en 1491 ingresó en la Universidad de Cracovia, viajando a Italia en 1496 para completar su formación en Bolonia, dónde estudió derecho y los clásicos. No hay constancia de que en esas fechas se interesara por la astronomía y, de hecho, tras estudiar medicina en Padua, Copérnico se doctoró en derecho canónico por la Universidad de Ferrara en 1503, volviendo entonces a Polonia, donde se le había ofrecido un cargo eclesiástico.

En 1512, Copérnico se traslada a Frauenburg y se dedica allí a la administración de los bienes del cabildo de esta ciudad hasta su muerte, aunque nunca fue ordenado sacerdote. Sus ocupaciones fueron muy variadas, desde la economía (publicó un tratado en 1528 sobre la reforma económica), a la medicina y, por supuesto, la astronomía.

Su obra cumbre es *De revolutionibus orbium caelestium* (*De las revoluciones de las esferas celestes*), y es una de las claves de la ciencia moderna del Renacimiento y de la revolución científica que este movimiento produjo en Europa. La propuesta de Copérnico rompe con la visión central que se le daba a nuestro planeta (y por ende, al propio hombre como pieza central de la creación divina), de ahí los recelos por parte de la Iglesia. Como precaución, en 1507, hizo circular una serie de notas manuscritas con su esquema del cosmos entre estudiosos de la astronomía, lo que le granjeó un gran respeto entre ellos.

Sus propuestas principales son que los movimientos celestes son uniformes, eternos, y circulares; que el centro del universo es el Sol; y Mercurio, Venus, la Tierra y la Luna, Marte, Júpiter, Saturno, por ese orden, orbitan a su alrededor; las estrellas son objetos distantes que permanecen fijos y por lo tanto no orbitan alrededor del Sol; la Tierra tiene tres movimientos: la rotación diaria, la revolución anual, y la inclinación anual de su eje; y la distancia de la Tierra al Sol es pequeña comparada con la distancia a las estrellas.

En 1513, el Papa lo invitó a trabajar en la reforma del calendario juliano, y en 1533 sus propuestas fueron expuestas al papa Clemente VII por su secretario; en 1536, el cardenal Schoenberg escribió a Copérnico desde Roma urgiéndole a que hiciera públicos sus descubrimientos. Copérnico publicó su libro, y no fue hasta más tarde cuando la Iglesia condenó sus teorías. En efecto, la oposición fue tanto cristiana como protestante, argumentando que el modelo copernicano contradecía la Biblia. Así, 73 años después de la publicación de su libro, la iglesia prohibiría la enseñanza del modelo en el que el sol fuese el centro del universo.

Es importante destacar que la obra de Copérnico no es perfecta, ya que hereda el sistema de epiciclos que los antiguos griegos habían utilizado para explicar los movimientos de retroceso de los planetas. De cualquier forma, el nuevo modelo del universo parece más simple y elegante.

El propio Copérnico dice en el prefacio del libro, cuando está explicando las deficiencias de los sistemas astronómicos propuestos anteriormente al suyo, y que parecen haber fracasado en su intento de hallar o calcular la forma del mundo y la simetría exacta de sus partes, sino que 'les sucedió como si alguien tomase de diversos lugares manos, pies, cabeza y otros miembros auténticamente óptimos, pero no representativos en relación con un solo cuerpo, no correspondiéndose entre sí, de modo que con ellos se compondría más un monstruo que un hombre. Un monstruo que no puede corresponder a la obra del *mejor y más regular artífice de todos*".

Otro elemento interesante es el lugar preeminente que ocupa el Sol, su papel central en el universo y que Copérnico justifica: “Y en el medio de todo permanece el Sol. Pues, ¿quién en este bellísimo templo pondría esta lámpara en otro lugar mejor, desde el que pudiera iluminarlo todo? Y no sin razón unos le llaman lámpara del mundo, otros mente, otros rector. Trimegisto le llamó dios visible, Sófocles, en Electra, el que todo lo ve. Así, en efecto como sentado en un solio real, gobierna la familia de los astros que lo rodean."

De cualquier manera, con sus defectos, la revolución estaba en marcha, y Johannes Kepler y Galileo Galilei avalarán la obra de Copérnico y darán otra vuelta de tuerca en años sucesivos.

Nicolás Copérnico y su sistema solar

3.2. Galileo Galilei

Galileo Galilei (1564-1642) destacó en muy diferentes campos del saber, especialmente en astronomía, matemáticas y física. Llegó a simbolizar la importancia crucial de la observación y la experimentación para el desarrollo científico. Así, tenemos una imagen de Galileo lanzando una bala de cañón y otra de mosquete desde la Torre de Pisa (aunque esta historia parece ser más una campaña de promoción turística que realidad) para ver que caen con la misma aceleración; también lo podemos recordarle mejorando la construcción del telescopio para afinar sus observaciones celestes.

Galileo Galilei

Galileo nació en Pisa 20 años después de la publicación de la obra de Copérnico, *De Revolutionis*. A requerimiento de su padre, comenzó a estudiar medicina en la Universidad de Pisa, pero, de espíritu fogoso e inquieto, abandona pronto estos estudios para dedicarse a las matemáticas y las ciencias. En 1589 logra ser nombrado profesor de matemáticas de esa universidad, donde también da clases de astronomía y realiza experimentos sobre caídas de cuerpos rodando en planos inclinados.

Como el salario no era bueno, deja (obviamente) Pisa y en 1592 ocupa una plaza mejor remunerada en la Universidad de Padua. Otro aspirante para dicha plaza fue Giordano Bruno pero, afortunadamente (para Galileo, claro), estaba en la cárcel cuando Galileo llega a Padua. Allí permaneció 18 años, dando clases; investigando en, por ejemplo, la ley del movimiento uniformemente acelerado, o en la trayectoria parabólica de los proyectiles; pero también inventando instrumentos como el termómetro.

Esta forma de trabajar, basada en la observación, le creaba dificultades e infinitas pugnas con la doctrina dogmática de los aristotélicos. Galileo era un defensor de la experimentación y el racionalismo científico y matemático. Es bien conocida la célebre frase de Galileo:

> *La filosofía está escrita en este vasto libro que continuamente se ofrece a nuestros ojos (me refiero al universo), el cual, sin embargo, no se puede entender si no se ha aprendido a comprender su lengua y a conocer el alfabeto en que está escrito. Y está escrito en el lenguaje de las matemáticas, siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender una sola palabra; sin ellos sólo se conseguiría vagar por oscuros laberintos.* (Il saggiatore, 1623).

Galileo era ya un científico prestigioso, pero hubo un hecho que le llevó a ser reconocido mundialmente. Galileo tiene noticias del telescopio que, por entonces, se construía en Holanda. Se interesa en el invento y rápidamente lo mejora, construyendo uno con más aumentos. Obviamente por motivos comerciales y militares este invento era extraordinariamente útil, por lo que las autoridades de Padua le duplicaron el salario y le concedieron un cargo vitalicio.

Vemos que, desde el punto de vista financiero, Galileo enfocó el telescopio en el horizonte, pero, desde el punto de vista científico, enseguida lo apuntó ¡hacia el cielo nocturno! Lo que ve en su telescopio enseguida le convierte en un defensor de las doctrinas de Copérnico. Pero ¿qué vió? Galileo contempla la Luna, con sus irregularidades y sus cráteres, y al Sol con sus manchas e imperfecciones ¿Qué queda de esos astros perfectos, uniformes e inmutables que postulaba la teoría aristotélica? Galileo observa a Venus con un conjunto completo de fases, algo no justificable por el modelo ptolomaico. Escribe el propio Galileo: "Debemos concluir con necesidad absoluta, de acuerdo con las teorías pitagóricas y de Copérnico, que Venus gira alrededor del Sol al igual que los otros planetas."

Su mirada se dirige ahora a Júpiter y descubre cuatro de sus satélites, girando alrededor de este planeta. También se sorprende por la ingente cantidad de estrellas y la presumible inmensidad y profundidad del universo, localizando estructuras organizadas entre ellas, como nuestra Vía Láctea. Todas estas observaciones del universo con su telescopio son recopiladas en su libro *El mensajero de las estrellas*, que alcanza fama internacional.

El uso del telescopio originó algunas controversias sobre el papel de los instrumentos en las observaciones. En aquellos momentos Kepler se convirtió en uno de los mayores defensores de Galileo. El propio Kepler, deseoso de disponer de un telescopio, escribe a Galileo: ‘para que también yo pueda disfrutar, como vos, del espectáculo de los cielos". Galileo, más ocupado en obtener fama y reconocimiento, ignoró esta petición, quizá temiendo que la genialidad de Kepler pudiera eclipsarle. En 1632 publica su famoso *Diálogo sobre los principales sistemas del mundo*, con todas las bendiciones papales. En él destaca la noción de inercia, que fue esencial para el posterior desarrollo emprendido por Isaac Newton. El método científico usado en el libro resquebrajaba los principios científicos anteriores y, por ende, la visión del mundo defendida por la Iglesia católica. Galileo demandaba, además, un espacio de libertad para la ciencia por encima de lo religioso, tema que tristemente sigue siendo actualidad en algunos países. Demasiado pronto para tal demanda, enseguida es acusado por la Inquisición.

Sus detractores comienzan sus ataques con argumentos de todo tipo: la incorruptibilidad del Sol no puede permitir la existencia de manchas solares, el episodio bíblico de Josué es incompatible con el movimiento de rotación de la Tierra, pues Josué ordena que el Sol se detenga. Es finalmente condenado, aunque se le evita pasar por la tortura física (potro, hierros candentes, hoguera y otros instrumentos de conversión), se prohíben sus libros heréticos, se le obliga arrodillado a abjurar y maldecir sus opiniones sobre el movimiento de la Tierra. Su frase “Eppur si muove” pasa a ser un paradigma de la rebeldía ante los poderosos. Recluido en su casa, aún tiene ánimos de escribir sus *Discursos*, donde se recogen sus estudios sobre cinemática de cuerpos.

El juicio de Galileo

Para finalizar, digamos que las observaciones de Galileo Galilei en 1609 apuntando por primera vez al cielo con un telescopio significaron el comienzo de 400 años de descubrimientos que aún continúan. Por ello, el 27 de octubre de 2006 la Unión Astronómica Internacional (IAU en sus siglas inglesas) anunció la declaración por la UNESCO del 2009 como el Año Internacional de la Astronomía (IYA2009), ratificada por la ONU el 19 de diciembre de 2007.

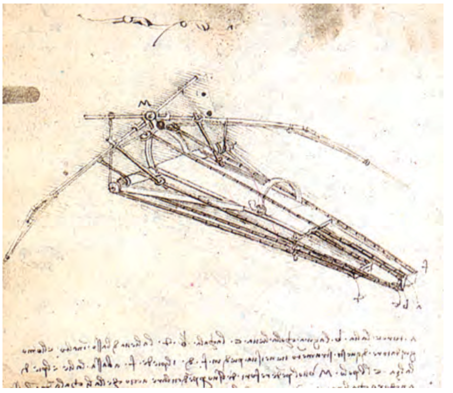
3.3. Un interludio: Leonardo da Vinci

Recordaremos brevemente la figura de Leonardo da Vinci (1452-1519), un gran estudioso de la mecánica en sus aspectos más variados: la dinámica de los objetos voladores, armas o el estudio de los materiales para sus grandes proyectos en la escultura.

Leonardo da Vinci

La cita de Galileo sobre las matemáticas como lenguaje del universo es bien conocida, pero lo es menos ésta de Leonardo que reproducimos en su idioma original y que da a las matemáticas un papel clave en el estudio de cualquier ciencia que se quiera considerar como tal:

> *Nessuna umana investigazione si può dimandare vera scienza, se essa non passa per le matematiche dimostrazioni; e se tu dirai che le scienze, che principiano e finiscono nella mente, abbiano verità, questo non si concede, ma si nega per molte ragioni; e prima, che in tali discorsi mentali non accade esperienza, senza la quale nulla dà di sé certezza.*
>
> Trattato della Pittura, PARTE PRIMA; Se la pittura è scienza o no



Dibujo de Leonardo

3.4. Johannes Kepler

Será Kepler quién dará un avance definitivo a esta nueva visión del cosmos. Johannes Kepler, nacido en 1571 en Weil der Stadt, Alemania, era hijo de un soldado y una posadera. A la muerte de su padre, estuvo al cuidado de su madre y de su abuelo. Fue un niño precoz en la escuela, y posteriormente estudió astronomía en la universidad de Tubinga. Allí entró en contacto con las revolucionarias ideas copernicanas. Su interés no era calcular órbitas, sino descubrir las leyes que regían los movimientos planetarios.

Johannes Kepler

En su primera gran obra, *Mysterium Cosmographicum*, en 1596, en la que usaba los sólidos platónicos para describir el sistema solar, pero esta descripción no concordaba con las observaciones. Recordemos que en la época de Kepler solo se conocían seis planetas: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno. Estudiando sus distancias al Sol, propuso que los seis planetas encajarían con cinco sólidos: cada planeta orbitaría en una esfera, y entre cada esfera y la siguiente, estaría uno de los cinco poliedros. Aunque esto pueda parecer pura imaginación, sus estudios le llevaron a formular sus dos primera leyes que citamos más adelante.

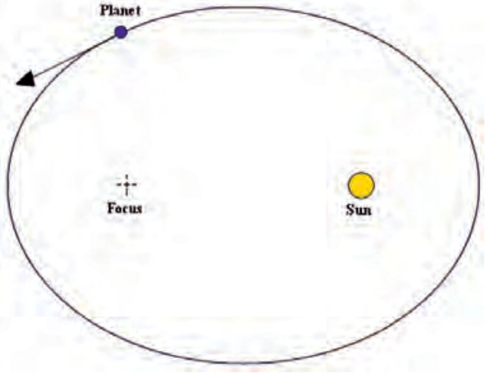
El disponer de buenos datos observacionales era imprescindible, y esto era lo que un personaje muy singular de la historia europea poseía en abundancia, Tycho Brahe. Kepler consiguió (con muchos esfuerzos de su parte) que Brahe compartiera con él sus datos, y de hecho, los heredó a la muerte del mismo.

Kepler hizo un gran trabajo, muy duro (como dijo Euclides, no hay caminos reales), y en su obra de 1619, *Harmonices Mundi*, formuló su tercera ley, con lo que completaba las bases para entender cómo funciona el sistema solar. Entre ambas obras murió su hijo de siete años en 1611, y después, su esposa, aunque contrajo más adelante nuevas nupcias. Kepler sufrió mucho en su vida por las guerras religiosas que asolaron Europa en esos años, y en las que él siempre intentaba encontrar el punto equidistante en las opiniones tan exacerbadas de católicos y protestantes. Un golpe adicional fue la acusación de brujería a su madre, que fue finalmente absuelta.

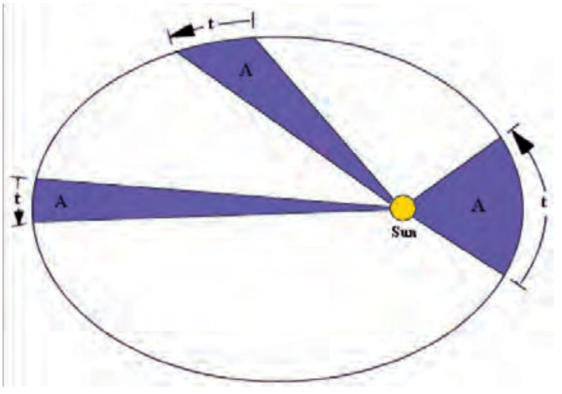
LEYES DE KEPLER

Kepler fueron enunció sus leyes por Johannes Kepler para explicar el movimiento de los planetas en sus órbitas alrededor del Sol:

Primera Ley (1609): Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, estando el Sol situado en uno de los focos.



Segunda Ley (1609): El radio vector que une el planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales



Tercera Ley (1618): Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital (tiempo que tarda en dar una vuelta alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de la distancia media con el Sol.

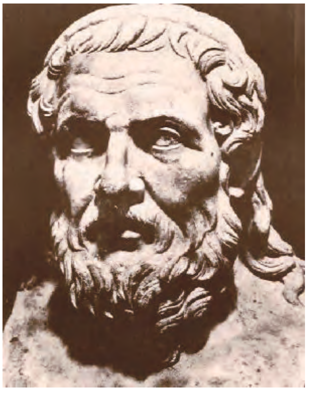
$$\frac{T^2}{r^3} = constante$$

Como hemos comentado, Kepler dedujo sus leyes a partir de observaciones astronómicas precisas obtenidas por Tycho Brahe y, aunque sabía que explicaban el movimiento planetario observado, no entendía las razones últimas de este comportamiento.

Tycho Brahe

Como gran parte de los científicos de la época, aparte de la astronomía o las matemáticas, Kepler trabajó en otros campos, por ejemplo la óptica. Su obra más importante en este campo, *La dióptrica*, es un planteamiento de la óptica desde una perspectiva geométrica junto con los principios de reflexión y refracción (aunque no llegó a formular correctamente la ley de refracción). Además, estudió desde un punto de vista matemático la formación de imágenes en lentes así como el telescopio proponiendo mejoras del mismo. Probablemente el interés del Kepler por la óptica viene de su relación con Galileo.

Es interesante recordar como el estudio de las cónicas, que no ofrecía unas aplicaciones tan claras en la Grecia Antigua, pasan a ser decisivas en el trabajo de Kepler. Las elipses, parábolas e hipérbolas fueron estudiadas primero por Menecmo y después por Euclides, Apolonio y Pappus. El primer tratado escrito que se conserva sobre las secciones cónicas se debe a Apolonio de Perga.



Apolonio de Perga

Los resultados obtenidos por Apolonio sobrevivieron sin cambios hasta que Fermat y Descartes, en una de las primeras aplicaciones de la Geometría Analítica, retomaron el problema con un estudio muy completo. El estudio analítico de Descartes ofrece un aspecto puramente algebraico y se sirve de las ecuaciones de las cónicas para deducir propiedades referentes a las curvas y a su construcción geométrica. Por otro lado, Fermat deduce las ecuaciones de la recta, la circunferencia y todas las secciones cónicas.

3.5. Sir Isaac Newton

Fue Isaac Newton quien extrajo de los escritos de Kepler la formulación matemática precisa de esas leyes, relacionándolas con sus propios descubrimientos, dando un sentido físico preciso a leyes empíricas. El estudio de Newton de las leyes de Kepler condujo a su formulación de la ley de la gravitación universal.

Isaac Newton

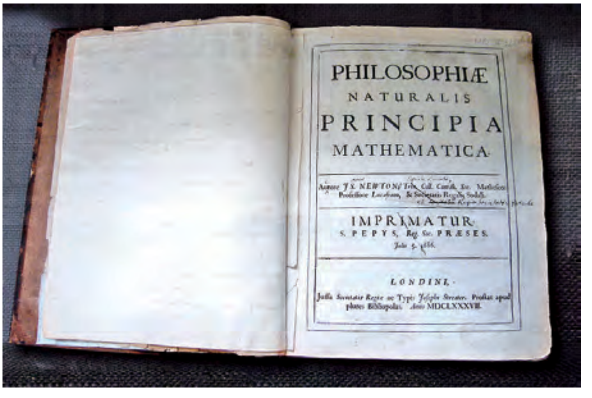
Isaac Newton nació en las primeras horas del 25 de diciembre de 1642 (4 de enero de 1643, según el calendario gregoriano), en una pequeña aldea, Woolsthorpe, huérfano ya que su padre había fallecido unos meses antes. Su madre contrajo de nuevo matrimonio con el reverendo Barnabas Smith cuando Newton tenía tres años, y se trasladó a la casa de su nuevo marido, quedando el niño al cuidado de su abuela materna. Parece que nunca le perdonó a su madre este abandono.

Su madre enviudó de nuevo cuando Newton tenía doce años. Esto propició su vuelta, con tres hermanastros para Isaac, dos niñas y un niño, y una herencia sustanciosa. Newton asistió al colegio en King's School, donde creció su interés por los estudios, aunque fue un muchacho solitario y tímido. A los dieciséis años, su madre lo hizo regresar a casa para que empezara a ocuparse de los asuntos de casa, y la familia decidió prepararle para ingresar en la universidad. Newton fue admitido en el Trinity Colege de Cambridge en 1661, donde comenzó estudios humanísticos, aunque en 1663 comenzó a interesarse más por las cuestiones científicas.

El gran cambio en la vida de Newton se produce con la epidemia de peste que asoló Londres en 1665, ya que vuelve a su casa al cerrar el Trinity al que se reincorpora en 1667. Según el propio Newton, ese periodo de 1665 y 1666 fue su época más fecunda, y en la que desarrolla los logros más importantes de su vida científica.

Newton fue elegido becario del Trinity College en 1667. Dos años más tarde sucedió al matemático Barrow en su cátedra. Por esa época, Newton redactó sus primeras exposiciones sistemáticas del cálculo infinitesimal que no se publicaron hasta más tarde. En 1664 o 1665 había hallado la famosa fórmula para el desarrollo de la potencia de un binomio con un exponente cualquiera, entero o fraccionario, aunque no lo notificó hasta 1676. En febrero de 1672 presentó a la Royal Society su primera comunicación, pocos días después de que dicha sociedad lo hubiera elegido como académico. En ella desarrollaba su teoría de que la luz blanca estaba compuesta por diferentes colores, teoría que fue muy controvertida, especialmente por Hooke, quien defendía una naturaleza ondulatoria y no corpuscular. De hecho, las polémicas entre Hooke y Newton fueron continuas, y Hooke reclamó su contribución también a la ley de la gravitación.

En 1686, Newton presenta su obra magna, los *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Los principios matemáticos de la filosofía natural* [85]). Los *Principia* contenían la primera exposición impresa del cálculo infinitesimal creado por Newton, así como los fundamentos de la física y la astronomía formulados en el lenguaje sintético de la geometría. En las primeras ediciones, Newton reconocía las aportaciones al cálculo infinitesimal de Leibniz, pero las suprimió más adelante, fruto de una polémica entre las islas y el continente que duró siglos.



Philosophiae naturalis principia mathematica

El trabajo de Newton había solventado una primera dificultad, que era considerar los planetas y cuerpos solares como puntos con masa, y no como esferas sólidas. La ley fundamental de Newton (la llamada segunda ley del movimiento) dice (expresada en términos modernos) que la fuerza que actúa sobre un cuerpo es el producto de su masa por la aceleración (la derivada de la velocidad):

$$F = M \times a$$

Por otra parte, la ley de la gravitación universal dice que todos los cuerpos de la naturaleza se atraen entre sí con una fuerza que es directamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias entre ellos. Newton dedujo esta ley de las tres leyes de Kepler, y para ello hizo uso del cálculo infinitesimal.

Newton fue un genio excepcional. Baste recordar lo que el poeta Alexander Pope decía de él:

> *La Naturaleza y sus leyes estaban ocultas en la noche; Dios dijo, ¡qué sea Newton! Y todo fue luz.*

4

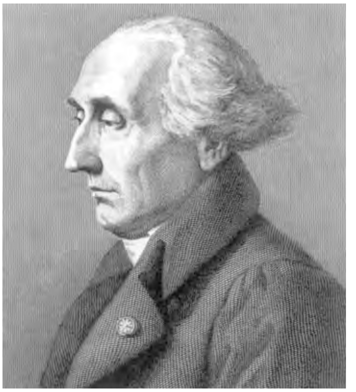
La Mecánica de Euler y Lagrange

4.1. Las ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange (también llamadas ecuaciones de Lagrange), fueron desarrolladas por Leonhard Euler y Joseph-Louis Lagrange en la década de 1750. Estas ecuaciones constituyen la fórmula más importante del Cálculo de Variaciones y dan un método para encontrar funciones que optimizan un funcional de coste dado.

Se usa ampliamente en problemas de optimización y para calcular trayectorias. El resultado es análogo al del cálculo elemental que afirma que cuando una función alcanza sus valores extremos, su derivada es cero.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange fueron obtenidas en relación con el estudio del problema de la tautocrona: determinar una curva sobre la que una partícula caerá a un punto fijo en un tiempo fijado, independientemente del punto inicial.



Joseph-Louis Lagrange

Lagrange resolvió este problema en 1755 y envió su solución a Euler. Su carta fue escrita el 12 de Agosto de 1755 y Euler contestó el 6 de septiembre, diciendo que estaba impresionado con las nuevas ideas de Lagrange. Los dos juntos desarrollaron este método y lo aplicaron a la Mecánica, lo que llevó a la formulación de la Mecánica lagrangiana. La correspondencia que ambos mantuvieron esos años condujo finalmente al desarrollo del Cálculo de Variaciones, terminología acuñada por Euler en 1766.

Leonhard Euler

Recordemos que Lagrange era un gran defensor del Principio de Mínima Acción de Maupertuis, que fue una inspiración para lograr su resultado. Recordemos que el principio de mínima acción establece que en todos los fenómenos naturales, una cantidad llamada *acción* tiende a ser minimizada. Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) fue un filósofo, matemático y astrónomo francés.

Pierre-Louis Moreau de Maupertuis

Expliquemos brevemente en qué consiste el método que da lugar a las ecuaciones de Euler-Lagrange usando notación moderna. Consideremos una familia de curvas $x^i = x^i(t, u)$ en $\mathbb{R}^n$ (donde u es un paramétro) que unen dos puntos P_1 y P_2 en tiempos t_1 y t_2 respectivamente.

Sea $f = f(t, x^i, \dot{x}^i)$ y sea C la curva definida por $x^i(t) = x^i(t, 0)$.

Si

$$\eta^i(t) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial u}\right)_{u=0} \quad , \quad I = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x^i, \dot{x}^i)\, dt$$

y se satisface $\eta^i(t_1) = \eta^i(t_2) = 0$, entonces se obtiene

Ecuaciones de Euler-Lagrange

C es un extremal para I si y solo si se verifica

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$$

Estas ecuaciones se suelen denominar de Euler en la literatura del Cálculo de Variaciones y de Lagrange en Mecánica.

4.2. Mecánica lagrangiana

La denominada mecánica lagrangiana fue introducida por Joseph Louis Lagrange en 1788. Recordemos que éste fue un matemático italiano, nacido en Turín en 1736 y fallecido en París en 1813, que también vivió y trabajó en Prusia (en la corte de Federico II en Berlín).

En la Mecánica Lagrangiana, la trayectoria de un sistema de partículas se obtiene resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange, dadas en *coordenadas generalizadas* (como luego describiremos). El lema fundamental del Cálculo de Variaciones demuestra que resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange es equivalente a encontrar el camino que minimiza el funcional de acción, que se obtiene del lagrangiano.

Sello conmemorativo de Lagrange

Antes de continuar con los conceptos de la Mecánica lagrangiana, resulta interesante profundizar algo más en la trayectoria vital de Lagrange. Como comentábamos, impresionado por sus resultados sobre la tautocrona, Euler propuso a Lagrange para su elección en la Academia de Berlín y fue elegido el 2 de Septiembre de 1756. Al año siguiente, Lagrange fue miembro fundador de una sociedad científica en Turín (el origen de la futura Real Academia de Ciencias de Turín).

Una de sus funciones en la nueva sociedad fue poner en marcha una revista científica, los *Mélanges* de Turín, que incluía artículos en francés y latín. Lagrange publicó allí muchos artículos en los primeros volúmenes (volumen 1, 1759; volumen 2, 1762; volumen 3, 1766). Entre ellos, publicó sus resultados sobre el Cálculo de Variaciones y fundamentos de mecánica, combinando el Principio de Mínima Acción y la energía cinética. También estudió la propagación del sonido e hizo importantes contribuciones a la teoría de vibraciones. Había leído mucho sobre este tema en los trabajos previos de Newton, Daniel Bernoulli, Taylor, Euler y d'Alembert. Lagrange usó un modelo formado por n masas unidas por cuerdas sin peso. Resolvió el sistema resultante de $n+1$ ecuaciones diferenciales, y haciendo tender n a infinito, obtuvo las mismas soluciones que Euler.

En el tercer volumen, Lagrange estudió la integración de ecuaciones diferenciales e hizo varias aplicaciones a Mecánica de Fluidos, en las que introdujo el concepto de función lagrangiana.

4.3. Traité de mécanique analytique

El marqués Caraccioli, embajador del reino de Nápoles en la corte de Turín, quería traer de nuevo a Lagrange de vuelta a Italia y consiguió que la corte de Nápoles le hiciera una oferta, la de Director de Filosofía de la Academia de Nápoles. Pero el puesto de Berlín le ofrecía las condiciones ideales para trabajar.

Sin embargo, su salud y la de su esposa durante su vida en Berlín fue muy mala. Su esposa falleció y Lagrange entró en una gran depresión. Tres años más tarde murió Federico II y la posición de Lagrange en Berlín no fue ya tan buena. Por eso en Italia vieron que era la ocasión para recuperarle.

Pero la oferta más atractiva no fue la italiana, sino la de París, que incluía una cláusula según la cuál Lagrange no tendría obligación de enseñar. El 18 de Mayo de 1787 abandonó Berlín para convertirse en miembro de la Académie des Sciences de París, en donde permaneció hasta el final de su carrera. Lagrange sobrevivió a la Revolución Francesa, mientras que otros colegas murieron. Y es que esta era su actitud ante la vida:

> *Creo que, en general, uno de los primeros principios de un sabio es conformarse estrictamente con las leyes del país en el que vive, incluso aunque estas sean irrazonables.*

Esta actitud acomodaticia le granjeó no pocas críticas entre sus contemporáneos y posteriormente.

Lagrange había hecho muchas contribuciones a la mecánica, pero no había escrito un trabajo que lo resumiera todo, un tratado definitivo de la materia. Decidió hacerlo y en ese sentido le escribió a Laplace el 15 de Septiembre de 1782:

> *He casi completado un Traité de mécanique analytique, basado únicamente en el principio de velocidades virtuales; pero, como no sé ni cuando ni como seré capaz de imprimirlo, no estoy dándome prisa para finalizarlo.*

La *Mécanique analytique* [64] que Lagrange había escrito en Berlín, fue publicada en 1788. Había sido aprobada por un comité formado por Laplace, Cousin, Legendre y Condorcet. Este libro resumía todo el trabajo en el campo desde los tiempos de Newton y en él hace un uso importante de la teoría de ecuaciones diferenciales. Escribió en el Prefacio:

> *No se encontrarán figuras en este trabajo. Los métodos que yo expongo no requieren ni construcciones, ni argumentos geométricos o mecánicos, sino sólo operaciones algebraicas, sujetas a un curso regular y uniforme.*

4.4. Interludio: Coordenadas generalizadas

Si comenzamos con N partículas en el espacio $\mathbb{R}^3$, cada una con sus tres coordenadas, el sistema estará descrito por $3N$ coordenadas en $\mathbb{R}^{3N}$. Pero puede haber ligaduras entre estas coordenadas, de modo que al final tendremos un subespacio (una subvariedad) cuyos puntos (las posiciones del sistema) vendrán determinados por n coordenadas. Estas coordenadas se denominan generalizadas:

$$(q^A) = (q^1, \dots, q^n)$$

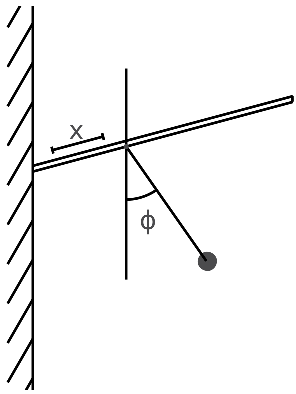
Lo que estamos haciendo es buscar el menor número posible de variables que nos permitan conocer la posición del sistema en cuestión en cada momento. Este número es el número de grados de libertad del sistema.

La estructura topológica del espacio de configuración juega un papel muy importante. Además, debemos introducir una métrica apropiada de tal manera que en muchos casos el problema dinámico se reduce al de encontrar las geodésicas de esa métrica (veánse [1, 3, 34]).

Ilustraremos estos conceptos con algunos ejemplos.

Ejemplo: un péndulo suspendido de un raíl

Supongamos un péndulo suspendido de un raíl en un punto que se puede mover en el propio raíl:



Las posiciones del sistema vienen dadas por dos coordenadas, (x, ϕ), donde

x : distancia de la pared al punto en el cuál el péndulo está suspendido

ϕ : el ángulo que el péndulo forma con la vertical

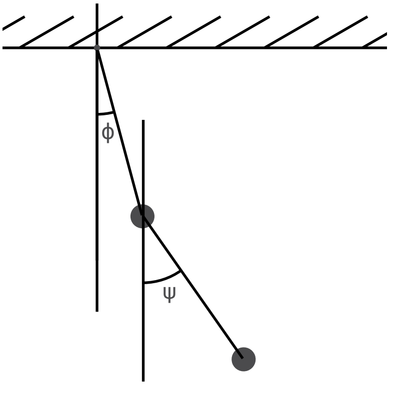
La correspondencia no es biyectiva con las posiciones.

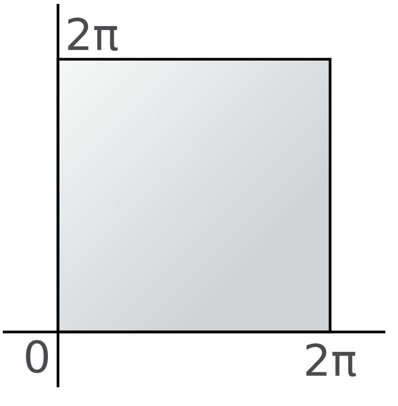
En efecto, dados dos puntos $(x, 0)$ y $(x, 2\pi - \epsilon)$, con ϵ pequeño, están lejos en el plano pero sin embargo corresponden a posiciones cercanas. La solución para evitar el problema consiste en pegar los lados horizontales obteniendp un cilindro:

de manera que nuestro espacio de configuración es $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$.

Ejemplo: el péndulo doble

En este caso necesitamos dos ángulos ϕ, ψ para describir cada posición del péndulo:





Si identificamos los lados del cuadrado habremos resuelto el problema de que posiciones próximas se correspondan a coordenadas próximas. Así ,el espacio de configuración será ahora un toro: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

La idea de Lagrange fue considerar una función, el lagrangiano,

$$L = L(q^A, \dot{q}^A)$$

que depende de las posiciones (q^A) y de las velocidades $(\dot{q}^A)$. De hecho, el lagrangiano es la diferencia entre las energías cinética y potencial:

$$L = T - V$$

donde

$$\begin{aligned} T(q^A, \dot{q}^A) &= \frac{1}{2}\, g_{AB}(q)\, \dot{q}^A \dot{q}^B \\ V &= V(q^A) \end{aligned}$$

El principio variacional aquí consiste en encontrar las curvas $c(t) = (q^A(t))$ entre dos puntos fijados $q_0 = c(0)$ y $q_1 = c(1)$ tales que optimizan el funcional (la acción)

$$\mathcal{A}(c(t)) = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{c}(t))\, dt$$

Las soluciones son las ecuaciones de Euler-Lagrange para la mecánica:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0,\ 1 \leq A \leq n \tag{4.1}$$

Puesto que $L = T - V$ y $T = \frac{1}{2}\, m\, (\dot{q}^A)^2$, entonces obtenemos

$$m\ddot{q}^A = F^A$$

que es la segunda ley de Newton si el sistema es conservativo, es decir, las fuerzas actuando son

$$F^A = -\frac{\partial V}{\partial q^A}$$

para una energía potencial V.

5

La Mecánica hamiltoniana

La mecánica hamiltoniana es una reformulación de la mecánica clásica. Fue desarrollada en 1833 por el matemático irlandés William Rowan Hamilton. No necesita la mecánica lagrangiana para obtener las ecuaciones del movimiento, y condujo al nacimiento de la llamada geometría simpléctica.

La diferencia fundamental con la mecánica de Lagrange es que en vez de obtener n ecuaciones diferenciales de segundo orden (en el espacio de configuración de dimensión n), se obtienen $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden (en el espacio de fases de dimensión $2n$). La exposición de esta sección se puede ampliar en los libros [1, 3, 34, 69, 98]

5.1. Sir William Rowan Hamilton

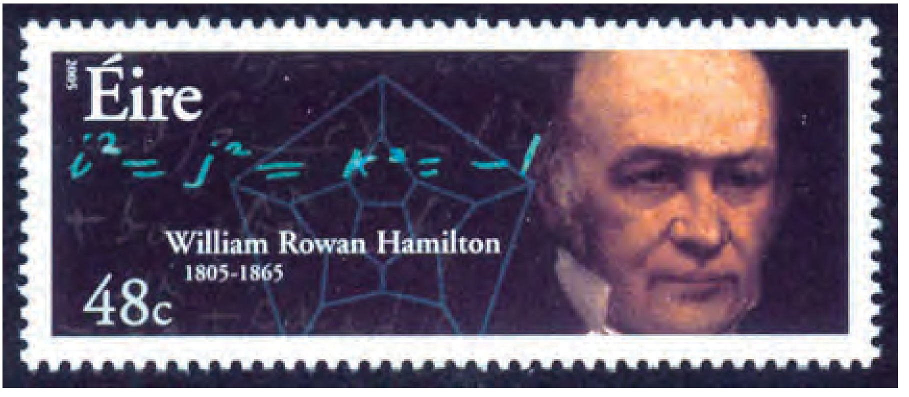
Un nombre importante en la historia de lo que se ha dado en llamar Óptica Geométrica (el estudio de la óptica usando métodos geométricos) es Sir William Rowan Hamilton, nacido en 1805 en Dublín, y fallecido en esa misma ciudad en 1865.

Hamilton es muy conocido por su invento de los cuaternios, que querían expresar a la vez la dimensión para el tiempo y las tres del espacio. El mismo Hamilton relata que esta idea de los cuaternios le vino cuando, un día de 1843, paseaba por el puente de Brongham, que cruza el Canal Real de Dublín. Acto seguido grabó con la punta de su navaja, sobre una piedra del puente, la feliz idea (esta inscripción no se conserva hoy día, pero sí una placa conmemorativa). Como suele ocurrir en estos casos, Hamilton llevaba mucho tiempo pensando en aquel problema y ese fue el momento en que sus neuronas lograron la sinapsis acertada.

Pero Hamilton es hoy universalmente conocido por su obtención de las llamadas ecuaciones de Hamilton, que expresan las variaciones de las posiciones y de los momentos del sistema mecánico en términos de la función

Hamiltoniana (o energía total del sistema, es decir, la suma de las energías cinética y potencial). También introdujo la función característica y lo que hoy se denomina ecuación de Hamilton-Jacobi, que permite integrar de manera muy sencilla muchas ecuaciones de la mecánica.

Estos trabajos estaban inspirados por los que previamente realizó sobre Óptica, en su tratado *Theory of Systems of Rays* [54]. La comprobación experimental unos meses más tarde de su teoría a cargo de Humphrey Lloyd, proporcionó gran fama a Hamilton.



Sello conmemorativo de Hamilton

5.2. Ecuaciones de Hamilton

El hamiltoniano es una función de las posiciones (q^A) y de los momentos P_A:

$$H = H(q^A, p_A)$$

y representa la energía total

$$H = T + V$$

Podemos pensar, para simplificar, que estamos en $\mathbb{R}^{2n}$, y que (q^A, p_A) son coordenadas en este espacio (que es el espacio de fases del sistema mecánico en consideración).

Si calculamos la diferencial de la energía

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^A}\, dq^A + \frac{\partial H}{\partial p_A}\, dp_A$$

y escribimos la ecuación

$$X_H = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q^A} \\ \frac{\partial H}{\partial p_A} \end{pmatrix}$$

obtenemos el campo de vectores

$$X_H = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial p_A} \\ \frac{\partial H}{\partial q^A} \end{pmatrix}$$

X_H es el denominado campo de vectores hamiltoniano. Sus curvas integrales $(q^A(t), p_A(t))$ satisfacen las ecuaciones de Hamilton

$$\boxed{\frac{dq^A}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_A}, \quad \frac{dp_A}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^A}}$$

Si f, g son dos funciones definidas en el espacio de fases (q^A, p_A), podemos formar el corchete de Poisson

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^A}\frac{\partial g}{\partial p_A} - \frac{\partial f}{\partial p_A}\frac{\partial g}{\partial q^A}$$

cuyas propiedades son:

- es bilineal,
- antisimétrico,
- y satisface la identidad de Jacobi

  $$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

  para funciones arbitrarias f, g y h.

Hamilton, Poisson y Jacobi

La 2-forma bilineal

$$\boxed{\omega_Q = dq^A \wedge dp_A}$$

tiene como matriz asociada

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

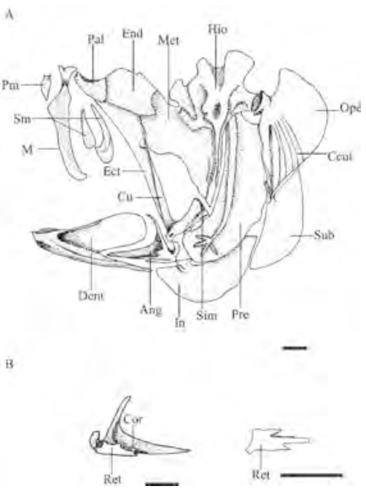
así que podemos escribir la ecuación anterior como

$$i_{X_H}\omega_Q = dH$$

porque, en realidad, la matriz (5.1) convierte vectores en covectores (es un isomorfismo).

La 2-forma ω_Q es lo que se llama una forma simpléctica.

El término *simpléctico* viene del griego *symplektikos* que significa que entrelaza. Este nombre fue usado por primera vez en 1939 por H. Weyl en su tratado *The classical groups* sobre los grupos de movimientos rígidos [110]. También se corresponde con el nombre de un hueso de los peces (veáse la figura):



El hueso simpléctico

5.3. Geometría simpléctica

Si extraemos las propiedades de la forma ω_Q, podemos definir una forma simpléctica como una forma bilineal satisfaciendo las siguientes propiedades:

- antisimétrica,
- y de rango máximo

La geometría simpléctica es la que está detrás también de las ecuaciones de Euler-Lagrange, como veremos a continuación.

En una variedad diferenciable M, se le pide además una condición de integrabilidad: la forma simpléctica ω en la variedad M debe ser cerrada, es decir, $d\omega = 0$, donde d es la diferencial exterior.

Jean Gaston Darboux

De hecho, el Teorema de Darboux afirma que en una variedad simpléctica (M, ω) siempre se pueden encontrar coordenadas (q^A, p_A) (las coordenadas de Darboux) tales que

Teorema de Darboux

$$\omega = dq^A \wedge dp_A$$

En este sentido, las variedades simplécticas son llanas siempre, al contrario de lo que ocurre con las variedades riemannianas.

El modelo canónico de las variedades simplécticas es el fibrado cotangente de una variedad. En el caso de la mecánica, el espacio de fases es el fibrado cotangente T^*Q del espacio (variedad) de configuración Q (es decir, en cada punto de Q colocamos todos los covectores en ese punto; la colección es T^*Q). La forma simpléctica canónica es, precisamente,

$$\omega_Q = dq^A \wedge dp_A,$$

y lo que afirma el Teorema de Darboux es, en otras palabras, que toda variedad simpléctica (M, ω) es localmente como (T^*Q, ω_Q). Aquí, (q^A, p_A) son las llamadas coordinadas fibradas, en las que las q indican la posición y las p las componentes del covector respecto a la base coordenada.

Puesto que a cada función f le corresponde un campo de vectores X_f, se puede definir el corchete de Poisson como

$$\{f, g\} = \omega_Q(X_f, X_g)$$

Obviamente, se obtiene

$$\dot{f} = X_H(f) = \{f, H\}$$

que nos da la evolución de cualquier observable.

Además, un resultado tan importante como el de la conservación de la energía

$$\dot{H} = \{H, H\} = 0$$

es una consecuencia inmediata de la antisimetría del corchete de Poisson, o, alternativamente, del carácter cerrado de la forma simpléctica ω_Q:

$$0 = i_{X_H} i_{XH}\, \omega_Q = i_{X_H}\, dH = X_H(H) = \dot{H}$$

Finalmente, el flujo de X_H está formado por transformaciones canónicas, es decir, preserva la forma simpléctica (y por tanto, el volumen simpléctico):

$$L_{X_H}\, \omega_Q = i_{X_H} d\omega_Q + d i_{X_H} \omega_Q = 0$$

porque ω_Q es cerrada. Todo lo anterior es válido en cualquier variedad simpléctica, mostrando así la capacidad de generalidad que proporciona la geometría diferencial.

5.4. La Mecánica lagrangiana en términos geométricos modernos

Las variables son ahora las posiciones (q^A) y las velocidades $(\dot{q}^A)$, de modo que cada colección $(q^A, \dot{q}^A)$ es un vector tangente al espacio de configuración Q; la colección de todos ellos es el espacio fibrado tangente TQ de Q, que posee su propia geometría, proporcionada por dos objetos geométricos:

- Un campo de tensores $(1,1)$ o endomorfismo vertical

$$S = dq^A \otimes \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A}$$

- el campo de vectores de Liouville

$$\Delta = \dot{q}^A \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A}$$

Así, el lagrangiano es una función

$$L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$$

a partir de la cual se construyen

- la 1-forma de Poincaré-Cartan $\alpha_L = S^*(dL)$
- la 2-forma de Poincaré-Cartan $\omega_L = -d\alpha_L$
- la energía $E_L = \Delta L - L$

Aquí, S^* denota la aplicación adjunta entre formas inducida por S.

Un cálculo simple prueba que ω_L es simpléctica si y solo si la matriz Hessiana de L respecto a las velocidades

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} \right)$$

es regular. En este caso, se dice que el Lagrangiano L es regular. La dinámica queda determinada por la ecuación

$$i_{\Gamma_L} \omega_L = dE_L$$

que proporciona el campo de Euler-Lagrange Γ_L, cuyas propiedades son:

(I) $S\Gamma_L = \Delta$ (Γ_L es una SODE: Ecuación diferencial de segundo orden, en sus siglas inglesas)

$$\Gamma_L = \dot{q}^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \xi^A \frac{\partial}{\partial \dot{q}^A}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dq^A}{dt} = \dot{q}^A \\ \\ \dfrac{d\dot{q}^A}{dt} = \Gamma^A(q^A, \dot{q}^A) \end{cases} \leftrightarrow \frac{d^2 q^A}{dt^2} = \Gamma^A(q^A, \frac{dq^A}{dt})$$

(II) Las soluciones de Γ_L son las de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} = 0$$

5.5. Transformación de Legendre

La transformación de Legendre

$$FL : TQ \longrightarrow T^*Q$$

es el instrumento que conecta las visiones lagrangiana y hamiltoniana de un sistema mecánico. En coordenadas locales, se obtiene

$$FL(q^A, \dot{q}^A) = (q^A, p_A),$$

donde

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}$$

son los momentos generalizados. Se deduce que L es regular si y solo si FL es un difeomorfismo local.

Si

$$L = T - V,$$

donde T es la energía cinética de una métrica riemanniana en Q, $V : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es la energía potencial, entonces FL es un difeomorfismo global. Se define el hamiltoniano

$$H = E_L \circ FL^{-1}$$

Así se puede describir la alternativa hamiltoniana de nuestro sistema mecánico lagrangiano.

La transformación de Legendre transforma Γ_L es X_H, es decir,

$$T(FL)(\Gamma_L) = X_H$$

con lo que convierte las ecuaciones de Euler-Lagrange en las ecuaciones de Hamilton.

Adrien-Marie Legendre

6

Dos aplicaciones de la geometría a la mecánica

En este capítulo trataremos brevemente dos importantes aplicaciones de la geometría a la mecánica: la denominada reducción simpléctica y la teoría de Hamilton-Jacobi.

6.1. Teoría de reducción simpléctica

Seguimos las exposiciones en [1, 3, 34] (para la reducción singular, referimos a [88]).

Supongamos que (M, ω) es una variedad simpléctica y que un grupo de Lie G actúa sobre M por simplectomorfismos, es decir,

$$G \times M \longrightarrow M$$

de manera que el diffeomorfismo $g : M \longrightarrow M$ definido por $g(x) = gx$ preserva la forma simpléctica:

$$g^* \omega = \omega$$

Aquí designamos, con un ligero abuso de notación, por la misma letra g al difeomorfismo determinado por el elemento g del grupo G.

Introduciremos a continuación un concepto que generaliza los de momento lineal y momento angular de la mecánica clásica. Suponemos que existe una aplicación

$$J : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

donde $\mathfrak{g}^*$ es el dual del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo G, tal que la función J_ξ definida por

$$\langle J(x), \xi \rangle = J_\xi(x)$$

verifica la condición

$$X_{J_\xi} = \xi_M$$

Esto es lo mismo que suponer que la acción del grupo en la variedad produce campos hamiltonianos.

Suponemos además que J es equivariante, es decir,

$$J \circ g = Ad^*_{g^{-1}} \circ J$$

donde Ad^* es la representación coadjunta de G en el dual de su álgebra de Lie. Bajo estas condiciones, decimos que J es una **aplicación momento** y que la acción es **hamiltoniana**.

Supongamos ahora que $\mu \in \mathfrak{g}^*$ es un valor regular para J, de manera que $J^{-1}(\mu)$ es una subvariedad de M. Entonces $(M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu, \omega_\mu)$ es una variedad simpléctica, donde G_μ es el grupo de isotropía de μ respecto a la representación coadjunta, $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \longrightarrow J^{-1}(\mu)/G_\mu$es una variedad cociente, $j_\mu : J^{-1}(\mu) \longrightarrow M$ es la inclusión canónica, y ω_μ está definida por

$$\pi^*_\mu(\omega_\mu) = j^*_\mu \omega$$

(M_μ, ω_μ) se dirá la **variedad simpléctica reducida**.

Sea ahora $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función hamiltoniana que es invariante por la acción de G, es decir:

$$g^* H = H$$

Entonces H reduce a una función hamiltoniana $H_\mu : M_\mu \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$X_{H_\mu} = \text{proyección de } \ X_H \text{ restringida a } J^{-1}(\mu)$$

X_{H_μ} representará la dinámica reducida.

Un problema importante es la reconstrucción de la dinámica original a partir de la reducida. Lo comentaremos a continuación.

Sea (T^*Q, ω_Q) el fibrado cotangente de una variedad de configuración Q, equipado con la forma simpléctica canónica $\omega_Q = -d\lambda_Q$, y sea G un grupo de Lie actuando sobre Q (y entonces G actúa sobre T^*Q por levantamientos). Existe una aplicación momento canónica para (T^*Q, ω_Q):

$$J : T^*Q \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

$$\langle J(\alpha_q), \xi \rangle = \langle \alpha_q, \xi_Q(q)$$

Si μ es un valor regular para J, entonces tenemos una variedad simpléctica reducida $((T^*Q)_\mu, (\omega_Q)_\mu)$ que está embebida simplécticamente en $(T^*(Q/G_\mu), \omega_{Q/G_\mu} + \beta_\mu)$, donde $\omega_{Q/G_\mu} + \beta_\mu$ es la forma simpléctica canónica ω_{Q/G_μ} modificada con un término magnético β_μ. Este término adicional viene dado por la curvatura de una conexión apropiada que se denomina conexión mecánica.

Si $\mu = 0$ entonces$(T^*Q)_0$ puede ser embebida simplécticamente en $T^*(Q/G)$, equipada esta variedad con su forma simpléctica canónica.

6.2. Teoría de Hamilton-Jacobi

Seguimos las exposiciones en [1, 69].

La formulación estándar del problema de Hamilton-Jacobi consiste en encontrar una función $S(t, q^i)$ (denominada la **función principal**) tal que

$$\frac{\partial S}{\partial t} + h\left(q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}\right) = 0, \tag{6.1}$$

dónde $h = h(q^i, p_i)$ es la función hamiltoniana del sistema. Si denotamos $S(t, q^i) = W(q^i) - tE$, dónde E es una constante, entonces W satisface

$$h\left(q^i, \frac{\partial W}{\partial q^i}\right) = E; \tag{6.2}$$

W se denomina la **función característica**.

Las ecuaciones (6.1) y (6.2) se suelen denominar, indistintamente, **ecuación de Hamilton-Jacobi**, que ayuda a resolver las ecuaciones de Hamilton para el hamiltoniano h

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_i}\ ,\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial q^i} \tag{6.3}$$

En efecto, si encontramos una solución W de la ecuación de Hamilton-Jacobi (6.2), entonces una solución $(q^i(t))$ del primer bloque de las ecuaciones de Hamilton (6.3) proporciona una solución de todas las ecuaciones de Hamilton simplemente tomando $p_i(t) = \dfrac{\partial W}{\partial q^i}$.

Describiremos este resultado de manera geométrica.

Sea λ una 1-forma cerrada en Q, es decir, $d\lambda = 0$. Entonces, localmente, $\lambda = dW$.

Teorema de Hamilton-Jacobi

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Si $\sigma : I \to Q$ satisface la ecuación

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_i}$$

entonces $\lambda \circ \sigma$ es una solución de las ecuaciones de Hamilton;

(ii) $d(h \circ \lambda) = 0$

Definimos un campo de vectores en Q como sigue:

$$X_h^\lambda = T\pi_Q \circ X_h \circ \lambda$$

$$\begin{tikzcd}
T^*Q \arrow[r, "X_h"] \arrow[d, "\pi_Q"] & T(T^*Q) \arrow[d, "T\pi_Q"] \\
Q \arrow[r, "X_h^\lambda"] \arrow[u, bend left, "\lambda"] & TQ
\end{tikzcd}$$

Las siguientes condiciones son equivalentes

(i) Si $\sigma : I \to Q$ satisface la ecuación

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_i}$$

entonces $\lambda \circ \sigma$ es una solución de las ecuaciones de Hamilton;

(i)' Si $\sigma : I \to Q$ es una curva integral de X_h^λ, entonces $\lambda \circ \sigma$ es una curva integral de X_h;

(i)" X_h y X_h^λ están λ-relacionados, i.e.

$$T\lambda(X_h^\lambda) = X_h \circ \lambda$$

Podemos enunciar ahora el Teorema de Hamilton-Jacobi de esta manera.

Teorema de Hamilton-Jacobi

Sea λ una 1-forma cerrada en Q. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) X_h^λ y X_h están λ-relacionados;

(ii) $d(h \circ \lambda) = 0$

Si

$$\lambda = \lambda_i(q)\, dq^i$$

pasa a ser

$$h(q^i, \lambda_i(q^j)) = const.$$

y recuperamos la formulación clásica, donde

$$\lambda_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}$$

La simple observación anterior ha permitido desarrollar una teoría de Hamilton-Jacobi para muchas otras situaciones:

- sistemas nonholómos (en un contexto usual, en el de algebroides de Lie y también en otro de variedades de Poisson).
- teorías clásicas de campos.
- sistemas lagrangianos singulares.
- sistemas hamiltonianos con simetrías.

7

Lagrangianos singulares: la teoría de ligaduras de Dirac-Bergmann

7.1. Lagrangianos singulares

Existen lagrangianos que no son del tipo mecánico y son degenerados, es decir, las correspondientes aceleraciones no se pueden expresar explícitamente en términos de las posiciones y las velocidades. Este tipo de lagrangianos fueron considerados por Paul Dirac en su intento de cuantización del electromagnetismo, y dan lugar a la denominada teoría de ligaduras de Dirac-Bergmann.

Toda la teoría se halla maravillosamente expuesta en su libro [36], una auténtica joya de la literatura científica. Sus resultados fueron después desarrollados en términos geométricos por Mark J. Gotay y sus colaboradores [48, 49, 50].

Paul Adrien Maurice Dirac

Sea $L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano singular, es decir, tal que la matriz Hessiana

$$\left(W_{AB} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} \right)$$

no es regular, o, equivalentemente, la 2-forma cerrada ω_L no es simpléctica. En consecuencia, la ecuación

$$\boxed{i_X\, \omega_L = dE_L \qquad (7.1)}$$

no tiene solución en general, o si existen soluciones no tienen por qué estar definidas en todos los puntos del espacio. Aplicamos entonces el algoritmo de ligaduras de Dirac-Bergman.

Suponemos alguna condición débil de regularidad, que significa que L es casi regular, es decir:

- $M_1 = FL(TQ)$ es una subvariedad de T^*Q;
- La transformación de Legendre $FL_1 : TQ \longrightarrow M_1$ es una submersión con fibras conexas

M_1 es la denominada subvariedad de ligaduras primarias.

Si L es casi regular, entonces E_L proyecta en una función

$$h_1 : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Denotemos por $j_1 : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ la inclusión natural y sea

$$\omega_1 = j_1^*(\omega_Q)$$

Consideremos la ecuación

$$\boxed{i_X\, \omega_1 = dh_1 \qquad (7.2)}$$

Exsiten dos posibilidades:

- Existe una solución X definida en todos los puntos de M_1; tal X se llama una dinámica global y es una solución módulo ker ω_1. Dicho de otra manera, solo hay ligaduras primarias.

- En otro caso, obtenemos la subvariedad M_2 formada por aquellos puntos de M_1 donde existe una solución. Sin embargo, tal solución X no es necesariamente tangente a M_2, así que tenemos que imponer la condición de tangencia, y obtenemos una nueva subvariedad M_3 a lo largo de la cual existe una solución. Continuando este proceso, obtenemos una sucesión de subvariedades

$$\cdots M_k \hookrightarrow \cdots M_2 \hookrightarrow M_1 \hookrightarrow T^*Q$$

  Las ecuaciones locales que definen estas subvariedades se llaman ligaduras secundarias. Si el algoritmo se para en algún k, es decir $M_{k+1} = M_k$, entonces decimos que M_k es la subvariedad final de ligaduras. En ese caso existe una solución X de (7.2) en M_f.

7.2. Corchete de Dirac

Dirac clasificó las ligaduras en dos clases:

- Una ligadura ϕ es de primera clase si el campo de vectores hamiltoniano X_ϕ es tangente a M_f, o, en otras palabras, el corchete de ϕ con cualquier otra ligadura se anula (en M_f).
- En otro caso, se dice de segunda clase.

Se puede obtener una familia de ligaduras clasificadas en primera clase y segunda clase

$$\{\phi_i, \phi_\alpha\}$$

y construir un corchete

$$\boxed{\{f,g\}_D = \{f,g\} - \{f,\phi_\alpha\}\mathcal{C}^{\alpha\beta}\{\phi_\beta, g\}}$$

donde $(\mathcal{C}^{\alpha\beta})$ es la matriz inversa de $(\{\phi_\alpha, \phi_\beta\})$. El corchete de Dirac tiene estas importantes propiedades:

- Las ligaduras de segunda clase se convierten en Casimires (funciones que conmutan con cualquier otra): $\{\phi_\alpha, g\}_D = 0$, para toda función g.
- $\dot{f} = \{f, H\}_D$.
- Si f es una ligadura de primera clase, entonces $\{f,g\}_D = \{f,g\}$.

M_f posee así un corchete de Poisson, sin ser necesariamente una variedad simpléctica. Es decir, hay más variedades de Poisson que simplécticas.

7.3. Geometría de Poisson

Una variedad de Poisson (M, Λ) es una variedad que posee un corchete de Poisson, o equivalentemente, un 2-vector Λ. La relación entre ambos conceptos es esta:

$$\Lambda(df, dg) = \{f, g\}$$

La identidad de Jacobi del corchete es equivalente a la condición $[\Lambda, \Lambda] = 0$, dónde $[\,,\,]$ es el llamado corchete de Schouten-Nijenhuis.

Las variedades de Poisson tienen una estructura muy rica y están formadas por trozos que son variedades simplécticas encajadas adecuadamente: la variedad de Poisson está foliada por hojas, cada una de las cuáles es una variedad simpléctica con el corchete restringido a cada hoja.

La foliación es la generada por los campos de vectores hamiltonianos

$$\{X_f = \sharp(df)\}$$

donde $\sharp : T^*M \longrightarrow T_xM$ para cada $x \in M$.

Un ejemplo clave en Mecánica que interviene en la descripción de muchos sistemas hamiltonianos interesantes, es la estructura de Poisson en el dual de un álgebra de Lie. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie con corchete $[\,,\,]$, entonces podemos definir un corchete de Poisson en su dual $\mathfrak{g}^*$ como sigue. Si $f, g : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones y $\mu \in \mathfrak{g}^*$, entonces

$$\{f, g\}(\mu) = [df(\mu), dg(\mu)]$$

dónde $df(\mu)$ se identifica a un elemento de $\mathfrak{g}^*$ via el isomorfismo canónico

$$(T_\mu(\mathfrak{g}^*))^* \cong \mathfrak{g}$$

8

La Mecánica noholónoma

8.1. Un ejemplo motivador

Consideramos un disco rodando sin deslizamiento en un plano rugoso. Sean (x, y) las coordenadas del punto de contacto del disco con el suelo, ψ el ángulo medido desde un punto fijado en el círculo hasta el punto de contacto (el ángulo de rotación), ϕ es el ángulo entre la tangente al disco en el punto de contacto y el eje x, y θ es el ángulo de inclinación del disco. El espacio de configuration es $Q = \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1 \times S^1$.

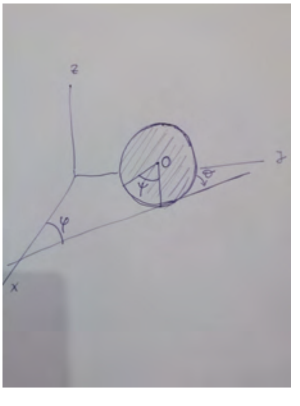
El lagrangiano es $L = T - V$ donde

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\phi}^2 \sin^2\theta) - mR(\dot{\theta}\cos\phi(\dot{x}\sin\phi - \dot{y}\cos\phi) \\ &+ \dot{\phi}\sin\theta(\dot{x}\cos\phi + \dot{y}\sin\phi)) + \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2\dot{\phi}^2\cos^2\theta) + \frac{1}{2}I_2(\dot{\psi} + \dot{\phi}\sin\theta)^2 \end{aligned}$$

y

$$V = mgR\cos\theta$$

m es la masa del disco, R es el radio, I_1 e I_2 son los momentos principales de inercia.



La condición de no deslizar implica las siguientes ligaduras

$$\Phi^1 = \dot{x} - (R\cos\phi)\dot{\psi} = 0,\ \Phi^2 = \dot{y} - (R\sin\phi)\dot{\psi} = 0.$$

Como vemos en este ejemplo, una característica fundamental de este tipo de sistemas mecánicos (denominados noholónomos) es que **todas las configuraciones son posibles pero no todas las velocidades**.

Este es un ejemplo que evidencia las características especiales de los sistemas noholónomos, pero existen muchos otros casos que vemos en la vida cotidiana, como el patinete, el snakeboard y la llamada piedra céltica:



8.2. La mecánica noholónoma antes de Hertz

Los sistemas noholónomos son, a grosso modo, sistemas mecánicos con ligaduras en las velocidades que no son derivables de las ligaduras de las posiciones (es decir, de aquellas que definen las coordenadas generalizadas o los espacios de configuración).

Los sistemas noholónomos surgen, por ejemplo, en sistemas mecánicos que tienen contactos de rodamiento (por ejemplo, ruedas que giran pero sin deslizar o resbalar), o ciertos tipos de contacto de deslizamiento, como en los patines. Son sin duda una generalización muy notable de los sistemas lagrangianos y hamiltonianos clásicos y de una enorme importancia en muchas áreas de las ingenierías.

La publicación más antigua sobre la dinámica de un cuerpo rodando se debe a Euler en 1734 [40], en la que estudia las pequeñas oscilaciones de un cuerpo rígido moviéndose sin deslizar sobre un plano horizontal. Esta dinámica de un cuerpo rígido sobre una superficie es estudiada más tarde por Routh (1860) [94], Slesser (1861) [97], Vierkandt (1892) [103], y Walker (1896) [106].

Históricamente, ciertos errores de los matemáticos C. Neumann y E. Lindelof [70] fueron debidos a una aplicación incorrecta de las ecuaciones de Lagrange cuando existen ligaduras no integrables, al tratar de describir la dinámica de un cuerpo rígido sobre un plano horizontal.

E. Lindelof

El error de Lindelof fue detectado por Sergey Alexeyevich Chaplygin (veáse [23], vol. 1, pags. 51-75), y atrajo la atención de muchos investigadores de la época, como Appell, Bobylev, Chaplygin, Cenov, Hamel, Hertz, Maggi, Voronec, Zukovskii,... Digamos además que algún trabajo anterior de Ferrers, Korteweg, y C. Neumann fue ignorado en ese momento.

S.A. Chaplygin

De hecho, y de acuerdo con [8] la obtención de las ecuaciones del movimiento para un sistema noholónomo en la forma de las ecuaciones de Euler-Lagrange corregidas por algún término adicional que tuviera en cuenta las ligaduras (pero sin incluir multiplicadores de Lagrange) se debe a Ferrers en 1872 [42]. La obtención formal de estas ecuaciones se debe a Voronetz en 1901 [105]). En el caso de que algunas de las variables de configuración fuesen cíclicas, tales ecuaciones (llamadas ahora ecuaciones de Chaplygin) fueron obtenidas por Chaplygin en 1895 (ver [22, 23]).

En cualquier caso, entender que las ecuaciones de Lagrange y los principios variacionales no son válidos para la mecánica no holónoma se debe a H. Herz, quién en su trabajo fundamental [55] que trata de su noción de parámetros cíclicos ocultos (coordenadas, masas) en oposición a la noción convencional de interacción como resultado de aplicar una fuerza. Además, Hertz acuñó el término “sistema noholónomo” en 1894 (que significa no integrable, aludiendo a que las ligaduras son cinemáticas, es decir, involucran a las velocidades, y no provienen de ligaduras de las posiciones).

H. Herz

Hertz quería construir unos fundamentos generales de la mecánica. Su principio básico da lugar a las ecuaciones de Lagrange-d’Alembert, y establece que la curvatura geométrica del camino es siempre un mínimo, sujeto a las ligaduras. Uno de los primeros hallazgos de Hertz fue que los principios variacionales usuales tales como el principio de mínima acción o principio de Hamilton, no son válidos para los sistemas noholónomos. Sin embargo, Otto Holder señaló que si las variaciones en los principios variacionales se eligen de la manera adecuada, los principios siguen funcionando. Así, en vez de suponer como hizo Hertz que los movimientos variados deberían satisfacer las ligaduras, Holder supuso que las variaciones si lo hacían.

Es interesante notar la reacción de H. Poincaré a los desarrollos de Herz. En su reseña del libro de Hertz, H. Poincaré dice [90] (tal y como figura en el artículo de A.V. Borisov y I.S. Mamaev [11]):

H. Poincaré

Herz llama a un sistema holónomo cuando se cumple la siguiente condición: Si las ligaduras del sistema no permiten una transición directa de una posición a otra infinitamente próxima, entonces tampoco permitirán una transición indirecta entre esas posiciones. Solo existen ligaduras rígidas en ese sistema. Es evidente que nuestra esfera no es un sistema holónomo.

Así, ocurre a veces que el principio de mínima acción no puede aplicarse a sistemas noholónomos. En efecto, uno puede ir de la posición A a la posición B tomando el camino que hemos ya debatido, o, indudablemente, uno de muchos otros.

Entre ellos, hay, evidentemente uno que corresponde a la mínima acción.

Por consiguiente, debería ser posible para la esfera seguir ese camino de A a B. Pero esto no es así: sean cuales sean las condiciones iniciales del movimiento, la esfera nunca pasará de A a B. De hecho, si la esfera pasara de la posición A a B, no siempre seguiría el camino que corresponde al principio de mínima acción. El principio de mínima acción no funciona.

Herz dice:"En este caso, una esfera obedeciendo este principio sería como una criatura viva, que deliberadamente perseguiría un cierto objetivo, mientras que una esfera siguiendo las leyes de la Naturaleza aparecería como una masa rodando monótonamente... Pero tales ligaduras no existen en la Naturaleza. Se dice rodando sin deslizar, pero, de hecho, es rodando con un ligero deslizamiento. Este fenómeno pertenece a la clase de fenómenos irreversibles tales como la fricción; están todavía poco estudiados, y no hemos aún aprendido a aplicarles los verdaderos principios de la Mecánica".

Nuestra respuesta es,"Rodar sin deslizar no contradice ni la ley de la conservación de la energía ni ninguna otra ley de la física conocida por nosotros. Este fenómeno se puede realizar en el mundo observable dentro de la seguridad que nos permitiría su aplicación a la construcción de las más finas máquinas de integración (planímetros, analizadores armónicos, etc.). No tenemos derecho a excluirlos de nuestra consideración como imposibles. Para nuestros problemas, permanecen independientemente de si tal rodamiento se realiza exactamente o aproximadamente. Para aceptar este principio, es necesario requerir que sus aplicaciones a un problema con una fuente casi exacta de datos, de los resultados tan cerca de la exactitud como lo estaban los datos fuente.

Además, otras ligaduras rígidas se pueden también realizar en la Naturaleza solo aproximadamente. Pero nadie los debe excluir de nuestra consideración...”

8.3. Sistemas noholónomos

Un sistema mecánico noholónomo está determinado por un lagrangiano L sometido a ligaduras $\Phi^\alpha(q^A, \dot{q}^A) = 0$ Para ligaduras lineales

$$\Phi^\alpha(q^A, \dot{q}^A) = \mu^\alpha_A(q)\dot{q}^A$$

aplicamos el Principio de d'Alembert y obtenemos las ecuaciones noholónomas:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = \lambda_\alpha \mu^\alpha_A \\ &\mu^\alpha_A \dot{q}^A = 0 \end{aligned}}$$

donde los λ_α son multiplicadores de Lagrange a determinar.

Jean-Baptiste le Rond d' Alembert

Para ligaduras no lineales aplicamos el Principio de Chetaev y obtenemos las ecuaciones no-holónomas:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \dot{q}^A} \mu^\alpha_A \\ &\Phi^\alpha(q^A, \dot{q}^A) = 0 \end{aligned}}$$

Nicolai Gurevich Chetaev

8.4. La aproximación geométrica

La aproximación geométrica a los sistemas noholónomos se produce a mediados de los años 90 del siglo pasado, y estos son algunas de las referencias fundamentales [7, 5, 20, 62, 100] a las que añadimos las de nuestro grupo, que ha sido muy activo en el tema [16, 17, 18, 19, 25, 26, 51].

También queremos señalar los libros [6, 24]. Por su parte, el libro de Ju. I. Neimark, N. A. Fufaev [84] ha sido durante décadas una referencia indispensable para este tema. Sea

$$FL : TQ \longrightarrow T^*Q$$

la transformación de Legendre dada por

$$FL(q^i, \dot{q}^i) = (q^i, p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = g_{ij}\dot{q}^j)$$

FL es un difeomorfismo global que permite reinterpretar el sistema mecánico noholónomo en el lado hamiltoniano. Primero, denotamos por $h = E_L \circ FL^{-1}$ la función hamiltoniana, y por $M = FL(\mathcal{D})$ la subvariedad de ligaduras de T^*Q. Entonces, las ecuaciones noholónomas se pueden escribir como

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_i}$$
$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial q^i} + \bar{\lambda}_a \mu_i^a,$$

donde $\bar{\lambda}^i$ son multiplicadores de Lagrange a determinar. Ahora, la ecuación simpléctica

$$i_{X_h}\omega_Q = dh$$

que proporciona el campo de vectores hamiltoniano X_h, debe modificarse como sigue:

$$i_X \,\omega_Q - dh \in F^o \tag{8.1}$$
$$X \in TM \tag{8.2}$$

donde F es una distribución a lo largo de M cuyo anulador F^o se obtiene de $S^*((T\mathcal{D})^o)$ mediante FL. Las ecuaciones (8.1) y (8.2) tienen una única solución, el campo de vectores noholónomo, X_{nh}.

Otra manera de obtener X_{nh} es considerar la descomposición en suma de Withney

$$T(T^*Q)_{|M} = TM \oplus F^{\perp}$$

donde el complemento se toma con respecto a ω_Q.

Si

$$P : T(T^*Q)_{|M} \longrightarrow TM$$

es la proyección canónica sobre el primer factor, se prueba fácilmente que

$$X_{nh} = P(X_h)$$

Además, se puede definir un tensor casi-Poisson Λ_{nh} en M como

$$\Lambda_{nh}(\alpha, \beta) = \Lambda_Q(P^*\alpha, P^*\beta)$$

que se denomina el corchete noholónomo. Obviamente, tenemos

$$X_{nh} = \sharp(dh)$$

Un modo alternativo para definir el corchete noholónomo es como describiremos a continuación. Consideremos la distribución

$$TM \cap F$$

a lo largo de M. Un cálculo directo muestra que el subespacio

$$T_pM \cap F_p$$

es simpléctico dentro del espacio vectorial simpléctico $(T_p(T^*Q), \omega_Q(p))$, para cada $p \in M$.

Así tenemos una segunda descomposición en suma de Withney

$$T(T^*Q)_{|M} = (TM \cap F) \oplus (TM \cap F)^{\perp}$$

donde el complemento se toma con respecto a ω_Q. Si

$$\tilde{P} : T(T^*Q)_{|M} \longrightarrow TM \cap F$$

es la proyección canónica sobre el primer factor, se prueba fácilmente que

$$X_{nh} = \tilde{P}(X_h)$$

Además, el tensor casi-Poisson noholónomo Λ_{nh} en M viene dado por

$$\Lambda_{nh}(\alpha, \beta) = \Lambda_Q(\tilde{P}^*\alpha, \tilde{P}^*\beta).$$

8.5. Corchete noholónomo

El corchete noholónomo juega el papel del corchete de Poisson en los sistemas hamiltonianos usuales. Fue introducido en [99, 63] y de manera geométrica y general en [17, 18]. Una versión preliminar se encuentra en [37, 38].

Esta es la definición del corchete noholónomo

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \{f,g\}_{nh} & = & \{f,g\}_L - \mathcal{C}^{ij}Z_i(g)\{f,\phi_j\}_L + \mathcal{C}^{ij}Z_i(f)\{g,\phi_j\}_L \\ & + & \mathcal{C}^{ik}\mathcal{C}^{jl}Z_i(f)Z_j(g)\{\phi_k,\phi_l\}_L \end{array}}$$

donde:

- $\{\, ,\, \}_L$ es el corchete de Poisson definido por ω_L;
- $(\mathcal{C}^{ij})$ es la matriz inversa de

$$(\mathcal{C}_{ij}) = (\{\phi_i, \phi_j\}_L)$$

- $\{\phi_i\}$ son las ligaduras.

Se verifican las siguientes propiedades:

- Las ligaduras pasan a ser Casimires, es decir

$$\{f, \phi_i\}_{nh} = 0$$

  para toda función f.
- La evolución de un observable viene dada por este corchete:

$$\dot{f} = \{f, E_L\}_{nh}$$

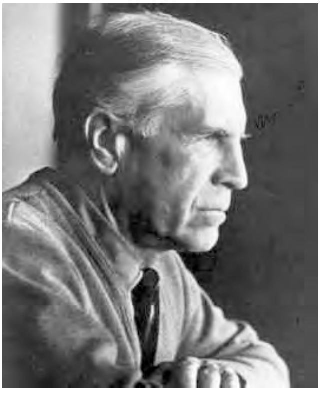
- El corchete noholónomo no es en general integrable, es decir, no satisface la identidad de Jacobi.

Así, la subvariedad de ligaduras M adquiere una estructura que ya no es Poisson (para ligaduras lineales, el corchete satisface la identidad de Jacobi si y sólo si las ligaduras son holónomas). Se dice entonces que es una estructura casi Poisson.

9

Teoría de Control Óptimo

La Teoría de Control Óptimo se basa en el llamado principio del máximo de Pontryagin. El uso de la geometría, en particular de la llamada geometría presimpléctica, permite dar una visión alternativa [6, 13].



Lev Semyonovich Pontryagin

Un sistema de control de ecuaciones diferenciales ordinarias viene usualmente dado por

$$\dot{x}^i = \Gamma^i(x(t), u(t)) \tag{9.1}$$

donde

- x^i, $1 \leq i \leq n$, se denominan variables de estado
- u^a, $1 \leq a \leq m$, son las funciones de control

Consideremos el siguiente problema de control óptimo: dados dos estados inicial y final x_0 y x_f, el objetivo es encontrar una curva diferenciable $c(t) = (x(t), u(t))$ tal que

- $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$,
- $c(t)$ satisface la ecuación de control (9.1),
- y minimiza el funcional

$$\mathcal{J}(c) = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t))\, dt$$

para una función de coste $L = L(x, u)$.

En términos geométricos, tenemos un fibrado de control

$$\pi : C \longrightarrow B$$

con coordenadas fibradas (x^i, u^a); Γ es un campo de vectores a lo largo de π:

$$\Gamma = \Gamma^i(x, u)\, \frac{\partial}{\partial x^i}$$

y L es una función $L : C \longrightarrow \mathbb{R}$.

Consideremos ahora el producto fibrado

$$\pi_0 : W_0 = C \times_B T^*B \longrightarrow B$$

con proyección canónica

$$\pi_0(x^i, u^a, p_i) = (x^i)$$

donde (x^i, u^a, p_i) son coordenadas fibradas en W_0. Tenemos también dos proyecciones:

$$\Pi_1 : W_0 \longrightarrow C\ ,\ \Pi_2 : W_0 \longrightarrow T^*B$$

expresadas en coordenadas locales como

$$\begin{array}{rcl} \Pi_1(x^i, u^a, p_i) & = & (x^i, u^a) \\ \Pi_2(x^i, u^a, p_i) & = & (x^i, p_i) \end{array}$$

Denotemos ahora $\omega_0 = \Pi_2^*\omega_B$, donde ω_B es la forma simpléctica canónica en T^*B. Por consiguiente, tenemos que

$$\omega_0 = dx^i \wedge dp_i$$

es una forma presimpléctica con núcleo

$$\ker\, \omega_0 = \langle \frac{\partial}{\partial u^a} \rangle$$

El hamiltoniano de Pontryagin es la función en W_0 definida por

$$H_0(c, p) = \langle \Gamma(c), p \rangle - \Pi_1^* L$$

donde $c \in C$ y $p \in T^*B$ están en la misma fibra de W_0. Entonces,

$$H_0(x^i, u^a, p_i) = p_i \Gamma^i - L(x^i, u^a)$$

Consideremos la ecuación

$$i_X \, \omega_0 = dH_0 \tag{9.2}$$

Como ω_0 es presimpléctica, podemos aplicar a la ecuación (9.2) el algoritmo presimpléctico que produce una sucesión de subvariedades de ligadura

$$\cdots W_k \hookrightarrow \cdots W_2 \hookrightarrow W_1 \hookrightarrow W_0$$

Nótese que W_1 está definida por las ligaduras primarias

$$\phi^a = p_j \, \frac{\partial \Gamma^j}{\partial u^a} - \frac{\partial L}{\partial u^a}$$

y una solución X tiene la forma

$$X = \Gamma^i \, \frac{\partial}{\partial x^i} + U^a \, \frac{\partial}{\partial u^a} - \left(p_j \, \frac{\partial \Gamma^j}{\partial x^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \tag{9.3}$$

donde $U^a(x, u, p)$ son funciones indeterminadas.

Para asegurar que el campo de vectores X sea tangente a W_1 necesitamos verificar la siguiente condición de tangencia:

$$X(\phi^b) = \Gamma^i \, \frac{\partial \phi^b}{\partial x^i} + U^a \, \frac{\partial \phi^b}{\partial u^a} - \psi_i \, \frac{\partial \phi^b}{\partial p_i} = 0 \tag{9.4}$$

donde

$$\psi_i = p_j \, \frac{\partial \Gamma^j}{\partial x^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i}$$

De (9.4), deducimos que si la matriz

$$\left(\frac{\partial \phi^b}{\partial u^a} \right) \tag{9.5}$$

es regular, entonces podemos obtener explícitamente las funciones U^a, o, en otras palabras, el algoritmo presimpléctico se estabiliza en W_1, es decir, $W_2 = W_1$. En este caso decimos que el problema de control óptimo dado por (C, Γ, L) es regular. Observemos que bajo estas condiciones, la solución X de Eq. (9.2) a lo largo de W_1 es única. Naturalmente, un cálculo directo demuestra que el recíproco también es cierto, es decir, si el algoritmo se estabiliza en W_1 entonces el problema es regular.

En el caso regular, la condición (9.5) implica que podemos obtener u^a en términos del resto de las coordenadas, es decir

$$u^a = \zeta^a(x^i, p_i) \tag{9.6}$$

Observemos que $\omega_1 = (\omega_0)_{|W_1}$ es una forma simpléctica con coordenadas canónicas (x^i, p_i). En otro caso, deberíamos continuar el algoritmo y obtener ligaduras secundarias e incluso de orden superior.

Daremos una interpretación en el lenguaje habitual de la teoría de control. Para simplificar, consideremos sólo el caso regular. Un simple cálculo demuestra que una curva integral $(x^i(t), u^a(t), p_i(t))$ de X satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x}^i = \Gamma^i(x, u) \tag{9.7}$$
$$\dot{u}^a = U^a(x, u, p) \tag{9.8}$$
$$\dot{p}_i = -\psi_i \tag{9.9}$$

En consecuencia, la ecuación (9.7) es precisamente la ecuación de control, y la ecuación (9.9) puede escribirse de manera equivalente como

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial x^i},$$

ya que

$$\psi_i = \frac{\partial H_0}{\partial x^i}.$$

10

Mecánica discreta

En los últimos 25 años ha habido un gran interés en la construccíon de integradores geométricos para sistemas mecánicos basados una discretización de los principios variacionales (véase, por ejemplo, [81, 83]). Estos integradores numéricos se conocen como integradores variacionales y son la consecuencia de la confluencia entre dos nuevas ramas de las matemáticas, la integración geométrica y la mecánica geométrica. Aunque han sido considerados preferentemente para sistemas conservativos, su extensión a otros casos de interés ha resultado relativamente sencilla y con considerables aplicaciones prácticas. Así han surgido aplicaciones a sistemas disipativos, sistemas sujetos a ligaduras holónomas y noholónomas, sistemas explícitamente dependientes del tiempo, teoría del control óptimo, etc. En todos estos ejemplos, se prueba un excelente comportamiento a largo plazo y la preservación de estructuras geométricas subyacentes al sistema [53, 96]. Adicionalmente, existen varias extensiones de estos integradores variacionales que son adecuadas para la integración numérica de sistemas reducidos tales como álgebras de Lie, fibrados de Atiyah, ... y son de gran interés para sistemas provenientes de la física, las ingenierías y otras ciencias aplicadas. Esta generalización utiliza estructuras geométricas como grupoides de Lie y grupoides simplécticos, y constituyen el programa de investigación iniciado por Alan Weinstein [107] (véase también [78]).

Desde el punto de vista histórico, la teoría de la mecánica discreta, en su forma actual, encuentra sus orígenes en la literatura de control óptimo de los años 60 del siglo pasado. Véase por ejemplo, Jordan and Polak ([59]) y Cadzow ([14]), entre otros. En el contexto de la mecánica, se encuentra en los trabajos de Cadzow ([15]), Maeda ([75, 76, 77]), y Lee ([65, 66]), para los que conceptos como los de acción discreta, las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas y los teoremas de Noether discreto ya eran conocidos. Posteriormente, y ya más geométricamente, aparece en el contexto de sistemas integrables en los trabajos de Veselov ([101, 102]) y Moser y Veselov

([83]), y en el contexto de mecánica cuántica en los trabajos de Jaroszkiewicz y Norton ([57, 58, 86]).

Una teoría más completa de la mecánica discreta y la integración variacional fue desarrollada en los artículos de Wendlandt y Marsden ([108, 109]) y extendida en Kane, Marsden y Ortiz ([60]), Marsden, Pekarsky y Shkoller ([79, 80]), Bobenko y Suris ([9, 10]), Channel y Scovel ([21]), y Kane, Marsden, Ortiz y West ([61]). Una referencia central es el trabajo de Marsden y West ([81]) que constituye la tesis doctoral de este último. Recordamos también las contribuciones del grupo liderado or García Pérez en Salamanca [45, 46, 47].

10.1. Mecánica Lagrangiana discreta

Como en el caso continuo, se considera un espacio de configuración Q, que determina un espacio de velocidades TQ. Sin embargo, en el caso discreto, el espacio de fases discreto es $Q \times Q$. Esto significa, de modo poco riguroso, que en vez de tomar una posición q^i y una velocidad $\dot{q}^i$ (las coordenadas locales de un vector $v_q \in TQ$), en el caso discreto se eligen dos puntos próximos q_0 y q_1 y un tiempo de paso $h \in \mathbb{R}$. Un **Lagrangiano discreto** es una función $L_d : Q \times Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que puede concebirse como una aproximación de la acción integral de un Lagrangiano continuo $L : TQ \to \mathbb{R}$:

$$L_d(q_0, q_1, h) \simeq \int_0^h L(q(t), \dot{q}(t))\, dt.$$

Como el tiempo de paso h se suele considerar fijo, denotaremos en lo sucesivo al Lagrangiano discreto como una función $L_d : Q \times Q \to \mathbb{R}$.

Construyendo una secuencia creciente de tiempos discretos $\{t_k = hk \mid k = 0, ..., N\} \subset \mathbb{R}$, se define el **espacio de trayectorias discreto**

$$\mathcal{C}_d(Q) = \mathcal{C}_d(\{t_k\}_{k=0}^N, Q) = \{q_d : \{t_k\}_{k=0}^N \to Q\}.$$

identificando la trayectoria discreta $q_d \in \mathcal{C}_d(Q)$ con su imagen $\{q_k\}_{k=0}^N$, donde $q_k = q_d(t_k)$. La **acción suma discreta** $\mathcal{A}_{L_d} : \mathcal{C}_d(Q) \to \mathbb{R}$ se define como

$$\mathcal{A}_{L_d} = \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}).$$

El espacio tangente $T_{q_d}\mathcal{C}_d(Q)$ de q_d es el conjunto de aplicaciones $v_{q_d} : \{t_k\}_{k=0}^N \to TQ$ tal que $\tau_Q(v_{q_d}(k)) = q_d(k)$ para todo k..

Análogamente al caso continuo, se puede dar una versión discreta del principio de Hamilton describiendo la dinámica de un sistema mecánico discreto determinado por un Lagrangiano discreto $L_d : Q \times Q \to \mathbb{R}$.

Principio de Hamilton discreto Dado un Lagrangiano discreto L_d de clase C^k, $k \geq 1$, existe un única aplicación de clase C^{k-1}, $D_{EL}L_d$: $Q \times Q \times Q \to T^*Q$ y 1-formas únicas $\Theta^+_{L_d}$ y $\Theta^-_{L_d}$ en $Q \times Q$, de clase C^{k-1}, tal que para todas las variaciones $\delta q_d \in T_{q_d}\mathcal{C}_d(Q)$ de q_d se tiene

$$\begin{aligned}\langle d\mathcal{A}_{L_d}, \delta q_d\rangle = &\sum_{k=0}^{N-1} \langle D_{EL}L_d((q_{k-1}, q_k), (q_k, q_{k+1})), \delta q_k\rangle \\ &+\langle \Theta^+_{L_d}(q_{N-1}, q_N), (\delta q_{N-1}, \delta q_N)\rangle + \langle \Theta^-_{L_d}(q_0, q_1), (\delta q_0, \delta q_1)\rangle. \end{aligned} \tag{10.1}$$

La aplicación $D_{EL}L_d$ es la **aplicación de Euler-Lagrange discreta** y se define como

$$D_{EL}L_d(q_{k-1}, q_k, q_{k+1}) = D_2L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1L_d(q_k, q_{k+1}).$$

Las 1-formas $\Theta^+_{L_d}$ y $\Theta^-_{L_d}$ se llaman **1-formas de Poincaré-Cartan discretas** , y tienen las siguientes expresiones locales

$$\begin{aligned}\Theta^+_{L_d}(q_0, q_1) &= D_2L_d(q_0, q_1)\, dq_1 = \frac{\partial L_d}{\partial q_1^i}\, dq_1^i, \\ \Theta^-_{L_d}(q_0, q_1) &= -D_1L_d(q_0, q_1)\, dq_0 = -\frac{\partial L_d}{\partial q_0^i}\, dq_0^i.\end{aligned}$$

Obsérvese que las 1-formas de de Poincaré-Cartan discretas aparecen como términos de frontera. Además, $dL_d = \Theta^+_{L_d} - \Theta^-_{L_d}$ y

$$d\Theta^+_{L_d} = d\Theta^-_{L_d}\ .$$

Flujo lagrangiano discreto

El **operador de evolución lagrangiano discreta** Ψ_{L_d} se define (si existe) como la aplicación $\Psi_{L_d} : Q \times Q \to Q \times Q$ definida por $\Psi_{L_d}(q_0, q_1) = (q_1, q_2)$ donde

$$D_{EL}L_d(q_0, q_1, q_2) = 0.$$

Una trayectoria discreta $q_d = \{q_k\} \in \mathcal{C}_d(Q)$ es una **solución** de las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas si satisface

$$\Psi_{L_d}(q_{k-1}, q_k) = (q_k, q_{k+1}), \quad k = 1, \ldots N - 1$$

o, equivalentemente, se satisfacen las **ecuaciones de Euler-Lagrange discretas**

$$D_2L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1L_d(q_k, q_{k+1}) = 0,\ \ \forall\, k = 1, ..., N - 1. \tag{10.2}$$

Ejemplo Consideremos el Lagrangiano discreto $L_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido mediante

$$L_d(q_k, q_{k+1}) = \frac{h}{2} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right)^T M \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) - hV(q_k),$$

donde M es una matriz $n \times n$ simétrica definida positiva y V una función potencial. Aplicando la ecuación (10.2), encontramos que las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$M \left(\frac{q_{k+1} - 2q_k + q_{k-1}}{h^2} \right) = -\nabla V(q_k),$$

que corresponden a una discretización de las ecuaciones de Newton

$$M \ddot{q} = -V(q),$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange para un Lagrangiano continuo definido por $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} - V(q)$.

Sin embargo, si se elige una discretización diferente, por ejemplo,

$$L_d(q_k, q_{k+1}) = \frac{h}{2} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right)^T M \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) - hV(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}),$$

las ecuaciones resultantes serían

$$M \left(\frac{q_{k+1} - 2q_k + q_{k-1}}{h^2} \right) = -\nabla V(q_{k+1/2}) - \nabla V(q_{k-1/2}),$$

donde $q_{k+1/2} = \frac{q_{k+1} - q_k}{2}$ y $q_{k-1/2} = \frac{q_k - q_{k-1}}{2}$.

10.1.1. Propiedades del flujo discreto

Analicemos, a continuación, alguna de las propiedades geométricas del flujo discreto. En primer lugar, se define la **2-forma de Poincaré-Cartan** $\Omega_{L_d} = d\Theta^+_{L_d} = d\Theta^-_{L_d}$,

$$\Omega_{L_d}(q_0, q_1) = \frac{\partial^2 L_d}{\partial q_0^i \partial q_1^j} \, dq_0^i \wedge dq_1^j,$$

que se preserva por el flujo discreto

$$(\Psi_{L_d})^* \Omega_{L_d} = \Omega_{L_d}.$$

Se dice que el Lagrangiano discreto es **regular** si su 2-forma de Poincaré-Cartan es simpléctica (véase [81]).

También existe una versión discreta del teorema de Noether, que nos da la relación entre las simetrías del Lagrangiano discreto y constantes del movimiento del sistema discreto. Sea una acción $\Phi : G\times Q \to Q$ de un grupo de Lie, y la acción levantada a $Q \times Q$ definida mediante $\Phi_g^{Q\times Q}(q_0, q_1) = (\Phi_g(q_0), \Phi_g(q_1))$, cuyo generador infinitesimal $\xi_{Q\times Q} : Q \times Q \to T(Q \times Q)$ viene dado por

$$\xi_{Q\times Q}(q_0, q_1) = (\xi_Q(q_0), \xi_Q(q_1)),$$

donde $\xi_Q : Q \to TQ$ es el generador infinitesimal de la acción $\Phi : G\times Q \to Q$ para $\xi \in \mathfrak{g}$. Se definen las **aplicaciones momento** $J^{\pm}_{L_d} : Q \times Q \to \mathfrak{g}^*$

$$\begin{aligned} \langle J^+_{L_d}(q_0, q_1), \xi\rangle &= \langle \Theta^+_{L_d}, \xi_{Q\times Q}(q_0, q_1)\rangle, \\ \langle J^-_{L_d}(q_0, q_1), \xi\rangle &= \langle \Theta^-_{L_d}, \xi_{Q\times Q}(q_0, q_1)\rangle, \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, o alternativamente

$$\begin{aligned} \langle J^+_{L_d}(q_0, q_1), \xi\rangle &= \langle D_2L_d(q_0, q_1), \xi_Q(q_1)\rangle, \\ \langle J^-_{L_d}(q_0, q_1), \xi\rangle &= \langle -D_1L_d(q_0, q_1), \xi_Q(q_0)\rangle. \end{aligned}$$

Entonces, se deduce el siguiente resultado:

Teorema de Noether discreto Considérese una Lagrangiano discreto $L_d : Q \times Q \to \mathbb{R}$ que es invariante por la acción $\Phi^{Q\times Q}$. Entonces, la correspondiente aplicación momento $J_{L_d} : Q \times Q \to \mathfrak{g}^*$ es conservada por el flujo discreto $\Psi_{L_d} : Q \times Q \to Q \times Q$, es decir, $J_{L_d} \circ \Psi_{L_d} = J_{L_d}$.
Véase [81] para la demostración.

10.2. Mecánica hamiltoniana discreta

Al igual que en la definición de una transformación de Legendre en el caso continuo entre TQ y T^*Q, podemos definir las **transformaciones de Legendre discretas** $\mathcal{F}L^{\pm}_d : Q \times Q \to T^*Q$ que, en este caso, conectan los espacios $Q \times Q$ y T^*Q. Se definen del siguiente modo

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}L^+_d(q_0, q_1), \delta q_1\rangle &= \langle D_2L_d(q_0, q_1), \delta q_1\rangle, \\ \langle \mathcal{F}L^-_d(q_0, q_1), \delta q_0\rangle &= \langle -D_1L_d(q_0, q_1), \delta q_0\rangle, \end{aligned}$$

o alternativamente

$$\begin{aligned} \mathcal{F}L^+_d : (q_0, q_1) &\mapsto (q_1, p_1) = (q_1, D_2L_d(q_0, q_1)), \\ \mathcal{F}L^-_d : (q_0, q_1) &\mapsto (q_0, p_0) = (q_0, -D_1L_d(q_0, q_1)). \end{aligned}$$

Si el Lagrangiano es regular ambas transformaciones de Legendre son difeomorfismos locales y viceversa.

Es sencillo comprobar que

$$\Theta^{\pm}_{L_d} = (\mathcal{F}L^{\pm}_d)^*\Theta_Q \;\text{ y }\; \Omega_{L_d} = (\mathcal{F}L^{\pm}_d)^*\Omega_Q,$$

donde Θ_Q es la 1-forma canónica y Ω_Q la 2-forma simpléctica canónica en T^*Q. Si se introduce la notación

$$\begin{aligned} p^+_{k,k+1} &= p^+(q_k, q_{k+1}) = \mathcal{F}L^+_d(q_k, q_{k+1}), \\ p^-_{k,k+1} &= p^-(q_k, q_{k+1}) = \mathcal{F}L^-_d(q_k, q_{k+1}), \end{aligned}$$

se pueden reescribir las ecuaciones de Euler-Lagrange del siguiente modo

$$\mathcal{F}L^+_d(q_{k-1}, q_k) = \mathcal{F}L^-_d(q_k, q_{k+1}), \tag{10.3}$$

o, de un modo más simple,

$$p^+_{k-1,k} = p^-_{k,k+1}.$$

Por otro lado, usando las transformaciones de Legendre podemos trasladar el flujo discreto $\Psi_{L_d} : Q \times Q \to Q \times Q$ a T^*Q. Se define así la **aplicación Hamiltoniana discreta** $\tilde{\Psi}_{L_d} : T^*Q \to T^*Q$ como $\tilde{\Psi}_{L_d} = \mathcal{F}L^\pm_d \circ \Psi_{L_d} \circ (\mathcal{F}L^\pm_d)$. Se puede comprobar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & (q_0, q_1) \arrow[rr, mapsto, "\Psi_{L_d}"] \arrow[dl, mapsto, "\mathcal{F}L^-_d"'] \arrow[dr, mapsto, "\mathcal{F}L^+_d"] & & (q_1, q_2) \arrow[dl, mapsto, "\mathcal{F}L^-_d"'] \arrow[dr, mapsto, "\mathcal{F}L^+_d"] & \\
(q_0, p_0) \arrow[rr, mapsto, "\tilde{\Psi}_{L_d}"'] & & (q_1, p_1) \arrow[rr, mapsto, "\tilde{\Psi}_{L_d}"'] & & (q_2, p_2)
\end{tikzcd} \tag{10.4}$$

De este modo, se tienen las siguientes definiciones alternativas de la aplicación hamiltoniana discreta

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{L_d} &= \mathcal{F}L^+_d \circ \Psi_{L_d} \circ (\mathcal{F}L^+_d)^{-1}, \\ \tilde{\Psi}_{L_d} &= \mathcal{F}L^-_d \circ \Psi_{L_d} \circ (\mathcal{F}L^-_d)^{-1}, \\ \tilde{\Psi}_{L_d} &= \mathcal{F}L^+_d \circ (\mathcal{F}L^-_d)^{-1}, \end{aligned}$$

que son equivalentes y se expresan implícitamente como

$$p_0 = -D_1 L_d(q_0, q_1), \tag{10.5a}$$
$$p_1 = D_2 L_d(q_0, q_1). \tag{10.5b}$$

donde $\tilde{\Psi}_{L_d}(q_0, p_0) = (q_1, p_1)$.

10.3. Correspondencia entre mecánica discreta y continua

Se puede probar rigurosamente que se puede construir una noción de Lagrangiano exacto asociado a la dinámica continua que es útil para encontrar integradores variacionales asociados a un problema mecánico definido por un Lagrangiano $L : TQ \to \mathbb{R}$. Se puede probar que dado un Lagrangiano regular L, un punto $q_0 \in Q$ y $h > 0$ suficientemente pequeño entonces existe un entorno U de q_0 tal que para todo $q_1 \in U$ existe una única trayectoria $q : [0, h] \to Q$ de las ecuaciones de Euler-Lagrange para L satisfaciendo $q(0) = q_0$ y $q(h) = q_1$. Este resultado permite definir el **Lagrangiano discreto exacto** $L_d : U \subseteq Q \times Q \to \mathbb{R}$

$$L_d^E(q_0, q_1, h) = \int_0^h L(q(t), \dot{q}(t))\, dt \,.$$

Este Lagrangiano exacto da una correspondencia precisa entre la dinámica continua y la dinámica discreta asociada al Lagrangiano discreto exacto. Este resultado se comprueba probando la relación entre las correspondientes transformaciones de Legendre:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(L_d^E)^+(q_0, q_1, h) &= \mathcal{F}L(q(h), \dot{q}(h)), \\
\mathcal{F}(L_d^E)^-(q_0, q_1, h) &= \mathcal{F}L(q(0), \dot{q}(0)),
\end{aligned}$$

para h suficientemente pequeño y $q_0, q_1 \in Q$ próximos.

A partir de aquí es fácil ver la relación entre el flujo de L, $\Psi_L^h : TQ \to TQ$; el flujo del sistema hamiltoniano asociado $\Psi_H^h : T^*Q \to T^*Q$, el flujo discreto $\Psi_{L_d^E} : Q \times Q \to Q \times Q$ y el flujo hamiltoniano discreto $\Psi_{L_d^E} : T^*Q \to T^*Q$ [81].

10.4. Estimación de errores

Comparando un Lagrangiano discreto dado $L_d : Q \times Q \to \mathbb{R}$ y el Lagrangiano exacto asociado a un Lagrangiano $L : TQ \to \mathbb{R}$ podemos ver la relación entre los correspondientes flujos hamiltonianos y en consecuencia el error del método numérico asociado.

Se dice que un Lagrangiano L_d es de **orden** r si existe un abierto $U_v \subset TQ$ con clausura compacto y constantes $C_v > 0$ y $h_v > 0$ tal que

$$\| L_d(q(0), q(h), h) - L_d^E(q(0), q(h), h) \| \leq C_v h^{r+1} \tag{10.6}$$

para todo solución $q(t)$ de las ecuaciones de Euler-Lagrange con condiciones iniciales $(q, \dot{q}) \in U_v$ y para todo $h \leq h_v$.

Se puede probar que si L_d es de orden r para L_d^E entonces el correspondiente flujo hamiltoniano $\tilde{\Psi}_{L_d^E} : T^*Q \to T^*Q$ es de orden r con respecto para al flujo hamiltoniano $\Psi_H^h : T^*Q \to T^*Q$ del sistema continuo.

11

El Programa de Alan Weinstein

En 1992 [107] Alan Weinstein propuso un ambicioso programa para desarrollar la mecánica en un contexto mucho mas general, en el marco de los denominados algebroides de Lie.

Recordemos la noción de algebroide Lie, que generaliza tanto los fibrados tangentes como las álgebras de Lie.

Definición Una estructura de algebroide de Lie en el espacio fibrado vectorial $\tau_D : D \to Q$ es un corchete R-lineal $B_D : \Gamma(\tau_D) \times \Gamma(\tau_D) \to \Gamma(\tau_D)$ y un morfismo de fibrados vectoriales $\rho_D : D \to TQ$, llamado la aplicación ancla, tales que

(I) B_D es antisimétrico,

$$B_D(\sigma, \bar{\sigma}) = -B_D(\bar{\sigma}, \sigma), \quad \text{for } \sigma, \bar{\sigma} \in \Gamma(\tau_D);$$

(II) B_D satisface la identidad de Jacobi

$$B_D(B_D(\sigma_1, \sigma_2), \sigma_3) + B_D(B_D(\sigma_2, \sigma_3), \sigma_1) + B_D(B_D(\sigma_3, \sigma_1), \sigma_2) = 0;$$

(III) Si denotamos $\rho_D : \Gamma(\tau_D) \to \mathfrak{X}(Q)$ el morfismo de $C^\infty(Q)$-módulos inducido por la aplicación ancla, entonces

$$B_D(\sigma, f\bar{\sigma}) = fB_D(\sigma, \bar{\sigma}) + \rho_D(\sigma)(f)\bar{\sigma},$$

para $\sigma, \bar{\sigma} \in \Gamma(D)$ y $f \in C^\infty(Q)$.

Las razones detrás de este proyecto son que los algebroides de Lie son extensiones naturales de los fibrados tangentes y de las álgebras de Lie, que son el escenario natural para desarrollar la mecánica. En efecto, para un fibrado tangente, la estructura de algebroide de Lie es la que proporciona el corchete de Lie usual de campos de vectores, siendo la identidad la aplicación ancla. Para un álgebra de Lie, el corchete es precisamente el del álgebra de Lie, siendo el ancla la aplicación cero (el álgebra de Lie se considera como un fibrado vectorial trivial sobre el vector cero). Si, además, $L : TQ \longrightarrow R$ es una función lagrangiana y G es un grupo de Lie de simetrías, entonces $TQ/G \longrightarrow Q$ es un algebroide de Lie (el denominado algebroide de Atiyah), y L reduce a un lagrangiano $l : TQ/G \longrightarrow R$, que es un auténtico lagrangiano en este nuevo lenguaje universal.

11.1. Integradores noholónomos y grupoides de Lie

Otra interesante línea de investigación es la construcción de algoritmos numéricos que aportan aproximaciones numéricas seguras y robustas a la dinámica noholónoma. En efecto, la construcción de integradores geométricos para la dinámica noholónoma es un problema abierto muy reciente [74]:

> ...El problema para la clase más general de ligaduras noholónomas está todavía abierto, como ocurre con la pregunta del análogo correcto de la integración simpléctica para sistemas lagrangianos con ligaduras noholónomas ...

La principal idea que nos puede guiar para simular geométricamente sistemas noholónomos viene del principio variacional de Hölder [4], que no es un principio variacional estándar, pero admite una discretización adecuada. A grosso modo esta es el procedimiento introducido por J. Cortés y S. Martínez [24] y seguido por otros autores [28, 29, 30, 43], extendiendo además los resultados a sistemas noholónomos definidos sobre grupos de Lie (veáse también [29] para una aproximación alternativa usando funciones generatrices). Desde la perspectiva geométrica, es posible ver todas estas situaciones como casos particulares de sistemas noholónomos sobre grupoides de Lie [78, 56]. Esta idea sigue el programa propuesto por Weinstein [107] para el estudio de mecánica discreta sobre grupoides de Lie.

11.2. Grupoides de Lie

11.2.1. Una breve nota histórica sobre grupoides

El concepto de grupoide se debe al matemático alemán Heinrich Brandt en un artículo de 1926 en *Mathematische Annalen* [12].

Heinrich Brandt

Brandt estudió en la Universidad de Gotinga, y después en la de Estrasburgo. En 1912, consiguió su doctorado como estudiante de Heinrich Martin Weber, y desde 1913 fue profesor ayudante en la Universidad de Karlsruhe, y luego en Aachen, dónde enseñó geometría y matemática aplicada. Desde 1930 fue director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Halle.

Brandt llegó a este concepto estudiando teoría de números. Es importante comentar que su motivación fue eminente práctica: dar un fundamento algebraico a las leyes de composición particulares que encontró en la teoría de formas cuadráticas cuaternarias. Obviamente, es posible encontrar grupoides que están presentes de manera implícita en trabajos anteriores. Por ejemplo, la noción de grupo continuo de transformaciones locales de Sophus Lie conduce mas a la idea de un grupoide de Lie que a la de grupo de Lie.

Recordemos que además de la definición que presentaremos a continuación, un grupoide se puede definir como una categoría cuyos morfismos son todos inversibles. Lo curioso es que la teoría de categorías aparecería 20 años después.

Después de Brandt, fue Charles Ehresmann [39] quién continuó el estudio de grupoides y posteriormente Jean Pradines [91] Charles Ehresmann fue un matemático francés que trabajó en topología diferencial y teoría de categorías. Es conocido por su estudio de la topología de los grupos de Lie, el concepto de jet, y su famoso seminario en teoría de categorías.

Charles Ehresmann

Por su parte, Jean Pradines abrió el problema de la integración de un algebroide de Lie, extendiendo lo que ocurre con grupos y álgebras de Lie.

Otro trabajo fundamental en el tema es debido a André Haefliger, en 1999 [52]. Una guía comprehensiva al tema, con énfasis en la geometría diferencial, es el libro de Kirill C.H. Mackenzie de 2005 [72], que es la segunda edición aumentada y revisada del libro escrito por este autor hace 30 años [71] y que ha servido de introducción al tema durante todo este tiempo. Es oportuno recordar esta frase de K. Mackenzie:

> Todos los que están familiarizados con el clima de 'evaluación de la investigación, apreciarán la actitud del autor, que prefiere, para el beneficio de la comunidad matemática, presentar los frutos de su trabajo en forma de libro en vez de dispersarlo en una docena de artículos aislados.

11.2.2. Grupoides de Lie

Recordemos que un ***grupoide de Lie*** sobre una variedad diferenciable Q es una variedad diferenciable G junto con las siguientes aplicaciones de estructura

- dos submersiones, la ***aplicación fuente*** $\alpha\colon G \to Q$ y la ***aplicación meta*** $\beta\colon G \to Q$. Las aplicaciones α y β definen el conjunto de ***pares componibles***

$$G_2 = \{(g,h) \in G \times G \mid \beta(g) = \alpha(h)\} ;$$

- una *aplicación multiplicación* $m\colon G_2 \to G$, $(g,h) \mapsto gh$.
- una *sección identidad* $\epsilon\colon Q \to G$ de α y β, tal que para todo $g \in G$, $\epsilon(\alpha(g))\, g = g = g\epsilon(\beta(g))$;
- una *aplicación de inversión* $i\colon G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, tal que para todo $g \in G$, $gg^{-1} = \epsilon(\alpha(g))\,, \qquad g^{-1}g = \epsilon(\beta(g))\,.$

Usando las aplicaciones de estructura es posible definir la ***traslación por la izquierda por*** $g \in G$ y la ***traslación a la derecha por*** g como los difeomorfismos

$$\begin{array}{lcl} l_g : \alpha^{-1}(\beta(g)) \longrightarrow \alpha^{-1}(\alpha(g)) & ; & h \longrightarrow l_g(h) = gh, \\ r_g : \beta^{-1}(\alpha(g)) \longrightarrow \beta^{-1}(\beta(g)) & ; & h \longrightarrow r_g(h) = hg. \end{array}$$

Consideremos el fibrado vectorial $\tau : AG \to Q$, cuya fibra en el punto $x \in Q$ es $A_xG = V_{\epsilon(x)}\alpha = Ker(T_{\epsilon(x)}\alpha)$. De hecho, AG está dotado con una estructura de algebroide de Lie. Para cualquier sección $X \in \mathrm{Sec}\,(AG)$

es posible construir el correspondiente campo de vectores invariante por la izquierda (resp. invariante por la derecha) en G, que serán denotados por $\overleftarrow{X}$ (resp., $\overrightarrow{X}$) (veáse [56] para los detalles).

Un sistema noholónomo discreto generalizado (o sistema Lagrangiano con ligaduras) está determinado por

- un ***Lagrangiano discreto regular*** $L_d : G \longrightarrow R$,
- una ***distribución***, $\mathcal{D}_c$, que es un subfibrado vectorial del fibrado $AG \to Q$ de direcciones admisibles. Denotaremos por $\tau_{\mathcal{D}_c} : \mathcal{D}_c \to Q$ la proyección natural y por $i_{\mathcal{D}_c} : \mathcal{D}_c \to AG$ la inclusión canónica.
- una ***subvariedad embebida de ligaduras discreta*** $\mathcal{M}_c$ de G, tal que $\dim \mathcal{M}_c = dim \mathcal{D}_c$.

En [56] se prueba, aplicando una versión discreta del principio de Hölder, como las ***ecuaciones noholónomas discretas*** se obtienen como las soluciones de las siguientes ecuaciones en diferencias en G:

$$\overleftarrow{X_a}(g_k)(L_d) - \overrightarrow{X_a}(g_{k+1})(L_d) = 0 \tag{11.1}$$

donde $(g_k, g_{k+1}) \in G_2 \cap (\mathcal{M}_c \times \mathcal{M}_c)$ (con $\beta(g) = \alpha(h) = x$) y dónde $\{X_a\}$ es una base local de Sec $\tau_{\mathcal{D}_c}$ sobre un abierto U de Q tal que $x \in U$.

Las ecuaciones (11.1) admiten varias aplicaciones e interpretaciones, dependiendo del grupoide particular que uno considere. Si $G = Q \times Q$ entonces obtenemos las mismas ecuaciones que en [24]. Pero si G es un grupo de Lie, entonces de las ecuaciones (11.1) se deducen las denominadas ecuaciones de Euler-Poincaré-Suslov (ver [43]). Y si trabajamos con un fibrado de Atiyah $G = (Q \times Q)/G$, tendremos la versión discreta de sistemas noholónomos reducidos, incluyendo los sistemas de Chaplygin.

12

La Mecánica geométrica en España

España goza de una buena situación en lo que se ha dado en llamar Mecánica Geométrica. Las razones son variadas, porque los grupos que se dedican a este tipo de investigación tienen orígenes diversos:

- Grupos e investigadores que vienen de la Geometría Diferencial, disciplina que tiene gran raigambre en nuestro país.
- Grupos e investigadores que vienen de la Física Teórica y de la Física Matemática y que han centrado sus intereses en la Mecánica.
- Grupos e investigadores que provienen de los Sistemas Dinámicos y, en particular, con intereses en la Mecánica discreta.
- Un número mucho más reducido que tienen su interés en la Mecánica de Medios Continuos y provienen de las áreas de Ingeniería.

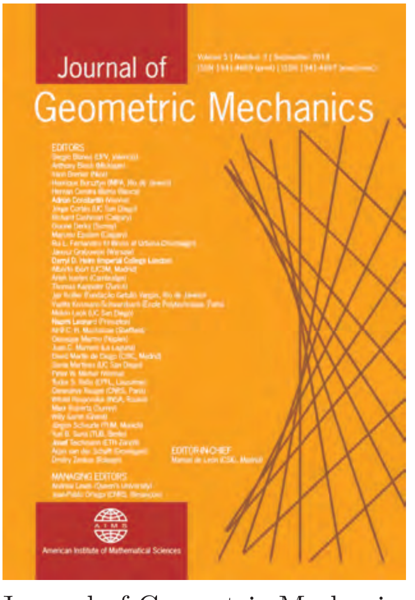
Muchos de estos grupos, así como investigadores de otros países se han organizado en una Red Temática de Geometría, Mecánica y Control, que es financiada con regularidad por convocatorias competitivas. En esta red participan diversas universidades españolas en Madrid, Barcelona, Zaragoza, Santiago de Compostela, Salamanca, La Laguna, y también el Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Logo de la Red Temática de Geometría, Mecánica y Control

Las actividades organizadas por esta Red son muy variadas y entre ellas están las siguientes:

- Las Escuelas International Summer School on Geometry, Mechanics, and Control, que se han convertido en un referente internacional.
- Los International Young Researchers Workshop on Geometry, Mechanics and Control, que se celebra anualmente en diferentes lugares de Europa.
- Los Encuentros de Invierno de la Red de Geometría, Mecánica y Control, anualmente en la Universidad de Zaragoza.
- Los Iberoamerican Meeting on Geometry, Mechanics and Control, que se organizan cada dos años, alternando España con un país de América Latina.

El éxito internacional de esta Red se puede también ejemplificar en que los más activos grupos internacionales están apoyando la revista emblemática de esta área en el mundo, el *Journal of Geometric Mechanics*, editado por el American Institute of Mathematical Sciences (AIMS) y que inicia su décimo año de andadura con un impacto muy notable.



Journal of Geometric Mechanics

Bibliografía

[1] R. Abraham, J.E. Marsden: *Foundations of Mechanics.* 2nd ed., Benjamin-Cummings, Reading (Ma), 1978.

[2] Aristóteles: *Física.* Editorial Gredos, Madrid, 2002.

[3] V.I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Graduate Texts in Mathematics vol 60, Springer, Berlin, 1978.

[4] V.I. Arnold, V.V. Kozlov, A.I Neishtadt: *Dynamical Systems III*, Springer, Berlin, 1988.

[5] L. Bates, J.E. Snyaticki: Nonholonomic reduction. *Reports on Math. Physics* **32** 1 (1992), 99-115.

[6] A.M. Bloch: *Nonholonomic mechanics and control.* Interdisciplinary Applied Mathematics, 24. Systems and Control. Springer-Verlag, New York, 2003. xx+483 pp.

[7] A.M. Bloch, P.S. Krishnaprasad, J.E. Marsden, R.M. Murray: Nonholonomic mechanical systems with symmetry. *Arch. Rational Mech. Anal.* **136** (1996), 21-99.

[8] A.M. Bloch, J.E. Marsden, D.V. Zenkov: Nonholonomic Dynamics. *Notice of the AMS* **52**, 3 (2005), 324-333.

[9] A.I. Bobenko, Y.B. Suris: Discrete Lagrangian reduction, discrete Euler-Poincaré equations and semidirect products. *Lett. Math. Phys.* **49** 1 (1999), 79–93.

[10] A.I. Bobenko, Y.B. Suris: Discrete time Lagrangian mechanics on Lie groups, with an application to the Lagrange top. *Comm. Math. Phys.*, **204** (1) (1999), pp. 147–188.

[11] A.V. Borisov, I.S. Mamaev: On the history of the development of the nonholonomic mechanics. *Regular and Chaotic Dynamics* V. 7, n. 1, (2002), 43-47.

[12] H. Brandt: Uber eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, *Math. Ann.* **96** (1926), 360–366.

[13] F. Bullo, A.D. Lewis: *Geometric control of mechanical systems. Modeling, analysis, and design for simple mechanical control systems.* Texts in Applied Mathematics, 49. Springer-Verlag, New York, 2005. xxiv+726 pp.

[14] J.A. Cadzow: Discrete calculus of variations. *Internat. J. Control.* **11**, (1970), pp. 393-407.

[15] J.A. Cadzow: *Discrete-Time Systems: An Introduction with Interdisciplinary Applications.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., (1973). xix+440 pp

[16] F. Cantrijn, J. Cortés, M. de León, D. Martín de Diego: On the geometry of generalized Chaplygin systems, *Math. Proc. Cambridge Philos.* **132** (2) (2002), 323-351.

[17] F. Cantrijn, M. de León, D. Martín de Diego: On almost Poisson structures in nonholonomic mechanics, *Nonlinearity* **12** (1999), 721-737.

[18] F. Cantrijn, M. de León, J.C. Marrero, D. Martín de Diego: Reduction of constrained systems with symmetries, *J. Math. Phys.* **40** (1999), 725–820.

[19] F. Cantrijn, M. de León, J.C. Marrero, D. Martín de Diego: On almost Poisson structures in nonholonomic mechanics II: The time-dependent framework, *Nonlinearity* **13** (2000), no. 4, 1379–1409.

[20] J.F. Cariñena, M.F. Rañada: Lagrangian systems with constraints: A geoemtric approach to the method of Lagrangian multipliers. *J. Physics A: Math. Gen.* **26** (1993), 1335-1351.

[21] P.J. Channell, C. Scovel: Symplectic integration of Hamiltonian systems. *Nonlinearity*, **3** (2), (1990), pp. 231-259.

[22] S.A. Chaplygin: *Analysis of the Dynamics of Nonholonomic Systems*, Classical Natural Sciences, Moscow, 1949.

[23] S.A. Chaplygin: *Selected Works on Mechanics and Mathematics*, State Publ. House, Technical-Theoretical Literature, Moscow, 1954.

[24] J. Cortés: *Geometric, control and numerical aspects of nonholonomic systems.* (Lecture Notes in Mathematics, vol. 1793, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[25] J. Cortés, M. de León, D. Martín de Diego, S. Martínez: Geometric description of vakonomic and nonholonomic dynamics. Comparison of solutions. *SIAM J. Control Optim.* **41** (2002), no. 5, 1389–1412.

[26] J. Cortés, Jorge; M. de León, J.C. Marrero, E. Martínez: Nonholonomic Lagrangian systems on Lie algebroids. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **24** no. 2 (2009), 213-271.

[27] J. Cortés, M. de León, J.C. Marrero, D.M. Martín de Diego, E. Martínez: A survey of Lagrangian mechanics and control on Lie algebroids and groupoids. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **3**, (2006), pp. 509–558.

[28] M. de León, D.M. Martín de Diego, A. Santamaría-Merino: Geometric integrators and nonholonomic mechanics. *J. Math. Phys.* **45** 3 (2004), 1042–1064.

[29] M. de León, D.M. Martín de Diego, A. Santamaría-Merino: Geometric numerical integration of nonholonomic systems and optimal control problems. *Eur. J. Control* **10** (2004), 515–521.

[30] M. de León, D.M. Martín de Diego, A. Santamaría-Merino: Discrete variational integrators and optimal control theory. *Adv. Comput. Math.* **26** (2007), 1-3, 251–268.

[31] M. de León, J.C. Marrero, D. Martín de Diego: *Las matemáticas del Sistema Solar*. ¿Qué sabemos de? La Catarata y CSIC. Madrid, 2009.

[32] M. de León: *La geometría del universo* ¿Qué sabemos de?. La Catarata y CSIC. Madrid, 2012.

[33] M. de León y Á. Timón (Coordinadores): *Matemáticas del Planeta Tierra*. Unidad Didáctica. FECYT y SM. Madrid 2014.

[34] M. de León, P. R. Rodrigues: *Methods of differential geometry in analytical mechanics*. North-Holland Mathematics Studies, 158. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.

[35] M. de León, J.C. Marrero, E. Martínez: Lagrangian submanifolds and dynamics on Lie algebroids. *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005), R241-R308. (Topical review).

[36] P.A.M. Dirac: *Lectures on Quantum Mechanics*. Dover, Mineola, N.Y. 2001.

[37] R.J. Eden: The Hamiltonian dynamics of non-holonomic systems. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* **205** (1951). 564-583.

[38] R.J. Eden: The quantum mechanics of non-holonomic systems. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* **205** (1951). 583-595.

[39] Ch. Ehresmann: Catégories topologiques et catégories différentiables, *Colloque Géom. Diff. Globale (Bruxelles, 1958), Centre Belge Rech. Math.*, Louvain, 1959, pp. 137–150.

[40] L. Euler: De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam exililium, methodus nova et facilis. *Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* 7, (1740), pp. 99-122.

[41] K. Feng: On difference squemes and symplectic geometry. *Proceedings of the 5-th International Symposium on differential geometry & differential equations*, **3** (1985), pp. 42-58.

[42] N.M. Ferrers: Extension of Lagrange's equations. *Quart. J. of pure and applied mathematics*. V. 12. n. 45. (1872), 1-5.

[43] S. Ferraro, D. Iglesias, D.M. Martín de Diego: Momentum and energy preserving integrators for nonholonomic dynamics. *Nonlinearity* **21** (8) (2008), 1911–1928.

[44] R.C. Fetecau, J.E. Marsden, M. Ortiz, M. West: Nonsmooth Lagrangian Mechanics and Variational Collision Integrators. *SIAM Journal of Dynamical Systems* **2** (3), (2003), pp. 381-416.

[45] P.L. García, C. Rodrigo: Cartan forms for first order constrained variational problems. *J. Geom. Phys.* **56** no. 4 (2006), 571-610,

[46] P.L. García, C. Rodrigo: Cartan forms and second variation for constrained variational problems. *Geometry, integrability and quantization*, (2006), pp. 140-153, Softex, Sofia, 2006.

[47] P. L. García, A. García, C. Rodrigo: Variational integrators for discrete Lagrange problems, *Journal of Geometric Mechanics.* **2** no. 4 (2010), 343-374.

[48] M.J. Gotay, J.M. Nester, G. Hinds: Presymplectic manifolds and the Dirac-Bergmann theory of constraints. *J. Math. Phys.* **19** no. 11 (1978) 2388–2399.

[49] M.J. Gotay, J.M. Nester: Presymplectic Lagrangian systems. I. The constraint algorithm and the equivalence theorem. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)* **30** no. 2 (1979), 129–142.

[50] M.J. Gotay, J.M. Nester: Presymplectic Lagrangian systems. II. The second-order equation problem. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)* **32** no. 1 (1980) 1–13.

[51] J. Grabowski, M. de León, J.C. Marrero, D. Martín de Diego: Nonholonomic constraints: a new viewpoint. *J. Math. Phys.* **50** no. 1 (2009), 013520, 17 pp.

[52] A. Haefliger: Groupoids and foliations, Groupoids in analysis, geometry, and physics (Boulder, CO, 1999), *Contemp. Math.*, vol. 282, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, pp. 83–100.

[53] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner: *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving algorithms for Ordinary Differential Equations.* Springer, Berlin (2002).

[54] W.R. Hamilton: *The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton. Vol. IV. Geometry, analysis, astronomy, probability and finite differences, miscellaneous.* Edited by B. K. P. Scaife. Cunningham Memoir, XVI. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[55] H. Hertz: *The principles of mechanics.* Preface by H. von Helmholtz. Translation by D. E. Jones and J. T.Walley. Introduction by Robert S. Cohen. Dover Publications, Inc., New York, 1956. xlii+274 pp.

[56] D. Iglesias, J.C. Marrero, D.M. de Diego, E. Martínez: Discrete nonholonomic Lagrangian systems on Lie groupoids. *J. Nonlinear Sci.* **18** 3 (2008), 221–276.

[57] G. Jaroszkiewicz, K. Norton: Principles of discrete time mechanics, I: Particle systems. *J. Phys. A* **30** (1997), pp. 3115–3144.

[58] G. Jaroszkiewicz, K. Norton: Principles of discrete time mechanics, II: Classical field theory. *J. Phys. A* **30** (1997), pp. 3145–3163.

[59] B.W. Jordan, E. Polak: Theory of a class of discrete optimal control systems. *J. Electron. Control* **17** (1964), pp. 697–711.

[60] C. Kane, J.E. Marsden, M. Ortiz: Symplectic energy-momentum integrators. *J. Math. Phys.* **40** (1999), pp. 3353–3371.

[61] C. Kane, J.E. Marsden, M. Ortiz, M. West: Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **49** (10) (2000), pp. 1295-1325.

[62] J. Koiller: Reduction of some classical nonholonomic mechanical systems with symmetry. *Arch. Rational Mech. Anal.* **118** (1992), 113-148.

[63] W.S. Koon, J.E. Marsden: Poisson reduction of nonholonomic mechanical systems with symmetry, *Reports on Math Phys.*, **42**, (1998) 101-134.

[64] J-L. Lagrange: *Analytical mechanics.* Boston Studies in the Philosophy of Science, 191. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[65] T.D. Lee: Can time be a discrete dynamical variable? *Phys. Lett. B* **122** (1983), pp. 217–220.

[66] T.D. Lee: Difference equations and conservation laws. *J. Stat. Phys.* **4**, (1987), pp. 843–860.

[67] B. Leimkmuhler, R. Skeel: Symplectic Numerical Integrators in Constrained Hamiltonian Systems. *J. Comput. Physics* **112** no. 1(1994), 117–125.

[68] A.D. Lewis, R.M. Murray: Variational principles for constrained systems: theory and experiment. *Internat. J. Non-Linear Mech.* **30** (1995), no. 6, 793–815. Including simulations and lab work.

[69] P. Libermann, Ch.M- Marle: *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics.* D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.

[70] E. Lindelof: *Acta Societatis Scientiarum Fennicae* vol. XX, no. 10 (1895).

[71] K. C. H. Mackenzie: *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.

[72] K. C. H. Mackenzie: *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 213, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[73] R. McLachlan, M. Perlmutter: Integrators for nonholonomic Mechanical Systems. *J. Nonlinear Sci.* **16** no. 4 (2006), 283–328.

[74] R.I. McLachlan, C. Scovel: A survey of open problems in symplectic integration. In: *Integration algorithms and classical mechanics (Toronto, ON, 1993)*, Fields Inst. Commun., 10, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 151–180.

[75] S. Maeda: Canonical structure and symmetries for discrete systems. *Math. Japonica.* **25** (1980), pp. 405–420.

[76] S. Maeda: Extension of discrete Noether theorem. *Math. Japonica* **26** (1981), pp. 85–90.

[77] S. Maeda: Lagrangian formulation of discrete systems and concept of difference space. *Math. Japonica* **27** (1981), pp. 345–356.

[78] J.C. Marrero JC, D.M. Martín de Diego, E. Martínez: Discrete Lagrangian and Hamiltonian Mechanics on Lie groupoids. *Nonlinearity* **19** (2006), 6, 1313–1348. Corrigendum: *Nonlinearity* **19** 12, (2006), 3003–3004.

[79] J.E. Marsden, S. Pekarsky, S. Shkoller: Discrete Euler-Poincaré and Lie- Poisson equations. *Nonlinearity* **12** (6), (1999), pp. 1647–1662.

[80] J.E. Marsden, S. Pekarsky, S. Shkoller: Symmetry reduction of discrete Lagrangian mechanics on Lie groups. *J. Geom. Phys.* **36** no. 1-2 (2000), 140–151.

[81] J.E. Marsden, M. West: Discrete Mechanics and Variational Integrators. *Acta Numerica*, Cambridge University Press, Cambridge, (2001), pp. 357–514.

[82] J.E. Marsden, A.D. Weinstein: Reduction of symplectic manifolds with symmetry. *Rep. Mathematical Phys.* **5** (1974), no. 1, 121–130.

[83] J. Moser, P. Veselov: Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials. *Comm. Math. Phys.* **139** (2), (1991), pp. 217–243.

[84] Ju. I. Neimark, N. A. Fufaev: *Dynamics of Nonholonomic Systems*, Transactions of Mathematical Monographs, 33. AMS. 1972. (Russian edition, 1967).

[85] Isaac Newton: *Principios matemáticos de la filosofía natural.* Tecnos, Madrid, 2011.

[86] K. Norton, G. Jaroszkiewicz: Principles of discrete time mechanics, III: Quantum field theory. *J. Phys. A* **31** (1998), pp. 977–1000.

[87] S. Ober-Blöbaum, O. Junge, J.E. Marsden: Discrete Mechanics and Optimal Control: an Analysis. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **17** no. 2 (2011), 322-352.

[88] J.P. Ortega, T. S. Ratiu: Momentum maps and Hamiltonian reduction, Progress in Math., 222 Birkhauser, Boston, 2004.

[89] G.W. Patrick, C. Cuell: Error analysis of variational integrators of unconstrained Lagrangian systems. *Numerische Mathematik* **113** (2009), pp. 243–264.

[90] H. Poincaré: *Les idées de Hertz sur la mécanique*, Oeuvres VII, 231-250, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[91] J. Pradines: Théorie de Lie pour les groupoides différentiables. Relations entre propri ét és locales et globales, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 263 (1966), A907–A910.

[92] S. Reich: Backward error analysis for numerical integrators. *SIAM J. Numer. Anal.* **36** (1999), pp. 1549–1570.

[93] S. Reich: Preservation of adiabatic invariants under symplectic discretization. *Appl. Numer. Math.* **29** (1999), pp. 45–55.

[94] E.J. Routh. *Dynamics of a System of Rigid Bodies.* Dover, New York, 1960.

[95] J.M. Sanz-Serna: Symplectic integrators for Hamiltonian problems: An overview. *Acta Numerica* **1** Cambridge University Press, (1992), pp. 243–286.

[96] J.M. Sanz-Serna, M.P. Calvo: *Numerical Hamiltonian Problems.* Chapman& Hall, London, 1994.

[97] G.M. Slesser: Notes on rigid dynamics. *Quart. J. of Math.* **4** (1861), 65-77.

[98] J.M Souriau: *Structure of dynamical systems. A symplectic view of physics.* Progress in Mathematics, 149. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997.

[99] A.J. Van der Schaft, B.M. Maschke: On the Hamiltonian formulation of nonholonomic mechanical systems, *Reports on Mathematical Physics*, **34** (2) (1994), 225-233.

[100] A. M. Vershik, L.D. Faddeev: Differential geometry and lagrangian mechanics with constraints. *Sov. Phys. Doklady* **17** (1), (1972), 34-36.

[101] A.P. Veselov: Integrable discrete-time systems and difference operators. *Funct. Anal. Appl.* **22** (1988), pp. 83–93.

[102] A.P. Veselov: Integrable Lagrangian correspondences and the factorization of matrix polynomials. *Funct. Anal. Appl.* **25** (1991), 112–122.

[103] A. Vierkandt: Uber gleitende und rollende Bewegung. *Monatshefte der Math. und Phys.* III, (1982), 31-54.

[104] R. de Vogelaére: Methods of integration which preserve the contact transformation property of the Hamiltonian equations. *University of Notre Dame preprint*, (1956).

[105] P. Voronetz: On the Equations of Motion for Nonholonomic Systems, *Mat. Sbornik* **XXII**, (1901), 659-686.

[106] G.T. Walker: On a dynamical top, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **28** (1896), 175-184.

[107] A. Weinstein: Lagrangian mechanics and groupoids, In *Mechanics day* (Waterloo, ON, 1992), Fields Institute Communications **7**, American Mathematical Society (1996), 173-239.

[108] J.M. Wendlandt, J.E. Marsden: Mechanical integrators derived from a discrete variational principle. *Physica D* **106** (1967), 223–246.

[109] J.M. Wendlandt, J.E. Marsden: Mechanical systems with symmetry, variational principles and integration algorithms. In: *Current and Future Directions in Applied Mathematics*, Birkhäuser (1967), pp. 219–261.

[110] H. Weyl: *The classical groups. Their invariants and representations.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

[111] E. T. Whittaker: *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies.* Cambridge University Press, Cambridge, 1904.

CONTESTACIÓN
DEL
Excmo. Sr. D. Pedro Luis García Pérez

Excmo. Sr. Presidente
Excmas. Sras. y Sres. Académicos
Señoras y Señores

He de agradecer a esta Real Academia de Ciencias el que me designara para, en su nombre, dar la bienvenida al Excmo. Sr. D. Manuel de León Rodríguez en este acto de su recepción como Académico de Número. Mi satisfacción es grande por tratarse de un viejo amigo con el que he tenido a lo largo de más de treinta años intereses comunes en geometría diferencial y su aplicación a la física, así como haber ejercido ambos, en épocas diferentes, tareas de dirección en la matemática del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC) y en la Real Sociedad Matemática Española (RSME). No deja de ser una feliz coincidencia que nuestro nuevo Académico suceda en la Medalla número 36 al Excmo. Sr. D. José Javier Etayo Miqueo, especialista también en geometría diferencial y en su día Director del Instituto Jorge Juan de Matemáticas del CSIC y Presidente de la RSME. A ello se ha referido con cariño y respeto el Profesor de León en su discurso al considerar al actual ICMAT como el heredero natural tanto del Jorge Juan como del Laboratorio y Seminario Matemático de la Junta de Ampliación de Estudios.

Manuel de León nació en Requejo de Sanabria (Zamora) en 1953. En 1975 se licenció en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela con la máxima calificación, doctorándose con Sobresaliente Cum Laude por la misma Universidad tres años después con una tesis de título “Conexiones y estructuras polinómicas en el fibrado tangente de orden 2” que le dirigió el Profesor D. Enrique Vidal Abascal. De 1975 a 1986 fue Ayudante de Clases Prácticas, Encargado de Curso, Profesor Adjunto Contratado y Profesor Titular de Geometría y Topología en la Universidad de Santiago de Compostela, habiendo tenido la fortuna de realizar su trabajo en el grupo de investigación de geometría diferencial creado a fines de los años 50 por el Profesor Vidal, a quien se debe el establecimiento de los estudios de matemáticas en esa Universidad. A ello se ha referido con admiración nuestro nuevo Académico al resaltar la gran visión de futuro del Profesor Vidal al haber iniciado una fructífera colaboración internacional con sus famosos "congresos de geometría diferencial", así como por haber llevado a buen puerto a través de sus primeros discípulos y sucesores ramificaciones de esta escuela a otras universidades españolas, como Valencia, Granada, La Laguna, Murcia, País Vasco y Sevilla, hoy día de reconocida excelencia todas ellas.

En 1986 Manuel de León ganó por oposición una plaza de Investigador del CSIC en el área de Matemáticas, incorporándose a la Confederación Española de Centros de Investigación Matemática y Estadística (CECIME) que yo presidía en esos años. Esta Confederación, creada en 1984 por el entonces Presidente del CSIC, D. Enrique Trillas, tenía como principal objetivo unificar la investigación matemática del CSIC con la que se realizaba en los llamados "centros coordinados" de las universidades españolas. Al no conseguir este proyecto el éxito deseado la CECIME se disolvió en 1989, pasando la matemática del CSIC por un periodo de indefinición hasta que fue ubicada en lo que se llamó Centro de Matemáticas y Física Fundamental. No es de extrañar que ante de esta situación de inestabilidad el joven Manuel de León se impusiera como reto el crear en el CSIC un Instituto de Matemáticas propio de alto nivel, lo que finalmente logró en 2007 con la creación del ICMAT (CSIC-UAM-UC3M-UCM). Ya Profesor de Investigación desde 2004, fue el primer Director de este Centro entre 2007 y 2015, habiéndolo llevado con su buen hacer y dedicación al alto nivel del que actualmente goza. En este sentido, es una buena noticia el que nuestro nuevo Académico se haya hecho cargo otra vez de la dirección del ICMAT desde el pasado 2 de septiembre.

La supresión de la CECIME afectó de un modo muy especial a la RSME, la cual tuve el honor de presidir entre 1982 y 1988. Hasta entonces esta institución había vivido bajo la cobertura del Jorge Juan primero y de la CECIME después. Pero tras la disolución de esta última, el CSIC se desentendió totalmente de ella. Este hecho unido a otras circunstancias desencadenó, finalmente, un proceso de reconstitución de la RSME en 1996 en el que Manuel de León jugó un papel protagonista:

Fue Vicepresidente de la Junta Gestora constituida para ese efecto que presidió D. Antonio Martínez Naveira, fue Codirector refundador con José

Luis Fernández y Alfonso Romero de la revista Gaceta Matemática, formó parte de la Comisión que elaboró los nuevos estatutos de la Sociedad, fue Vocal electo desde 1996 hasta 2002 y Vicepresidente de la primera Junta de Gobierno entre 2002 y 2005, siendo también promotor junto con Raúl Ibáñez de lo que actualmente es el mayor portal divulgativo de las matemáticas en español: DIVULGAMAT.

Desde todos esos puestos Manuel de León realizó una importante labor al servicio de la RSME que, sin duda alguna, contribuyó decisivamente a la conversión de esta institución en la prestigiosa Sociedad que es hoy.

A esta gran labor al servicio de la comunidad matemática hay que añadir otras importantes actuaciones y responsabilidades de carácter internacional, entre las que destacan las siguientes:

- Responsable de la reconstitución del Comité Español de la Unión Matemática Internacional (IMU) en 1998.
- Impulsor de la creación del Comité Español para el Año Mundial de las Matemáticas de 2000.
- Promotor en 2003 de la fundación del actual Comité Español de Matemáticas (CEMAT), del que fue Presidente entre 2004 y 2007.
- Presidente del Comité Organizador del Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Madrid en 2006.
- Miembro del Comité Ejecutivo de la IMU entre 2007 y 2014, convirtiéndose en el único español que hasta hoy ha desempeñado esta representación.
- Miembro del Comité Ejecutivo del Consejo Internacional de la Ciencia (ICSU) desde 2014, habiendo sido la primera vez que este organismo ha contado con representación española.

Paralelamente a esta importante labor profesional y representativa, Manuel de León ha desarrollado desde 1978 una brillante actividad investigadora en la Universidad de Santiago de Compostela, el CSIC, y en las Universidades Federal Fluminense de Brasil, Calgary, Ghent, Mannheim, Lille, La Laguna y Carlos III de Madrid, en las que fue profesor visitante.

Centrado en la geometría diferencial y en la mecánica geométrica, sus áreas de interés preferentes han sido entre otras: la geometría de los fibrados tangentes de orden superior y de las referencias, las variedades casi-kälherianas no kälherianas, las variedades simplécticas, cosimplécticas y de

Poisson, los grupoides y algebroides de Lie y su aplicación a la mecánica y la física, la formulación de Hamilton-Cartan de la mecánica y la teoría de los medios continuos, la mecánica no holónoma y la teoría del control óptimo, la reducción lagrangiana y hamiltoniana de los sistemas con simetrías, la mecánica discreta y, en los últimos años, la teoría de Hamilton-Jacobi y sus diferentes ramificaciones.

En todos estos temas nuestro nuevo Académico ha desarrollado una importante labor investigadora que ha sido muy bien difundida y valorada internacionalmente:

Sus trabajos han dado lugar a más de 250 publicaciones en revistas internacionales de prestigio, 4 libros, unos 180 congresos, un centenar de conferencias y más de 20 cursos especializados.

En el aspecto formativo hay que destacar la dirección de 10 tesis doctorales, todas ellas con la máxima calificación, que pone de manifiesto el interés que Manuel de León ha tenido siempre por la enseñanza universitaria.

Ha participado en numerosos Proyectos de Investigación Internacionales, Nacionales y Autonómicos, 25 de ellos como Investigador Responsable, donde ha demostrado sobradamente su aptitud para liderar equipos de investigación científica.

Cabe destacar también su labor como miembro de los comités editoriales de diferentes revistas internacionales tales como: *Reports on Mathematical Physics*, *Journal of Geometry and Symmetry in Physics* y *Journal of Geometric Mechanics* de la que es fundador y Editor Jefe.

Asimismo ha participado en diversos comités de evaluación científica entre los que destacan: la ANEP (de la que fue Coordinador de Matemáticas), la ANECA, y el *PESC Committe de la European Science Foundation*.

Manuel de León ha sido galardonado con importantes premios y distinciones: Premio a la Investigación de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Calgary en 2000, Socio de Honor de AGAPEMA en 2006, Académico Correspondiente y Académico Numerario de nuestra Academia en 2005 y 2013 respectivamente, Medalla de Ciencia en Acción en 2009, Académico Correspondiente de la Academia Canaria de Ciencias en 2013, y Medalla de la RSME en 2017.

Tras este breve resumen del historial de Manuel de León, cumplo gustoso con mi segunda misión en este acto que, conforme a la costumbre, es glosar el discurso del nuevo Académico.

En la espléndida disertación que acabamos de oír, Manuel de León ha hecho una atinada descripción de lo que desde los años 50 del pasado siglo ha dado en llamarse *mecánica geométrica*. Tras una breve introducción histórica de la mecánica desde la antigüedad griega hasta Galileo y Newton, el Profesor de León se detiene en las formulaciones de Lagrange y de Hamilton de la Mecánica Analítica, primer cuerpo de doctrina de la mecánica que pronto llegó a convertirse en el fundamento mismo de gran parte de la física clásica. Y es, precisamente, la expresión de esta doctrina en el lenguaje de la geometría diferencial moderna que surge en la década de los 50 con la introducción rigurosa del concepto de variedad diferenciable lo que se conoce con el nombre de mecánica geométrica.

Su punto de partida fue la caracterización del espacio de los momentos de la mecánica de Hamilton como una variedad simpléctica donde el movimiento de un sistema regular conservativo viene dado por el *flujo simpléctico* asociado a su *energía*. En particular, en el caso del fibrado cotangente de una variedad con su métrica simpléctica canónica, la transformación de Legendre permite trasladar esta estructura al espacio de las velocidades del sistema, obteniéndose de este modo una expresión intrínseca de la formulación lagrangiana del mismo. Todo ello es expuesto con sencillez y claridad en los apartados 4 y 5 del discurso, ocupándose el resto del mismo de una serie de temas principales de la doctrina elegidos convenientemente para su mejor ilustración.

Así, en los apartados 6 y 7 se tratan tres temas muy representativos de la mecánica hamiltoniana, a saber: la *reducción simpléctica*, la *teoría de Hamilton-Jacobi* y los *sistemas singulares*.

La formulación moderna del primer tema -cuyo principal objetivo es reducir el estudio de un sistema mecánico al espacio cociente por la acción de sus simetrías- se inició a principios de los años 60, en pleno auge de la mecánica geométrica, con el estudio de la *aplicación momento* desarrollado por Smale para tratar el problema de los *n* cuerpos en mecánica celeste. De hecho fue este autor el primero en destacar la importancia del concepto de aplicación momento y de las construcciones cociente en mecánica geométrica. El punto de partida de la doctrina lo constituye un celebrado teorema debido a Meyer, Marsden y Weinstein de 1973-74 que Manuel de León enuncia con precisión para los sistemas con un número finito de grados de libertad.

Pronto observó Marsden que la doctrina funcionaba bien en la teoría relativista de campos, donde la aplicación momento se define sobre el espacio simpléctico de las condiciones iniciales de las ecuaciones de campo mediante la integración sobre cada condición inicial de la correspondencia entre las simetrías infinitesimales de la lagrangiana y sus invariantes de Noether. En particular, la aplicación de esta teoría a las ecuaciones de la gravitación de Einstein permitió a Marsden probar que el espacio de soluciones de estas ecuaciones tiene singularidades cónicas en las soluciones con simetría. Este hallazgo fue precursor de la *reducción singular* y de la *teoría de convexidad*, así como ejemplo motivador del famoso "proyecto Gimmsy" iniciado en Calgary en 1979 por Marsden y su escuela cuyo principal objetivo era probar teoremas de singularidad en teoría general de campos.

Otros frentes de la teoría muy activamente tratados también han sido su generalización a las variedades de Poisson, las variedades de contacto y de Jacobi, y las variedades kälherianas e hiperkälherianas, donde Manuel de León y sus colaboradores han hecho contribuciones notables.

En cuanto al segundo tema -en el que Hamilton y Jacobi, inspirados en la óptica de Huygens, caracterizaron el movimiento de un sistema mecánico como las curvas características de su famosa ecuación en derivadas parciales-, nuestro nuevo Académico hace una bella presentación intrínseca del mismo que le ha permitido extender la teoría a muchas otras situaciones: sistemas no holónomos, campos y medios continuos, sistemas hamiltonianos con simetrías, etc.

El tercer tema se ocupa de la teoría de ligaduras de Bergmann y Dirac de los sistemas singulares siguiendo la versión establecida a fines de los años 70 por Gotay y Nester. Más concretamente, se consideran sistemas singulares para los que la transformación de Legendre es una submersión del espacio de las velocidades sobre una subvariedad del espacio de los momentos (las ligaduras primarias). Bajo ciertas condiciones, se puede construir una cadena descendente de subvariedades a partir de las ligaduras primarias que termina en una subvariedad final sobre la cual las ecuaciones de Hamilton tienen solución. Esta subvariedad tiene una estructura de Poisson mediante la cual la dinámica del sistema puede expresarse como se describe en el discurso. La teoría de Gotay y Nester se desarrolló desde un principio en el marco general de las variedades de Banach, de modo que el algoritmo propuesto se aplica también a los campos y medios continuos cuyas ecuaciones pueden expresarse como ecuaciones de evolución en los espacios de condiciones iniciales de tales sistemas.

Siendo hasta aquí el tono del discurso marcadamente hamiltoniano, los apartados 8, 9 y 10 del mismo son una buena ilustración del punto de vista lagrangiano de la mecánica geométrica.

Esta formulación fue, de hecho, muy tratada en los años 70 y principios de los 80 en el lenguaje de la geometría diferencial moderna, dando lugar a lo que desde entonces se conoce como *Formalismo de Hamilton-Cartan del Cálculo de Variaciones*, tema al que nuestro nuevo Académico ha contribuido con numerosas publicaciones y tres libros.

El marco espacial típico de esta doctrina es la de las variedades fibradas $p: Y \to M$, donde su espacio de secciones $\Gamma(M, Y)$ se interpreta como las configuraciones de un sistema físico sobre la variedad base M de la fibración. En particular, el caso $M = \mathrm{R}$ (recta del tiempo) e $Y = \mathbb{R} \times Q$ (Q = variedad dada) se corresponde con los sistemas mecánicos con un número finito de grados de libertad de espacio de configuración Q.

Dada una lagrangiana $\mathfrak{L}$ sobre la extensión k-jet $J^k Y$ de una variedad fibrada Y, el punto clave del formalismo es la existencia de una n-forma $\Theta_{\mathfrak{L}}$ ($n = \dim M$) sobre la extensión $(2k-1)$-jet $J^{2k-1}Y$, en términos de la cual las soluciones $s \in \Gamma(M, Y)$ de las ecuaciones de Euler-Lagrange se caracterizan por la condición:

$$(j^{2k-1}s)^* iD\, d\Theta_{\mathfrak{L}} = 0 \qquad \text{para todo} \qquad D \in \mathfrak{X}(J^{2k-1}Y).$$

Este resultado es, de hecho, el punto de partida de esta doctrina que ha permitido expresar de un modo intrínseco y global la teoría de Cartan clásica así como su generalización a varias variables independientes propuesta años después por de Donder, Weyl y Lepage.

Especialmente importante es el "aspecto no holónomo" de la doctrina que, en el caso de los problemas de primer orden, se establece a partir de una lagrangiana $\mathfrak{L} : J^1 Y \to \mathbb{R}$ y de una subvariedad de ligadura $S = \phi^{-1}(0_E) \subset J^1 Y$ lugar de los ceros de un morfismo regular $\phi : J^1 Y \to E$ de fibrados sobre Y, donde $E \to Y$ es un fibrado vectorial dado. A partir de estos datos, en el denominado *cálculo de variaciones no holónomo* se dice que una sección $s \in \Gamma(M, Y)$ y un campo vectorial $D \in \mathfrak{X}(Y)$ son admisibles cuando $\mathrm{im}\, j^1 s \subset S$ y $j^1 D$ es incidente a lo largo de S con una cierta n-forma con valores en E que define las "fuerzas de reacción" de la ligadura (principio de d'Alambert-Chetaev). O alternativamente, en el denominado *cálculo de variaciones vakónomo* (*variational axiomatic kind approach to mechanics*), cuando $\mathrm{im} j^1 s \subset S$ y $j^1 D$ es tangente a la subvariedad S. En ambas situaciones, se define la noción de sección crítica como en el caso libre restringida a las secciones y a los campos vectoriales admisibles, siendo el objetivo principal de la teoría caracterizar esta nueva noción de estacionaridad mediante una adecuada modificación del formalismo de Cartan libre.

En este contexto general, los apartados 8, 9 y 10 del discurso se enmarcan en el cálculo de variaciones no holónomo, el cálculo de variaciones vakónomo y el cálculo de variaciones discreto, respectivamente. Muy destacable es el apartado 8 en el que el formalismo de Hamilton-Cartan correspondiente se traduce en una estructura casi-Poisson de la mecánica no holónoma que fue introducida por Van der Schaft y Maschke en 1994 y formulada geométricamente por Manuel de León y sus colaboradores en 1999. Alternativamente, el apartado 9 está dedicado a los problemas de control óptimo, principal aplicación del cálculo de variaciones vakónomo, donde el formalismo hamiltoniano se obtiene de un modo natural mediante la aplicación de la teoría de ligaduras de Bergmann y Dirac. En el apartado 10, por último, Manuel de León hace una presentación clara y bien documentada de la *mecánica discreta*, esto es: la versión discreta del cálculo de variaciones propuesta a principios de los años 90 por Moser, Veselov, Marsden y otros autores con objeto de aproximar numéricamente las ecuaciones de Euler-Lagrange desde su misma raíz. Se trata, esencialmente, de una formulación de Hamilton-Cartan discreta bajo la forma de lo que se denominan *integradores variacionales*, los cuales no son otra cosa que la integración misma de las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas como una sucesión de difeomorfismos simplécticos. Señalar al respecto que este importante tema ha sido tratado también por la escuela de Manuel de León, especialmente en mecánica no holónoma y en la teoría del control óptimo, donde dicha escuela ha obtenido resultados notables.

Volviendo al comienzo de estos comentarios, donde nos hemos referido a la versión de la mecánica lagrangiana sobre los fibrados tangentes a partir de la formulación simpléctica de la mecánica hamiltoniana sobre los fibrados cotangentes vía la transformación de Legendre, el apartado 11 del discurso se ocupa de la generalización de esta doctrina a los *algebroides de Lie* según la teoría propuesta en 1996 por Alan Weinstein en su célebre artículo "Lagrange mechanics and groupoids". Es este un tema por el que Manuel de León y sus colaboradores, Eduardo Martínez y Juan Carlos Marrero, se han sentido especialmente atraídos a lo largo de casi 20 años, habiendo obtenido resultados importantes sobre el mismo, tanto en Mecánica como en Teoría de Campos.

La observación clave de esta generalización es que se reproduce exactamente la situación del caso ordinario sin más que sustituir la estructura simpléctica de los fibrados cotangentes por la estructura de Poisson de los algebroides de Lie duales. Los nuevos sistemas mecánicos así obtenidos son de gran interés en mecánica geométrica. Baste citar, por ejemplo, la *reducción de Lagrange-Poincaré* de una lagrangiana sobre un fibrado tangente invariante por la acción de un grupo de Lie de simetrías al correspondiente espacio cociente que, desde el nuevo punto de vista admite una formulación de Hamilton-Poisson a partir de la cual se puede *reconstruir* la dinámica del problema original. El interés de este caso es aún mayor si cabe al considerar su aspecto variacional, pues las reducciones de Lagrange-Poincaré consideradas son problemas variacionales con ligaduras no holónomas que, de este modo, admiten una formulación de Hamilton-Poisson canónica.

El resto del apartado está dedicado a la extensión del punto de vista weinsteinano a la mecánica discreta mediante la utilización de los *grupoides de Lie* en lugar de los algebroides de Lie.

El discurso concluye con una oportuna referencia a la situación actual de la mecánica geométrica en España, destacándose las importantes actividades de la Red Temática de Geometría, Mecánica y Control, así como la edición desde hace diez años de la revista *Journal of Geometric Mechanics* que, bajo la eficaz dirección de Manuel de León, ha llegado a convertirse en una de las revistas internacionales más prestigiosas de esta materia.

Estos son, a grandes rasgos, los méritos del Profesor de León. Atendiendo a ellos, en febrero de 2005 fue nombrado Académico Correspondiente Nacional de la Sección de Exactas de esta Real Academia, y en mayo de 2013 fue elegido Académico Numerario. Con su discurso de hoy toma estatutariamente posesión de su plaza en esta Casa, en la que estoy seguro seguirá prestando excelentes servicios.

Querido Manuel, en nombre de la Corporación te doy mi más cordial bienvenida.

Muchas gracias.