

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS  
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DINÁMICA DE IONES Y ELECTRONES  
EN SÓLIDOS Y SUPERFICIES  
Y PEQUEÑAS PINCELADAS  
SOBRE CIENCIA

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN  
COMO ACADÉMICO DE NÚMERO POR EL

EXCMO. SR. D. PEDRO MIGUEL ETXENIKE LANDIRÍBAR

Y CONTESTACIÓN DEL

EXCMO. SR. D. ALBERTO GALINDO TIXAIRE

EL DÍA 31 DE MAYO DE 2017



MADRID  
Domicilio de la Academia  
Valverde, 22

ISSN: 0214-9540

ISBN: 978-84-87125-60-7

Depósito legal: M. 13.504-2017

# ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN. AGRADECIMIENTO .....	7
2. FÍSICA DE LA MATERIA CONDENSADA .....	11
3. INTERACCIÓN DE IONES CON LA MATERIA .....	17
4. INTERACCIÓN DE ELECTRONES EXTERNOS CON LA MATERIA .....	31
5. DINÁMICA DE ELECTRONES .....	41
6. ATTOFÍSICA. ESPECTROSCOPIA DE ESTADOS INTERNOS .....	61
7. ATTOFÍSICA. ESPECTROSCOPIA. STREAKING ....	71
8. REDUCCIONISMO. EMERGENCIA .....	83
9. CIENCIA. CULTURA. PROGRESO. BELLEZA .....	95
10. POLÍTICA CIENTÍFICA. DESARROLLO ECONÓMICO Y SOCIAL .....	107
11. FINAL .....	111
DISCURSO DE CONTESTACIÓN DEL EXCMO. SR. D. ALBERTO GALINDO TIXAIRE .....	
I. LAUDATIO .....	115
II. LA CIENCIA Y LA BELLEZA .....	119
III. RECEPCIÓN .....	191

DISCURSO DE INGRESO

DEL

EXCMO. SR. D. PEDRO M. ETXENIKE LANDIRÍBAR

# DINÁMICA DE IONES Y ELECTRONES EN SÓLIDOS Y SUPERFICIES Y PEQUEÑAS PINCELADAS SOBRE CIENCIA

Excmo. Señor Presidente de la Real Academia de Ciencias.

Señoras y señores Académicos.

Señoras y señores,

## 1. INTRODUCCIÓN. AGRADECIMIENTO

Mis primeras palabras son para agradecer a todos los miembros de la Real Academia de Ciencias por aceptarme en esta gran institución. Es una alegría y un honor. Agradecimiento muy sentido a los Excmos. Sres D. Alberto Galindo Tixaire, D. Antonio Hernando Grande y D. Juan María Marcaide Osoro por proponer mi candidatura. Agradecimiento singular a Alberto Galindo por aceptar la tarea de contestar a mi discurso. Fue Alberto quien me presentó a mi antecesor en la Medalla 35 de la Academia, Don Carlos Sánchez del Río, una persona que unía a su excepcional calidad intelectual, a su competencia técnica, una altura moral, una integridad humana que me cautivaron. Un hombre poliédrico, con deslumbrante erudición, limpio, sencillo y de claro y recto juicio. Lo que supone su pérdida lo expresó bellamente Alberto Galindo: *“Para la Academia, supone la pérdida de una de sus mentes más agudas y de un testigo fiel de su historia de los últimos cincuenta años; para los Académicos, la ausencia para siempre de un compañero afable y cordial; y para los amigos, ese vacío irremplazable que solo el recuerdo podrá llenar de vivencias”*.

Para mí supone la pérdida de una referencia, de un maestro *“siempre benévolo con los estudiantes mediocres pero exigente con los estudiantes brillantes”* usando sus propias palabras en la contestación al discurso del Prof. Antonio Hernando en su entrada a la Academia. Supo combinar como pocos profundidad y sencillez. Recuerdo la impresión que

me causó la profundidad de conceptos que contenían sus potenciales atómicos de expresión analítica simple.

En su justamente reverenciada historia de la mecánica cuántica, Max Jammer comenta elogiosamente un artículo conjunto de Alberto Galindo y Carlos Sánchez del Río<sup>1</sup>, dirigido a obtener una distinción precisa entre las propiedades específicamente relativistas de la mecánica cuántica y aquellas compartidas por sistemas no relativistas, y en el que se matiza la frase tantas veces citada: “el espín es un efecto puramente relativista”. Explica cómo los autores españoles demuestran que una teoría consistente del espín  $\frac{1}{2}$  con el valor correcto del momento angular intrínseco puede ser establecida en el marco de ecuaciones de onda con invariancia galileana.

El verano pasado, durante las vacaciones en mi pueblo natal, Isaba, en el Pirineo roncalés, muy cerca de la querida tierra aragonesa de Don Carlos, leí, con sosiego y detalle, “*Los principios de la física en su evolución histórica*”, libro publicado en 1986. En él aparece Don Carlos con sus cualidades: profundo, sencillo, y claro, poniendo el énfasis en lo esencial. Sus citas muestran claramente un conocimiento profundo de las fuentes originales.

Si ahora tuviese que explicar un curso de física general, de mecánica, de óptica... primero lo prepararía de forma tradicional (esta palabra me gusta más que convencional). Luego leería las lecciones de Feynman y por último leería el texto correspondiente del libro de Sánchez del Río.

En un elegante ensayo titulado “*Candor and integrity in Science*”, el gran historiador de Harvard Gerald Holton, estudiando el ejemplo de las vidas de Niels Bohr y Percy Bridgman, nos propone un modelo científico que, y el resumen es mío, tendría las siguientes características.

—Buscar la verdad no ahorrando ningún esfuerzo.

—Ser primero un científico y segundo un especialista.

---

<sup>1</sup> A. Galindo, C. Sánchez del Río, *Am. J. Phys.* **29**, 582 (1961).

—Defender y contribuir a que la ciencia forme parte de la visión del mundo de nuestro tiempo. El laboratorio es un lugar de trabajo, no un escondite para alejarnos del mundo.

—Los científicos tenemos una obligación especial, muy alejada de la arrogancia científica, de ser ciudadanos responsables.

Efectivamente, los científicos debemos levantar la voz allá donde la intolerancia y la irracionalidad sean defendidas. Son muchas las personas que han luchado y sufrido a lo largo de los años por combatir las. Como nos recuerda Holton. *“No solo nos apoyamos en las espaldas de gigantes sino en las tumbas de muchos”*.

Creo que Sánchez del Río encuadra perfectamente en esta definición: científico y ciudadano. Investigador y docente. Excelencia en investigación y excelencia en docencia suelen, o por lo menos deberían, ir juntas. Así era en su caso.

Hay quien cree que la investigación es superior a la docencia, y, por lo tanto, que los buenos investigadores no deben “perder el tiempo” en enseñar. Este es un error profundo porque a estos niveles la enseñanza y la investigación no es que sean complementarias; es que son indistinguibles. Cuando un profesor habla con un doctorando, ¿qué está haciendo? ¿Docencia o investigación? Cuando se le pregunta una cuestión certera que le obliga a refinar sus ideas, ¿qué está haciendo el docente? Investigar. En mi caso, el ser profesor me ha hecho mejor investigador y el ser investigador me ha hecho mejor profesor. El problema en nuestros lares, aunque este es otro tema, es que a veces la docencia o es poca o es demasiada. Pero un equilibrio de docencia es imprescindible para un buen investigador.

Don Carlos fue un ciudadano preocupado por la sociedad y por sus instituciones a las que dedicó tiempo y esfuerzo, en la vida pública y en esta Academia a la que tanto contribuyó y a la que tanto quiso. Para mí es un modelo claro de conocimiento y comportamiento. Un modelo claro pero difícil de igualar, incluso de imitar.

Mi discurso contiene dos partes. En la primera (cap. 2-7) me centraré en ideas sobre dinámica de partículas cargadas en sólidos y superficies. Lo haré huyendo de tecnicismos, por otra parte fáciles de

reproducir, para que sea entendible por los no expertos. La segunda parte (cap. 8-10), contiene afirmaciones que pueden no ser compartidas por muchos, tanto sobre el reduccionismo como sobre ciencia en general. No quisiera expresarlas dogmáticamente. Soy consciente de que no son verdades científicas absolutas y también de que la posible verdad que contengan no tiene nada que ver con el entusiasmo o la pasión con las que las defenderé.



## 2. FÍSICA DE LA MATERIA CONDENSADA

La física es una materia muy variada, una disciplina que nos permite acercarnos a aspectos de la Naturaleza desde muchos y diversos puntos de vista. Algunos físicos se concentran en la creación artificial de haces de partículas que romperán los bloques constituyentes más elementales de la naturaleza y revelarán las simetrías internas ocultas de las partículas elementales. Otros se concentran en la creación de condiciones únicas de presión y temperatura para así reproducir reacciones que de otra forma solamente ocurren en el interior de las estrellas, y de esta forma generar energía de otras maneras. Otros, vuelven sus ojos al cosmos buscando el comienzo de la gran explosión o examinando los confines más lejanos buscando nuevos fenómenos y objetos únicos.

En el proceso de formación del universo la materia ha recorrido, en feliz frase de Weisskopf, la escalera cuántica; al disminuir la temperatura con el paso del tiempo van apareciendo estados cuánticos de mayor grado de complejidad: los núcleos, átomos, moléculas, líquidos, la materia condensada y la materia animada. El último capítulo, por el momento, en la emergencia de especificidad de la materia: organismos vivos, otro grado de organización cuya característica más sorprendente es la facultad de formar sus duplicados, capacidad de réplica, capacidad de vida.

Mi admirado amigo Alberto Galindo suele decir que los físicos somos los historiadores y los profetas del universo. Estudiando las regiones más pretéritas del Cosmos queremos saber cómo empezó todo y rompiendo la materia en los aceleradores queremos entender de qué están hechas las cosas y cuáles son las leyes y simetrías que gobiernan las interacciones para así comprender y predecir. Esta física, la de lo más grande y la de lo más pequeño, tiene un encanto especial, es el encanto de los extremos al que se refiere Roald Hoffmann. Hablar de materia oscura y energía oscura atrae por su misterio, por su belleza, por su profundidad y por sus implicaciones, pero hay otro tipo de ciencia, tan atrayente y no menos hermosa, que es el entender el infinito de lo complejo.

Entre los dos ámbitos, el de lo inmensamente grande y el de lo infinitamente pequeño, el Universo y los cuarks, está la escala del laboratorio, aquella que permite experimentos y estudios macroscó-

picos y que tiene una incidencia muy directa en la tecnología, en la economía, en el progreso material, en la vida diaria, en una palabra, en la calidad de vida. Es la ciencia que estudia la materia condensada, ciencia de materiales o física y química del estado sólido, la ciencia en la que la complejidad del sistema se traduce en la aparición, en la emergencia, de nuevas propiedades.

Este tipo de exploración de la **naturaleza real de los objetos “normales”** tiene una fascinación intelectual que, siendo quizás un poco más sutil, no es menos atrayente ni menos atrayente que el de otros tipos de física; y que en muchos casos es más exigente por tenerse que ceñir a las limitaciones de la misma realidad aquí y ahora.

Para poner el tema en perspectiva diré que la ciencia de la materia condensada es importante al menos por dos razones. La primera es que constituye el fundamento, explicación y soporte de disciplinas tales como la Mecánica, Hidrodinámica, Aerodinámica, Electrónica, Óptica, Metalurgia y Química del Estado Sólido. Por otro lado es la base de muchos de los cambios tecnológicos más decisivos de nuestro siglo: transistor, láser, células solares, semiconductores, superconductores, detectores. Afecta de forma decisiva a la tecnología por la cual el mundo calcula, se comunica y usa energía. Ha contribuido de forma decisiva al avance tecnológico actual, cambiando tanto la forma de responder como de preguntar sobre los problemas y desafíos a los que nos enfrentamos. Un cambio cultural, en una palabra.

La física de la materia condensada y la física de materiales se caracterizan por su gran interdependencia con otros campos de la Ciencia y de la Ingeniería. Engloba a los que construyen nuevos materiales, a los que buscan entender dichos materiales al nivel fundamental a través de experimentos y análisis teóricos, y a aquellos que aplican los nuevos materiales y el conocimiento de los fundamentos a construir nuevos instrumentos.

En la actualidad es posible crear sistemas artificiales con una capacidad de control que alcanza el nivel atómico. Esta rama de la Ciencia, la nanociencia, está encaminada a producir materiales sólidos artificiales con propiedades específicas para aplicaciones concretas.

La ciencia de la materia condensada se refiere al estudio de las propiedades de las fases líquida y sólida de la materia y a las maneras en que ésta responde a estímulos externos. La clave del grandioso avance de la ciencia y la tecnología en este campo ha sido la física cuántica, la mecánica cuántica. La comprensión de la materia condensada radica en la mecánica cuántica a través de una ley fundamental, la ley de Coulomb, acompañada del principio de exclusión de Pauli.

La mecánica cuántica es necesaria para explicar no solamente las propiedades estructurales de la materia sino también la mera existencia de los átomos, ya que es la que proporciona la explicación de la estabilidad del átomo. ¿Por qué los materiales son tan densos y los átomos están “tan vacíos”? ¿Por qué los átomos son tan “grandes”, en una palabra? La respuesta está en las reglas de la mecánica cuántica, y es que los átomos son estables debido a un principio de incertidumbre que impide que el electrón se localice y se acerque indefinidamente al núcleo. La materia condensada es estable debido al principio de exclusión de Pauli que impide que todas las variables, números cuánticos, que describen la situación de dos electrones sean idénticos. Sin el principio de exclusión de Pauli, la materia colapsaría en una fase de alta densidad. La unión de dos objetos macroscópicos, dos ejemplares de esta conferencia por ejemplo, liberaría una energía comparable a la de una bomba atómica.

A veces, al hablar de física cuántica, se tiene la impresión de que las cualidades, las formas bien definidas, se han perdido para siempre al sustituirse el determinismo de la física clásica por la interpretación probabilística de la mecánica cuántica. No es cierto. Lo único que se ha perdido es el determinismo de la física clásica, pero la realidad, la individualidad, las “cualidades permanentes” de la materia están profundamente ligadas a la mecánica cuántica.

En física clásica, las leyes fundamentales determinan solo el carácter general de un fenómeno, pero admiten infinidad de realizaciones, de posibilidades. La ley de la gravedad permite innumerables ámbitos elípticos, en los que un planeta puede girar alrededor del sol. La órbita concreta no la fija la ley general, sino las condiciones iniciales. En ese sentido, las órbitas son accidentales y pueden ser cambiadas de forma irreversible por cualquier perturbación. En mecánica cuántica nos encontramos por el contrario con formas bien definidas. Las formas

de vibración que la onda de un electrón puede tener son universales y dependen sólo de la simetría y fuerza del campo eléctrico que confina a los electrones. Son las estructuras fundamentales de las cuales está hecha la materia. Nos encontramos de nuevo con la pre-establecida armonía pitagórica de las esferas. Los estados cuánticos están fijados y establecidos. Esta es exactamente la razón por la que un átomo de aluminio o cobre es siempre el mismo. Poseen su propia identidad independientemente de su historia pasada, todo lo contrario a un sistema planetario.

La individualidad y estabilidad de los estados cuánticos tienen limitaciones. Cada estado cuántico mantiene su forma única y específica en tanto que no sea perturbado por influencias externas lo suficientemente fuertes como para hacer saltar el sistema hacia estados más altos. Son los estados excitados, cuyo estudio es decisivo para conocer y poder usar la materia. La radiación y las partículas cargadas nos proporcionan un medio eficaz para el estudio de dichas situaciones.

Nuestro oficio es partir de las leyes simples de la física de los átomos y de los electrones e intentar entender toda la complejidad del mundo inmediato a nuestro alrededor. La hipótesis, o realidad atómica, está en el corazón de nuestro conocimiento de la materia. Uno de los grandes físicos del siglo pasado, el norteamericano Richard Feynman, se preguntaba en sus ya clásicas ‘Lecciones de Física’: *“Si en algún cataclismo se fuese a destruir todo el conocimiento científico y solo se transmitiese una frase a la siguiente generación, ¿qué sentencia contendría la máxima información en el menor número de palabras?”*. La respuesta de Feynman es la hipótesis atómica, que todas las cosas están hechas de átomos, pequeñas partículas en continuo movimiento, atrayéndose los unos a los otros cuando se separan pero repeliéndose en cuanto se trata de apilarlos.

Como en otros campos de la ciencia el desafío intelectual radica en el gran número de grados de libertad que dichos sistemas presentan. Es necesario encontrar conceptual, matemática y experimentalmente, la manera de enfocar lo básico, allí donde tratamientos exactos son, además de imposibles, irrelevantes. Para avanzar en estos problemas es necesario capturar lo esencial en un modelo suficientemente sencillo. Sin menospreciar la indudable importancia de los llamados cálculos “ab initio”, hay que insistir en que los modelos sencillos, todo lo sencillos

que se pueda, pero no más, son de gran utilidad en este campo. En palabras de Phil Anderson al recibir el premio Nobel de física: *“Con mucha frecuencia un modelo simplificado arroja más luz sobre los mecanismos de funcionamiento de la naturaleza que un número cualquiera de cálculos “ab initio” de situaciones individuales que, incluso siendo correctos, contienen tanto detalle que más que revelar la realidad, la ocultan. Ser capaz de medir o calcular con demasiada precisión puede ser una desventaja más que una ventaja, puesto que con frecuencia lo que uno mide o calcula es irrelevante en términos del mecanismo; la computación perfecta simplemente reproduce la Naturaleza, no la explica”*.

Históricamente, la aplicación de la física cuántica al estudio de la materia condensada comienza con el estudio de las estructuras más sencillas, gases de electrones y materiales cristalinos. Gradualmente se extiende al estudio de materiales desordenados y a la comprensión del decisivo papel de las “imperfecciones”, defectos, dislocaciones, etc. Si hace ochenta años el desafío intelectual de la física del estado sólido consistía en entender las propiedades de cristales perfectos de elementos, o compuestos simples y aleaciones, hoy alcanza sistemas más complejos; superficies, superconductores de alta temperatura, materiales magnéticos complejos, cristales desordenados, polímeros, vidrios, sistemas de dimensionalidad reducida, materiales exóticos con protección topológica, nanoestructuras.

Los sólidos son materiales complejos. El análisis teórico de sus propiedades encierra una gran dificultad. En el caso de sólidos cristalinos la simetría del interior permite simplificaciones que reducen la dificultad. En las superficies, en la dirección perpendicular, esta simetría no existe, lo que complica mucho las cosas. En ciencia de materiales las superficies tienen gran importancia pues es a través de ellas como se relaciona el material con el mundo exterior. Es donde muchas veces se inician los procesos de transferencia de materia, de carga y de energía. En nanotecnología las superficies son decisivas, pues el peso relativo del área superficial con respecto al volumen crece al disminuir el tamaño.

El estudio de las superficies tarda en desarrollarse, principalmente por la dificultad de controlar experimentalmente la composición de las mismas. El estudio teórico avanza asimismo lentamente, indicando la dificultad del problema, dificultad reflejada en la frase de Pauli: *“Dios*

*hizo los sólidos y el diablo las superficies*". (Aparentemente la actitud de Pauli sobre la física de estado sólido no era muy positiva, como refleja su frase: "*nadie debería trabajar en semiconductores, quién sabe si existen*"). En las últimas décadas esta rama de la física adquiere una importancia decisiva, pues es parte crucial de una nueva ciencia interdisciplinar, la ciencia de materiales, ciencia que está experimentando una revolución espectacular. Y que en estos momentos se extiende a las nanoestructuras, sistemas en los que al menos una de las dimensiones es del orden del nanómetro, la millonésima parte del milímetro.

En esas dimensiones pueden aparecer propiedades cualitativamente nuevas que no son meras extrapolaciones de las propiedades del átomo, ni mera reducción de las que aparecen a escala macroscópica. No solamente "*más es diferente*", también "*lo pequeño es diferente*". Agregados nanométricos de oro y óxidos metálicos tienen un color que depende de su tamaño. Los artesanos medievales ya lo sabían, sin entenderlo bien. La prueba es evidente en la belleza de las vitrinas de Notre Dame.

La nanotecnología hoy está ya presente en muchos de los aspectos de la vida cotidiana. Tiene aplicaciones en medicina, tanto en diagnóstico como en terapia, también en nuevos materiales, cosmética, ingeniería...

Ahora bien, y como decía el añorado físico suizo Heinrich Rohrer, el gran desafío de la nanotecnología no es buscar una aplicación concreta sino poder ser capaces de colocar una partícula nanométrica con precisión atómica en un sitio dado para una función precisa.

Un camino para entender el comportamiento de la materia es explorarla, enviando sondas hacia el espacio interno. Las sondas pueden ser de todo tipo, desde temperatura y presión a radiación electromagnética y partículas cargadas. Del resultado de la interacción podemos aprender mucho, tanto de la propia sonda como de la estructura y propiedades dinámicas de la materia con la que ha interactuado. El uso de partículas cargadas como sondas para estudiar las propiedades estáticas y dinámicas de la materia se remonta a los primeros tiempos de la física moderna. Rutherford, por ejemplo, utilizó núcleos de Helio, es decir, partículas alfa, para establecer su modelo atómico.

### 3. INTERACCIÓN DE IONES CON LA MATERIA

#### Breve reseña histórica

El uso de iones rápidos como sondas para estudiar las propiedades estáticas y dinámicas de la materia se remonta a los primeros días de la física moderna. Rutherford empleó partículas alfa para establecer su modelo atómico. En un artículo pionero, Bohr<sup>2</sup> usó conceptos de la teoría de la excitación de átomos por fotones para calcular el frenado de partículas alfa rápidas en la materia. Como anécdota histórica señalaremos que dicho trabajo fue publicado un poco antes que su famosa explicación del espectro del átomo de hidrógeno<sup>3</sup>. Por necesidad, la teoría de Bohr se basó en ideas semiclásicas. Su tratamiento, profundamente intuitivo, era apropiado para iones con carga fija y de baja velocidad.

Con la llegada de la mecánica cuántica, Gaunt<sup>4</sup> abordó el problema de la pérdida de energía de un ion incidente en un átomo de hidrógeno, aplicando la entonces recién desarrollada aproximación de Born en el marco de la teoría de colisiones. Su trabajo se basaba en cálculos en función del parámetro de impacto y en la aproximación dipolar para los elementos de matriz atómicos. Gaunt no obtuvo, sin embargo, resultados susceptibles de aplicación general. Con posterioridad Bethe<sup>5</sup> realizó un análisis detallado de la transferencia de energía de una partícula cargada rápida a un sistema atómico o molecular, generalizando al mismo tiempo la regla de suma dipolar de la física atómica.

Bethe demostró que en el límite de altas velocidades, siendo la unidad atómica de velocidad, la pérdida de energía de una partícula cargada depende de su velocidad  $v$ , su carga  $Z_1$ , la densidad electrónica media en el material  $n_0$ , y una cantidad importante,  $l$ , la energía media de excitación de los electrones que componen el blanco. El potencial medio de excitación  $l$ , es un valor medio logarítmico de las posibles energías de transición, cada una de ellas ponderada con el apropiado

---

<sup>2</sup> N. Bohr, *Phil. Mag.* **25**, 16 (1913).

<sup>3</sup> N. Bohr, *Phil. Mag.* **26**, 1, 476 (1913).

<sup>4</sup> J.A. Gaunt, *Proc. Camb. Philos. Soc.* **23**, 732 (1927).

<sup>5</sup> H.A. Bethe, *Ann. Phys.* **5**, 325 (1930).

peso (“oscillator strength”) óptico. La fórmula de Bethe es válida para velocidades tales que  $v_{em} \ll v \ll c$ , siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío, y donde  $v_{em}$  es el máximo entre  $Z_1 v_0$  y la velocidad media de los electrones en las órbitas del medio material. El enfoque original de Bohr conduce a una fórmula que es válida para velocidades  $v \ll Z_1 v_0$ . Una síntesis de las fórmulas de Bohr y Bethe fue dada por Bloch<sup>6</sup>.

Para cargas grandes, la situación es muy compleja y han de tenerse en cuenta los procesos de captura y pérdida de electrones por parte del ion. Un criterio útil para estimar el número de electrones ligado al proyectil fue propuesto por Bohr<sup>7</sup>. Bohr señaló que para una determinada velocidad se alcanza un equilibrio estadístico entre pérdida y captura y que la velocidad del electrón de mayor energía que permanece ligado al ion es del orden de la velocidad  $v$ . Werner Brandt<sup>8</sup> usó dicho criterio, junto con el modelo estadístico de Thomas-Fermi, para proponer una expresión para la carga efectiva del ion.

En medios sólidos con muchos electrones no localizados, la carga del ion se apantalla por el movimiento de dichos electrones. La interacción residual, cuando la velocidad de la partícula es pequeña,  $v \ll v_0$ , excita los electrones a órbitas vacías y cercanas a la superficie de Fermi. Fermi y Teller<sup>9</sup> fueron los primeros en analizar la pérdida de energía de una partícula cargada en dicho régimen. Predijeron que  $(dW / dR)$  debe ser proporcional a la velocidad del ion y depender levemente de la velocidad del gas de electrones en el que se mueven. La pérdida de energía de iones lentos chocando con átomos fue obtenida promediando sobre la densidad electrónica, siguiendo el tratamiento de Thomas-Fermi para describir la estructura electrónica estática de átomos con muchos electrones.

Fue Fermi<sup>10</sup>, asimismo, quien se dio cuenta de que la respuesta de un sistema electrónico al paso de una partícula cargada podía formularse de manera análoga a la respuesta a un espectro equivalente de radiación electromagnética. Esta idea, posteriormente desarrollada

---

<sup>6</sup> F. Bloch, *Ann. Phys.* **16**, 285 (1933); F. Bloch, *Z. Phys.* **81**, 363 (1933).

<sup>7</sup> N. Bohr, K. Dans, *Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd.* **18**, 8 (1948).

<sup>8</sup> W. Brandt, “*Atomic Collisions in Solids*”, editado por S. Datz, B.R. Appleton y C.D. Moak (Plenum New York, 1975).

<sup>9</sup> E. Fermi, E. Teller, *Phys. Rev.* **72**, 399 (1947).

<sup>10</sup> E. Fermi, *Z. Phys.* **29**, 315 (1927).



por Williams y Weizsäcker<sup>11</sup>, ha sido utilizada para tratar diferentes aspectos de la interacción de la radiación con la materia.

Fermi<sup>12</sup> analizó la generación de la radiación de Cherenkov utilizando una función dieléctrica, dependiente de la frecuencia del medio material. Subsecuentemente algunos autores generalizaron la función dieléctrica, introduciendo su dependencia del vector de onda. Posteriormente Lindhard<sup>13</sup>, apoyándose en el trabajo de Klein<sup>14</sup>, dedujo, en la aproximación de fases aleatorias, RPA (del inglés *Random Phase Approximation*), la función dieléctrica de un gas de electrones isótropo y no relativista. Ello permitió una descripción unificada de los aspectos individuales y colectivos de un sistema modelo, descripción que ha sido muy utilizada tanto en física de radiaciones como en física de la materia condensada. Ritchie y colaboradores calcularon la pérdida de energía de iones en diversos intervalos de la velocidad para iones desnudos moviéndose en un gas de electrones<sup>15</sup>. Con anterioridad al trabajo pionero de Lindhard, Bohm y Pines<sup>16</sup> habían establecido los fundamentos de la teoría cuántica del gas de electrones. Su estudio se basó en ideas sobre oscilaciones colectivas en plasmas clásicos, desarrolladas a partir del trabajo experimental de Tonks y Langmuir<sup>17</sup> y de las interpretaciones teóricas de Vlasov<sup>18</sup>.

## Energía de frenado. Utilidad

Mencionemos, a título indicativo, una serie de ejemplos en los que resulta muy útil conocer magnitudes tales como el poder de frenado de un ion (la pérdida de energía que experimenta la partícula por unidad de longitud) o la desviación angular que sufre en su interacción con el medio.

---

<sup>11</sup> E.J. Williams, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 217 (1945); C.F. von Weizsäcker, *Z. Phys.* **88**, 612 (1934).

<sup>12</sup> E. Fermi, *Phys. Rev.* **57**, 485 (1940).

<sup>13</sup> J. Lindhard, K. Dans, *Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd.* **28**, 8 (1954).

<sup>14</sup> O. Klein, *Ark. Mat. Astr. Fys.* **3A**, 12 (1945).

<sup>15</sup> R.H. Ritchie, *Phys. Rev.* **114**, 644 (1959).

<sup>16</sup> D. Bohm, D. Pines, *Phys. Rev.* **82**, 625 (1951).

<sup>17</sup> L. Tonks, I. Langmuir, *Phys. Rev.* **33**, 195 (1929).

<sup>18</sup> A.A. Vlasov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **8**, 291 (1938).

Las características propias de la interacción de partículas cargadas con medios materiales producen una distribución específica de la energía depositada. En las aplicaciones médicas es importante conocer en detalle cómo la dosis depende de la longitud de penetración, es decir, de la longitud de la trayectoria dentro del blanco. En el rango de interés en el tratamiento de tumores, la pérdida de energía aumenta al disminuir la velocidad. Por ello, mientras que la distribución de la dosis con la penetración de los fotones y los neutrones decrece exponencialmente, las partículas cargadas depositan su energía cinética de forma creciente hasta que finalmente se paran. La dosis se libera principalmente justo antes del punto de parada, formando lo que se llama el “pico de Bragg”. El alcance, por ejemplo, de protones de 70 MeV (Megaelectronvoltios) en agua es de 3.5 cm, lo que es de gran relevancia en el tratamiento de tumores oculares.

En lo referente a la protección contra la radiación, ¿cuál debe ser el espesor de un material para evitar la penetración de un cierto tipo de partículas con una energía determinada?

En la industria microelectrónica es necesario implantar impurezas en ciertos materiales, de tal manera que los átomos de impureza terminen en una región determinada del material y a la profundidad apropiada. ¿Qué energía es necesaria para obtener esta profundidad?

Hay sistemas (como por ejemplo los protones de muy alta velocidad) para los que se conoce la energía de frenado con gran precisión. Medir la pérdida de energía de protones tras su paso por láminas delgadas sirve para determinar el espesor de éstas.

En experimentos de colisiones atómicas en gases, es necesario determinar la energía inicial del proyectil con gran exactitud. Para pasar del acelerador a la cámara donde está el gas, el haz atraviesa una lámina delgada. La pérdida de energía en este paso debe ser conocida.

En determinados experimentos el haz debe dirigirse a lo largo de una dirección cristalográfica determinada. Muchas veces, antes de penetrar el cristal, los proyectiles tienen que penetrar una capa superficial de óxido amorfo. ¿Cuán grande es la divergencia del haz causada por dicha capa?

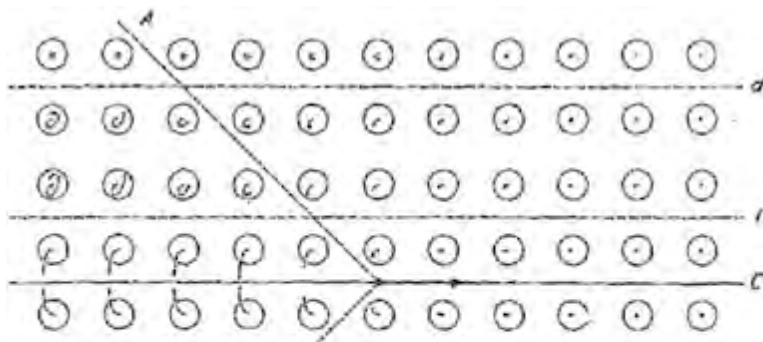
## Conceptos sencillos en el problema de la interacción ion-materia

Cuando un ion rápido en comparación con la velocidad típica de los electrones del medio (estos se mueven unas 137 veces más lentamente que la luz) atraviesa la materia condensada, este medio responde a la presencia de la carga añadida. La entrada del ion origina reajustes transitorios de los estados de los electrones y cambios en la carga del ion. El ion puede perder alguno de sus propios electrones, o capturar otros electrones de valencia, o de capas internas de los átomos que constituyen la materia. Además, por efecto de la interacción del ion con los electrones de valencia del medio, éste se polariza, de forma que el potencial de Coulomb, responsable de las interacciones entre la cargas, queda dinámicamente apantallado, lo que perturba los estados de los electrones ligados al ion y los procesos de captura y pérdida de electrones. Se crea, pues, una compleja secuencia de fenómenos tanto temporal como espacialmente.

Se pueden producir estructuras de polarización coherente, ligadas a la posición instantánea del ion. El atravesar la superficie da lugar a una perturbación oscilatoria de la densidad superficial de carga. Se crea una estela oscilatoria debida a las fluctuaciones de la densidad de carga, que tiene una precisa analogía con la estela que deja un barco al moverse. Estela es el nombre que eligió Niels Bohr en su histórico trabajo de 1948 sobre penetración de partículas atómicas en la materia para describir este fenómeno (ver Figura 3.1). Las colisiones cercanas del ion con electrones producen la excitación de electrones secundarios, así como cascadas de electrones Auger procedentes de las capas internas del ion o de los átomos del medio, así como cascadas de pares electrón-hueco en los electrones de valencia.

La interacción de un ion con un medio de baja densidad electrónica, por ejemplo, una superficie, da lugar a procesos igualmente complejos: de nuevo se producen excitaciones superficiales, y los llamados electrones convoy –electrones que acompañan al ion moviéndose con su misma velocidad aproximadamente– pueden acompañar al electrón al emerger éste del medio. La captura de electrones en las proximidades de la superficie puede dar lugar a cascadas de electrones Auger.

El problema de una partícula moviéndose a través de la materia condensada supone un sistema acoplado de gran complejidad, que



To estimate the strength of the field, we may simply calculate the electric charge accumulated in the "wake" of the particle,

Figura 3.1: Representación esquemática de la estela de un ion moviéndose en un medio material tomada del artículo de Niels Bohr, "*The penetration of atomic particles through matter*".

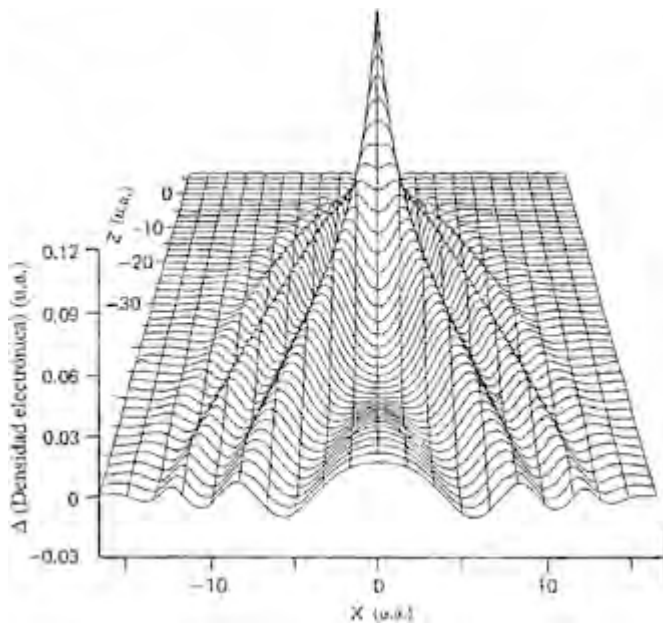


Figura 3.2: Densidad electrónica "de estela" inducida por un ion (cuya posición instantánea corresponde al origen de coordenadas) en un gas de electrones.

representa un profundo desafío para la comprensión física y la interpretación teórica. El estudio de estos sistemas proporciona gran cantidad de información sobre las propiedades estáticas y dinámicas del medio y de la propia partícula incidente.

## Apantallamiento dinámico y pérdida de energía

En lo que sigue describiremos de forma muy sencilla los mecanismos físicos que dan lugar al apantallamiento y a la pérdida de energía de un ion moviéndose en un gas de electrones. Comenzaremos por el caso de un protón estático. Al colocar una carga positiva en un mar de electrones estos tienden a acumularse debido a la atracción coulombiana en las proximidades del protón. Este efecto, conocido como apantallamiento, reduce el largo alcance del potencial de Coulomb. A distancias lejanas, de unos pocos Angstroms, los electrones del medio ven una carga prácticamente neutra como resultado del apilamiento de carga electrónica en las proximidades del protón. El potencial inducido por dicha nube electrónica, causante de limitar el alcance del potencial originario del protón, es esféricamente simétrico y no ejerce

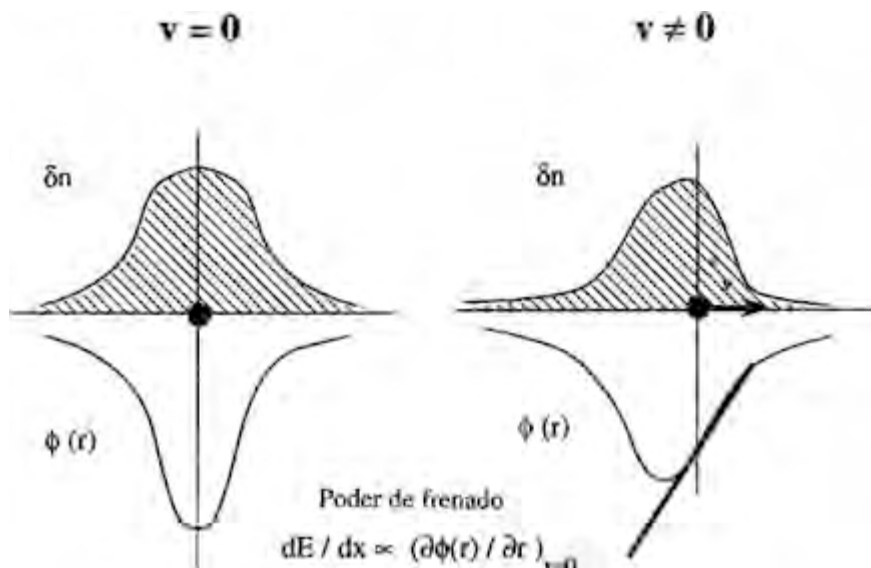


Figura 3.3: Potencial y densidad de fluctuaciones electrónicas inducidos en un gas de electrones por un protón estático (a) y un protón moviéndose con velocidad  $v$ . La fuerza de frenado viene dada por la derivada del potencial en el origen..

ninguna fuerza sobre el protón. En el caso de un ion en movimiento, el apilamiento de los electrones no tiene simetría esférica sino cilíndrica. La asimetría en la distribución de la carga inducida se traduce en una fuerza retardadora sobre la carga incidente. Dicha fuerza es la causante de la pérdida de energía del ion y se conoce como poder de frenado (del inglés “*stopping power*”), aunque en realidad el nombre más correcto sería fuerza de frenado. La densidad y el potencial electrónicos inducidos se conocen con el nombre de densidad y potencial de estela respectivamente<sup>19</sup>.

Para obtener una imagen física descriptiva de la densidad electrónica de estela creada por un ion en movimiento la comparamos con lo que ocurre con una carga fija en un gas de electrones. En el caso de una carga negativa estática nos referimos al agujero de correlación alrededor de ella y para una carga positiva se habla del incremento de la densidad electrónica a su alrededor. En los dos casos, la respuesta del medio es descrita mediante un potencial de Coulomb apantallado centrado en la carga, produciendo una autoenergía negativa con parte imaginaria nula. En comparación, un ion en movimiento crea un potencial que tiene una parte distribuida esféricamente con respecto a la carga y otra con simetría cilíndrica, con carácter oscilatorio a velocidades altas, que se extiende principalmente por detrás de la partícula.

A velocidades bajas, el mecanismo de pérdida de energía consiste en la excitación de electrones individualmente por encima del nivel de Fermi, proceso al que normalmente se suele referir con el nombre de excitación de pares electrón-hueco. Para un protón y velocidades próximas a la velocidad de Bohr es posible asimismo producir excitaciones colectivas del gas de electrones, los plasmones. El poder de frenado alcanza su valor máximo en dicha zona y decae al aumentar la velocidad.

Usando la teoría de respuesta lineal se puede avanzar en el cálculo de las fluctuaciones de la densidad electrónica inducida por el ion, así como del potencial de estela producido por ellas. Dicho potencial tiene una influencia decisiva en diversos fenómenos físicos de gran interés, tales como la excitación resonante coherente, pérdida de energía (energía de frenado), efecto vecindad, cuando varios io-

---

<sup>19</sup> P.M. Echenique, R.H. Ritchie, W. Brandt, *Phys. Rev.* 20, 2567 (1979).

nes se mueven simultáneamente a través del medio, apantallamiento dinámico de iones en sólidos y en aceleradores basados en el campo creado por la estela.

Los modelos iniciales del potencial de estela suponían que el sólido es un medio infinito homogéneo y no tenían en cuenta los efectos de la superficie del sólido. Posteriormente se ha evaluado de forma coherente y sistemática el proceso de formación (destrucción) de la estela cuando el ion penetra en el sólido o sale de él, explicando de forma detallada la contribución relativa de las excitaciones colectivas de volumen y superficie en función del tiempo que le cuesta al ion entrar o salir del sólido<sup>20</sup>.

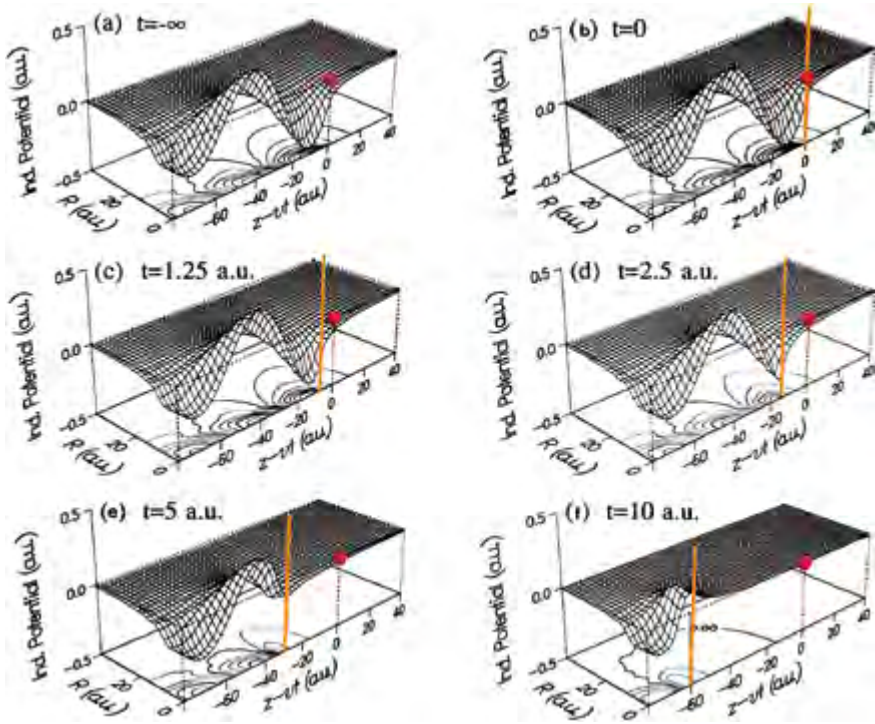


Figura 3.4: Evolución del potencial de estela en unidades atómicas creado por un protón moviéndose con velocidad  $v=6$  u.a. al cruzar la superficie ( $t=0$ ) indicada por la línea roja para abandonar el material. EL panel (a) presenta el potencial de estela dentro del sólido y lejos de la superficie.

<sup>20</sup> F.J. García de Abajo, P.M. Echenique, *Phys. Rev.* **46**, 2663 (1992).

Análisis mecánico-cuánticos basados en la teoría de perturbaciones de primer orden conducen a resultados para la energía de frenado que son proporcionales al cuadrado de la carga del proyectil. Ya en 1963 Barkas<sup>21</sup> comprobó que cargas positivas y negativas tienen alcances diferentes al atravesar la materia, mostrando así evidencia experimental de que la pérdida de energía depende del signo de la carga de la partícula incidente. Posteriores experimentos mostraron asimismo diferencias entre las pérdidas de energía de protones y antiprotones, permitiendo, por lo tanto, extraer la contribución a la pérdida de energía que es proporcional al cubo de la carga del proyectil.

Numerosos autores con diferentes métodos han aportado diversas aproximaciones a la solución del efecto Barkas. El primer tratamiento mecánico-cuántico riguroso en un gas de electrones dentro de la aproximación de fases aleatorias fue realizado por Pitarke<sup>22</sup> y colaboradores. Este trabajo constituía un paso decisivo en el tratamiento de la interacción de muchos cuerpos en gases de electrones y proporcionaba por primera vez expresiones compactas para la respuesta cuadrática del gas de electrones equivalentes a las realizadas, en su día, por Lindhard para la respuesta lineal.

## Iones lentos

Las primeras teorías que describían la fuerza de frenado de iones en interacción con la materia eran teorías lineales. En dichas teorías se supone que la perturbación que produce el ion en el gas de electrones es pequeña. La densidad de fluctuaciones inducida por el ion es proporcional a la carga incidente y la fuerza que se ejerce sobre dicha carga es proporcional al cuadrado de la carga. Para velocidades bajas, no obstante, la interacción es muy fuerte y uno tiene que recurrir a teorías no lineales.

Cuando la velocidad del ion es menor que la de los electrones del medio, la situación es cualitativamente diferente debido a que la interacción es demasiado fuerte, por lo que técnicas basadas en teorías de respuesta lineal no son suficientes. La aplicación a esta situación del

---

<sup>21</sup> W.H. Barkas, N.J. Dyer, H.H. Heckman, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 26 (1963); **11**, 138 (E) (1963).

<sup>22</sup> J.M. Pitarke, R.H. Ritchie, P.M. Echenique, *Phys. Rev. B* **52**, 13883 (1995).



formalismo del funcional de la densidad, permitió obtener el primer cálculo no lineal de la pérdida de energía de un protón en un gas de electrones. En medios sólidos con muchos electrones no localizados, la carga del ion se apantalla por el movimiento de dichos electrones. La interacción residual, cuando la velocidad de la partícula es pequeña, excita los electrones a órbitas vacías y cercanas a la superficie de Fermi.

Los cálculos no lineales muestran una pérdida del orden del 60% mayor, para densidades metálicas del medio, que los resultados de la teoría lineal<sup>23</sup>. Asimismo, el cálculo autoconsistente del potencial de interacción, por un lado, y, por otro lado, un tratamiento exacto de la dispersión (en inglés “scattering”) en el nivel de Fermi, permiten explicar, desde primeros principios, las oscilaciones en la pérdida de energía en función de la carga del ion incidente<sup>24</sup>. En 1998, los trabajos del grupo experimental del Prof. Winter en Berlín confirmaron la validez de los cálculos teóricos<sup>25</sup>.

Los trabajos teóricos de Pitarke y colaboradores permitieron incluir la estructura de bandas en el cálculo de la fuerza frenado tanto en el interior del sólido<sup>26</sup> como en superficies<sup>27</sup>.

En los últimos años Artacho y colaboradores han conseguido resultados que combinan la no linealidad de los cálculos originales de Echenique, Nieminen y Ritchie con una descripción detallada de la estructura de bandas del sólido. Estos cálculos basados en primeros principios se han realizado para el caso de protones y velocidades de 0.05 a 0.6 unidades atómicas en semiconductores de banda estrecha<sup>28</sup>.

## Estados de carga

La descripción anterior se refiere a situaciones en las que la carga del ion incidente se mantiene fija a lo largo de su trayectoria. De

---

<sup>23</sup> P.M. Echenique, R.M. Nieminen, R.H. Ritchie, *Solid State Commun.* **36**, 463 (1981).

<sup>24</sup> P.M. Echenique *et al.*, *Phys. Rev. A* **33**, 897 (1986).

<sup>25</sup> H. Winter *et al.*, *Europhys. Lett.* **41**, 437 (1998).

<sup>26</sup> I. Campillo, J.M. Pitarke, A.G. Eguiluz, *Phys. Rev. B* **58**, 10307 (1998).

<sup>27</sup> M.G. Vergniory *et al.*, *Phys. Rev. B* **78**, 155428 (2008).

<sup>28</sup> R. Ullah *et al.*, *Phys. Rev. B* **91**, 125203 (2015).

hecho, una partícula cargada moviéndose en un medio material atrapa y pierde electrones en la interacción dinámica con su entorno. Para cada velocidad coexisten, en un equilibrio dinámico, diversos estados de carga, cada uno de ellos en una proporción definida, que interactúan con el medio de forma diferente. Un tratamiento correcto de tal problema requiere conocer la fracción existente de cada estado de carga a una determinada velocidad y, consecuentemente, la pérdida de energía correspondiente a cada estado de carga, así como la energía global transferida al medio en los propios procesos de cambio de carga<sup>29</sup>.

Tres son los procesos principales que contribuyen al cambio del estado de carga de un ion moviéndose en un medio material. Un ion puede perder o capturar un electrón del gas de electrones que constituye la banda de conducción de un metal. La conversión de energía y momento en el propio proceso exige que éste vaya acompañado de una excitación del gas electrónico, bien individual, promocionando un electrón por encima del nivel de Fermi, o bien colectiva, mediante la excitación de un plasmón. A estos procesos se les conoce como procesos asistidos por un tercer cuerpo, y, a veces, en una interpretación amplia del término, como procesos Auger. La interacción del ion con el potencial periódico de los núcleos iónicos de la red se traduce en la posibilidad de captura y pérdida de electrones. Asimismo, un electrón perteneciente a un nivel profundo de los átomos de la red puede efectuar una transición a un nivel profundo asociado al ion en movimiento. Teniendo en cuenta todos los procesos anteriores y combinando la moderna teoría cuántica de muchos cuerpos con conceptos de física atómica, Arnau, Peñalba y colaboradores evaluaron para el caso de protones y partículas alfa moviéndose en Aluminio, la fracción de cada estado de carga, en función de la velocidad, y su contribución a la pérdida de energía<sup>30</sup>. Sus resultados concordaban con los datos experimentales existentes.

La descripción de la pérdida de energía en función de las contribuciones de los diversos estados de carga ha abierto nuevas perspectivas en el campo. Por citar una, ha permitido explicar, desde conceptos básicos, el llamado efecto de fase, es decir, contestar a la pregunta fundamental ¿Qué es más eficaz a la hora de hacer perder energía a

---

<sup>29</sup> P.M. Echenique, F. Flores, R.H. Ritchie, *Solid State Phys.* **43**, 229 (1990).

<sup>30</sup> A. Arnau *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1024 (1990).

un ion moviéndose en él, un gas o un sólido del mismo material? Nos referimos naturalmente a la pérdida de energía por átomo del medio. La respuesta a dicha pregunta básica es que el gas es aproximadamente un 50% más eficaz por átomo que el sólido, en el caso de protones moviéndose en medios metálicos. La clave de la explicación radica en la diferente interacción de la fracción de carga que permanece como protón. En un sólido, al estar apantallada, la interacción es más débil que en un gas<sup>31,32</sup>.

---

<sup>31</sup> P. Bauer *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1137 (1992).

<sup>32</sup> M. Bergsmann *et al.*, *Phys Rev.* **62**, 3153 (2000).

## 4. INTERACCIÓN DE ELECTRONES EXTERNOS CON LA MATERIA

### Difracción de electrones lentos (LEED)

Los electrones no son solamente constituyentes esenciales de la materia sino que, tras su descubrimiento por el inglés J.J. Thomson en 1897, han sido utilizados profusamente como sondas para el estudio de la estructura de la materia. Einstein, en 1905, con su explicación del efecto fotoeléctrico, había establecido la naturaleza corpuscular de la radiación. El físico francés de Broglie, pensando sobre todo en el electrón, y tratando de establecer un paralelismo entre la materia y la luz, formuló lo que en 1923 era una hipótesis revolucionaria: a todo corpúsculo libre le corresponde una onda. Si esto es así, los electrones producirán figuras de difracción similares a las que se observan con la luz si los hacemos pasar a través de rendijas de un tamaño similar a su longitud de onda. Estas rendijas las proporciona la naturaleza: son los materiales cristalinos, con “rendijas” del tamaño de los átomos, es decir, Angströms (del orden de  $10^{-10}$  m). En 1927 los norteamericanos C.J. Davisson y L.H. Germer<sup>33,34</sup> observaron la difracción de electrones por la superficie de un cristal de níquel.

Si la longitud de onda de los electrones es comparable a la distancia entre los átomos del cristal, la interferencia entre las ondas dispersadas por la estructura periódica del cristal hace que los electrones emerjan principalmente en ciertas direcciones produciendo puntos luminosos, reflejos de la simetría del material, análogos a los producidos mediante la difracción de rayos X. Davisson y Germer utilizaron electrones de baja energía (del orden de 100 electronvoltios) iniciando así lo que se ha convertido en uno de los instrumentos más poderosos en el estudio de la estructura atómica de las superficies. La difracción de electrones lentos, que se conoce con el acrónimo LEED (del inglés *Low Energy Electron Diffraction*), prueba la naturaleza ondulatoria del electrón.

Dificultades tecnológicas de obtención de alto vacío para evitar la contaminación atómica de las superficies, por un lado, y, por otro

---

<sup>33</sup> C. Davisson, L.H. Germer, *Nature* **119**, 558 (1927).

<sup>34</sup> C. Davisson, L.H. Germer, *Phys. Rev.* **30**, 634 (1927).

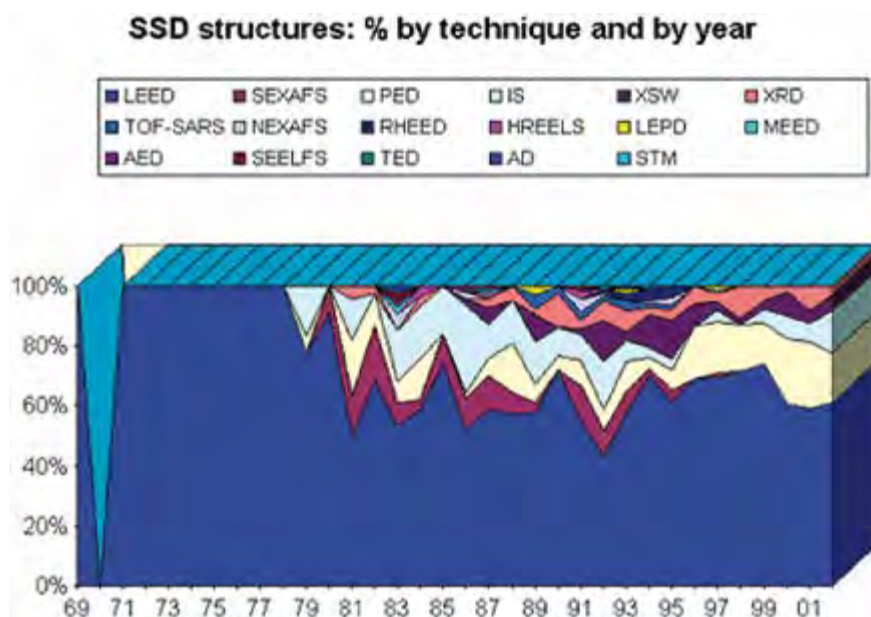


Figura 4.1: Porcentajes anuales de estructuras superficiales determinados por diferentes técnicas experimentales (fuente: NIST Surface Structure Database; <http://www.icts.hkbu.edu.hk/vanhove>).

lado, la falta de comprensión teórica de los mecanismos de interacción de electrones con la materia, fueron los responsables de que hasta la década de los setenta la difracción de electrones lentos no se convirtiese en un instrumento de análisis atómico de superficies.

En la difracción de electrones lentos la fuerte interacción, tanto elástica como inelástica, de los electrones incidentes con el medio es decisiva, por lo que las figuras de difracción obtenidas son sensibles a la superficie, a diferencia de lo que ocurre con electrones de mayor energía. La interacción elástica fuerte permite que los electrones sean desviados hacia atrás, pero dificulta enormemente el análisis teórico al ser necesario considerar choques múltiples con los átomos y no existir, por tanto, una correspondencia directa entre la figura de difracción y la estructura atómica, tal como ocurre con la difracción de rayos X o de electrones de alta energía.

La difracción de electrones lentos ha sido y sigue siendo una técnica decisiva para determinar estructuras superficiales, como se muestra en las siguientes figuras.

Debido a la fuerte interacción inelástica, el recorrido libre medio de los electrones LEED es pequeño (5-10 Å), con lo que las figuras de difracción obtenidas son sensibles a la superficie, a diferencia de lo que ocurre con electrones en otros regímenes de velocidad. A muy altas energías, la interacción con el medio es débil, lo que se traduce en una probabilidad pequeña de perder energía, es decir, en un recorrido libre medio grande. Es la zona de la microscopía electrónica, cuyos electrones son sondas adecuadas para penetrar y estudiar el interior de los materiales. A muy bajas energías, cercanas a la energía de Fermi, el mecanismo de pérdida de energía está bloqueado, puesto que los electrones son fermiones y obedecen el principio de exclusión de Pauli que no permite que dos electrones estén en el mismo estado cuántico. El recorrido libre medio de un electrón justo por encima del nivel de Fermi es muy grande, ya que para perder energía el electrón tendría que evolucionar a un estado cuántico distinto y todos estos estados están ocupados por los electrones del metal. En el régimen de energías propio de los electrones LEED (del orden de 100 eV), la interacción es fuerte y, además, hay muchos estados cuánticos vacíos no ocupados a los que el electrón puede decaer perdiendo energía, lo que se traduce en un recorrido libre medio pequeño. Por esta razón, los electrones que no han perdido energía y forman la figura de difracción reflejada solamente pueden provenir de las primeras capas de átomos.

Una idea de la dificultad del problema la da el hecho de que pasaron 42 años desde el experimento de Davisson y Germer en 1927 hasta el primer cálculo “fiable” del Ni(111) por John Pendry en 1969<sup>35</sup>.

### **RHEED** (*Reflection High Energy Electron Diffraction*)

Al comienzo de los años setenta existían grandes discrepancias entre los cálculos teóricos de difracción de electrones rasantes (RHEED) en la superficie (111) del silicio y los resultados experimentales. Las discrepancias no podían ser debidas a errores en el tratamiento de la interacción inelástica dentro del sólido pues las curvas teóricas daban correctamente la anchura de los picos del espectro. La diferencia entre teoría y experimento era debida a la excitación de plasmones superficiales (excitaciones colectivas del gas de electrones localizados

---

<sup>35</sup> J.B. Pendry, *J. Phys. C: Solid State Phys.* 2, 2273 (1969).

en la interfase) durante el viaje del electrón fuera del sólido. Como tantas veces ocurre en ciencia la importancia de nuestro trabajo<sup>36</sup> fue mucho mayor en campos diferentes a los que lo originaron. Usamos un método semiclásico basado en el cálculo de la fuerza de frenado de un electrón moviéndose a lo largo de una trayectoria clásica. En aquel momento yo no veía claro cómo separar, en el caso de una trayectoria general, la componente disipativa de la que no lo era, por lo que estudié el caso de un electrón moviéndose paralelamente a la superficie del sólido. Mi ignorancia resultó ser una bendición pues al forzarme a sustituir la situación real por un modelo ideal muy simplificado pude obtener una expresión compacta de la pérdida de energía en función de la distancia. Así, si el electrón se mueve en el vacío con velocidad en la dirección paralela a la superficie, a una distancia de ésta, la parte imaginaria de su auto energía puede expresarse como

$$\Sigma_i = \frac{-\omega_s}{2v} K_0(2\omega_s|z|/v)$$

donde es la energía del plasmón de superficie y  $K_0$  es una función de Bessel modificada de orden cero. Años después esta fórmula ha resultado clave en un campo bien diferente, el de la microscopía electrónica de barrido (STEM).

## Microscopía electrónica de barrido (STEM)

El STEM (Scanning Transmission Electron Microscopy) aporta a la espectroscopía de pérdidas de energía la ventaja de una alta resolución espacial. En este aparato, un haz extremadamente estrecho (de unos Å de anchura) de electrones rápidos (típicamente 100 keV) incide sobre un material, pudiéndose desplazar con gran precisión la posición del haz sobre el objeto que se estudia. Los electrones que atraviesan la muestra se utilizan bien para formar imágenes de transmisión (“barriendo” la muestra con el haz), o bien para estudiar el espectro de pérdida de energía de los electrones en cada posición del haz. Las pérdidas se producen al excitar los electrones del haz tanto electrones de valencia del blanco como los electrones en las capas internas de los átomos de la red. Para que una de estas últimas exci-

---

<sup>36</sup> P.M. Echenique, J.B.Pendry, *J. Phys. C* **8**, 2936 (1975).

raciones se produzca, es necesario que el haz cruce muy próximo al átomo excitado y dado que la energía de la excitación es característica del átomo, el espectro de pérdidas permite obtener información sobre la naturaleza química de los átomos en una determinada posición de la muestra. Debido a la interacción con los átomos próximos aparecen pequeños cambios de la energía de la excitación respecto a los valores correspondientes a un átomo aislado; estos cambios permiten analizar el enlace químico de un átomo concreto.

La capacidad de la microscopía electrónica de barrido de dar información sobre nanoestructuras superficiales ha motivado el interés en aplicarla en superficies de diferentes geometrías<sup>37,38</sup>. Estas superficies en general presentan un número infinito de modos, es decir, de energías típicas de excitación superficial; la energía de estos modos es característica de la forma geométrica de la superficie. El problema teórico que plantean estas superficies es la comprensión de cuáles son dichas energías y cómo depende la intensidad del pico de pérdidas con la posición del haz electrónico relativa a la superficie.

Uno de los problemas que mayor interés ha suscitado en los últimos años ha sido el de las pérdidas de energía de electrones STEM en pequeñas partículas (de unos nanómetros de radio). El interés de este problema se debe a las aplicaciones tecnológicas que tienen los procesos de superficie en pequeñas partículas en campos tales como la catálisis, microelectrónica, etc.

Por ejemplo, en el año 85, determinamos que la probabilidad de pérdida de energía de una carga  $q$  viajando en el vacío a velocidad  $v$  cerca de una esfera dieléctrica de radio  $a$  puede expresarse como

$$P_{\omega}(a, b, c) = \frac{4q^2}{\pi v^2 a^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l A_{lm} \left( \frac{\omega a}{v} \right)^{2l} K_m^2 \left( \frac{\omega b}{v} \right) \text{Im}[\alpha_l(\omega)]$$

donde representa la energía,  $b$  es la distancia entre el centro de la esfera y la trayectoria del electrón,  $l$  y  $m$  son dos índices que hacen referencia a modos del sistema de diferente tipo,  $K_m$  es la función de Bessel modificada de orden  $m$ ,

---

<sup>37</sup> T.L. Ferrell, P.M. Echenique, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1526 (1985).

<sup>38</sup> A. Rivacoba, N. Zabala, P.M. Echenique, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3362 (1992).



$$A_{lm} = (2 - \delta_{0m})/(l + m)!(l - m)!$$

$\delta_{0m}$  es la función delta de Kronecker, y

$$\alpha(\omega) = a^3 \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + (l + 1)/l}$$

donde  $\varepsilon(\omega)$  es la función dieléctrica de la partícula.

Las pérdidas de energía debidas a la interacción con los electrones de valencia tienen diferentes características. Estas pérdidas están relacionadas con la energía necesaria para crear fluctuaciones de la densidad de carga en el volumen (plasmones de volumen) y en la superficie (plasmones de superficie) del blanco. Al ser éstas excitaciones colectivas, los electrones que se excitan están deslocalizados lo que plantea el problema de cuál es la resolución espacial de estos espectros, es decir, a qué distancia del blanco se excitan de forma significativa los plasmones. Los plasmones de volumen sólo se excitan cuando la carga atraviesa el medio o cuando pasa a muy pequeña distancia de él (del orden de 1 Å), mientras que en el caso de las excitaciones superficiales la resolución espacial viene dada, básicamente, por el alcance de la componente del potencial eléctrico —creado por el haz— a la energía correspondiente de la excitación dada, típicamente del orden de unos 10 nanómetros. Toda esta física está contenida en la fórmula sencilla que tuve la suerte de escribir. La energía de tales excitaciones depende de la naturaleza del blanco así como de su forma geométrica. Mientras que las imágenes filtradas a la energía del plasmón de volumen dan una imagen de la forma geométrica de la muestra, las imágenes correspondientes a plasmones de superficie son notablemente difusas pero permiten observar detalles superficiales de gran interés que no podrían ser detectados por medio de otras técnicas.

La espectroscopía de pérdidas de los electrones de la banda de valencia puede proporcionar información sobre estructuras superficiales. Presenta una gran ventaja respecto a la espectroscopía de electrones internos: debido a que la probabilidad de excitar electrones externos es mayor, la correspondiente señal de pérdidas correspondiente es mucho más intensa, lo que supone que el tiempo de exposición necesario es menor. Con esto se reduce un problema esencial de la microscopía electrónica: el daño producido por el haz. De hecho se pueden obtener espectros de pérdidas de superficie en situaciones en las cuales el haz

no atraviesa la muestra, produciendo un daño mínimo. Esta característica la convierte en una técnica de gran utilidad, por ejemplo, en el estudio de materiales biológicos.

El plasmón superficial es prácticamente omnipresente en la física de superficies y en el análisis cuantitativo de los distintos fenómenos que se producen en las interfases.

En las últimas tres décadas se ha llevado a cabo un amplio trabajo teórico y experimental en este campo. El plasmón superficial ha resultado ser un elemento importante en la holografía, el diseño de nuevas células solares, el diagnóstico de la superficie, el diagnóstico de las uniones metal-óxido-metal, la dispersión Raman de superficie, el diseño de redes de difracción y muchos otros temas.

En el caso de electrones rápidos interaccionando con superficies complejas (diedros, semiesferas, cilindros truncados, donuts etc.) los procedimientos analíticos standard no pueden ser utilizados por la insuficiente simetría de las superficies en estudio. Es necesario utilizar formalismos<sup>39,40</sup> tales como el método de cargas de superficie (BEM del acrónimo inglés Boundary Element Method). En este método la respuesta del sistema viene dada por la contribución de la densidad de carga en la superficie que a su vez se calcula mediante una partición de la misma en elementos infinitesimales.

Gracias al conocimiento detallado adquirido a través de estos métodos numéricos, recientemente la espectroscopía de pérdida de energía (EELS), en combinación con la microscopia electrónica de barrido (STEM), ha servido para resolver espacial y temporalmente el proceso de absorción de hidrogeno por nanopartículas de paladio<sup>41</sup> (enero 2017). Esta recién adquirida habilidad para visualizar transiciones de fase en nanopartículas en tiempo real puede ayudar a responder otras muchas preguntas abiertas en el campo de la química y la física. Por ejemplo, la comprensión detallada de esta reacción, siendo análoga en términos físicos al flujo de iones en una batería durante el proceso de carga y descarga, puede facilitar el desarrollo de futuros métodos de almacenamiento energético más rápidos y de mayor capacidad.

---

<sup>39</sup> F.J. García de Abajo, J. Aizpurua, *Phys. Rev. B* **56**, 6774 (1997).

<sup>40</sup> F.J. García de Abajo, A. Howie, *Phys. Rev. B* **60**, 11149 (1999).

<sup>41</sup> T.C. Narayan *et al.*, *Nat. Commun.* **8**, 14020 (2017).

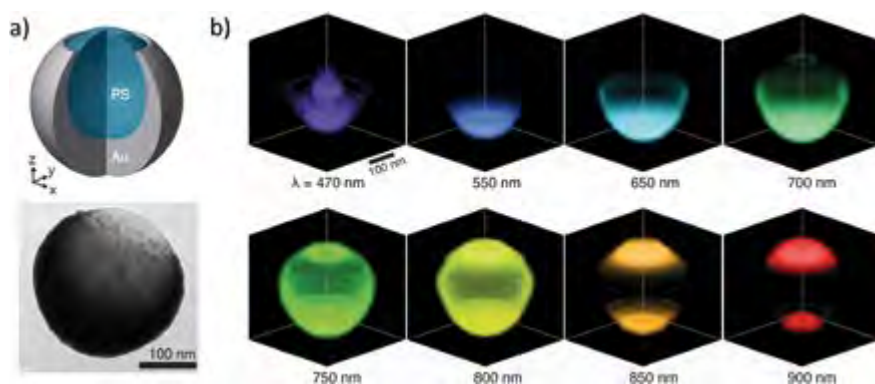


Figura 4.3: Reconstrucción tomográfica tridimensional de la respuesta óptica de la nano-estructura presentada en (a) basada en catodoluminiscencia, para diferentes longitudes de onda (b)

Por otro lado, recientes avances en tomografía de electrones mediante STEM, han permitido la visualización de la estructura tridimensional de nanopartículas con resolución atómica<sup>42</sup> (resolución de 2.4 Å, año 2012). De manera similar, gracias a la extensión de esta técnica a la espectroscopía de pérdida de energía<sup>43</sup> y catodoluminiscencia<sup>44</sup> (ver Fig. 4.3), recientemente ha sido posible reconstruir espacial y espectralmente la respuesta óptica de nanopartículas metálicas (plasmones de superficie) en tres dimensiones y con resolución nanométrica.

## Microscopía Túnel (STM)

Las reglas de la mecánica clásica no permiten que una partícula penetre en una región en la que existe una barrera de potencial mayor que su energía. Son zonas de energía prohibida para la partícula. En mecánica cuántica existe una probabilidad de que la partícula penetre en dichas zonas, siendo tanto menor la probabilidad cuanto mayores sean la altura de la barrera y la extensión de la zona de energía prohibida. Binnig y Rohrer<sup>45</sup> utilizaron este hecho para desarrollar el microscopio túnel, conocido con el acrónimo STM (Scanning Tunneling Microscope). Su descubrimiento, por el que fueron galardo-

<sup>42</sup> M.C. Scott *et al.*, *Nature* **483** (7390), 444 (2012).

<sup>43</sup> O. Nicoletti *et al.*, *Nature* **502** (7469), 80 (2013).

<sup>44</sup> A.C. Atre *et al.*, *Nat. Nanotechnol.* **10** (5), 429 (2015).

<sup>45</sup> G. Binnig, H. Rohrer, *Helv. Phys. Acta* **55**, 726 (1982).

nados con el Premio Nobel de Física en 1986, permite observaciones a escala atómica.

El microscopio túnel aprovecha el hecho de que, al poder atravesar las barreras existentes en la superficie de los metales, puede establecerse una corriente entre un material, al que se conoce como punta, y la muestra que se quiere estudiar. En el microscopio, la punta ha de ser lo más afilada posible: preferiblemente una punta que tenga un átomo que salga “un poco” más que los otros. Dicha punta se coloca a unos pocos Angströms de la superficie. Al aplicar un pequeño voltaje entre la punta y la superficie se establece una corriente túnel de electrones cruzando la barrera existente entre la punta y la muestra. La transmisión de electrones a través de la barrera depende drásticamente, exponencialmente, con la anchura de la barrera. Es decir, que pequeños cambios en la distancia entre la punta y la superficie se traducen en grandes cambios en la corriente. Un cambio de  $1 \text{ \AA}$  en la separación se traduce en un factor de 10 en la corriente. Esta característica es la causa determinante de la fina resolución espacial. La mayor parte de la corriente fluye entre el átomo más externo de la punta y la muestra, produciendo resolución a escala atómica.

Uno de los modos normales de funcionamiento del microscopio túnel consiste en ir ajustando continuamente la altura de la punta para mantener la corriente túnel constante al desplazarla lateralmente sobre la superficie. De hecho, lo que se “ve” en el microscopio túnel es un mapa de cómo los electrones externos de la muestra se extienden en el vacío que separa la muestra de la superficie. Con el STM se pueden “resolver” átomos individuales y corrugaciones superficiales mucho más pequeñas que el tamaño de un átomo. La punta también se puede usar para mover átomos en la superficie.

Estamos hablando de estudiar las propiedades de los materiales a escala atómica en lugares específicos, es decir, de ingeniería de átomos individuales, nanotecnología. En muchas ocasiones las conjeturas sobre el camino futuro de la Ciencia y la Tecnología han fracasado estrepitosamente, por lo que toda reflexión en esta línea debe tomarse siempre con suma cautela. Pero parece claro, al menos en el momento actual, que uno de los futuros grandes pasos tecnológicos será el paso de la era actual de la micra, del micrómetro, a la futura del nanómetro. En las últimas décadas la miniaturización ha consistido en el paso de la

escala del milímetro a otra escala mil veces menor: la micra, el micrómetro. Esto ha constituido un logro tecnológico formidable, pero no un cambio científico sustancial. El conocimiento básico ya existente y el desarrollo de métodos tales como la microscopía electrónica lo han hecho posible. En la escala del nanómetro, sin embargo, se requerirán nuevos conceptos que a su vez exigirán nuevas tecnologías. Un problema básico no resuelto totalmente es cuál es el potencial de interacción y su dependencia con la estructura geométrica que el electrón “ve” al cruzar la superficie<sup>46,47</sup>. La física a esas escalas necesitará nuevas ideas y el progreso posterior exigirá de nuevo el paso inverso, la vuelta, a partir de lo aprendido en el mundo nanométrico, a escalas mayores, con un aumento de la complejidad.

---

<sup>46</sup> J.M. Pitarke, F. Flores, P.M. Echenique, *Surf. Sci.* **234**, 1 (1990).

<sup>47</sup> P. de Andrés *et al.*, *Europhys. Lett.* **3**, 101 (1987).

## 5. DINÁMICA DE ELECTRONES

La química está determinada por los electrones. Con frecuencia la dinámica química está dirigida por la dinámica electrónica, estados electrónicos excitados actuando como necesarios intermediarios en la actividad química. Comprender y controlar los tiempos de excitación electrónica y transferencia de carga es un paso necesario para comprender, controlar y diseñar procesos físicos y químicos en superficies.

En la figura tomada del artículo de Krausz e Ivanoz<sup>48</sup> se ilustra la conexión entre las escalas de tiempo, energía y tamaño.

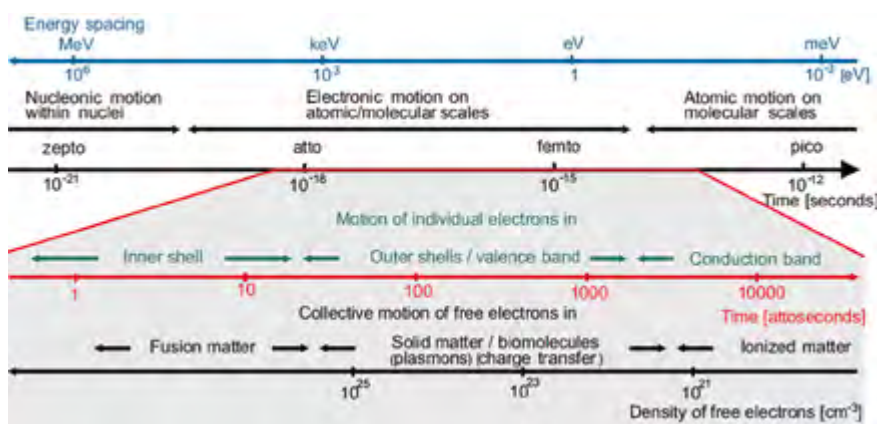


Figura 5.1: Conexión entre las escalas de tiempo, energía y tamaño.

Los electrones excitados juegan un papel esencial en muchos procesos, por ejemplo en la conversión de luz en energía química que ocurre en la fotosíntesis o en energía electrónica en una célula solar. Estos procesos se basan en un tiempo de vida lo suficientemente largo de la excitación electrónica de manera que la carga pueda ser transferida y usada para el fin deseado. La interacción del electrón excitado con otros electrones, vibraciones de la red (fonones) o defectos e impurezas puede causar pérdidas de energía o cambio de dirección en el electrón inicial. La deseada transferencia de carga por lo tanto no ocurrirá y la energía de la excitación acabará disipada como calor. En el interior de los sólidos y debido a la alta densidad de los electrones

<sup>48</sup> F. Krausz, M. Ivanov, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 163 (2009).

de valencia en los sólidos la vida media de las excitaciones electrónicas en la zona de energías relevante es muy pequeña, unos pocos femtosegundos o menor, por lo que, al menos por ahora, no son fáciles las aplicaciones. En superficies metálicas la situación es diferente, porque la transferencia de los electrones excitados a través de la interfase o desde una capa semiconductor o de moléculas es relevante para la fotoquímica o para reacciones químicas en general así como para dispositivos electrónicos. Además de sus posibles aplicaciones merece la pena, desde un punto de vista fundamental, entender el comportamiento de electrones excitados en superficies y nanoestructuras.

El conocimiento del comportamiento de los electrones (o huecos) excitados en superficies metálicas ha experimentado un gran avance en los últimos años gracias a una variedad de técnicas experimentales que han provocado un avance en el análisis y comprensión teórica de los procesos involucrados<sup>49</sup>.

Estas investigaciones han constituido un paso decisivo en el estudio de la dinámica de electrones y huecos en sólidos y resultan, por lo tanto, claves para entender diversos procesos químicos en superficies, tales como disociación, desorción y reactividad. Descripciones detalladas de la estructura electrónica de superficie y su cotejo detallado con experimentos han permitido avanzar en la comprensión del apantallamiento dinámico de las superficies, aspecto esencial en la reciente química del femtosegundo en superficies. El conocimiento adquirido ha sido clave para entender la vida media de huecos en estados superficiales. La dinámica de las excitaciones electrónicas juega un papel importante en la interacción molécula-superficie así como en reacciones inducidas por láseres y es también crítica en aplicaciones tecnológicas de materiales electrónicos.

La pregunta es ¿cuánto tiempo mantiene su “identidad” un electrón (o hueco) en un estado excitado antes de “moverse” a un estado bien de la misma energía (transferencia de carga origen de su vida media elástica) o de una energía menor (origen de su vida media inelástica)?

Para fijar ideas indiquemos, con el ejemplo de un adsorbato, dos de los posibles caminos para la transferencia electrónica y el decaí-

---

<sup>49</sup> P.M. Echenique *et al.*, *Surf. Sci. Rep.* **52**, 219 (2004).

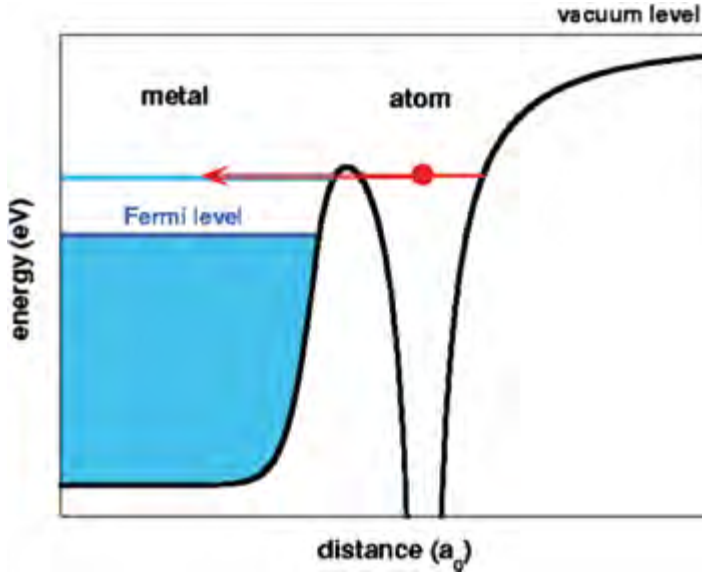


Figura 5.2: Transferencia de carga electrónica desde un estado electrónico excitado en un adsorbato sobre la superficie a un estado del interior del sólido con la misma energía.

miento de electrones excitados en superficies. Un electrón inicialmente ligado en un adsorbato puede transferirse al sólido a través de la superficie sin modificar su energía o puede decaer a estados de menor energía transfiriendo la energía al sólido.

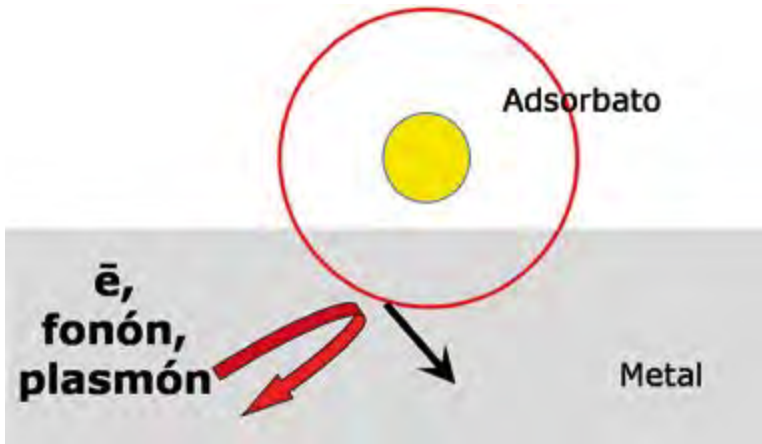


Figura 5.3: Decaimiento de un electrón en un estado excitado de un adsorbato sobre un sólido a un estado de energía inferior mediante una excitación del sólido.



Esto lo puede hacer vía tres procesos diferentes.

- a) Colisión electrón-electrón. En muchos casos éste es el proceso más importante y conlleva el decaimiento a estados de volumen o de superficie de menor energía con la excitación simultánea de un par electrón-hueco o, en su caso, excitaciones colectivas como plasmones u otro tipo de quanta, magnones, etc.
- b) Colisión electrón-fonón. Los fonones proporcionan principalmente momento y poca energía. Este proceso de dispersión, por lo tanto, cambia la dirección del movimiento electrónico, incluyendo dispersión a bandas del sólido o de la superficie.
- c) Colisión electrón-defecto. Las superficies reales no son perfectas y contienen defectos tales como escalones o impurezas. El scattering electrón defecto cambia el momento del electrón y es predominantemente elástico. En algunos aspectos es similar al scattering electrón-fonón si miramos a los fonones como una desviación de la red cristalina ideal. Sin embargo, no siempre es elástico, ya que en algunos casos los defectos aportan estados electrónicos adicionales que abren nuevos canales a la interacción electrón-electrón o la posibilidad de nuevas vías inelásticas a través de vibraciones moleculares.

Los procesos de interacción electrón-fonón y electrón-defecto pueden ser identificados experimentalmente mediante una variación sistemática del número de fonones con la temperatura o de la concentración de defectos mediante preparación de la muestra. Extrapolando los datos a temperatura cero y a nula concentración de defectos, uno puede estimar la contribución de la interacción electrón-electrón.

## TÉCNICAS EXPERIMENTALES

Tres técnicas experimentales han sido determinantes en el estudio del decaimiento de excitaciones electrónicas: espectroscopías de fotoemisión, directa e inversa, microscopía túnel y fotoemisión de dos fotones. Cada una de las técnicas tiene sus puntos fuertes y sus debilidades a la hora de estudiar aspectos específicos de la dinámica de electrones en superficies. La fotoemisión directa accede a la vida media a través de la

anchura, las líneas del espectro. Solo puede acceder a estados ocupados por debajo del nivel de Fermi y, por lo tanto, se limita al decaimiento del hueco. El método complementario de fotoemisión inversa permite la espectroscopía de estados desocupados y de estados imagen. Sin embargo, su limitada resolución no permite extraer información útil de anchura de línea excepto en casos muy limitados. La microscopía de efecto túnel y, en particular, la espectroscopía de efecto túnel permiten obtener información sobre la dinámica de estados imagen y estados intrínsecos superficiales (ocupados y vacíos). Las imágenes topográficas nos informan simultáneamente sobre la calidad y estructura de las muestras superficiales que se estudian. Esta técnica es especialmente útil para el estudio de estados tipo Shockley. La fotoemisión de dos fotones (2PPE, el acrónimo inglés) en su modo de resolución en el tiempo es una técnica que nos permite estudiar el decaimiento en el dominio. Combinando esta resolución temporal con medidas espectroscópicas se obtiene información detallada sobre los procesos de dinámica electrónica.

El decaimiento de excitaciones electrónicas en superficies metálicas ocurre en la escala de los femtosegundos. Pulsos láser de femtosegundos de duración pueden ser generados mediante láseres de Ti-zafiro y el retraso en el tiempo de dos láseres puede ser controlado con resolución por debajo del femtosegundo.

La fotoemisión de dos fotones es un método muy adecuado para estudiar la dinámica de electrones en el dominio temporal. El esquema de funcionamiento se muestra en la Figura 5.4.

El primer fotón de energía  $\hbar\omega_a$  excita un electrón de un estado inicial  $|i\rangle$  por debajo del nivel de Fermi a un estado intermedio  $|m\rangle$  por encima del nivel de Fermi y usualmente por debajo del nivel de vacío para evitar fotoemisión de un fotón directamente al estado final. Un segundo fotón de energía se usa para excitar el electrón hasta el estado  $|f\rangle$  por encima del nivel de vacío.

Los experimentos de emisión de dos fotones pueden ser realizados de dos maneras diferentes.

- a) En el modo resuelto en el tiempo se varía el retraso temporal entre los dos pulsos del láser y se mantiene constante la energía del electrón detectado (gráfica superior de la Figura 5.4).

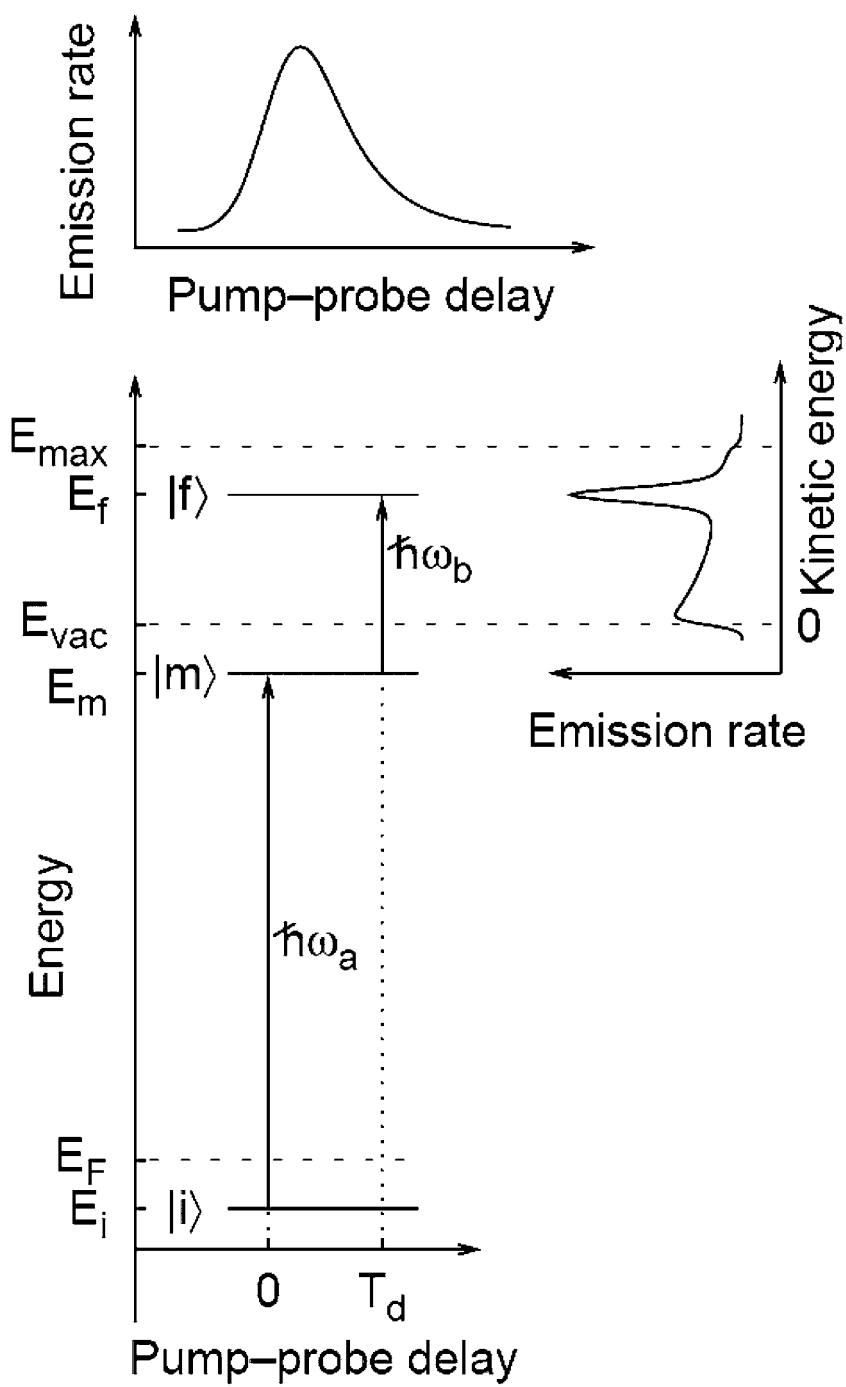


Figura 5.4: Experimento de fotoemisión de dos fotones.

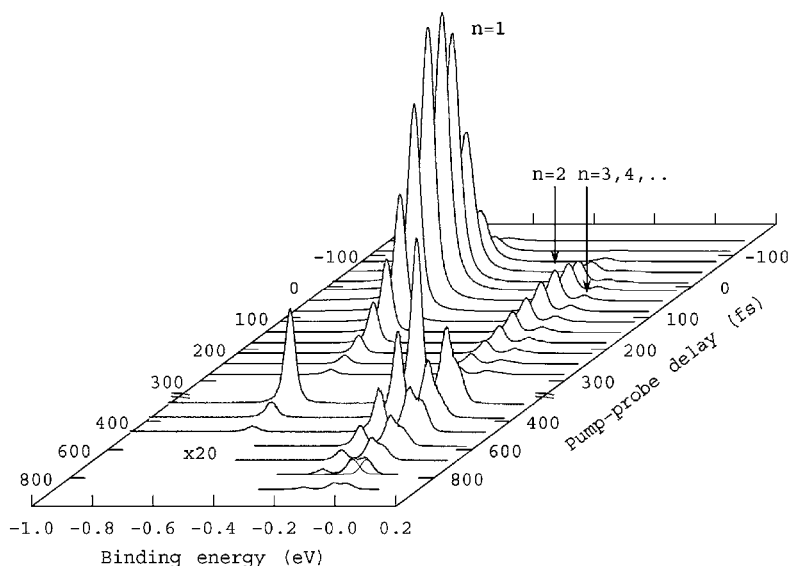


Figura 5.5: Espectros de excitación de dos fotones resueltos en tiempos y energía para el caso de estados imagen en Cu(100).

- b) En la espectroscopía resuelta en energía se analiza la energía cinética de los electrones emitidos para energías fijas de los fotones (gráfica de la derecha de la Figura 5.4). Las figuras de fotoemisión para energías diferentes de los fotones se usan para asignar características espectrales a los estados iniciales, de intercambio y finales.

Un resumen de los resultados obtenidos operando en los dos modos de la fotoemisión de dos fotones para el caso de estados imagen en Cu(100) se muestra esquemáticamente en la Figura 5.5.

El conjunto de espectros resueltos en energía ilustra la gran cantidad de información que sobre la dinámica de los electrones se puede obtener añadiendo otro fotón y su consiguiente retraso temporal al experimento tradicional de fotoemisión.

## Vida media inelástica

Las primeras estimaciones, de hace ya más de medio siglo, de la vida media de electrones por encima del nivel de Fermi en sólidos

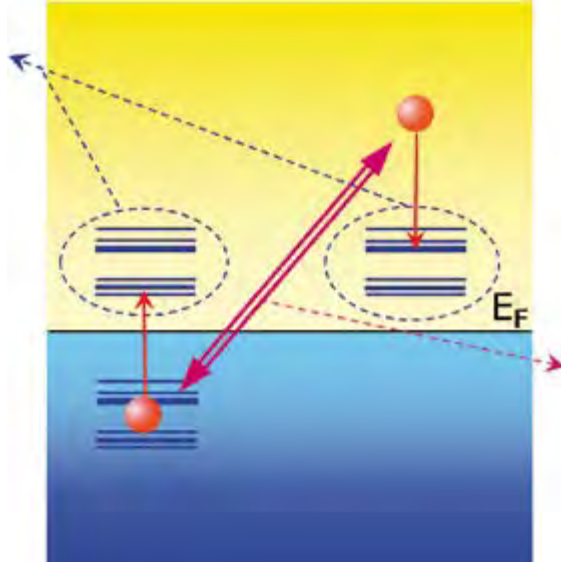


Figura 5.6: Representación esquemática de la competición entre la densidad de estados finales y el apantallamiento de la interacción, en el cálculo de la vida media para el caso de un electrón por encima del nivel de Fermi.

metálicos relacionan la vida media con la densidad de estados vacíos por debajo de la energía del electrón excitado.

Efectivamente, a mayor densidad de estados vacíos el espacio de fase disponible para la transición es mayor y, por lo tanto, aumenta la probabilidad del proceso de escape del electrón excitado a estados de menor energía, y, por lo tanto, disminuye la vida media. Sin embargo, hay otro proceso que va en la dirección contraria. Una mayor densidad de estados vacíos cerca del nivel de Fermi va frecuentemente acompañada de una mayor densidad de estados ocupados y, por lo tanto, de una disminución, por mayor apantallamiento, de la interacción electrón-electrón que produce el decaimiento y por lo tanto de una menor probabilidad para el proceso y vidas medias mayores. Esta competición entre densidad de estados finales y apantallamiento es característica de los procesos de decaimiento inelástico, a lo que habría que añadir los elementos de matriz que acoplan el estado inicial y final.

El primer cálculo que incluye consistentemente los dos efectos se realiza para un modelo de electrones libres y muestra cómo el apantallamiento gana a la densidad de estado y la vida media aumenta al au-

mentar la densidad del gas electrónico, es decir, la vida media aumenta al aumentar la densidad de estados vacíos en el nivel de Fermi. Para energías muy cercanas al nivel de Fermi, y en el límite de densidades altas, aumenta casi linealmente con la densidad  $n$  ( $n^{5/6}$ ). En función del parámetro  $r_s$  (el parámetro  $r_s$  es el radio, en unidades del radio de Bohr, de la esfera que contiene un electrón; en los metales varía entre 1 y 6) y de la diferencia entre la energía del electrón excitado y el nivel de Fermi, la vida media viene dada por<sup>50</sup>

$$\tau_{QF} = \frac{263}{r_s^{5/2}(E - E_F)^2}$$

donde viene dado en femtosegundos y la energía se mide en electron-voltios. En el caso de un electrón a 4 eV por encima del nivel de Fermi, uno obtiene valores cercanos al attosegundo: 0.5 para el Na ( $r_s = 4$ ) y 2.7 para el Al ( $r_s = 2$ ).

La física de la vida media inelástica viene expresada por la siguiente ecuación que nos da la inversa de la vida media, la anchura de línea, en términos de la parte imaginaria de la autoenergía, que a su vez viene definida en función de la interacción apantallada .

$$\Gamma = \tau^{-1} = -2 \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \phi_i^*(\mathbf{r}) \sum_f \phi_f^*(\mathbf{r}') \text{Im}W(\mathbf{r}, \mathbf{r}', w) \phi_f(\mathbf{r}') \phi_i(\mathbf{r})$$

Diversos estados inicial y final así como algunas de las excitaciones posibles aparecen en la Figura 5.7.

Muchos años después se logró combinar, para el caso del interior de un sólido, la teoría de muchos cuerpos (en el marco de la cual se describe la interacción electrón-electrón) con una descripción “ab initio” de la estructura de bandas del sólido (la cual describe la interacción entre electrones y núcleos en sistemas periódicos) para así presentar, por primera vez, predicciones teóricas de los tiempos de vida en metales simples y nobles<sup>51</sup> . Los resultados muestran la gran dependencia de la vida media con la naturaleza del estado inicial.

---

<sup>50</sup> J.J. Quinn, R.A. Ferrell, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 812 (1958).

<sup>51</sup> I. Campillo *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2130 (1999).

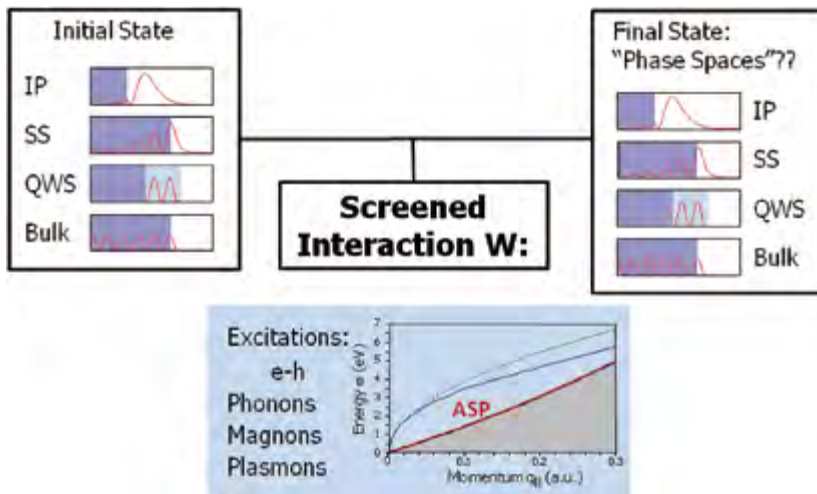


Figura 5.7: Diversos estados inicial, final y posibles excitaciones en el proceso de decaimiento de un electrón excitado.

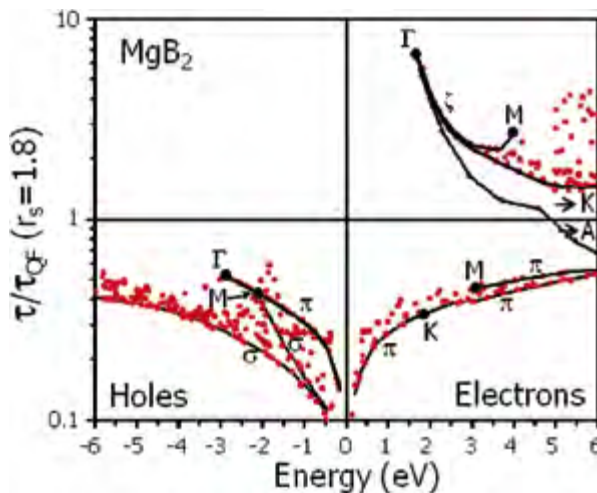


Figura 5.8: Vida media de electrones y huecos en  $Mg B_2$  normalizada a la obtenida por Quinn y Ferrell para diversas direcciones en la estructura de bandas del  $Mg B_2$ .

Descripciones detalladas de la estructura electrónica de superficie y su cotejo detallado con los experimentos han permitido avanzar en la comprensión del apantallamiento dinámico de las superficies, aspecto esencial en la química del femtosegundo en superficies<sup>52</sup>.

<sup>52</sup> J. Klier et al., *Science* **288**, 1399 (2000).

## Estados superficiales

En el interior de los materiales cristalinos la interacción de los electrones externos con los núcleos iónicos produce zonas del espectro de energía prohibidas. Son las llamadas brechas (del inglés “*gap*”). En dichas zonas de energía los electrones no pueden viajar por el sólido. En la superficie del material la situación es distinta; la discontinuidad en el potencial de interacción presente en la superficie puede resultar en una localización del electrón en las proximidades de la superficie.

En superficies metálicas, además de los estados especificados de volumen, pueden existir estados de superficies que son de dos tipos. Estados superficiales intrínsecos y estados imagen. Estos últimos existen debido a que el apantallamiento de un electrón en las proximidades de una superficie conlleva una interacción tipo potencial imagen que produce —de manera similar al caso de un átomo de hidrógeno— una serie infinita de estados localizados en presencia de un “brecha” en la estructura de bandas proyectada en la superficie. El máximo de la densidad de probabilidad para el primer estado imagen ocurre a varios Angstroms fuera de la superficie, distancia que crece cuadráticamente con el número  $n$ . Los estados superficiales intrínsecos tienen el máximo de densidad de probabilidad en la superficie y a veces son clasificados como estados Tamm<sup>53</sup> y estados Shockley<sup>54</sup> a causa de los modelos originales de dichos autores. La distinción no siempre es clara; pero en general los estados más localizados son llamados estados Tamm, mientras que los llamados estados Shockley muestran una fuerte dispersión cuadrática (con masas efectivas distintas de uno) con el momento paralelo a la superficie. Los estados superficiales intrínsecos e imagen permiten estudiar los efectos de acoplamiento fuerte y débil a las bandas de volumen subyacentes.

Los electrones en estados imagen no pueden penetrar dentro del sólido, pues éste presenta afinidad electrónica negativa, repele a los electrones y tampoco tienen energía suficiente para escapar al vacío. El potencial debido a la interacción de la carga externa con la carga de polarización que la propia carga induce en la superficie les impide escapar al vacío, localizándolos en la superficie como en una especie

---

<sup>53</sup> I.E. Tamm, *Z. Phys.* **76**, 849 (1932).

<sup>54</sup> W. Shockley, *Phys. Rev.* **56**, 317 (1939).



de interferómetro de Fabry-Perot electrónico en el que la estructura de bandas del cristal, por un lado, y, por otro, el potencial de interacción, asintóticamente el potencial imagen, juegan el papel de los espejos ópticos en el Fabry-Perot tradicional. Los estados imágenes han jugado el papel de la *Drosophila* en dinámica electrónica debido a su pequeño pero relevante acoplamiento con la superficie.

El problema de la energía de ligadura y vida media de estados imagen incide directamente en la posibilidad de un gas de electrones bidimensional que podría lograrse mediante dichos estados.

En mi tesis doctoral en Cambridge y posteriormente en un artículo conjunto con John Pendry<sup>55</sup> propusimos un modelo sencillo que contiene la física esencial del problema de los estados imagen y que permite predecir con claridad la energía de ligadura y la masa efectiva de dichos estados. Probamos, asimismo, un resultado general sobre la resolubilidad en energía de la serie de Rydberg inducida por el potencial imagen. Demostramos que el espectro de tipo Rydberg de estados imagen en superficies sólidas es resoluble en energía, siendo la rápida variación de la fase de la reflectividad del potencial imagen la razón fundamental de dicho resultado. Recientemente Hoeffler y Echenique han demostrado que el teorema es válido incluso fuera de la brecha<sup>56</sup>.

En aquellos momentos los efectos de estas resonancias podían, en principio, observarse indirectamente en experimentos de difracción de electrones como estructura fina en el rayo especular justo antes de la emergencia de otros rayos. Poco más que una curiosidad teórica.

Muchos años más tarde surgen técnicas modernas de observación espectroscópica que, al menos yo, no había ni siquiera vislumbrado y el estudio de los estados imagen se convierte en tema central de investigación en muchos de los mejores laboratorios del mundo.

La fotoemisión inversa (o “*bremssstrahlung spectroscopy*”) es una técnica ideal para estudiar directamente los estados ligados a las superficies directamente, midiendo su energía y el momento mediante la energía y el momento del electrón incidente y la energía del fotón emitido.

---

<sup>55</sup> P.M. Echenique, J.B. Pendry, *J. Phys. C* **11**, 2065 (1978).

<sup>56</sup> U. Hoeffler, P.M. Echenique, *Surf. Sci.* **643**, 203 (2016).

El advenimiento de potentes técnicas experimentales de fotoemisión de dos fotones resuelta en el tiempo y la tecnología láser ultrarrápida permitieron posteriormente realizar medidas precisas del tiempo de vida de estados electrónicos excitados en sólidos. La interacción responsable del corto tiempo de vida, del orden de decenas de femtosegundos, de este tipo de excitaciones electrónicas es la interacción con los electrones del sólido.

Los resultados experimentales confirman de forma clara las predicciones teóricas originales sobre la dependencia de la vida media con el índice del estado. Estos nuevos datos experimentales provocaron un salto cualitativo en el análisis teórico.

En las figuras 5.9 y 5.10 podemos ver de forma esquemática los estados superficiales intrínsecos e imagen en la brecha de la estructura de bandas proyectada en las superficies superficies (111) y (100) de Cu. Los procesos de dispersión relevantes están indicados en la Figura 5.11.

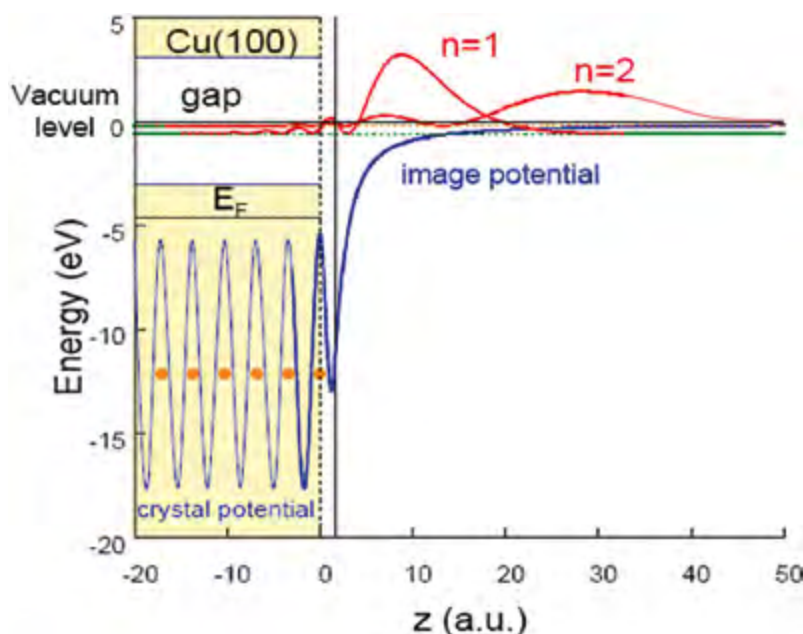


Figura 5.9: Estructura de bandas superficial, en el punto gamma, de la superficie (100) del cobre, Cu(100), mostrando la dependencia del potencial en la distancia y las funciones de onda de los dos primeros estados imagen ( $n=1$  y  $n=2$ ).

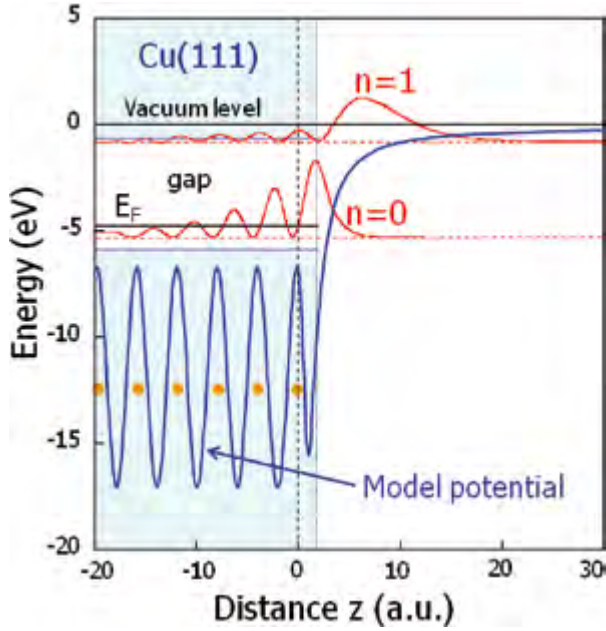


Figura 5.10: Estructura de bandas superficial, en el punto gamma, de la superficie (111) del Cu, Cu(111), mostrando la dependencia del potencial con la distancia y las funciones de onda del primer estado imagen ( $n=1$ ) y del estado de superficie ( $n=0$ ).

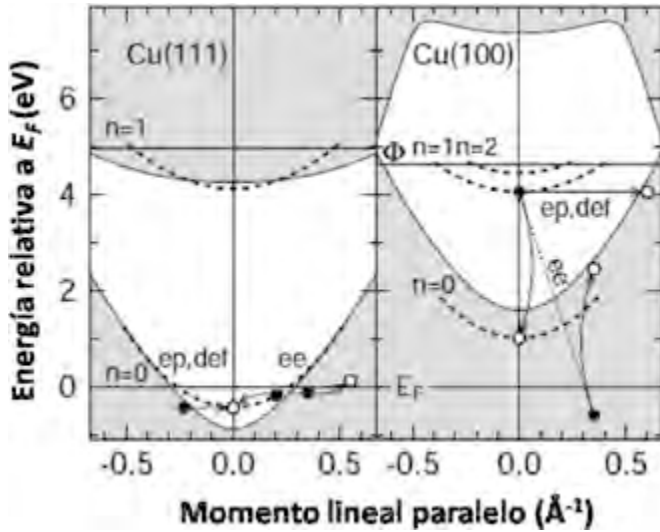


Figura 5.11: Estructura de bandas proyectada sobre la superficie (111) y (100) del cobre mostrando diversos canales para el decaimiento electrónico.

Por simplicidad al discutir los conceptos nos centraremos en dispersión de electrones, aunque podríamos hablar igualmente de huecos.

Comprender el decaimiento de las excitaciones electrónicas en estados superficiales requiere instrumentos teóricos y experimentales.

## Apantallamiento

El apantallamiento de una carga externa (ion, electrón, o hueco creado en el proceso de fotoemisión) que se introduce en un medio material es un proceso complejo de muchos cuerpos que reduce el rango efectivo de la interacción, transformando la partícula en una quasipartícula. El apantallamiento reajusta la carga en las proximidades de la partícula. En semiconductores, debido a la baja densidad de portadores libres, produce un tiempo de respuesta relativamente lento del orden de cientos de femtosegundos, de manera que la evolución del proceso de apantallamiento puede ser monitorizada directamente en el tiempo. La teoría cinética cuántica<sup>57</sup> puede describir la dinámica fuera del equilibrio de la interacción de Coulomb en dicha escala de tiempos. En los metales, sin embargo, el reajuste de la carga electrónica participando en el apantallamiento ocurre en tiempos más cortos, en el rango del attosegundo.

En el caso de fotoemisión, y para energías cinéticas pequeñas del electrón fotoemitido, dicho tiempo puede ser similar al tiempo requerido por el fotoelectrón para salir del material, por lo que los dos procesos están entrelazados. Para energías cinéticas grandes el fotoelectrón emitido está lejos de la superficie antes de que la nube de apantallamiento se forme, por lo que los dos procesos pueden considerarse independientes. Obtener más información sobre estos procesos requiere mayor conocimiento del tiempo de apantallamiento, en el interior del sólido y, mucho más difícil, en la superficie. Esto se puede obtener limitándonos a situaciones simplificadoras, por ejemplo el caso del apantallamiento de una carga positiva creada en frente de una superficie metálica.

---

<sup>57</sup> H. Haug, A.P. Jauho, “*Quantum Kinetics in Transport and Optics of Semiconductors*”, Springer-Verlag, Berlin (1998)

Hasta hace algunos años los tratamientos teóricos del apantallamiento culombiano dependiente del tiempo habían usado un modelo de electrones libres tipo gelatinio para describir el metal, tanto en teoría de perturbaciones como en tratamientos no perturbativos usando la teoría del funcional de la densidad dependiendo del tiempo. El resultado es que en un modelo de electrones libres el apantallamiento se construye localmente en la escala de los sub-femtosegundos. En los primeros momentos del apantallamiento la evolución temporal se rige por una ley universal ( $1/r_s^2$ ). Para tiempos mayores la magnitud clave es la frecuencia de plasma  $\omega_p$  y un tiempo diferente ( $1/\omega_p$ ) gobierna el proceso de apantallamiento. El apantallamiento es un proceso local en la escala del subfemtosegundo; pero las oscilaciones colectivas son las que transmiten las oscilaciones electrónicas a distancias lejanas en escalas de tiempo mayores.

Recientemente hemos estudiado el efecto de la estructura de bandas en el apantallamiento con resultados inesperados<sup>58,59</sup>. En particular, muchas superficies metálicas contienen estados superficiales, con funciones de onda fuertemente localizadas en la superficie. Estos estados superficiales forman un quasi-gas de electrones libres en la superficie. En dicha situación aparece un nuevo tipo de oscilación colectiva, el plasmón acústico, cuya energía para longitudes de onda grandes depende linealmente de la componente del momento paralela a la superficie. En estas superficies este nuevo plasmón, añadido al conocido plasmón superficial de Ritchie, aparece debido a la coexistencia de dos sistemas electrónicos de distinta dimensionalidad (un estado de superficie bidimensional y estados de volumen tridimensionales).

Un claro ejemplo de esta situación viene representado por las superficies (111) del Cu<sup>60,61,62</sup>, Au<sup>63,64</sup>, y Ag, aunque la primera detección experimental tras la predicción teórica de Silkin y colaboradores

---

<sup>58</sup> R. Díez Muiño *et al.*, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **108**, 971 (2011).

<sup>59</sup> B. Diaconescu *et al.*, *Nature* **448**, 57 (2007).

<sup>60</sup> J. Pischel *et al.*, *J. Phys. Chem. C* **117**, 26962 (2013).

<sup>61</sup> L. Vattuone *et al.*, *Plasmonics* **7**, 323 (2012).

<sup>62</sup> K. Pohl *et al.*, *Europhys. Lett.* **90**, 57006 (2010).

<sup>63</sup> L. Vattuone *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 127405 (2013).

<sup>64</sup> S.J. Park, R.E. Palmer, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 016801 (2010).

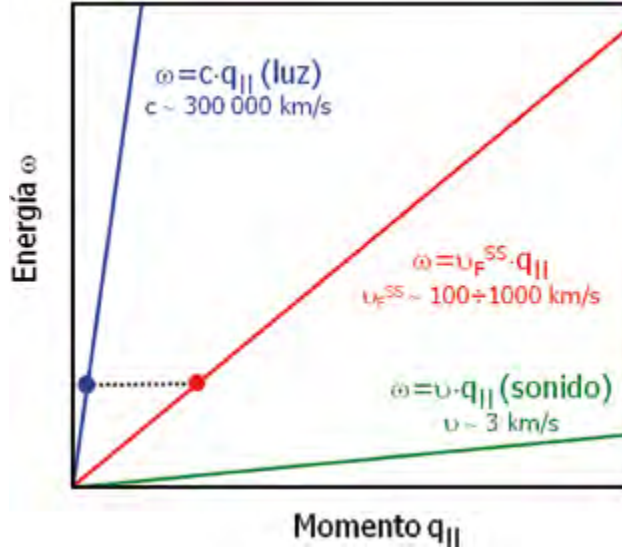


Figura 5.12: Energía respecto al momento para el caso de la luz, el plasmon acústico y ondas de sonido.

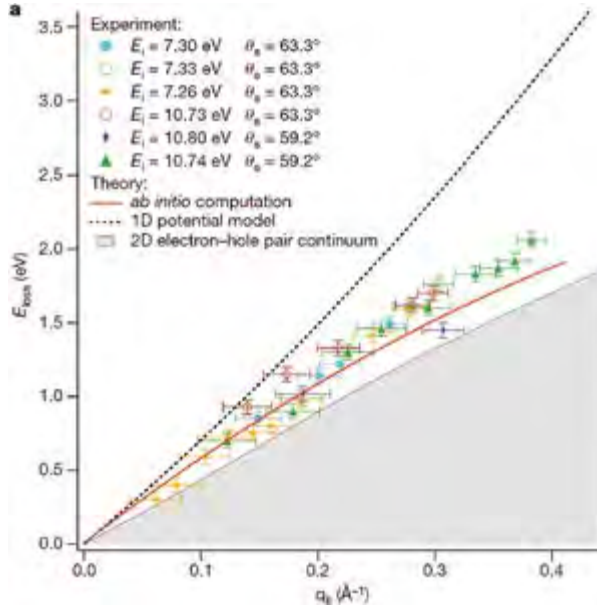


Figura 5.13: Energía de plasmones acústicos superficiales, en la superficie (000) del Berilio, en función del momento paralelo a la superficie. La línea de puntos es el resultado de un modelo unidimensional. La roja es el cálculo ab initio descrito en el texto que antecede a las medidas experimentales.

fue realizada en la superficie (1000) del Berilio<sup>65,66</sup>. El nombre plasmón acústico, con evidente referencia a ondas de sonido, no es en mi opinión el más adecuado para este nuevo tipo de oscilación electrónica; sería más adecuado llamarle el plasmón de Silkin.

Este tipo de plasmones aparecen de forma universal no solamente en superficies donde fueron predichos sino también en volumen cuando coexisten dos tipos de portadores. Ya han sido encontrados experimentalmente en Be(001) y en multitud de situaciones:

en Cu(111), en Au(111), en Au(788)<sup>67</sup>, y en el volumen, en Bi<sub>2</sub>Se<sub>3</sub><sup>68,69</sup>, y en GaAs<sup>70</sup>, así como en grafeno sobre Ru(0001)<sup>71</sup> o en grafeno sobre G/P<sub>t</sub>(111)<sup>72,73,74</sup>, en G/Ni(111)<sup>72</sup>, en G/Ir(111)<sup>75,76</sup>, y en, G/SiC(0001)<sup>76,77</sup> y DySi(2)/Si(111)<sup>78</sup>.

## SONAR CUÁNTICO

La más gentil de todas las sondas, el átomo del helio, cuando viaja rozando la superficie de un material puede oír los fonones en capas metálicas superdelgadas e informarnos sobre su interacción con los electrones<sup>79</sup>.

En el sonar cuántico una vibración localizada cinco capas por debajo de la superficie en una interfase de plomo/cobre causa una onda de densidad electrónica en la superficie del mar de Fermi. En este

---

<sup>65</sup> M. Jahn *et al.*, *Phys. Rev. B* **88**, 085453 (2012).

<sup>66</sup> B. Diaconescu *et al.*, *Nature* **448**, 57 (2007).

<sup>67</sup> M. Smerieri *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 186804 (2014).

<sup>68</sup> Y.D. Glinka *et al.*, *Nat. Commun.* **7**, 13054 (2016).

<sup>69</sup> A. Politano *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 216802 (2015).

<sup>70</sup> P. Padmanabhan *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 027402 (2014).

<sup>71</sup> D. Maccariello *et al.*, *Carbon* **93**, 1 (2015).

<sup>72</sup> A. Cupolillo *et al.*, *Surf. Sci.* **634**, 78 (2015).

<sup>73</sup> A. Politano *et al.*, *Phys. Rev. B* **86**, 085420 (2012).

<sup>74</sup> A. Politano *et al.*, *Phys. Rev. B* **84**, 033401 (2011).

<sup>75</sup> T. Langer *et al.*, *New J. Phys.* **13**, 053006 (2011).

<sup>76</sup> H. Pfner *et al.*, *J. Phys. Condens. Matter* **23**, 112204 (2011).

<sup>77</sup> C. Tegenkamp *et al.*, *J. Phys. Condens. Matter* **23**, 012001 (2011).

<sup>78</sup> E.P. Rugeramigabo *et al.*, *Phys. Rev. B* **78**, 155402 (2008).

<sup>79</sup> I. Sklyadneva *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 095502 (2011).



Figura 5.14: “Pescando bosones en el mar de Fermi”. Tomado de la referencia 80.

proceso un cuanto de energía vibracional, transmitido a la superficie por la interacción electrón fonón, es transportado fuera de la superficie por un átomo de helio que justamente roza la superficie. El átomo de helio proporciona información sobre la dinámica de los átomos en capas alejadas de la superficie en la interfase plomo/cobre.

La clave del proceso consiste en que con aproximaciones razonables se puede demostrar que la amplitud de dispersión de los átomos de helio por las fluctuaciones de densidad electrónica es proporcional a las constantes de acoplamiento electrón-fonón específicos de la lámina. Esto implica la posibilidad de medir directamente la constante de acoplamiento  $\lambda$  de cada modo, una espectroscopía resuelta en energía. La medida es relevante en muchos problemas de física de superficies tales como la superconductividad de láminas delgadas, reacciones superficiales inducidas por fonones, la catálisis y la microscopía de efecto túnel. Esto es equivalente a pescar bosones en el mar de Fermi<sup>80</sup>.

---

<sup>80</sup> P.C. Canfield, *Nat. Phys.* **4**, 167 (2008).



Los plasmones superficiales acústicos a los que nos hemos referido con anterioridad han sido observados mediante espectroscopía de pérdidas de energía, pero no en la región de energías más pequeñas en la que estos modos electrónicos coinciden con el espectro de fonones.

En esta región la superposición del plasmón acústico con el continuo de fonones de volumen proyectados en la superficie modificaría la forma espectral del plasmón acústico, adquiriendo una forma espectral del tipo resonancia de Fano.

Creemos que estas características<sup>81</sup> ya han sido detectadas, sin saberlo en experimentos de IHAS en Cu(111) y más recientemente en la nueva espectroscopía de  $^3\text{He}$  spin-echo con una resolución energética de 20 nanoelectronvoltios y una resolución angular de 0.1 grados en Ni(111) (o Cu(111)) y Cu(001). Es relevante la cita de Sófocles: “*Seek and you shall find. Unsought goes undetected*” (Sophocles en Theban plays).

---

<sup>81</sup> G. Benedek *et al.*, (para ser publicado).

## 6. ATTOFÍSICA. ESPECTROSCOPIA DE ESTADOS INTERNOS

En el último lustro algunos avances experimentales espectaculares han permitido medir la dinámica de los electrones en el rango de los attosegundos ( $10^{-18}$  s). Acceder a un dominio de tiempos tan pequeños (un attosegundo es a un segundo lo que un segundo es a la edad del universo) nos permite hacernos nuevas preguntas, preguntas que ahora pueden ser contestadas de manera científica. Preguntas sobre la posibilidad de controlar selectivamente reacciones químicas, o sobre cómo se produce el daño en sistemas biológicos, y cómo podría reducirse en el proceso de interacción de la radiación con la materia viva.

### Espectroscopía de estados internos o “core-hole”

Consideremos, por ejemplo, el caso de estados excitados localizados en adsorbatos que pueden existir sobre superficies metálicas. Tomemos, en particular, el caso de la excitación del orbital 2p a una resonancia 4s dentro de una capa de argón en una superficie metálica: un fotón excita un electrón 2p al nivel 4s ( $\text{Ar}^* (2p_{3/2}^{-1} 4s)$ ).

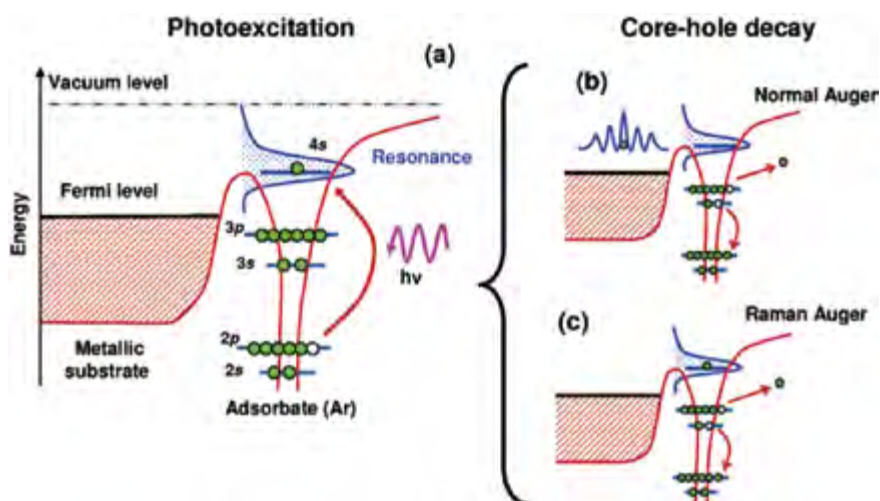


Figura 6.1: (a) Ilustración esquemática del proceso de foto-excitación desde un nivel 2p a un nivel excitado 4s de un átomo de Ar adsorbido sobre la superficie (0001) de rutenio. (b) y (c) los dos canales posibles de para la desexcitación Auger.

Tal y como ilustra la Figura 6.1, después de la excitación inicial (a) de un electrón de un nivel atómico interno 2p a la resonancia 4s, el decaimiento Auger del hueco puede ocurrir (b) una vez que el electrón en la resonancia 4s haya sido transferido al sólido (contribución “Auger normal”) o bien (c) en presencia del electrón 4s como “espectador” del proceso (contribución “Auger Raman resonante”). Estos dos procesos de decaimiento dan lugar a la emisión de electrones de distintas energías, por lo que es posible medir experimentalmente las aportaciones relativas de las diferentes contribuciones. Además, los dos procesos pueden ser distinguidos por su diferente comportamiento en función de la energía del fotón inicial que produce la excitación.

En el caso del canal resonante Raman hay una relación lineal entre la energía cinética del electrón emitido al vacío y la energía del fotón incidente. En el canal Auger normal en cambio, el electrón emitido es independiente de la energía del fotón. Es decir, el proceso Auger resonante es coherente, mientras que el Auger normal puede ser interpretado como compuesto de dos procesos incoherentes: la excitación del electrón desde un nivel profundo del átomo y su posterior transferencia al interior del sólido<sup>82</sup>, seguida por el decaimiento del hueco interno en la superficie. Si suponemos que el tiempo de decaimiento del hueco  $\tau_{ch}$  no se ve modificado por la adsorción en la superficie, se puede obtener el tiempo de transferencia de carga  $\tau_{ct}$  del electrón en el estado excitado a partir de la proporción entre el proceso resonante y el normal. Esta técnica permite medir tiempos de transferencia de carga en el rango  $0.1\tau_{ch} \leq \tau_{ct} \leq 10\tau_{ch}$ .

Valores típicos de  $\tau_{ch}$  se encuentran en un rango de entre unos pocos femtosegundos a unos 10 femtosegundos. Por lo tanto, la espectroscopía de estados internos proporciona un método eficiente para medir tiempos de transferencia de carga del orden de femtosegundos. La sensibilidad del método ha sido llevada a valores del sub-femtosegundo (régimen de attosegundo usando canales de decaimiento tipo Coster-Kronig). En las transiciones Coster-Kronig los huecos inicial y final en el proceso de decaimiento pertenecen a la misma capa electrónica, lo que conlleva mayor solapamiento y por lo tanto mayores elementos de matriz y tiempos de decaimiento más cortos, por debajo del femtosegundo.

---

<sup>82</sup> W. Wurth, D. Menzel, *Chem. Phys.* **251**, 141 (2000).

La dinámica de la transferencia de carga de una monocapa de argón sobre Ru(0001) ha sido estudiada por Sánchez-Portal y colaboradores evaluando la función de Green de superficie a partir de información procedente de cálculos ab-initio basados en el método del funcional de la densidad<sup>83</sup>. Utilizando el valor experimental de 3.5 Å para la distancia Ru-Ar; el valor teórico para el tiempo de transferencia de carga de la resonancia 4s al interior del Ru está en el rango de 1.9-2.5 fs, en buen acuerdo con el dato experimental de 1.5 fs.

Uno de los resultados más sorprendentes de este cálculo es la dependencia débil del tiempo de transferencia de carga con la distancia de la monocapa de argón del sustrato. Usualmente esperamos una dependencia exponencialmente decreciente con la distancia, asociada a los procesos túnel a través de la barrera de potencial que separa la región del adsorbato del potencial efectivo en el interior del metal. La explicación de este hecho radica en la estructura electrónica de la superficie del Rutenio.

Para energías mayores que 2 eV por encima del nivel de Fermi, el Ru(0001) presenta una brecha en la estructura de bandas proyectada en la superficie alrededor del punto como puede verse en la Fig. 6.2.a. El punto clave es que en la brecha del número de estados disponibles para la propagación en Ru crece cuando nos movemos hacia menores energías, por lo que para una resonancia como la 4s que se encuentra dentro del gap, cuanto menor es la energía menor es el tiempo de transferencia. Es interesante que esto es exactamente lo opuesto a lo que ocurriría si el proceso fuese un proceso túnel a través de barrera de potencial en la superficie (Fig. 6.2.c). En el cálculo completo, la posición energética del nivel del adsorbato baja a medida que este se separa de la superficie. Por ello, el efecto de una mayor separación Ar-Ru se compensa parcialmente con la reducción del tiempo de transferencia a menores energías, dando lugar a una dependencia muy suave con la distancia y un comportamiento inesperado.

El caso de S absorbido en Ru ha sido objeto de un análisis experimental y teórico conjunto realizado por varios grupos alemanes

---

<sup>83</sup> D. Sánchez-Portal, D. Menzel, P.M.Echenique, *Phys. Rev. B* **76**, 235406 (2007).

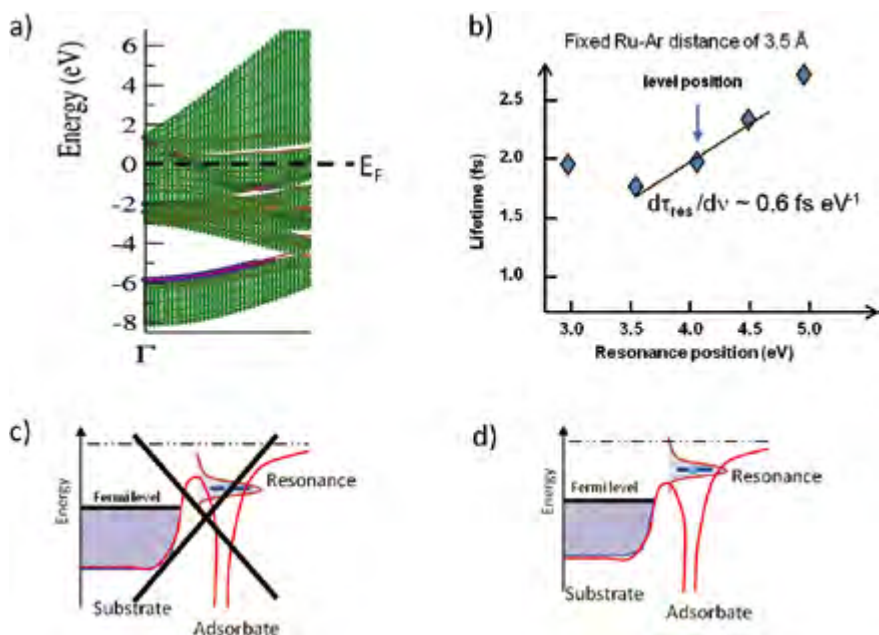


Figura 6.2: (a) Esquema de la estructura del bandas de la superficie Ru(0001): las líneas finas corresponden al cálculo basado en primeros principios utilizando una lámina finita de material, las bandas resaltadas en azul corresponden a estados de superficie, mientras las zonas rayadas en verde indican la proyección de las bandas de volumen a lo largo de la dirección normal a la superficie. (b) Cálculo del tiempo de transferencia de carga desde un nivel 4s de un átomo de argón sobre Ru(0001) en función de la energía de dicho nivel para una altura fija Ar-Ru de 3.5 Å. La energía experimental del nivel es cercana a 3.5 eV sobre el nivel de Fermi. El potencial efectivo que siente el electrón 4s en el sistema está más fidedignamente representado por el esquema en el panel (d), es decir a la energía de la resonancia 4s no existe una barrera de potencial como la representada en (c) para adentrarse en el rutenio. Sin embargo, los procesos de dispersión que sufre el electrón, y que se reflejan en la estructura del bandas proyectada (a), crean una barrera efectiva que dificulta/retarda la transferencia de carga Ar-Ru y la dota del peculiar comportamiento representado en el panel (b).

y el grupo de San Sebastián<sup>84</sup>. En este sistema se produce una interacción superficie-adsorbato mucho más fuerte que en el caso de una monocapa de argón discutido anteriormente, lo que conlleva que los tiempos de transferencia de carga sean más pequeños que en el caso del Ar. Afortunadamente, en el caso del azufre el reloj interno

<sup>84</sup> A. Fölsch et al., *Nature* **436**, 373 (2005).

del hueco ( $2s$ ) es una transición Coster-Kronig, mucho más rápida que las transiciones Auger estándar que involucran capas electrónicas atómicas con distinto número cuántico principal. El resultado teórico ( $0.63 \pm 0.15$  fs), calculado para el caso de luz polarizada a lo largo de la normal a la superficie compara bien con el experimental de 0.32 fs. Para diferentes polarizaciones de la radiación incidente, y debido a la distinta simetría de los orbitales involucrados, la teoría predice un incremento del tiempo de transferencia de carga, siendo máximo dicho tiempo ( $1.15 \pm 0.15$  fs) para el caso de la polarización paralela a la superficie. Esta predicción de Sánchez-Portal y colaboradores fue posteriormente comprobada por Wurth y colaboradores<sup>85</sup>.

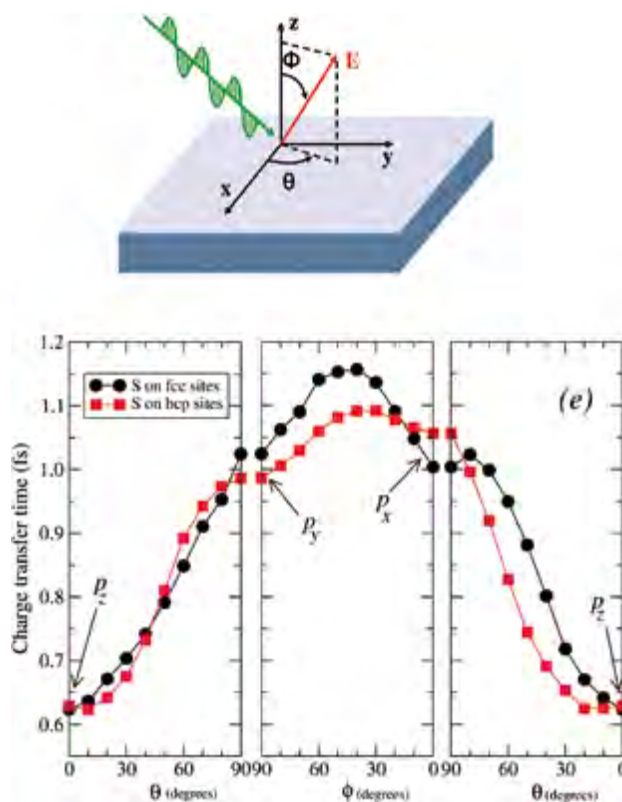


Figura 6.3: Dependencia con la dirección de polarización del campo incidente del tiempo de transferencia de carga desde un átomo de azufre a la superficie de rutenio en el sistemas  $c(4 \times 2)$  S/Ru(0001). Los datos se presentan en función del ángulo cenital y acimutal con respecto a la normal a la superficie.

<sup>85</sup> M. Deppe *et al.*, *J. Chem. Phys.* **127**, 174708 (2007).

## Espín

Cuando el sustrato es ferromagnético, el tiempo de transferencia dependerá del espín del electrón excitado. La dependencia de la vida media de las excitaciones electrónicas ha sido analizada en el interior de sólidos ferromagnéticos<sup>86,87,88,89</sup> en estados imagen de superficies ferromagnéticas. En trabajos teóricos pioneros Díez-Muiño, Sánchez-Portal y colaboradores han estudiado la dependencia con el espín de la transferencia de carga ultrarrápida en el caso de átomos de Cs sobre la superficie (110) del Fe<sup>90</sup>. En este trabajo se analiza el caso de la creación de un hueco en el estado 5p del Cs, mediante la excitación del electrón a una resonancia desocupada con carácter dominante 6s. El estado interno 5p del átomo de Cs está desdoblado debido a la interacción espín-órbita, por lo que es posible excitar electrones con orientación de espín bien definida utilizando luz polarizada circularmente<sup>91</sup>.

Las estructuras de banda superficiales del Fe(110) son diferentes para cada una de las orientaciones del espín, por lo que la transferencia de carga depende fuertemente del espín electrónico. Debido a la mayor densidad de estados desocupados (a la energía de la resonancia 6s) para el caso de espín minoritario, intuitivamente uno podría esperar que la transferencia de electrones con dicha orientación de espín debiera ser más rápida que la de los electrones con espín mayoritario. El resultado del análisis teórico es, sin embargo, el opuesto. Los tiempos de transición son más pequeños para el espín mayoritario.

Sin entrar en los detalles técnicos de un cálculo complejo y sofisticado, los resultados se pueden entender de una manera relativamente simple. La Figura 6.4 muestra la estructura de bandas, y densidad de estados, superficial de la superficie (110) de Fe para las dos orientaciones de espín, junto con la posición energética de la resonancia 6s. Los paneles laterales muestran la densidad de estados proyectada con

---

<sup>86</sup> M. Aeschlimann *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 5158 (1997).

<sup>87</sup> V.P. Zukhov, E.V. Chulkov, P.M. Echenique, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 096401 (2004).

<sup>88</sup> V.P. Zukhov, E.V. Chulkov, P.M. Echenique, *Phys. Rev. B* **72**, 155109 (2005).

<sup>89</sup> V.P. Zukhov, E.V. Chulkov, P.M. Echenique, *Phys. Rev. B* **73**, 125105 (2006).

<sup>90</sup> R. Díez Muiño *et al.*, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **19**, 08, 971 (2011).

<sup>91</sup> G. Schönhense, A. Eyers, U. Heinzmann, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 512 (1986).

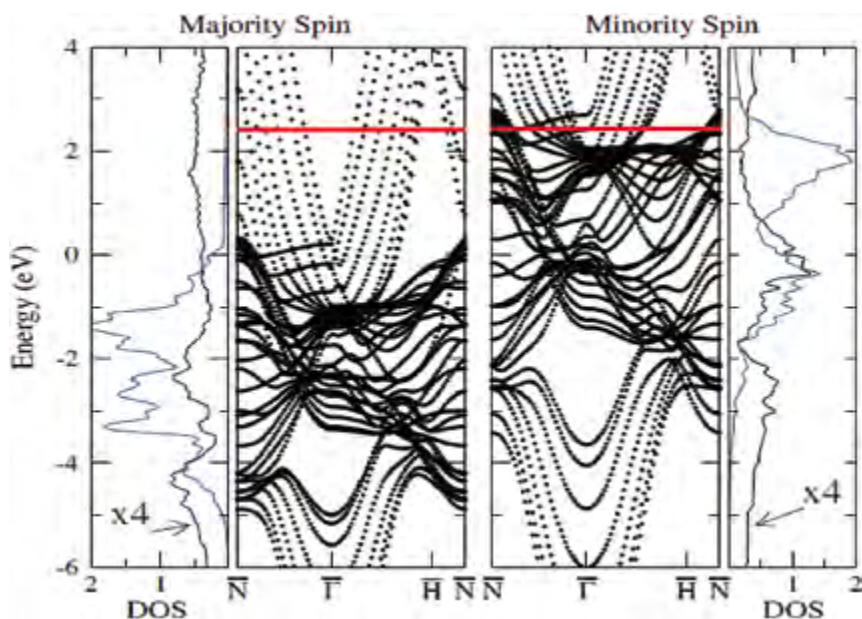


Figura 6.4: Paneles centrales: Estructura de bandas de la superficie Fe(110) para la orientación de espín mayoritaria y minoritaria. La línea roja indica la posición calculada para la resonancia 6s del Cs adsorbido. Paneles laterales: Correspondiente densidad de estados para el caso mayoritario (izquierda) y minoritario (derecha). La línea azul muestra la densidad de estados total, mientras la línea negra muestra la densidad de estados pesada por la contribución de los orbitales de Fe 4s y 4p a cada estado electrónico (y multiplicada por cuatro).

los átomos de Fe para diferentes simetrías. La densidad de estados minoritaria tiene un claro pico hacia 2 eV por encima del nivel de Fermi, debido a las bandas del Fe. Por encima del nivel de Fermi, la densidad de estados 4sp muestra un comportamiento plano para las dos orientaciones de espín siendo un poco mayor para el espín mayoritario a la energía de la resonancia (ver línea roja en la figura). A pesar de la mayor densidad total de estados, los cálculos muestran que la anchura de la resonancia 6s es de 135 meV (4.9 fs) para el espín mayoritario, siendo 81 meV (8.1 fs) para el espín minoritario. En otras palabras, y en contra de una primera intuición, el tiempo de transferencia para los electrones excitados con espín mayoritario es apreciablemente más pequeño que en el caso de electrones con espín minoritario.

La razón última de este hecho es que el acoplamiento de la resonancia 6s a los estados con simetría sp en la superficie de Fe es



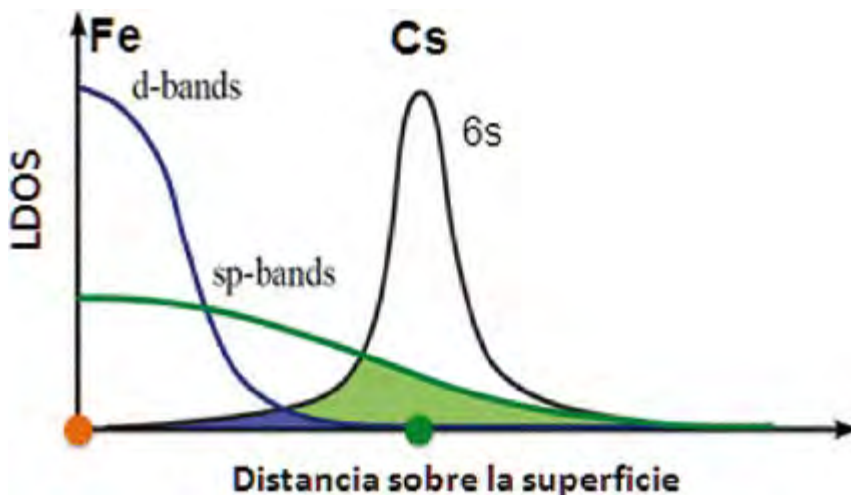


Figura 6.5: Esquema que ilustra el muy diferente decaimiento hacia el vacío de los estados con fuerte carácter 4sp y 3d del Fe. Los orbitales Fe 4sp decaen lentamente en función de la distancia, por lo que solapan fuertemente con los estados de los átomos adsorbidos sobre la superficie.

mucho más fuerte que el acoplamiento a los electrones d. Esto se debe a la mayor extensión espacial de los orbitales 4sp del Fe, que decaen mucho más lentamente hacia el vacío que los Fe 3d.

Los elementos de matriz (la probabilidad de transición depende del cuadrado del elemento de matriz) entre los estados Cs 6s y Fe 4sp son un orden de magnitud mayores que entre los Cs 6s y Fe 3d.

En la energía de la resonancia, la densidad de estados sp mayoritarios es aproximadamente un 50% más grande que la de los minoritarios. Como conclusión, la transferencia elástica de carga desde estados excitados al interior de una superficie ferromagnética puede ser selectiva en espín de una manera controlada. Los tiempos dependen de la orientación de espín, lo que puede ser útil e importante en posibles aplicaciones en espintrónica. Por otro lado, el hecho de que la transferencia sea más rápida para electrones con espín mayoritario o minoritario dependerá de la combinación concreta adsorbato/superficie, y vendrá determinada por las condiciones específicas del acoplamiento entre la resonancia y la estructura de bandas superficial (por ejemplo, por la energía a la que aparece la resonancia asociada al adsorbato).

El único experimento selectivo en espín ha sido realizado recientemente<sup>92</sup>, para los casos de Ar/Fe(110), Ar/Ni(111) y Ar/Co(0001). Los resultados, contrariamente al caso del Cs/Fe(110), indican que el tiempo de transferencia de los minoritarios es menor que el de los mayoritarios (2.1 fs para los minoritarios y 2.7 fs para los mayoritarios en el caso del Fe(110)). Estos resultados siguen la tendencia cualitativa de la densidad de estados, la cual ha sido confirmada por cálculos recientes de Sánchez-Portal y colaboradores<sup>93</sup>. Los cálculos explican el orden de magnitud correcto, y, a diferencia de la tendencia cualitativa de la densidad de estados, predicen que las vidas medias del Ar/Co(001) sean mayores que en el caso del Ar/Fe(110).

---

<sup>92</sup> F. Blobner *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 086801 (2014).

<sup>93</sup> M. Müller, D. Sánchez-Portal, P. M. Echenique, (en preparación).

## 7. ATTOFÍSICA. ESPECTROSCOPIA. “STREAKING”

La espectroscopía de fotoemisión se basa en el efecto fotoeléctrico explicado por Einstein hace más de 100 años. Sabemos que los fotoelectrones emitidos por la luz en un metal tienen una energía cinética que depende de la energía del fotón incidente y de la energía inicial de ligadura del electrón. Por lo tanto, la fotoemisión proporciona información sobre los estados electrónicos ocupados del material. La fotoemisión resuelta en tiempo fue originalmente implementada en el rango del picosegundo al femtosegundo<sup>94,95</sup>.

Se han realizado experimentos de fotoemisión asistidos por láser con resoluciones<sup>96</sup> limitadas a  $> 10$  fs. En un experimento pionero, se utilizan pulsos por debajo del sub-femtosegundo en el ultravioleta extremo (XUV) para la excitación coincidiendo con láser en el infrarrojo cercano (NIR) como prueba para estudiar la dinámica de fotoelectrones emitidos en la superficie (110) de wolframio, (110) y usando la técnica streaking observan que los electrones que tienen su origen en estados profundos del metal (4f) son emitidos con un retraso de aproximadamente 100 attosegundos con respecto a los que provienen de la banda de conducción<sup>97</sup>.

La cámara “streak” es un instrumento para medir la variación de la intensidad de un pulso de luz con el tiempo. En la cámara original de Wheastone en 1834, un espejo giratorio se usa para transformar las variaciones de luz de un pulso en una distribución espacial.

En los experimentos actuales de attosegundo lo que se transforma es tiempo en energía. Según el momento en el que el electrón sea emitido, éste encontrará una u otra parte del ciclo del láser y dependiendo de ello será acelerado o desacelerado.

La espectroscopía streaking de attosegundo es un instrumento único para estudiar procesos electrónicos ultrarrápidos con resolución por debajo del femtosegundo tanto en átomos como en sólidos.

---

<sup>94</sup> U. Höfer *et al.*, *Science* **277**, 1480 (1997).

<sup>95</sup> H. Petek, S. Ogawa, *Prog. Surf. Sci.* **56**, 239 (1997).

<sup>96</sup> L. Miaja-Avila *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 113604 (2006).

<sup>97</sup> A.L. Cavalieri *et al.*, *Nature* **449**, 1029 (2007).

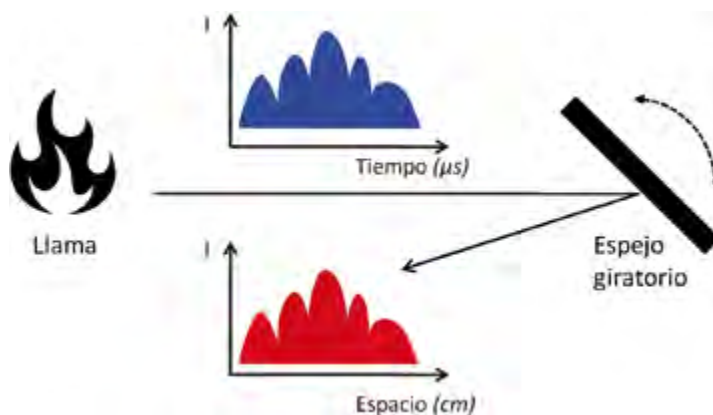


Figura 7.1 La variación temporal de la intensidad de luz de la llama se traslada a una dependencia espacial a través de un espejo giratorio que refleja la luz.

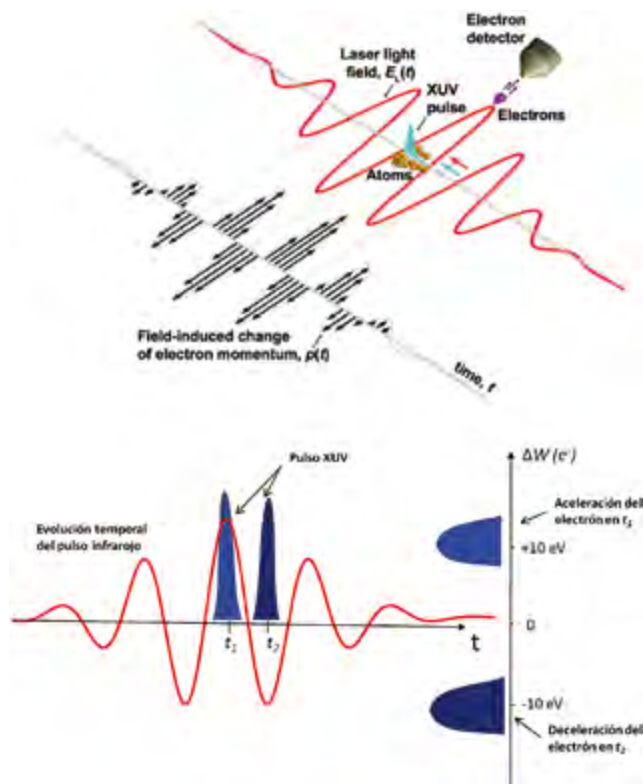


Figura 7.2: Ilustración de la aceleración/deceleración del electrón emitido (detectado como pulso XUV) dependiendo del acoplamiento con la amplitud del láser infrarrojo. El tiempo se refleja en la dependencia energética.

Los procesos producidos por la excitación instantánea de un electrón en un sólido son muy complicados entrando en juego varios mecanismos. En primer lugar, los electrones del metal se mueven en el campo de la red atómica del sólido, lo que en principio podría afectar a la velocidad del paquete electrónico dentro del sólido. En segundo lugar, el electrón después de su eyección deja un hueco cargado positivamente que es apantallado dinámicamente por los otros electrones. En tercer lugar, el electrón excitado sufre colisiones inelásticas de diverso tipo con los electrones del metal y ello determina su recorrido libre medio o, si se prefiere, la parte imaginaria de la autoenergía. La componente normal del campo del láser decrece abruptamente hasta un valor pequeño, y este decrecimiento depende de las condiciones del experimento y del material.

Los pasos más exitosos para describir la compleja situación experimental se han dado usando modelos unidimensionales. La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, en la que los potenciales usados para describir, por una parte, la interacción con la red, con los electrones del sólido y, por otra parte, el apantallamiento del hueco y del láser en el interior del sólido se deducen mediante cálculos de primeros principios<sup>98,99</sup>.

El retraso en la emisión de los electrones  $f$  con respecto a la banda de conducción en el caso del W(110) es de unos 100 as. Sin embargo, esto se encuentra en clara contradicción con el experimento del Mg (0001) en el que hay un retraso nulo entre la emisión de los electrones de la banda de conducción y el nivel profundo.

Esta aparente contradicción es aclarada en el trabajo de Borisov<sup>99</sup>, en el que se combina la teoría convencional de fotoemisión<sup>100</sup> y la dinámica de eyección en tiempos de attosegundos en sólidos. En este trabajo se demuestra que así como la emisión de los niveles localizados ocurre predominantemente en el interior del sólido, en la banda de conducción con los electrones deslocalizados la emisión viene determinada por dos contribuciones: una emisión no-resonante

---

<sup>98</sup> A.K. Kazansky, P.M. Echenique, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 177401 (2009).

<sup>99</sup> A.G. Borisov *et al.*, *Phys. Rev. B* **87**, 121110 (2013).

<sup>100</sup> W. Shattke, M.A. Van Hove, “*Photoemission and related methods*”, Wiley-VCH, Weinheim (2003).

en la superficie, y, para determinadas energías y dependiendo de la estructura de bandas del sólido, una emisión resonante de volumen causada por emisión electrónica debida a transmisiones interbanda de volumen para determinados valores del momento de Bloch. Con ello se explican los primeros datos experimentales del W, los nuevos del Mg, y se predice una dependencia de la emisión electrónica con la energía del pulso de attosegundo en el ultravioleta extremo. Para ello, se construyen potenciales unidimensionales que reproduzcan las características tridimensionales de transiciones interbanda de volumen. Los resultados de los cálculos se pueden explicar de una forma sencilla: en resonancia los tiempos de vida inelásticos de los dos electrones, los originados de estados, localizados  $\tau_{LS}$  y de valencia  $\tau_{VB}$  cuentan (caso del experimento del Mg), mientras que fuera de la resonancia el tiempo que cuenta es el de los electrones localizados ya que los deslocalizados se emiten en la misma superficies (caso del primer experimento en W).

La diferencia temporal entre la emisión de la banda de valencia (V) y la de los estados localizados viene dada por  $\Delta = \tau_{LS} - \tau_{VB}$ , la cual viene determinada en gran medida y suponiendo que los electrones emitidos en la superficie encuentran el campo streaking sin retraso, por la parte imaginaria de la autoenergía o, en otras palabras, por el recorrido libre medio y la velocidad del estado final

$$\Delta = \tau_{LS} - \tau_{VB} \approx \frac{\lambda_{LS}}{\sqrt{2E_{LS}}} - (1 - P) \frac{\lambda_{VB}}{\sqrt{2E_{VB}}}$$

junto con el peso relativo de la emisión superficial y la emisión resonante de volumen en el caso de los electrones deslocalizados (P).

Esta ecuación nos lleva a 85 attosegundos en el caso del experimento pionero en el W y a  $\Delta \approx 0$  en las condiciones del experimento original en Magnesio.

En el caso del W(110) los electrones deslocalizados llegan a la superficie 100 as antes, tal como se indica en el artículo pionero publicado en *Nature* de Cavalieri y colaboradores, lo que es consistente con la fuerte contribución del estado superficial a la fotoemisión VB para energías del fotón inicial de 100 eV. Cuando el proceso resonante de volumen domina, como es el caso del experimento en Mg(0001), el retraso calculado es más pequeño, 10-20 as, y concuerda con los

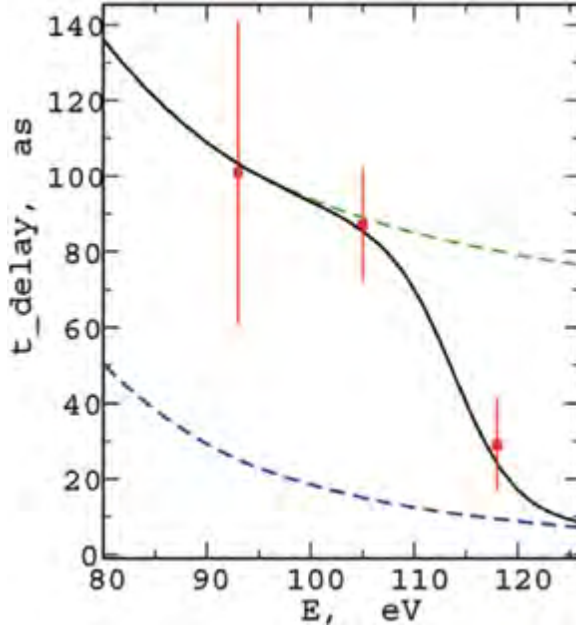


Figura 7.3: Dependencia con la energía del fotón inicial del retraso temporal de los electrones emitidos del nivel 4f del Wolframio (en el W(110)) con respecto a la banda de conducción. Los puntos rojos son datos experimentales.

resultados experimentales. La dependencia con la energía del fotón inicial en el caso del W aparece en la figura.

Cuando las resonancias son cercanas al límite de zona, los retrasos VB/LS pueden variar rápidamente. Muy recientemente, Krasovskii y colaboradores<sup>101</sup> han demostrado el papel crucial que el campo que excita el electrón sigue jugando durante la propagación del electrón, y han concluido que la interacción con la red del electrón en su camino hacia la superficie puede implicar que el paquete de onda electrónico se propague más rápidamente que el electrón libre con una velocidad mayor que la de grupo.

## Semiconductores planares

Un trabajo conjunto teórico experimental de los grupos de Bielefeld y San Sebastián para semiconductores organizados en capas, indica

<sup>101</sup> E.E. Krasovskii *et al.*, *Phys. Rev. B* **94**, 195434 (2016).

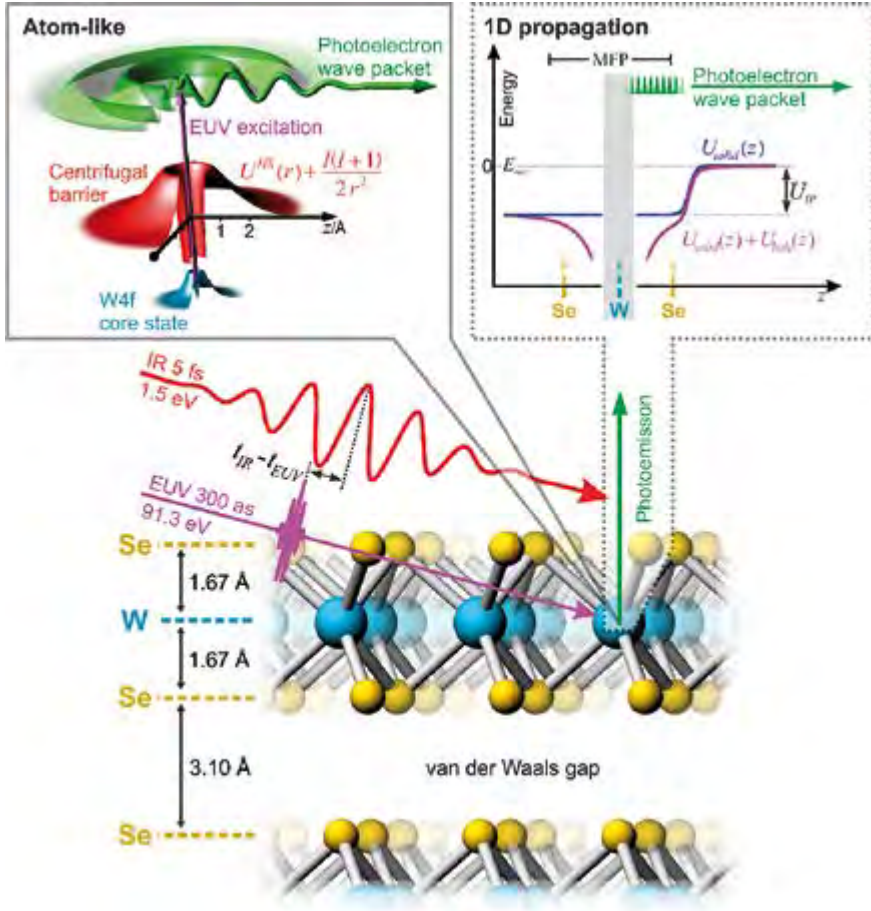


Figura 7.4: Pasos elementales en fotoemisión de un cristal de van der Waals WSe<sub>2</sub>.

que incluir efectos atómicos, bajo retardo de Wigner, es necesario para entender los datos experimentales.

Un material adecuado para estudiar la fotoemisión resuelta en tiempo mediante el método de streaking es el dicalcogenuro WSe<sub>2</sub> de metal de transición.

En la figura 7.4 se muestra una representación esquemática del sustrato utilizado WSe<sub>2</sub> y los principios de la espectroscopía de streaking de attosegundo resuelta en tiempo. El cristal está compuesto por capas 2D de WSe<sub>2</sub> con enlaces covalentes que interactúan débilmente



con capas vecinas vía el espacio de van der Waals formando así el plano natural de rotura. La superficie se ilumina colinealmente con un pulso ultravioleta extremo EUV de 300 as de duración y energía de 91 eV, y con unos pocos ciclos intensos de campo de streaking infrarrojo IR con un ángulo de incidencia de 83°. El pulso de attosegundos de EUV excita electrones de los constituyentes (aquí mostrados para la fotoemisión de W 4f) del WSe<sub>2</sub> que son “streakeados” en el campo IR; es decir, ganan o pierden energía cinética dependiendo del tiempo de correlación entre el evento de fotoemisión y la amplitud del campo IR. Tal y como se indica en el panel superior izquierdo el estado inicial de la fotoemisión está dominado por un comportamiento de tipo atómico: En la aproximación de física atómica de Hartree-Slater (HS) la dinámica de la onda del fotoelectrón (verde) creada por la excitación EUV del estado W 4f (azul) está gobernada por el potencial radial efectivo (rojo) compuesto por el potencial HS ( $U^{HS}$ ) y el término centrífugo. El estado posterior, cuando el fotoelectrón abandona el átomo, es representado esquemáticamente en el panel derecho. La propagación del fotoelectrón para la emisión normal está dominada por un potencial unidimensional (1D) que da cuenta del potencial interno  $U_{ip}$  del WSe<sub>2</sub> y la interacción con el foto-hueco remanente. El recorrido libre medio (MFP) inelástico de los procesos de fotoemisión considerados aquí se muestra con una barra.

Por un lado el espectro de fotoemisión producido por un rayo en el ultravioleta extremo (EUV) está dominado por cuatro picos de emisión. Una emisión de la banda de valencia (VB) centrado en una energía cinética (energías en eV)  $E_{cin}(VB)=87.0$  y fotoemisión desde los niveles profundos Se4s, W4f y Se3d a energías  $E_{cin}(Se4s)=73.5$ ,  $E_{cin}(W4f)=54.2$  y  $E_{cin}(Se3d)=32.2$  respectivamente. Por lo tanto la fotoemisión en el ultravioleta extremo usando 91 eV proporciona acceso a cuatro canales diferentes de emisión con diferentes características del estado inicial. La elección de este sustrato es muy adecuada por otras razones. La estructura en capas del WSe<sub>2</sub> permite identificar a qué profundidad se ha emitido un determinado electrón. La separación entre capas vecinas de Se<sub>2</sub> W es de 6.44 Å y el recorrido libre medio (MFP) es de unos 4.5 (Å) por lo que la fotoemisión de la siguiente capa de WSe<sub>2</sub> contribuye de forma leve a la señal total. Las condiciones del experimento<sup>102</sup> proporcionan una resolución de 10 as que permite

---

<sup>102</sup> F. Siek *et al.*, *Nat. Phys.* (to be published).

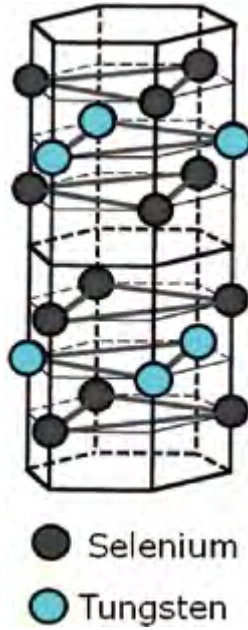


Figura 7.5: Estructura cristalina del  $\text{WSe}_2$ .

evaluar no solamente el retraso relativo de los electrones en su viaje al exterior del sólido sino, y por primera vez en sólidos, el retraso en el propio proceso de emisión atómico. Las diferencias temporales obtenidas experimentalmente son  $\Delta = \tau_{\text{VB-Se}4s} = 12 \pm 10$  as;  $\Delta = \tau_{\text{Se}3d-\text{Se}4s} = 28 \pm 10$  as y  $\Delta = \tau_{\text{W}4f-\text{Se}4s} = 47 \pm 14$  as.

Ello nos indica la siguiente secuencia de fotoemisión. Los electrones emitidos desde el Se 4s son los que llegan primero, unos 10 attosegundos más tarde llegan los electrones emitidos desde la banda de valencia ( $\Delta = \tau_{\text{VB-Se}4s} = 12$  as) después aparecen los emitidos desde el Se3d ( $\Delta = \tau_{\text{Se}3d-\text{Se}4s} = 28$  as). Finalmente llegan los emitidos desde el W4f ( $\Delta = \tau_{\text{W}4f-\text{Se}4s} = 47$  as). El comportamiento cualitativo es claro y muestra un claro ordenamiento con respecto al creciente momento angular de los estados iniciales envueltos en la emisión. La emisión desde el Se4s es más rápida a pesar de que la energía cinética del fotoelectrón es más pequeña que la emisión de la banda de valencia (VB) por lo que en principio debía ser más lenta. La emisión desde el estado con mayor momento angular, el 4f del W es la que llega más tarde a pesar de tener mayor energía cinética que los que se originan en el Se3d que llegan antes. Una adscripción de momento angular a la banda

de valencia es difícil, pero el enlace en  $\text{WSe}_2$  está dominado por el  $\text{Se}2p$  y los orbitales  $5d$  del  $\text{W}$  y por lo tanto la emisión de la banda de valencia, UB, también se adecua al creciente retraso al crecer el momento angular. Este orden proporciona la primera pista de que el proceso inicial de emisión en el mismo átomo está afectando la cinética de la fotoemisión. Sin embargo el efecto es sutil y se necesita un cuidadoso análisis teórico para identificar claramente los efectos claves en la cinemática de la emisión electrónica.

X	$E_{\text{cin}}^X - E_{\text{cin}}^{\text{scfs}}$	Exp.	Teoría	Retraso atómico	Retraso propagación
			total incl. HS / MSDF	HS / MCDF	1D TDSE, MFP=4.5
VB 4p/5d	13.5 eV	$12 \pm 10$	12 / 12	6 / 6	6
Se 3d	-41.3 eV	$28 \pm 10$	29 / 24	15 / 10	14
W 4f	-19.3 eV	$47 \pm 14$	42 / 34	20 / 12	22

En la tabla se resumen los retrasos temporales y se comparan con las predicciones teóricas. Para estimar teóricamente los retrasos en fotoemisión se separan los dos procesos: el proceso de propagación en el sólido y el proceso inicial atómico interno de emisión en el átomo.

Para modelizar la propagación del electrón emitido durante su viaje por el sólido usamos, tal como hemos indicado anteriormente, usamos una ecuación de Schrödinger unidimensional dependiente del tiempo en el que se adaptan al modelo unidimensional los ingredientes físicos esenciales modelados desde primeros principios, el potencial inerte del sólido, los procesos inelásticos, la interacción del fotoelectrón con el hueco producido, y la penetración del campo de infrarrojos con el sólido. En la dirección perpendicular en la superficie la componente normal del campo es la importante.

Los resultados obtenidos con este modelo difieren sistemáticamente de los resultados experimentales. Los retrasos atómicos son esencialmente, de manera sencilla, la derivada del desfase efectivo con respecto a la energía, se calculan, usando o bien un modelo Hartree-Slater (HS) de electrones independientes o bien un modelo multiconfiguración Dirac-Fock (MCDF)<sup>103</sup> que incluye correlaciones

---

<sup>103</sup> I.P. Grant, "Methods in Computational Chemistry" 2, 1, Plenum Press (1988).

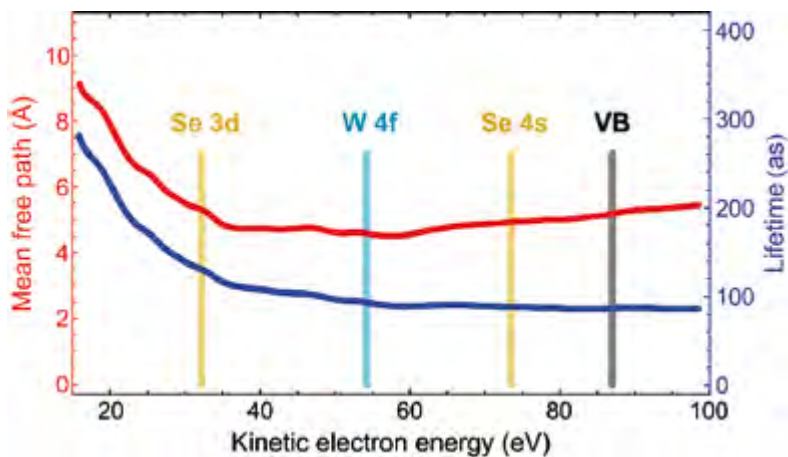


Figura 7.6: Recorrido libre y vida media, calculados basados en primeros principios, de los electrones emitidos en el WSe<sub>2</sub> en función de la energía del electrón emitido. La posición energética de los electrones emitidos desde los niveles relevantes en el experimento se muestra con bandas.

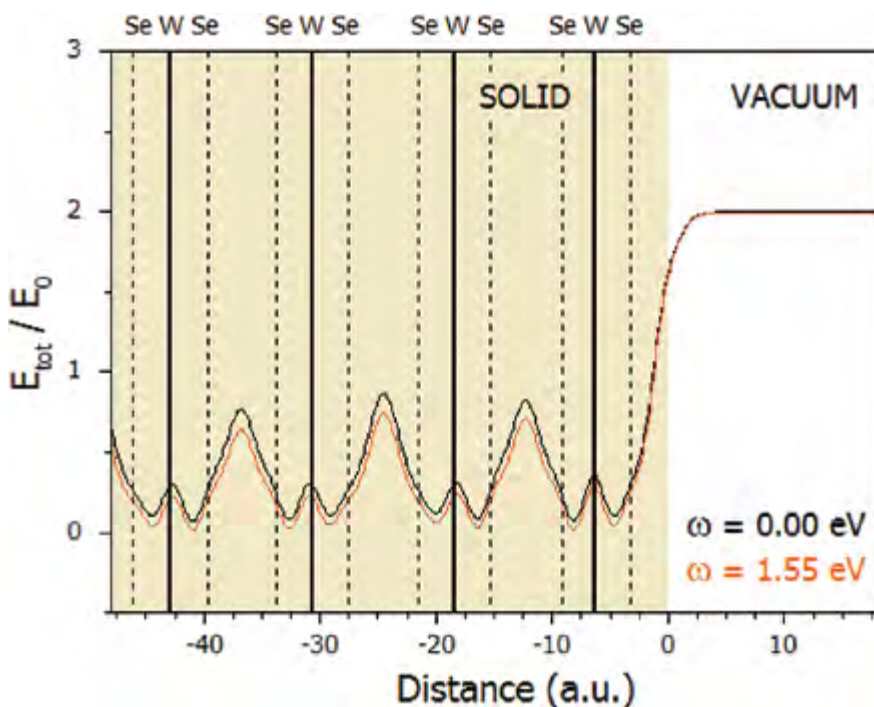


Figura 7.7: Campo inducido, cálculo basado en primeros principios, del laser de infrarrojos en función de la distancia perpendicular a la superficie en WSe<sub>2</sub>.

electrónicas y efectos relativistas. El proceso de fotoemisión se retrasa más al aumentar el momento angular, debido a la barrera centrífuga. La barrera domina la cinemática en el momento inicial para distancias menores que  $1 \text{ \AA}$ . Ésta fuerte localización atómica permite la separación espacial del proceso de emisión en un paso inicial atómico y posterior propagación dentro del sólido. El retraso debido al largo alcance del potencial de Coulomb se substrahe del cálculo pues el efecto de la interacción electrón-hueco ya está implementado en el modelo de propagación.

Retrasos atómicos y efectos de propagación separadamente no pueden explicar los resultados experimentales. Cuando los dos se incluyen simultáneamente el retraso total coincide sorprendentemente bien con los datos experimentales lo que confirma que efectos atómicos locales afectan significativamente al estado del fotón emitido en sólidos.

Los modelos actuales de fotoemisión se basan en estados excitados que reflejan la simetría de la red y la rotura de la misma en la superficie. El análisis anterior indica que además de estudiar la fotoemisión resuelta en tiempo también hay que tener en cuenta el paquete de onda excitado inicialmente y que está dominado por la simetría esférica del átomo. Se necesita un cierto tiempo para que la onda inicial se propague a átomos vecinos y el fotoelectrón sienta la simetría del volumen. Incorporar estos instantes iniciales localizados en átomos particulares será necesario para entender el proceso de fotoemisión.

## 8. REDUCCIONISMO. EMERGENCIA

En términos filosóficos es esencial distinguir entre tres tipos de reduccionismos. El primero es el metodológico o constituyente que todos compartimos, donde uno divide un sistema complejo en subsistemas más pequeños para estudiarlo mejor. El segundo es el reduccionismo conceptual o epistemológico, según el cual las propiedades de un nivel pueden ser derivadas directamente de las de las “leyes” de los niveles anteriores; esta hipótesis construccionista ha sido probada errónea en muchos casos donde la emergencia de nuevos fenómenos no puede ser derivada directamente del entendimiento de los niveles inferiores. Tal como recientemente nos recordaba Carlos Belmonte: *“La moderna neurobiología ha abordado el cerebro, tanto a partir de una perspectiva reduccionista [...], como con planteamientos holistas, [...]. Ambas aproximaciones son válidas y complementarias para entender científicamente el cerebro”*<sup>104</sup>. El tercer tipo de reduccionismo, que es el más fuerte, es el reduccionismo causal u ontológico. De manera simple podríamos describirlo con la idea de que un nivel no es “nada más” que el inferior, y así hasta las partículas elementales; el todo no es más que la suma de las partes. La única realidad se reduce ontológicamente al nivel más simple.

La física de la materia condensada nos enseña que el paso de un nivel de complejidad a otro superior no es posible simplemente mediante la aplicación directa de los resultados del nivel anterior, sino que requiere nuevas ideas, nuevos principios que son característicos del nivel superior. Nos enseña que el reduccionismo epistemológico y, por supuesto, el ontológico no pueden funcionar, ni siquiera en principio cuando hay interacciones de muchos cuerpos en acción<sup>105</sup>. La reducción de un sistema complejo a otros más simples es necesaria, pero es imposible sin la ayuda de nuevas “leyes” y aproximaciones. En física de materia condensada muy pocas veces se puede predecir todo el comportamiento de un material empezando de cero. A menudo es el experimento el que nos enseña comportamientos nuevos e inesperados.

---

<sup>104</sup> C. Belmonte, “Discurso en la inauguración del curso académico 2014/2015 de las Reales Academias”.

<sup>105</sup> M. Sunjic, “Critical comments on reductionism in physical sciences”, Metanexus Conference “Cosmos, Nature and Culture: A Transdisciplinary Conference” Phoenix, Arizona (2009).

Por supuesto que comprender los fenómenos de un nivel superior requiere reducirlo a una colección de sistemas independientes más simples, pero la estructura específica de dichos subsistemas depende de las propiedades específicas del nivel superior que queramos analizar.

Esto introduce “democracia” entre las diversas ramas de la física y entre todas las ciencias, ya que aparecen como igualmente fundamentales, y está en contradicción directa con la pretensión del reduccionismo ontológico o conceptual que “reduce ontológicamente” la realidad al nivel más bajo, y aporta pluralismo ontológico atribuyendo realidad a cada nivel de complejidad y, como consecuencia, autonomía a cada área de las ciencias físicas.

En el pasado la física ha sido, en su concepción, altamente reduccionista, analizando la naturaleza en términos de sus cada vez más pequeños constituyentes y revelando las leyes fundamentales unificadoras. Unificación y reduccionismo han dominado la física teórica fundamental durante gran parte del siglo pasado. La una caracteriza la esperanza de proporcionar una descripción unificada de los fenómenos físicos. La otra la aspiración a reducir al mínimo el número de conceptos independientes necesarios para formular las leyes fundamentales, la navaja de Ockham, que diría nuestro admirado y amado Paco Yndurain.

La idea de buscar los constituyentes más elementales ha estado muy enraizada. Cuando el poeta William Blake necesitó resumir toda la ciencia en una línea habló de “los átomos de Demócrito y las partículas de luz de Newton”. Desde la Grecia de Demócrito y Leucipo al tiempo de Blake y al nuestro, y tal como nos recuerda Steven Weinberg, la idea de la partícula fundamental ha sido el símbolo del objetivo más profundo de la ciencia: el entender la complejidad de la naturaleza en términos simples.

Einstein siempre defendió una visión unificadora acoplada a una forma radical de reduccionismo: “*El test supremo de un físico es llegar a esas leyes universales elementales de las cuales el cosmos pueda ser construido por pura deducción*”.

El reduccionismo es una forma de estudiar la naturaleza que ha traído mejoras espectaculares a la humanidad y que continúa siendo para muchos el paradigma central de la física<sup>106</sup>.

---

<sup>106</sup> S. Weinberg, “*Dreams of a final theory*”, New York, Pantheon (1992).

La teoría del todo es el objetivo último del reduccionismo. Las ecuaciones capaces de describir todo. Con ello la Ciencia habría terminado. La ecuación del todo traería el fin de la ciencia, como provocadoramente anunció John Horgan en su libro. *“The end of Science-Facing the limits of Knowledge in the Twilight of the Scientific age”*. O elaborando sobre una cita del ensayo de Harold Bloom<sup>107</sup>, Horgan anuncia el Fin de la Ciencia.

Bloom dice que *“ningún poeta puede esperar aproximarse, ni mucho menos traspasar, la perfección de sus antecesores (Shakespeare, Dante, etc.), por ello, los poetas modernos son esencialmente figuras trágicas, tardías. Los científicos modernos también, son tardíos, y su tragedia es aún mayor que la de los poetas. Los científicos no deben superar el reino de Shakespeare, sino las leyes del movimiento de Newton. La teoría de Darwin sobre la selección natural y la teoría general de la relatividad de Einstein”*.

Para algunos la ecuación del todo supondría el fin de la Ciencia. Lo único que quedaría a los científicos sería refinar y aplicar los brillantes descubrimientos de sus antecesores. La ciencia como aventura intelectual estaría concluida. ¿Es esto realmente así? Analicemos el caso de la materia condensada. Para gran parte de este campo la ecuación del todo ya existe y sin embargo directamente no nos dice casi nada sobre todo lo interesante.

En la explicación de la materia, en las condiciones habituales en las que la conocemos y usamos, solo una de las cuatro leyes es importante. Simplificando podemos decir que el mundo material, la materia condensada, se rige por una ley física: la ley de Coulomb, que recordaremos, nos dice que las cargas eléctricas se atraen o repelen con una fuerza proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. La ley de Coulomb y el principio de exclusión de Pauli son los pilares sobre los que se construye la materia condensada y la vida misma.

Efectivamente, para la química y la física de la materia condensada la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica no relativista, con la ley de Coulomb como interacción fundamental, describe prácticamente todo el mundo de los seres humanos. Así lo proclama Dirac en

---

<sup>107</sup> H. Bloom, *“The Anxiety of influence”*, Oxford University Press (1973).



1929: “The underlying physical laws necessary for the mathematical theory of a large part of physics and the whole of chemistry are thus completely known, and the difficulty is only that the exact application of these laws leads to equations much too complicated to be soluble. It therefore becomes desirable that approximate practical methods of applying quantum mechanics should be developed, which can lead to an explanation of the main features of complex atomic systems without too much computation”.

La Teoría del Todo, contenida en la ecuación de Schrödinger, no es una teoría de todo. Sabemos que la ecuación es correcta, porque ha sido resuelta con gran precisión para un número pequeño de partículas (átomos aislados y pequeñas moléculas) y los resultados han mostrado un gran acuerdo con el experimento. Sin embargo, no puede resolverse con precisión cuando el número de partículas es mayor que unas decenas. Esto no es algo que pueda solucionarse en el futuro con la llegada de computadores mucho más rápidos. Si  $N$  es la cantidad de memoria computacional necesaria para representar la función de onda cuántica de una partícula, la cantidad necesaria para representar la función de onda de  $k$  partículas es  $N^k$ . La física de materia condensada, la física de superficies y la nanotecnología están llenas de situaciones cuya comprensión, es decir, nuestra capacidad para predecir lo que ocurrirá en un experimento, se degrada si dividimos el sistema en partes. Debido a la inmensidad del espacio de Hilbert, el cambio cuantitativo del nivel microscópico al macroscópico se convierte en cualitativo. Emerge una nueva física cuando se rompe la simetría de las leyes subyacentes.

Por supuesto que, y tal como señalaban Laughlin y Pines<sup>108</sup>, es posible realizar cálculos aproximados para sistemas más grandes y precisamente gracias a dichos cálculos hemos entendido por qué los átomos tienen el tamaño que tienen, cuándo y por qué forman un enlace químico, por qué los sólidos tienen las propiedades que tienen, por qué algunas cosas son transparentes mientras que otras reflejan o absorben luz. Con un poco más de información experimental (y esto es conceptualmente decisivo) es posible incluso predecir la conformación atómica de moléculas pequeñas, la velocidad de determinadas reacciones químicas, transiciones de fase estructurales, ferromagnetismo e incluso, en algunos casos, temperaturas de transición en supercon-

---

<sup>108</sup> R.B. Laughlin, D. Pines, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **27**, 1, 28 (2000).

ductores. Pero los esquemas para realizar las aproximaciones no son deducciones desde primeros principios sino más bien arte ligado al experimento y, por lo tanto, tienden a ser menos fiables precisamente cuando más necesaria es su fiabilidad: es decir, cuando la información experimental es escasa el comportamiento físico no tiene precedentes y las cuestiones claves todavía no se han identificado.

La gran mayoría de científicos aceptan, aceptamos, sin discusión la hipótesis reduccionista. Consiste en suponer que el funcionamiento de toda la materia, animada e inanimada, está controlado por un conjunto de leyes fundamentales, leyes, que, excepto en condiciones extremas, conocemos bien.

El peligro, sin embargo, es llevar la actitud reduccionista al extremo y pretender, en el campo de las Ciencias experimentales, que toda la física y la química se reducen a entender las partículas elementales y que toda la biología y la medicina consisten en comprender el ADN; el resto sería cocina. Este es un punto de vista erróneo, y conlleva extrapolaciones perniciosas a campos de las ciencias sociales.

La hipótesis construccionista fracasa cuando se enfrenta a las dificultades de escala y complejidad. En un artículo famoso “*More is different*” Phil Anderson<sup>109</sup> afirma que “*La hipótesis reduccionista no implica de ninguna manera una “construccionista”. La habilidad para reducir todo a leyes simples fundamentales no implica la habilidad de empezar de dichas leyes y reconstruir el universo. El comportamiento de agregados grandes de partículas “elementales” no puede ser entendido como una simple extrapolación de las propiedades de unas pocas partículas*”.

La clave es lo que se denomina rotura de simetría, “*broken symmetry*”: las leyes tienen una simplicidad y simetría que no se manifiesta en las consecuencias de dichas leyes. Cuando billones de átomos se ponen en contacto cercano, formando así un complejo sistema, aparecen nuevos tipos de “leyes”. La cantidad se convierte en calidad. Un número ingente de átomos ( $10^{23}$ ) pueden hacer muchas cosas que un simple átomo no puede. Aparecen cualidades nuevas. El entender estas nuevas cualidades es el objetivo de la física del estado sólido.

---

<sup>109</sup> P.W. Anderson, *Science* 177, 343 (1972).

Nuestro entorno ordinario nos ofrece el más sencillo y más importante laboratorio para el estudio de lo que se ha llamado propiedades emergentes, esas propiedades de los objetos, incluidos nosotros, que no están contenidas en nuestra descripción microscópica: por supuesto la vida y la consciencia pero también propiedades muy sencillas tales como la rigidez, la superconductividad, la superfluidez, el ferromagnetismo.

## Superconductividad

Por citar un ejemplo famoso. El fenómeno de la superconductividad: expulsión del campo magnético del interior del material y ausencia de resistencia eléctrica (y por lo tanto de disipación de energía) presentada originalmente por algunos materiales a temperaturas muy bajas, cercanas al cero absoluto ( $-273$  grados C), no presenta ninguna ley nueva. La explicación de esta nueva cualidad tuvo que esperar, sin embargo, casi cincuenta años desde su descubrimiento en 1911, en Leiden, por el físico holandés Kammerling Onnes, hasta que los norteamericanos J. Bardeen, L.N. Cooper y J.R. Schrieffer publicaran en 1957<sup>110</sup> la teoría cuántica de dicho fenómeno. Es la teoría BCS de la superconductividad, cuyo acrónimo se compone de las iniciales de sus tres descubridores. Se necesitan 46 años para entender la superconductividad a pesar de que los mecanismos físicos del movimiento de electrones en metales se descubren entre 1926 y 1932 por Bloch, Peierls y otros pioneros de la física cuántica.

La superconductividad se destruye cuando la temperatura, el campo magnético externo o la densidad de corriente eléctrica superan unos valores llamados críticos. La temperatura crítica de la práctica totalidad de los materiales superconductores que se conocían antes de 1986 es del orden de unos pocos grados Kelvin, la temperatura del Helio líquido, muy caro de obtener, lo que limita y dificulta su aplicación tecnológica a gran escala. Elevar la temperatura crítica ha sido uno de los problemas más importantes de la Física del siglo XX. El récord de estos superconductores tradicionales lo obtiene John Gavalier, del Laboratorio de la Westinghouse en 1973, en láminas delgadas de Germanio y Niobio, con temperaturas críticas de 23.2 K. Hitos en la historia de

---

<sup>110</sup> J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **106**, 162 (1957).

la tecnología clásica de la superconductividad son el descubrimiento en 1961 de superconductores con altos campos y corrientes críticas y la fabricación de conductores multifilamentosos (1967-1970). En 1986 se descubren por Bednorz y Muller<sup>111</sup> en óxidos de tierras raras los llamados superconductores de alta temperatura, posteriormente se obtiene una temperatura crítica de 40°K en  $\text{MgB}_2$ <sup>112</sup>, y en 2015 se observa superconductividad a 200°K en  $\text{H}_2\text{S}$  a una presión de 155 Gigapascals<sup>113</sup>. Ion Errea et al.<sup>114</sup> han demostrado que, análogamente a lo que ocurre en fases del agua a altas presiones, fluctuaciones cuánticas del protón cambian el diagrama de fase del  $\text{SH}_3$  que es la vía que tiene el  $\text{SH}_2$  para su superconductividad.

La explicación de esta ausencia de fricción en los superconductores tradicionales en el movimiento de los electrones se basa en una peculiaridad de la interacción entre dos electrones dentro de un cristal. Puesto que todos los electrones tienen carga negativa, normalmente esperaríamos repulsión entre cualquier par de dichas partículas elementales. A bajas temperaturas, sin embargo esta repulsión es más que compensada por una fuerza atractiva que aparece entre los electrones de la siguiente manera: un electrón interacciona con la red de iones metálicos positivos atrayéndola, causando por lo tanto una pequeña deformación local del cristal. Esta deformación produce una pequeña región de carga neta positiva, que puede atraer un segundo electrón si este tiene espín opuesto al del primer electrón. Los dos electrones, por lo tanto, permanecen unidos a través de la mediación de la red iónica positiva, y su movimiento está limitado como si estuviesen unidos por un muelle elástico. Dichos pares de electrones son los pares de Cooper. La resistividad de un metal en su estado normal aparece como consecuencia de las colisiones del electrón, tanto con imperfecciones estáticas tales como impurezas, como con deformaciones dinámicas tales como las vibraciones de la red, los fonones. Si un electrón en un par de Cooper encuentra una imperfección y ve su movimiento distorsionado, éste es rápidamente compensado por la fuerza restauradora del otro electrón del par. Esta sorprendente situación solo se

---

<sup>111</sup> J.G. Bednorz, K.A. Muller, *Z. Phys. B* **64** (2), 189 (1986).

<sup>112</sup> J. Nagamatsu et al., *Nature* **410**, 63 (2001).

<sup>113</sup> A.P. Drozdov et al., *Nature* **525**, 73 (2015).

<sup>114</sup> I. Errea et al., *Nature* **532**, 81 (2016).

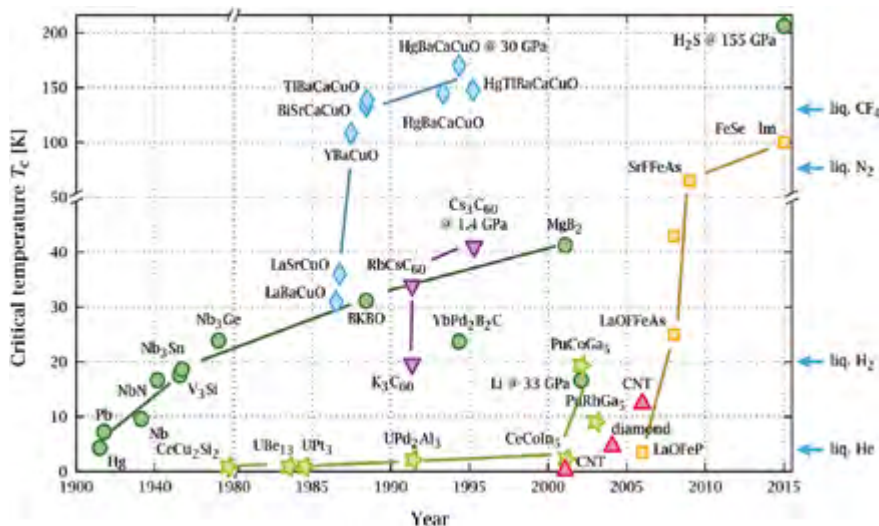


Figura 8.1: Evolución temporal de la temperatura crítica en materiales superconductores.

mantiene si la cantidad disponible de energía térmica es insuficiente para superar la energía de ligadura entre los dos electrones.

La teoría BCS muestra que la superconductividad puede entenderse como el resultado de la asociación de electrones en pares mediada por su acoplamiento a los fonones. La condensación hace que la naturaleza cuántica de los pares se manifieste como una fase variable que varía gradualmente a lo largo de dimensiones macroscópicas. Magnitudes macroscópicas como la densidad de corriente pueden ser descritas en función de esa fase.

Hoy, sin embargo, no entendemos el origen de la superconductividad de alta temperatura en los cupratos y los compuestos de Fe. La superconductividad en estos materiales no encaja en la explicación anteriormente descrita.

En los demás superconductores la superconductividad está mediada por la interacción electrón-fonón. También en el sulfuro de hidrógeno, aunque en este caso los fonones son fuertemente no armónicos.

En la figura se muestra la evolución de la temperatura crítica desde el descubrimiento de la superconductividad en Hg hasta 2015.

## Propiedades emergentes

La superconductividad es una propiedad emergente.

El entender cómo la complejidad del mundo actual surge de la simplicidad de unas pocas leyes es una tarea fascinante. Aparecen propiedades emergentes, propiedades nuevas que no están presentes en el simple sustrato del cual está formado el sistema complejo, reducibles pero por ahora, no deducibles de las de sus constituyentes. Para la mente o el computador no importa mucho cuál es la física del “hardware”. Cuando observamos la naturaleza no vemos las leyes físicas sino las consecuencias de estas leyes. Complicadísimas estructuras asimétricas resultan de unas leyes muy simétricas. Se trata de ver la emergencia de propiedades nuevas. Ver cómo el todo es mucho más que la suma de la partes.

Quizás ésta sea una de las claves filosóficas de la ciencia de nuestro siglo: lo que observamos emerge de un sustrato más elemental, es consistente con las leyes físicas de los niveles anteriores pero no se deduce conceptualmente de ellas. La biología molecular no viola las leyes de la química, pero contiene ideas que no se deducen directamente de dichas leyes.

A lo largo de este siglo hemos aprendido que el conocimiento se estructura en muchos niveles, prácticamente desacoplados entre sí, aunque cada uno consistente con el anterior. Existe una autonomía intelectual de los niveles más complejos respecto a los sustratos de los que se componen. En cada nivel aparecen nuevos conceptos no calculables y a menudo inimaginables mirando al nivel anterior. La rigidez de una piedra no tiene equivalente a escala atómica. Los organismos tienen propiedades que no tienen ni siquiera significado en las células.

El estudio de nuevo comportamientos en cada nivel de complejidad requiere investigación “tan fundamental en su naturaleza como cualquier otra”. Las entidades elementales de la física de la materia condensada obedecen a las leyes de la física de partículas, pero la materia condensada no es “física de partículas aplicada” ni la química es física de muchos cuerpos aplicada.

La química es mucho más que física aplicada<sup>115</sup>. Y cuando hablamos de química sabemos muy bien de qué hablamos. Desde luego no del cuark. La idea del enlace químico nos permite entender gran parte de la química sin exigirnos profundizar más y más en los detalles microscópicos que los originan. Este tema ha sido analizado por Schweber<sup>116</sup>. Su conclusión es que filosóficamente las leyes del enlace químico rompen la cadena del reduccionismo y convierte en irrelevante para niveles complejos de organización el profundizar en las leyes subyacentes. Aunque quizás, y tal como nos dice Don Jesús Santamaría, tengamos que añadir las fuerzas electrodébiles con su violación de paridad al electromagnetismo como base esencial de la química<sup>117</sup>.

Y la química ha contribuido de manera esencial al progreso de la humanidad (lucha contra el hambre, medicina). La química es reducible a la física ¡siempre y cuando nos olvidemos de casi toda la química!

En definitiva, en palabras de Anderson, hay muchos más niveles, hay mucha más distancia cognitiva de la ética al ADN que del ADN a las partículas elementales.

Cada nivel, desacoplado de los anteriores, tiene “sus propias leyes fundamentales” y su conjunto de “cuasipartículas”, utilizando la terminología habitual en física de muchos cuerpos. Pero no es suficiente con conocer las leyes fundamentales de cada nivel. La solución de las ecuaciones y no la ecuación misma es la que proporciona una descripción de los fenómenos físicos. Emergencia se refiere a las propiedades de las soluciones. Dyson nos recuerda<sup>118</sup> que para entender el espacio tiempo no basta con las ecuaciones de la relatividad general descubiertos por Einstein, es también necesario encontrar las consecuencias inesperadas de las soluciones de las ecuaciones.

El comportamiento de agregados grandes de partículas “elementales” no puede ser entendido “como una simple extrapolación de las propiedades de unas pocas partículas”. Aunque puede haber indicacio-

---

<sup>115</sup> R. Hoffmann, “*The same and not the same*”, Columbia University Press, Ny, pg 18 (1995).

<sup>116</sup> S.S. Schweber, *Phys. Today* **34** (1993).

<sup>117</sup> Jesús Santamaría Antonio, “*El principio de estructura de la materia ordinaria y paradojas en química*”, Sesión de apertura de curso, Real Academia de Ciencias (2016).

<sup>118</sup> F. Dyson, *Phys. Today* **48** (2010).

nes sobre cómo relacionar un nivel con otro, es cercano a lo imposible deducir la complejidad y novedad que surge de la agregación. Esto no invalida el que técnicas e ideas de un campo sean útiles en otros; y tenemos ejemplos claros en las dos direcciones.

Una tarea esencial de la física teórica del futuro no será tanto escribir la ecuación última como entender el comportamiento emergente de varias maneras, incluida, en su día, la emergencia de la vida misma. Seguiremos conservando los preciosos valores del reduccionismo pero adentrándonos más y más en la emergencia que surge de complejidades de todo tipo.

El proceso de “emergencia” es la llave a gran parte de la estructura de la ciencia del siglo XXI. Permítanme que me arriesgue a una predicción. La emergencia y no la partícula divina de Lederman ni el “sueño de una teoría final”, va a dominar el futuro.

Hay que ampliar el símbolo del poeta Blake, reivindicando el carácter fundamental de nuestra comprensión de lo complejo, precisamente desde el mismo objetivo, entender en términos simples lo complejo, en términos que pueden y deben ser distintos en cada nivel.

Muchos vemos el mundo no como una jerarquía en la que todo el conocimiento se deriva de unas ecuaciones divinas, sino como una jerarquía estructurada en niveles separados por grados de emergencia, cada uno separado intelectualmente del sustrato. El valor del reduccionismo está en unificar intelectualmente las diversas ciencias y fortalecer sus conexiones, pero no como el programa que nos explicará totalmente la realidad.

Emergencia y reduccionismo no son opuestos sino complementarios. Cuando somos capaces, en el nivel adecuado, de reducir la emergencia la entroncamos en una amplísima red de conexiones que la fortalecen conceptualmente. Esta es la visión de Anderson con la que coincido; por ello me parece apropiado terminar esta sección del reduccionismo con las palabras de Anderson<sup>119</sup>, escritas años después de su artículo pionero “*More is different*”.

---

<sup>119</sup> P.W. Anderson, “*More and different: notes from a thoughtful curmudgeon*”, World Scientific pg 134 (2011).



“When one succeeds in finding a reductionism explanation for a given phenomenon, one embeds it into the entire web of internally consistent scientific knowledge; and it becomes much harder to modify any feature of it without “tearing the web””

En resumen, las dos visiones, reduccionista y emergentista, se complementan y no son enemigas. Necesitamos reduccionismo con emergencia y emergencia con reduccionismo.

## 9. CIENCIA. CULTURA. PROGRESO. BELLEZA

La ciencia es por encima de todo creatividad y, por ello, no puede ser aprendida como método o mediante recetas. La mejor forma de aprender a hacer ciencia bien es hacerla junto a los que la hacen bien. Por ello son tan importantes los maestros, los linajes, las escuelas. Cohen Tannoudji es alumno de Kastler y Haroche es alumno de Cohen. Tampoco la esencia y belleza de la ciencia se pueden encerrar en una frase breve; por ello, las definiciones de los diccionarios nos resultan insatisfactorias. En segundo lugar, y esto es algo a veces poco apreciado, la ciencia es comunicación. Ciencia es descubrir y comunicar nuevos descubrimientos. La ciencia es un arte, el arte de la imaginación científica.

La ciencia se fundamenta en el empirismo, en el experimento, en medir, comprobar, “*eppur si muove*” de Galileo; el lema de la Royal Society es “*Nullius in verba*”, no al argumento de autoridad. La ciencia se fundamenta en una búsqueda de la verdad; ello conlleva creer que la verdad científica existe. Por encima de discusiones filosóficas sobre construcciones sociales y relativismos culturales, los que intentamos hacer ciencia creemos que la verdad existe y está ahí para ser encontrada, que es sólida y firme a diferencia de lo débiles y múltiplemente variados que son los errores.

Se ha definido la política como el arte de lo posible. Uno podría decir, como Medawar, que la ciencia es el arte de lo resoluble, el arte de formular hipótesis que puedan ser probadas o refutadas por experimentos realizables. Para completar viene bien algo que le oí hace más de treinta años en una conferencia a un amigo, el gran ingeniero vasco Manu Sendagorta, quien definía la ingeniería como el arte de lo realizable dentro de los límites de tiempo y coste.

Al decir que la ciencia es el arte de lo resoluble quiero señalar por un lado que la ciencia, y esto es una obviedad, solo puede contestar a preguntas que tengan una respuesta científica. Quizás en un futuro, que vemos lejano, la Ciencia pueda intentar contestar a todas las preguntas. Pero por el momento no puede contestar, al menos totalmente, a preguntas sobre sentido de la vida, valores...

En ciencia es importante hacerse la pregunta adecuada en el momento adecuado, en el instante en el que es posible contestarla

científicamente. Y esto es difícil porque es decisivo adelantarse a su tiempo, pero, y aunque parezca una paradoja, tampoco demasiado. Ni Einstein con todo su talento podía contestar en 1905 a la pregunta de cuál es el mecanismo en el que se basa la manera en que una generación transmite sus características a la siguiente.

El triunfo de la ciencia moderna es fruto de una combinación exitosa de dos realidades, la conjunción de la realidad física, verificada por el experimento, y la realidad abstracta de conceptos e imágenes, surgida de la búsqueda de coherencia interna que aportan las matemáticas. En este aspecto, como en tantos otros, la ciencia moderna es griega. Esta sorprendente combinación de física y matemática que vemos florecer en Newton es una invención griega, con Arquímedes de pionero.

Los científicos tienen un optimismo o una fe, si lo prefieren, la creencia de que el mundo natural es comprensible. Es una fe, ya que no hay ninguna prueba científica de que tenga que ser así. Es verdad que la experiencia del pasado justifica la fe y la esperanza en el futuro, pero es realmente sorprendente y a la vez maravilloso que el mundo sea comprensible y en gran parte reducible a algoritmos matemáticos. En palabras de Einstein: *“Dios es sutil, pero no malicioso”*. Esto es una fe. No es nada *natural* que haya *leyes naturales*. Es una maravilla, pero no es nada *natural*. Esto es lo que el gran historiador de Harvard, Gerald Holton, llama el *encantamiento jónico*, en referencia a Tales de Mileto.

## Cultura

Es conveniente resaltar el carácter cognitivo de la ciencia, su capacidad de decir cosas a la imaginación. La ciencia es mucho más que sus aplicaciones prácticas. La ciencia no es un conjunto congelado de dogmas. Es una aventura intelectual, una aventura humana que en los últimos años ha cambiado tanto la concepción del mundo en que vivimos como la de nosotros mismos. En mi opinión, sin despreciar otras contribuciones, el edificio conceptual de la ciencia moderna es la obra cultural colectiva más importante de la Humanidad. Es el gran triunfo del humanismo clásico.

Hawking, más que ningún otro científico vivo, está cualificado para proclamar que *“existe otra dimensión de la existencia humana más allá del bienestar material”*.

La importancia cultural de la investigación básica, se ilustra bellamente con el conocido diálogo entre el Senador Pastore y el Dr. Robert Wilson, al defender este último la financiación de un acelerador de partículas. A la pregunta de Senador Pastore: ¿No tiene nada que ver con la defensa de nuestro País? Wilson contesta: *“Sólo tiene que ver con el valor que nos otorgamos los unos a los otros, con el mutuo respeto, la dignidad del hombre, nuestro amor por la cultura. Tiene que ver con esas cosas. Tiene que ver con buenos pintores, buenos escultores y grandes poetas. Quiero decir, todas esas cosas que los hombres respetamos, veneramos y queremos en nuestro país y por lo que somos patriotas. No tiene nada que ver directamente con la defensa de nuestro País, excepto en hacer que merezca la pena defenderlo.”*

## Progreso

Una característica esencial de la ciencia en general es la idea de progreso. Todos los científicos deberíamos leer historia de la ciencia, porque nos daríamos cuenta de lo importante que es cada cosa pequeña que hacemos. La ciencia se basa en el largo plazo. Todos somos eslabones de la cadena; por eso, cada pequeña contribución es importante. Ciencia es progreso, ciencia es largo plazo.

En frase cuyo origen a menudo se atribuye, parece que erróneamente, a Newton: *“Si he podido ver tan lejos es porque me he apoyado en las espaldas de los gigantes anteriores”*. A mí me gusta citar a André Gide, quien en su diario, ilustra de una forma hermosa este concepto cuando dice: *“Todas las olas del mar deben la belleza de su perfil a las que les precedieron y se retiraron”*.

El progreso no está garantizado. Para que continúe es necesario el apoyo de la sociedad, apoyo que debe ser cultivado. Exige continuidad en las acciones, cuidar el largo plazo.

Estamos dispuestos, solamente dispuestos, a aceptar que se inyecten cantidades ingentes de dinero en garantizar el corto plazo, a ayudar a bancos que nos han metido en el lío en el que estamos, lo hacemos porque creemos que es posible –solo posible– que convenga al interés general; pero no entenderíamos nunca que no se inyectasen cantidades igualmente ingentes de dinero en garantizar el largo plazo: en la edu-

cación, en la ciencia, en la tecnología y en la innovación. A veces las urgencias del momento nos llevan a una visión cortoplacista, con un balance de costes y beneficios que puede tener consecuencias desastrosas. Por ello, son necesarios acuerdos sólidos y amplios para garantizar la continuidad de las políticas. Especialmente en educación e investigación.

Largo plazo implica “*pensar en las próximas generaciones y no tanto en las próximas elecciones*”. Y mucha paciencia. Tal como señala mi amigo y antiguo alumno Igor Campillo, el bambú es un buen ejemplo de lo que debe ser una política a largo plazo.

Hay variedades de bambú que pueden alcanzar más de 25 metros de altura con grosores de hasta 30 centímetros de diámetro. Sin embargo, lo que resulta sorprendente es que, apenas emerge, puede alcanzar esas dimensiones en un plazo muy breve, de unas pocas semanas. A excepción de las hierbas, ninguna planta crece tan rápidamente como el bambú, con velocidades de hasta un metro en 24 horas. Tan rápido crece el bambú que se le está empezando a dar una importancia aún mayor que al cemento o al acero en algunos lugares del planeta. Pero hay más: incluso aunque cortemos el bambú varias veces, éste seguirá brotando y creciendo hasta esos 30 metros repetidamente durante unos cuantos ciclos.

Este comportamiento deslumbrante no debe llevarnos a engaño, porque, contrariamente a lo que podemos deducir de lo dicho, el bambú no es apto para impacientes: requiere buen abono y ocuparse de regarlo constantemente, pero no durante esas pocas semanas de germinación y crecimiento... De hecho, en un campo donde hayamos sembrado semillas de bambú no sucede nada apreciable durante los primeros meses. Ni tan siquiera el primer año, ni el segundo, ni el quinto... ¡En realidad parece no pasar nada durante los primeros siete años! Es al séptimo año cuando se produce el prodigioso crecimiento antes descrito. Entonces ¿Cuánto tardó el bambú en crecer? ¿Unas semanas? No. Necesitó varios años para desarrollarse. Durante los primeros siete años el bambú estuvo generando, bajo tierra y oculto a nuestros ojos, un complejo entramado de raíces que le permite después generar ese crecimiento posterior y dar varias cosechas.

Los avances tecnológicos que han cambiado el mundo no surgieron por generación espontánea. Surgieron de la libertad de los

científicos, pero son, especialmente en las últimas décadas, fruto de largos años de decisión política de las naciones más desarrolladas. En dichos países durante muchos años los líderes políticos han apoyado programas de investigación universitaria como una inversión vital para el futuro de la nación. Dejando libertad a los científicos para formular las preguntas interesantes y cómo contestarlas.

## Burocracia

En el momento actual existe una tendencia a dirigir la ciencia, determinando la dirección estratégica que debe seguir la investigación, haciéndola, se dice, servir a las necesidades, siempre inmediatas del mercado.

En las últimas décadas en muchos países la burocracia está aumentando, el número de informes, controles, evaluaciones crece de tal manera que llega a sustituir lo que antes se fundaba en la confianza. Recientes casos de corrupción y mal uso de fondos se usan para justificar esta tendencia. Se está desarrollando una nueva religión, la de la evaluación, frecuentes test de “performance” se aplican a individuos, grupos de investigación, laboratorios, universidades, naciones.

Todos estamos de acuerdo en que hay que utilizar con la máxima eficiencia los recursos disponibles, lo que lleva a hablar de prioridades, calidad competitiva, evaluación, rendición de cuentas, y planificación, ideas todas ellas muy válidas pero que deben aplicarse con conocimiento y visión.

El problema radica en que con demasiada frecuencia todos estos requerimientos son implementados por personas con conocimientos limitados de la incertidumbre inherente a la propia investigación, de los criterios imposibles de codificar, de los intangibles intrínsecamente ligados al trabajo creativo. Si esta tendencia sigue creciendo se corre el riesgo de eliminar el encanto incierto de intentar avanzar en lo desconocido, de encontrar algo nuevo y sustituirlo por un conjunto ordenado, de proyectos, previsibles, anticipables y regulados, alejando así a muchas de las mejores mentes de la actividad científica.

Lo mismo vale para la tan citada colaboración Universidad-Empresa. Es curioso que las voces que reclaman más dirección en la investigación universitaria sean las que rechazan cualquier directriz en materia empresarial. Entre convertirse en un taller barato para las empresas y dedicarse a problemas irrelevantes existe un amplio margen para la creatividad.

Los grandes avances de la humanidad han surgido de la investigación pura, abierta, donde los investigadores tienen absoluta libertad en tomar la dirección por la que su fantasía y trabajos previos les lleven. Los grandes conceptos en ciencia provienen de personas que han sabido liberar su mente de los preconceitos adquiridos y dejar volar libremente la imaginación, de Newton y Galileo a Einstein, y de Harvey a Watson y Crick.

Como nos recuerda Kornberg: “ [...] *el desarrollo de la curiosidad acerca de los hechos básicos de la naturaleza ha demostrado a lo largo de la historia de la ciencia médica ser la ruta más práctica y la más eficaz respecto al coste para conseguir aparatos y medicinas con éxito*”.

Las investigaciones que parecían totalmente irrelevantes para cualquier objetivo práctico han producido los mayores descubrimientos de la medicina –los rayos X y la penicilina, la vacuna de la polio y la ingeniería genética, los anticuerpos monoclonales y el ADN recombinante–. Todo esto proviene del desarrollo de la curiosidad en cuestiones de física, química y biología, aparentemente no relacionadas al principio con un problema médico específico. La cadena desde el descubrimiento básico al producto y al bienestar es, muchas veces, oscura y lenta pero sin lo básico la cadena colapsa.

Uno de los retos más importantes de los científicos en el siglo XXI es salvar a la ciencia del excesivo utilitarismo. Los grandes avances, los que traen cambios cualitativos y tecnologías disruptivas se han producido gracias a la investigación básica.

Las proyecciones de las tendencias actuales nunca acertarán con las innovaciones profundas, con las cosas cualitativamente nuevas, que son las que en realidad cambian el mundo. Ya Francis Bacon nos recordaba que *los avances más importantes son los menos predecibles porque “They are different in kind”*.

Más importante y, sobre todo, más rentable que intentar dirigir la investigación hacia fines prefijados es crear un entorno, un caldo de cultivo, en el que la ciencia pueda desarrollarse, en el que la creatividad pueda florecer porque es la mejor forma de contribuir a la innovación y al desarrollo económico. Es la sublime utilidad de la ciencia inútil.

El conocimiento generado a partir de la investigación básica, en un entorno de libertad y creatividad, acaba beneficiando de muchas maneras a la sociedad. Una de ellas y no la menos importante es la vertiente tecnológica y económica. No todo es investigación básica. Es igualmente decisiva y cuantitativamente más amplia la investigación aplicada y el desarrollo tecnológico. La tecnología surgida de la ciencia básica lleva en un círculo virtuoso a ampliar y refinar nuevas preguntas que avanzan la propia ciencia. No puedo extenderme sobre ello pero sí me gustaría citar un aspecto, creo que es fundamental el papel que juegan para ello los centros de investigación de vocación más aplicada, en los que los objetivos tienen que estar mucho más definidos y dirigidos, y que contribuyen a mantener armónicamente el equilibrio del ecosistema científico. Déjenme mencionar como ejemplo dos de ellos a los que tengo especial cariño: el CIC nanoGUNE en Donostia, que me honro en presidir desde su fundación dirigido por Txema Pitarke y que ha conseguido demostrar que, con un diseño inteligente, una selección de personal exigente y la financiación adecuada se puede, en poco tiempo, hacer tanto ciencia de excelencia como transferencia directa al sistema productivo, y el Instituto de Magnetismo Aplicado de la Universidad Complutense, aquí, en Madrid, dirigido por Antonio Hernando, un centro pionero en España en sus objetivos y logros de cooperación entre entidades públicas y privadas y en la aplicación de la investigación básica de excelencia a retos sociales bien definidos.

A lo largo de mi vida he asistido a un cambio en la naturaleza de la carrera científica. El número de artículos que se exige a un joven investigador, como prueba de su madurez científica, está creciendo constantemente. El número de congresos, de reuniones, de informes, de viajes, sigue aumentando. Las publicaciones se ven más como un medio de promoción, de estabilización, que como la comunicación de los resultados, producto de una curiosidad genuina. Hoy, la ciencia se vive muchas veces como una competición personal, algo parecido al deporte de élite, en que muchas veces gana no el que ha entendido lo que le decía la naturaleza, muchas veces con susurros y no a gritos,



sino el que ha tenido más proyectos, publicados en el *Physical Review Letters* o aparecido en las secciones de noticias de *Science* o *Nature*. Esto no es una buena tendencia. En ciencia se debería competir con la naturaleza y que todos puedan ganar colaborando, no como en un partido de tenis. Yo tengo un gran instinto competitivo y he tardado mucho tiempo en entender esto.

Es necesario apostar por los investigadores creando las condiciones necesarias para su trabajo: condiciones de infraestructura técnica, libertad científica y de creación personal, así como la posibilidad de mejorar y desarrollarse profesionalmente. En una política de Ciencia y Tecnología es importante la continuidad y la visión a largo plazo. Inestabilidades en el sistema de financiación convierten en imposible el logro de una masa crítica de científicos, el atraer de forma responsable a jóvenes valores, o emprender proyectos difíciles de larga duración.

Los jóvenes investigadores no lo tienen más fácil que hace años. Los problemas a los que se enfrentan son muy difíciles y la dificultad de aportar contribuciones originales de valía es muy grande. Por otro lado, los instrumentos experimentales y conceptuales con los que cuentan han avanzado mucho. Lo tienen tan difícil o tan fácil como los de antes. Cualquier tiempo pasado no fue mejor.

La ciencia es internacional. Es muy bueno, incluso aunque uno se haya formado y esté en los mejores centros del mundo, ir a otros sitios. No solamente para aprender más cosas sino especialmente para aprender otras formas de aprender, para ver formas diferentes de ver las cosas. Ahora bien, que el salir fuera sea la única posibilidad de buscarse un futuro es un desastre. España todavía está muy lejos del número de científicos y tecnólogos que le corresponderían por su nivel económico. La mejor política científica es crear oportunidades en abundancia para los más creativos de nuestros jóvenes. Esto se debería hacer y no se está haciendo en la medida en que es necesario. El no hacerlo no solamente es una injusticia social; es asimismo, un despilfarro económico. Es algo difícil de entender y más en tiempos de crisis, pues es hipotecar nuestro futuro. Además hacerlo, especialmente en ciencia básica, no es caro. En algunas naciones desarrolladas hay un pacto de estado para estos temas, aquí desgraciadamente no existe. Lo pagaremos, lo estamos pagando ya.

## Belleza

Quiero subrayar la componente estética de la ciencia. Creo que la mayoría de los científicos desarrolla un sentido que les permite apreciar cuando un concepto, una ecuación o un instrumento, son hermosos.

Al hablar de belleza en ciencia nuestros científicos y personas cultas habitualmente se refieren a dos tipos de ideas. Por un lado, a las grandes construcciones intelectuales tales como la moderna visión cosmológica, a la infinita diversidad que surge de la evolución, a la grandeza de las explosiones energéticas de los aceleradores... Por otro, a bellas imágenes de las grandes estructuras del universo y a lo hermoso del viaje a lo complejo, del viaje hacia el interior de nuestro cuerpo. Tres infinitos: lo grande, lo pequeño y lo complejo. Todo ello es legítimo e incluso, en muchas ocasiones encomiable, pero no es lo que quiero expresar hoy aquí al hablar de belleza. Yo me refiero a la belleza interna de la ciencia, a la belleza intelectual, a esa belleza íntima autosuficiente de Poincare, a aquello que lleva a Oppenheimer a decir que la solución de Ulam es “*sweet*”; a Watson a exclamar, al no estar en condiciones de explicar el secreto del ADN tras una regada cena, “*but it is so beautiful*”; a Galindo a referirse, coincidiendo con Landau, en su discurso de inauguración del curso académico 2014/2015 de las Reales Academias a la relatividad general de Einstein, como “*posiblemente la construcción más hermosa del pensamiento científico*”; a Dirac<sup>120</sup> a afirmar que las leyes físicas deberían tener belleza matemática; a Weyl a confesar a Freeman Dyson que, forzado a elegir, prefiere belleza a verdad, a Heisenberg<sup>121</sup> prácticamente en éxtasis al ver en sus ecuaciones la realidad natural; a Chandrasekar<sup>122</sup> y a tantos otros con afirmaciones similares.

Resuenan las palabras de John Keats: “*Beauty is truth, truth beauty. That is all Ye know on earth and all Ye need to know*”.

¿Qué es lo que tiene una idea, una ecuación, un dispositivo para provocar la admiración, el asombro, o, incluso el éxtasis?

---

<sup>120</sup> P.A.M. Dirac, *Proc. R. Soc. Lond. Serie A* **126**, 114 (1929).

<sup>121</sup> W. Heisenberg, “*Physics and beyond: Encounters and conversations*”, New York: Harper & Row, pg 61, (1971).

<sup>122</sup> S. Chandrasekar, “*Truth and beauty. Aesthetics and motivations in science*”, The University of Chicago Press, (1990).

El sentimiento estético no tiene que referirse a bellas imágenes, o requerir limpias y elegantes matemáticas. Frente a la postura de un Dirac elevando la elegancia y la belleza, a menudo formal, a la categoría de verdad científica, es conveniente recordar la voz de un Boltzmann que nos dice que “*en materia de Ciencia la elegancia hay que dejarla a los zapateros y a los sastres*”. Este sentimiento estético puede ser distinto según los campos científicos. En ocasiones, es diferente en física que en biología, las soluciones de la naturaleza no suelen ser elegantes ni responden a un diseño perfecto<sup>123,124</sup>. Otras veces la misma idea se embellece con el formalismo adecuado. En todo caso, creo que se puede afirmar que hay una estética intrínseca a la ciencia. A veces será imposible de definir, y mucho más de transmitir; pero cualquiera que haya encontrado una solución nítida a un pequeño problema la ha sentido. Me gustaría, por ejemplo, un diálogo conjunto en la Academia sobre en qué consiste la elegancia en campos diferentes.

A mí se me hace muy difícil definir lo que es bello en ciencia: En mi opinión una idea, una teoría, es bella si puede contestar a diversas preguntas y reunir algunas condiciones:

¿Cuán amplias y de largo alcance son las implicaciones?

¿Cuán sutiles e inesperadas son las conexiones?

¿Cuán profundamente penetra en el secreto de la naturaleza? Tiene que haber un entronque con el principio de realidad. La ciencia o al menos la física tal como yo la entiendo, es la ciencia de la naturaleza, no de construcciones imaginarias<sup>125</sup>.

También debe darse una máxima sencillez. Contener el mayor grado de información sobre el mundo real con el mínimo número de ideas y conceptos. Esta idea es de la máxima utilidad, no es simplemente una preferencia estética. La navaja de Occam es una idea útil y bella.

---

<sup>123</sup> G. Morata, “*El explorador de los espacios*”, Diputación Provincial de Almería (2009).

<sup>124</sup> F. Jacob, *Science* **196**, 1161 (1977).

<sup>125</sup> P.W. Anderson (some ideas on the aesthetics of science), “*A career in theoretical physics*”, World Scientific pg. 569 (1994).

Con estos criterios creo que podemos afirmar que la estructura de doble hélice del ADN es bella porque encierra la forma con que una generación transmite sus características a las siguientes, encierra el secreto de la vida. Las ecuaciones de Maxwell son bellas porque unifican la electricidad y el magnetismo, englobando las ondas electromagnéticas y sus conexiones desde las ondas largas de radio hasta los rayos gamma. La teoría de la relatividad general es bella porque funde materia y espacio, materia y geometría. La materia le dice al espacio cómo curvarse y el espacio le dice a la materia cómo moverse.

John Keats se equivoca al acusar a Newton de destruir la belleza del arco iris al desmenuzar su contenido, “*Unweaving the rainbow*”. Está claro que el sentido de belleza y maravilla que un científico experimenta al mirar la naturaleza, al estudiar el arco iris con sus instrumentos analíticos, no se destruye sino que se incrementa<sup>126</sup>.

---

<sup>126</sup> A.A. Lucas, “*Scribbles that changed the course of human affairs*”, Classe des Sciences, Académie royale de Belgique (2004).

## 10. POLÍTICA CIENTÍFICA. DESARROLLO ECONÓMICO Y SOCIAL

El conocimiento en general y el conocimiento científico tecnológico en particular van a ser un factor decisivo en nuestro desarrollo económico y social. Participar como agentes activos, desarrollando una política científica adecuada y fomentando una cultura científica es, en mi opinión, una de nuestras prioridades. Esto lo expone magistralmente uno de los grandes científicos españoles, el eminente genetista Ginés Morata. En una de sus conferencias decía: *“La cultura del siglo XXI que acaba de comenzar va a ser una cultura científico-técnica, ya lo ha sido en gran parte la del siglo XX. Si aspiramos a formar parte del grupo de los países avanzados, la sociedad en general y nuestros políticos en particular, deben concienciarse de la gran importancia de este hecho y consecuentemente promocionar el desarrollo científico-tecnológico.”*

La ciencia y los científicos vamos a ser decisivos para el futuro desarrollo económico de la humanidad. El papel del conocimiento científico y la transmisión de ese conocimiento por parte de los científicos en los foros de decisión adecuados va a ser crucial en problemas complejos con repercusiones económicas, sociales e incluso éticas. Debemos participar activamente en la definición de nuestros fines como sociedad. Nuestra misión no puede ser solamente aportar los medios para lograrlos. Tenemos que contribuir a que la frase de Einstein *“perfección en los medios y confusión en los fines caracterizan nuestra época”* no sea una realidad permanente. Los grandes problemas de la humanidad, alimentación, agua, salud, equilibrio en el entorno natural, no encontrarán solución sin ciencia. Los científicos no debemos dominar las decisiones políticas *“on top”*, pero nuestra misión no es estar simplemente *“on tap”*, por utilizar la cínica expresión de Churchill (*“Scientist should be on tap, but not on top”*). Y aun a riesgo de parecer cándido e infantil, creo que es nuestra obligación contribuir de manera responsable a la solución de problemas como la intolerancia y el fundamentalismo, a la búsqueda de una sociedad más justa reduciendo las desigualdades y tanto a anticipar en lo posible como a mitigar las consecuencias perniciosas del desarrollo tecnológico buscando un desarrollo humano sostenible. Es nuestra responsabilidad contribuir a que el conocimiento científico, una herramienta poderosa como pocas, se utilice para que nuestra sociedad progrese en su conjunto, sin dejar a nadie atrás.

En su informe de 2007, el antiguo ministro de ciencia Lord Sainsbury, describía la ciencia y la innovación como un ecosistema. La salud de todo el sistema depende de la salud de las partes constituyentes, y crucialmente de las relaciones entre dichos constituyentes. Necesitamos un sistema armónico, que cuide la investigación básica y todas las demás partes del conjunto.

La sociedad entiende fácilmente la importancia de la investigación aplicada y de la innovación. Investigar en lo que se cree que va a curar una enfermedad o en lo que va a producir directamente dinero y bienestar social es más fácil de entender que la necesidad de financiar que investigadores dejen volar su imaginación y les lleve allá donde quieran ir libremente. Una ciudadanía científicamente informada es garantía de que un apoyo sostenible a la ciencia básica exista. El día en que sea la sociedad en general, y no los propios científicos, la que exija continuidad en las inversiones, el futuro estará garantizado.

El nexo entre inversión en investigación básica y crecimiento macroeconómico es a veces muy sutil, pero ha sido establecido repetidamente a lo largo del tiempo. El descubrimiento deriva en tecnología e inventos, lo que deriva en nuevos productos, puestos de trabajo e industria. Repetir esto, sin embargo, no es suficiente. Son necesarias explicaciones más sofisticadas, especialmente en tiempos de crisis.

Está firmemente establecido que existe una correlación entre riqueza e investigación. Pero correlación no es lo mismo que causalidad. ¿Somos más ricos porque gastamos más en I+D? o ¿gastamos más en I+D porque somos más ricos, y nos lo podemos permitir? o ¿existe algún otro factor que cause ambas? Afortunadamente las preguntas tienen respuesta. Luminarias como Solow y Arrow las han contestado<sup>127</sup>.

El PIB por persona en los Estados Unidos ha crecido exponencialmente a lo largo del siglo XX. El crecimiento exponencial se da gracias a una realimentación positiva, en la que la producción de algo permite producir aún más.

Los economistas han estado estudiando los factores de producción desde los tiempos de Adam Smith y David Ricardo hace más de 200

---

<sup>127</sup> W.H. Press, *Science* **342**, 817 (2013).

años. Solow, Arrow y otros, nos han enseñado que los factores clásicos de producción como la tierra, el trabajo y el capital, no son suficientes. Como factor de producción, la ciencia y la tecnología producen riqueza y progreso tecnológico que, a su vez, lleva a un círculo exponencial de crecimiento económico. El residuo de Solow, aquello que no puede ser explicado por los factores tradicionales, siempre es superior al 50% y llega en algunos casos al 85%.

Si esto fuera todo, ¿deberíamos aconsejar, no ya a las empresas o al poder público, sino a los particulares, invertir todos sus ahorros en la investigación básica? Aparte de la concentración de riesgo que supondría, hay un factor clave de la economía neoclásica por el que esta inversión no es muy recomendable; es el de la apropiabilidad. ¿Con qué eficiencia revierten las ganancias en aquellos inversores que realmente han arriesgado y han puesto el dinero?

El conocimiento científico es colectivo, público e internacional, pertenece a todos. Podemos caer en la tentación de *que inventen ellos. Nosotros ahorramos nuestra parte y usamos sus beneficios. Reconozco que ese cinismo es tentador*: este sería un mundo en el que cada país trataría de beneficiarse de la investigación básica financiada por otros, pero ningún país estaría dispuesto a asumir esa inversión por ellos mismos.

Este escenario es lo que los economistas llaman la tragedia del bien común<sup>128</sup>. Nadie estaría dispuesto a mantener algo que beneficie a todos, dada la posibilidad de ser en cambio un “parásito/gorrón”. El clásico ejemplo de la tragedia del bien común es una parcela de pasto comunal. Todo el mundo tiene derecho a que sus ovejas pasten en ella, pero nadie paga por su conservación. Después de un tiempo, hay un montón de ovejas hambrientas y nada de hierba.

Es cierto que la ciencia es internacional, y que sus resultados suelen ser publicados y abiertos a todos. Pueden ser exportados. Los laboratorios de investigación de grandes empresas pueden ser trasladadas de un país a otro. La ciencia básica pertenece a todos pero, ella misma y sus aplicaciones, florece en anclajes geográficos. La cuestión es que las universidades (y centros) de investigación se encuentran geográficamente muy enraizadas, y no son exportables. La proximidad

---

<sup>128</sup> G. Hardin, *Science* 162, 1243 (1968).

y las relaciones sociales diarias entre individuos generan una transferencia de tecnología mucho más eficiente.

A pesar del dramático cambio en las capacidades de China y otros países emergentes, el “hardware” en inversión e infraestructuras no ha sido aún alcanzado por el “software” en cultura, valores y creatividad.

Por ello, el fino cuidado de las instituciones de vanguardia, la continuidad de las políticas, la visión a largo plazo, el fomento de una cultura científica en los políticos y empresarios son esenciales.

La preeminencia en investigación no puede adquirirse en unos años, pero puede dañarse rápidamente. La cuestión real no es ¿podemos permitirnos invertir en investigación básica? sino ¿podemos permitirnos no hacerlo?



## 11. FINAL

Termino como he empezado. Reiterando mi alegría por estar hoy aquí. A lo largo de muchos años he disfrutado de la amistad de numerosos Académicos aquí presentes. Mis conversaciones con ellos han afianzado mi convicción de que el conocimiento de los principios básicos y la aptitud y actitud para adaptarlos creativa y productivamente a los imprevisibles cambios futuros es más útil que el dominio de materias especializadas, por importantes y urgentes que estas parezcan, o incluso lo sean, en un momento dado. Esto no quiere decir que no sean necesarios los especialistas pero, en qué tienen que serlo cambiará continuamente. El mundo estará lleno de sorpresas que no podemos anticipar. Una universidad cuyo principal objetivo sea proporcionar a las empresas profesionales directamente “empleables”, no está correctamente enfocada.

El filósofo Whitehead señaló, tal como nos recuerda Wilson<sup>129</sup>, que los investigadores científicos, como regla general, no quieren descubrir para conocer si no conocer para descubrir. No dedicamos nuestro esfuerzo a cuestiones generales, sino a adquirir lo más rápidamente posible un cuerpo de conocimiento sólido, que nos proporcione la técnica necesaria para avanzar en un territorio sin explorar. Un científico no es juzgado por lo mucho o poco que sabe sino por sus descubrimientos. Por educación y por necesidad la gran mayoría de los científicos no nos preocupamos de temas generales; la vida es dura en la frontera. Aportar algo nuevo, por pequeño que sea, requiere gran dedicación, inmenso esfuerzo y tiempo, mucho tiempo. También requiere dominar un lenguaje muy técnico, muy especializado.

El desarrollo exponencial del conocimiento en sus aspectos científicos y tecnológicos hace más necesario que nunca que existan ámbitos en los que se encuentren diversas ramas del saber. Hoy los científicos somos tan ignorantes en relación a la mayor parte de las disciplinas científicas como en relación a las disciplinas artísticas, o a las literarias. Si trabajamos en una disciplina muy especializada, incluso podemos tener dificultades para entender a nuestros propios colegas.

Durante muchos años he tenido el privilegio de conversar con personas eminentes en sus campos de trabajo. He visto cómo nuestra

---

<sup>129</sup> E.O. Wilson, “*Consilience: La unidad del conocimiento*”, Galaxia Gutenberg (1999).

percepción de la actividad de otros está muy condicionada por los hábitos, formas de pensar y de actuar que hemos adquirido a lo largo de los años con el trabajo en nuestros propios campos. He comprobado que incluso en los puntos de mayor solapamiento es muy difícil encontrar ni siquiera un lenguaje común. En particular, son distintas las percepciones y las valoraciones de la importancia relativa que los diversos campos del conocimiento dan a las contribuciones que creemos han sido decisivas para el desarrollo de la humanidad.

La existencia de Academias es buena para el intercambio de conocimientos entre los propios científicos. Nos permite evitar que nuestra propia especialización nos impida aprender otras formas de aprender, formas diferentes de entender el mundo.

A lo largo de mi vida científica he colaborado con muchas personas. Debo mucho a mucha gente. Es imposible nombrarlos a todos, pero quiero nombrar expresamente a cuatro grandes investigadores y grandes personas, colaboradores en etapas diferentes de mi vida: Sir John Pendry, Rufus Ritchie, Fernando Flores y Eugene Chulkov. Agradecimiento a todos y todas las que han formado parte de mi grupo de investigación. A todo este grupo de personas extraordinarias mi profunda gratitud por lo que juntos hemos construido. Ver hoy volar tan alto y tan bien a mis estudiantes de doctorado es una satisfacción difícilmente superable.

Resumo mi mensaje fundamental. Me siento un pequeño eslabón de una gran cadena. He disfrutado trabajando en los temas de los que les he hablado. Creo que la ciencia es estéticamente hermosa, culturalmente importante y económicamente decisiva. Espero poder ayudarles en la medida de mis fuerzas a transmitir este mensaje a la sociedad. Hay una cosa que parece cierta: a no ser que seamos más inteligentes, seremos más pobres.

Termino reiterando mi agradecimiento a todos los miembros de esta Academia y en especial a Alberto Galindo, quien se ha tomado el trabajo, no pequeño, de contestar a mi discurso. He disfrutado de su pasión por conocer, de su pasión por aprender. Siempre he admirado la universal amplitud de su conocimiento. Me ha enseñado lo importante de entender en profundidad, a saber apreciar la belleza de la ciencia y siempre me ha tendido la mano ayudándome en mi camino.

DISCURSO DE CONTESTACIÓN  
DEL  
EXCMO. SR. D. ALBERTO GALINDO TIXAIRE

Excmo. Sr. Presidente,  
Sras. y Sres. Académicos,  
Señoras, Señores,

Es para mí un gran honor, y motivo de honda satisfacción, haber sido designado por nuestro Presidente para dar la bienvenida a esta Real Academia de Ciencias al Profesor D. Pedro Miguel Etxenike Landiribar, glosar sus méritos, y responder posteriormente a su discurso de ingreso.

## I. LAUDATIO

Conocí personalmente al nuevo Académico allá por el año 80; pero ya antes el ciego destino me había llevado a intervenir acertadamente en su línea de universo, apoyando a un brillante y prometedor licenciado que solicitaba una beca para realizar su tesis doctoral en la Universidad de Cambridge. Allí, junto al Prof. John Pendry (hoy Sir John Pendry, Kt), a quien sus contribuciones más recientes a los metamateriales han convertido en firme candidato al galardón Nobel, desarrolló el Prof. Echenique sus primeros trabajos sobre estados Rydberg en superficies con los que consiguió el doctorado por la Universidad de Cambridge en 1976 y luego por la de Barcelona (1977).



Villa de Isaba.



Puente romano de Isaba-Belagua.

Presentar a este roncalés de Isaba, una de las siete villas del hermoso valle del Roncal (*Erronkariko ibaxa* en euskera roncalés), es fácil y gratificante. En física, es un investigador de gran prestigio internacional en el área de la materia condensada; en la vida social, es un pensador independiente, rápido e incisivo, que se siente igual de cómodo citando a Rabindranath Tagore que a Dirac que a un modesto *bertsolari*; y en lo privado, es un amigo leal.

Su currículum es realmente impresionante desde cualquier punto de vista. Para que lo entiendan mejor los científicos presentes, diré que es un CV esféricamente simétrico.

Dejaré a un lado su perfil como hombre público, que le llevó a ocupar la Consejería de Educación en el primer Gobierno Vasco del Lehendakari Carlos Garaikoetxea, en una etapa crucial de la democracia española.

Como científico, el Profesor Etxenike es licenciado en Ciencias Físicas por la Universidad de Navarra, doctor en Filosofía (Ph.D.) y doctor en Ciencias (Sc.D.) por Cambridge (1976, 1998), doctor en Ciencias Físicas por Barcelona (1977), y doctor *honoris causa* por las Universidades de Valladolid, Pública de Navarra, Complutense de Madrid, y Aalto de Finlandia.

Recuerdo que en el año 1996, tras haber sido elegido Académico Correspondiente de esta Real Academia, fue invitado Pedro Etxenike a dar aquí una conferencia, que desarrolló el 9 de junio bajo el título “*Interacción de partículas con la materia. Apantallamiento dinámico*”. Hice yo su presentación, y en esa fecha su CV no contenía otros premios que los académicos de licenciatura y doctorado, y como únicas distinciones el ser Overseas Fellow del Churchill College de Cambridge desde 1985, y Fellow de la APS desde 1990. Pero ese mismo año recibiría tres premios (entre ellos el Premio Euskadi de Investigación) y, en 1997 otro, y en 1998 dos más (el Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científico Técnica y el Max Planck Physics Prize) y cuatro distinciones; más tarde sería galardonado con el Premio Iberdrola de Ciencia y Tecnología (2002) y el Premio Nacional Blas Cabrera de Ciencias Físicas de Materiales y de la Tierra (2005), y adornado con numerosas distinciones, entre ellas la de ser elegido Presidente de

Jakiunde (Academia de Ciencias, Artes y Letras del País Vasco), Miembro Extranjero de la Real Academia de Ciencias, Letras y Bellas Artes de Bélgica, y Académico Numerario de nuestra Real Academia.

Estos reconocimientos no son gratuitos; son fiel y merecida respuesta a una brillante y copiosa producción científica de este físico de la materia condensada, interesado desde la interacción de cargas y radiación con la materia hasta la attofísica, pasando por la física de muchos cuerpos, la física de superficies, y la microscopía electrónica. Más de cuatro centenares de publicaciones internacionales lo atestiguan, algunas clásicas en su campo, referencias obligadas para cuantos trabajan en esos temas, como las que tiene con Pendry sobre estados Rydberg en superficies y con Rufus Ritchie sobre la pérdida de energía de iones lentos en gases de electrones, y otras de interés singular que han merecido aparecer en revistas tan señeras como Nature o Science.

No puedo olvidar la gran realidad científica que lleva el sello del Prof. Etxenike: el DIPIC, o Centro Internacional de Física de San Sebastián; una institución modélica que agrupa a docenas de investigadores de todo el mundo en la hermosa Donostia. Allí se producen entre dos y tres centenares de publicaciones anuales, y se realizan reuniones científicas internacionales tanto de máximo nivel como de interés público general. Muchos premios nobeles acuden allí regularmente.

Viene el Prof. Etxenike a ostentar la medalla 35 que antes portó el Excmo. Sr. D. Carlos Sánchez del Río y Sierra. De la amistad de ambos me siento orgulloso. Ambos, sin saberlo, han compartido facultades (intuición, rapidez intelectual, memoria, conocimientos, don de gentes) que les llevaron a liderar, con su apoyo personal e institucional, proyectos parecidos: Carlos a impulsar la física atómica y nuclear a nivel nacional, Pedro a impulsar la física de la materia condensada en el país vasco. Carlos llegó a expresarme su deseo de solicitar su pase a supernumerario para dejar su sitio a Pedro; le disuadí, pues la Academia necesitaba su presencia activa como referente para todos. Su inesperada y dolorosa pérdida precipitó el cambio. Estoy seguro de que el Prof. Etxenike estará a la altura de lo que muchos, aparte del Prof. Sánchez del Río, esperamos de él.

Antes de pasar a mayores, quiero recordar al médico rural D. Pedro Echenique y a la maestra nacional D<sup>a</sup> Felisa Landiríbar, padres de nuestro ingresante. De ellos emana la exquisita educación del Prof. Echenique; sé por este que su padre sentía verdadera admiración por los catedráticos de Madrid, y por eso disfrutaría hoy aquí escuchando nuestra consideración recíproca por su primogénito.

## II. LA CIENCIA Y LA BELLEZA

Como en ocasión reciente, y considerando de nuevo innecesario analizar el discurso, en esta ocasión del Prof. Etxenike, y deshacerme en elogios del mismo, que todos Vds. ya han visto que bien merece, centraré mi discurso sobre un tema que nos subyuga a ambos desde hace años: la estética en la ciencia.

Los científicos, con raras excepciones, somos sensibles a los valores estéticos que arropan muchas de las concepciones que han enriquecido el árbol de la ciencia. Gran número de vocaciones científicas se deben al atractivo de la obra brillante de un investigador, al arrobo ante una fórmula incomprensible que nos embelesa, a unos símbolos matemáticos desconocidos que cifran misteriosas conexiones, o a la ensoñación con nuevos proyectos que se abren al próximo futuro. Voy a aprovechar esta singular coyuntura para recordar aquí brevemente unas cuantas gemas de indudable belleza que salpican los dos milenios y medio de historia de la ciencia. Soy consciente de algunas omisiones que cometo, pero los límites en espacio, tiempo y/o conocimientos me han obligado a elegir.

Es un tema este sobre el que se han escrito miles y miles de palabras; unos centenares más no causarán estorbo, espero.

Hay dos fórmulas, una en matemáticas, y otra en física, que son verdaderos iconos:

$$e^{i\pi} + 1 = 0, E = mc^2$$

La primera, debida a Leonhard Euler,<sup>1</sup> reúne los cinco números más importantes del análisis matemático y tres operaciones binarias básicas, amén del símbolo de igualdad.

---

<sup>1</sup> Aunque no aparece explícitamente en la obra de Euler (llamado por alguno “Mozart de las matemáticas”), es consecuencia inmediata de la fórmula general  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  demostrada por Euler en su prodigioso tratado *INTRODUCTIO IN ANALISI INFINITORUM*, Lausannae 1748, Tomus Primus, Caput VIII. Me sorprendió ver que comienza Euler este capítulo dando una expresión numérica para  $\pi$  con nada menos que 128 cifras significativas (cálculo debido a Thomas Fautet de Lagny (1719)), todas correctas menos una (el dígito que ocupa el lugar 113, que en lugar de un 7 debía ser un 8). En 1794 se detectó el error. Euler, de memoria tan espectacular que le





Leonhard Euler.



Introductio in Analysin Infinitorum, Caput VIII, 1748.

Su sencillez, profundidad, simbolismo y elegancia confieren a esta expresión el máximo grado de belleza matemática. Un joven Richard Feynman de 14 años, tras toparse con ella por vez primera, escribía en su diario, en letras de molde, que era

*“la fórmula más sorprendente de las matemáticas”*.<sup>2</sup>

La segunda, debida a Albert Einstein, expresa la equivalencia entre masa y energía; su popularidad es conocida. Su breve demos-

permitía recitar la Eneida completa sin auxilio, era también un extraordinario calculador; como escribió François Arago: *Il calculait sans le moindre effort apparent, juste comme on respire, ou encore comme un aigle vole dans le ciel*. En el caso de  $\pi$ , aceptó el resultado sin comprobarlo. Hay otros resultados de Euler que también figuran entre los favoritos de los matemáticos al tiempo de elegir aquellos que combinan atractivo y simplicidad: por ejemplo, el de que un entero de la forma  $4n+1$  es primo si y solo si es suma de dos cuadrados (enunciado previamente por Pierre de Fermat en 1640 sin demostración, fue demostrado por Euler en 1749). Al ser  $\mathbb{Z}[i]$  un dominio de integridad con factorización única, la descomposición de cualquier primo, en especial el entero primo  $4n+1$ , en suma de dos cuadrados es esencialmente única.

<sup>2</sup> *The most remarkable formula in math.*

(R. P. Crease, *Equations as Icons*, Physicsworld Mars 1, 2007.) Lo mismo repite Feynman en sus LECTURES ON PHYSICS, Vol. I, Addison-Wesley, pág. 22-10, donde además remata su declarada admiración con estas palabras: *This is our jewel*.

tración, que le ocupó a su autor tres simples páginas, aparece como brillante consecuencia de la conservación de la energía y momento en la emisión de dos fotones por un cuerpo, considerada desde dos sistemas inerciales en movimiento relativo. Y su lectura la dio como nadie el propio Einstein:

*La masa de un cuerpo es una medida de su contenido de energía: si esta cambia en  $L$ , la masa cambia en  $L/9 \cdot 10^{20}$  en el mismo sentido, si la energía se mide en ergios y la masa en gramos.<sup>3</sup>*

## II.1 ¿Qué es la belleza?

Esta cuestión ha atraído la atención de casi todos los filósofos. Lo honesto, por mi parte, es reconocer que no sé muy bien qué es la belleza, pero que, como la mayoría de las personas, la reconozco sin demasiado esfuerzo allí donde está; cierto es, sin embargo, que la apreciación de ciertos matices puede requerir la orientación profesional, trátese de una pintura al óleo, de una sonata para cuerdas, de un teorema de existencia, o de un nuevo principio físico.



Werner Heisenberg.

El gran físico Werner Heisenberg,<sup>4</sup> uno de los padres fundadores de la mecánica cuántica, y sobresaliente también por sus hondos

---

<sup>3</sup> Die Masse eines Körpers ist ein Maß für dessen Energieinhalt; ändert sich die Energie um  $L$ , so ändert sich die Masse in demselben Sinne um  $L/9 \cdot 10^{20}$ , wenn die Energie in Erg und die Masse in Grammen gemessen wird.

(A. Einstein: Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?, Annalen der Physik 18, 639-641 (1905).)

<sup>4</sup> W. Heisenberg: *The Meaning of Beauty in the Exact Sciences*, Conferencia en la Academia Bávara de Bellas Artes, Múnich 1970. Edición bibliófila (en alemán e inglés) en la colección MEILENSTEINE DES DENKENS UND FORSCHENS, Belser-Presse, Stuttgart 1971.

conocimientos filosóficos y humanistas (leía a los pensadores griegos en versión original), recogió estas dos definiciones clásicas (una pitagórico-platónica y otra neoplatónica):

1. La belleza es la adecuada proporción de las partes entre sí y con el todo.
2. (Plotino) La belleza es la transparencia del esplendor eterno del “uno” a través del fenómeno material.

El padre del empirismo, el filósofo, jurista, estadista, y científico Francis Bacon, en su ensayo “*De la Belleza*”, matizará:<sup>5</sup>

*No hay belleza excelente sin alguna rareza en sus proporciones.*

Dicho de otro modo, para que la belleza destaque, es necesario que sorprenda, que despierte admiración, que se aleje en algún punto de la norma, que sea bizarra o insólita. Charles Baudelaire, poeta maldito, respaldará esta opinión:

*La irregularidad, es decir, lo inesperado, la sorpresa o el estupor son elementos esenciales y característicos de la belleza.*<sup>6</sup>

La simetría, armonía o proporciones correctas, como sello de belleza, habían quedado recogidas para el arte en el Canon del escultor en bronce Policleto y plasmadas en su Doríforo. Y, naturalmente, también Heisenberg se inclina por aplicar la primera de las dos definiciones anteriores. Así, por ejemplo, las partes de la teoría de números y de la geometría que tanto le deslumbraron de mozalbete en el Maximilians-Gymnasium de Múnich (dirigido unos años por su abuelo materno) eran las diferentes propiedades de los enteros y de las construcciones geométricas, en armonía o adecuada conformación con el todo, a saber, con el sistema subyacente de postulados.

---

<sup>5</sup> *There is no excellent beauty that hath not some strangeness in the proportion.*  
(F. Bacon: ESSAYS, CIVIL AND MORAL, *Of Beauty*, in The Harvard Classics Vol. 3 edited by Charles W. Eliot (New York 1909).)

<sup>6</sup> *L'irrégularité, c'est-à-dire l'inattendu, la surprise, l'étonnement sont une partie essentielle et la caractéristique de la beauté.*  
(Ch. Baudelaire: JOURNAL INTIME, *Fusées*, XII).

En el ensayo que antes he citado recuerda Heisenberg que, para contrarrestar su excesiva inclinación por los números y derivar su atención hacia el latín, su padre<sup>7</sup> le trajo un día a casa, de la Biblioteca Nacional, un tratado de Leopold Kronecker, escrito en esa lengua, sobre números enteros y el problema de dividir la circunferencia en arcos iguales. ¡Caramba con el padre! Se trataba nada menos que de la tesis doctoral de Kronecker,<sup>8</sup> el matemático que dijera que



Leopold Kronecker.

*los números enteros los ha hecho Dios; todo lo demás es obra de los hombres.*<sup>9</sup>

En dicha tesis, Kronecker estudia el grupo de las unidades de los cuerpos ciclotómicos, y en particular, proporciona un ejemplo explícito, posiblemente el primero, de descomposición de un grupo abeliano (en notación aditiva) de un número finito de generadores en suma directa de grupos cíclicos.<sup>10</sup>

Cuenta el joven Heisenberg que el estudio del libro de Kronecker le causó una honda impresión, y una sensación inmediata de belleza el hecho de que de unas propiedades de la partición de la circunferencia

---

<sup>7</sup> Filólogo, profesor de griego moderno y medieval en la Universidad de Múnich.

<sup>8</sup> L. Kronecker: *De unitatibus complexis* ("Sobre las unidades complejas"), tesis dirigida por Peter Gustav Lejeune Dirichlet, y publicada en versión completa en: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **93**, 1-52 (1882).

<sup>9</sup> *Die ganze Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.*

(Conferencia no publicada de Kronecker en la Convención de Naturalistas de Berlín en 1886, y citada por H. Weber en: *Leopold Kronecker, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **2**, 5-31, (1893).)

<sup>10</sup> S. G. Vlăduț: KRONECKER'S JUGENDTRAUM AND MODULAR FUNCTIONS, Gordon and Breach 1995.

en tramos congruentes se dedujeran consecuencias para los números enteros; mas esa

*impresión de algo muy hermoso fue, sin embargo, directa; no necesitó justificación ni explicación.*<sup>11</sup>

Heisenberg expone el pensamiento platónico, con un universo de “formas” o “ideas” accesibles solo al pensamiento e inaprehensibles por los sentidos; el mundo de las cosas corpóreas no es para Platón sino el conjunto de las sombras de esas formas. Nuestra mente no puede entender las formas, y su aproximación a ellas es semiconsciente, como si estuviera su recuerdo grabado en las almas antes de morar la Tierra. Y por eso,

*cuando el alma atisba la belleza, se atemoriza y estremece pues siente que algo evoca esa visión que no ha sido traído de fuera por los sentidos, sino que siempre ha estado depositado allí en nuestro inconsciente más profundo.*<sup>12</sup>

Johannes Kepler también pensaba de este modo respecto de la percepción de las armonías; en el Libro IV (Cap. 2, pág. 121) de su *HARMONICES MUNDI* había expresado Kepler su asombro tras constatar la armonía del cosmos en sus leyes planetarias:

*La facultad que percibe y reconoce las nobles proporciones en lo que se ofrece a los sentidos y en otras cosas situadas fuera de él, debe adscribirse a la región inferior del alma. Está muy cerca de la facultad que suministra esquemas formales a los sentidos, o incluso a más profundidad, y por tanto adyacente a la potencia puramente vital del alma, que no piensa en forma discursiva, es decir, en conclusiones, como los filósofos, y no usa ningún método conocido, por lo que no es peculiar solo al hombre, sino que también mora en las fieras y en las queridas bestias del campo. Cabe preguntarse cómo esta facultad del*

---

<sup>11</sup> Nur der Eindruck von etwas sehr Schöнем war ganz direkt, er bedurfte keiner Begründung oder Erklärung.

<sup>12</sup> En estos términos resume Heisenberg, “deserotizada”, la sección 251 del diálogo *Φαῖδρος* de Platón. Escribe Heisenberg: “Die Seele erschrickt, sie erschauert beim Anblick des Schönen, da sie spürt, daß etwas in ihr aufgerufen wird, das ihr nicht von außen durch die Sinne zugetragen worden ist, sondern das in ihr in einem tief unbewußten Bereich schon immer angelegt war.”

alma, que no participa en el pensamiento conceptual y no puede por tanto tener conocimiento previo de las relaciones armónicas, es capaz de reconocer lo que hay en el mundo exterior. Proclo lo ha expresado esto muy bien con su símil del despertarse como de un sueño. Pues del mismo modo a como las cosas sensorialmente expuestas del mundo exterior nos recuerdan las que antes percibimos en el sueño, también las proporciones matemáticas percibidas por los sentidos evocan los arquetipos inteligibles que ya teníamos antes interiormente, por lo que ahora brillan de verdad y vívidamente en el alma, donde antes solo estaban en la oscuridad. Pero ¿cómo han entrado allí? Mi respuesta es que todas las Ideas puras o patrones arquetipos de armonía, como de las que estábamos hablando, están presentes de modo inherente en todos los que son capaces de aprehenderlos. Pero no las recibe la mente por un proceso conceptual, sino que más bien son producto de una especie de intuición instintiva de pura cantidad y son innatas en estos individuos igual que el número de pétalos de una planta es innato en su principio de forma, o el número de sus cámaras de semillas es innato en la manzana.<sup>13</sup>

El feliz alumbramiento de la mecánica de matrices en una noche de finales de mayo de 1925, en la pequeña isla báltica de Helgoland, es uno de esos raros momentos que señalan un cambio histórico de rumbo en la ciencia. Aquejado de un fuerte ataque de fiebre del heno (rinitis alérgica estacional), un joven Heisenberg de 23 años había abandonado Gotinga por dos semanas y se refugiaba en esta isla ro-

---

<sup>13</sup> *Facultas illa quae proportiones nobiles in sensilibus, vel etiam in aliis rebus extra se constitutis, animadvertit agnoscitque, est inferior animae facultas, sensus proximè informans, aut adhuc inferior, scil. tantùm facultas animae vitalis, quippe quae nec discurrit, ut Philosophi solent, methodove ad hoc utitur; nec in solo inest hómine, sed etiam in feris & pecudibus, inque Anima sublumari. Quaeras? Si illa non compos discursus, eoque non possit aprehendere scientiam Harmonicarum proportionum, unde ergo hoc habeat, ut agnoscat forinsecus oblatas? Nam agnoscere, est externum sensile cum Ideis internis conferre, eisque congruum judicare. Quod pulchrè exprimit Proclus, vocabulo suscitandi, velutè somno. Sicut enim sensilia foris occurrentia fasciunt nos recordari eorum, quae antea cognoveramus: sic mathemata sensilia. Si agnoscuntur, eliciunt igitur intellectualia, ante intus praesentia: ut nunc actu reluceant in Anima, quae prius veluti sub velo potentie lateb ant in ea. Quomodo igitur irrumperunt intrò? Respondeo, omninò Ideas seu formales rationes harmoniarum, ut de ijs suprà differebamus, ineffe ijs, quae hac agnoscendi facultate pollent; sed non demum introrsum recipi per discursum, quin potius ex instinctu naturali dependeré, ijsque connasci, ut formis plantarum connasciitur numerus (res intellectualis) florum in flore & cellularu in pomo.*

(J. Kepler: HARMONICES MUNDI, Liber IV, Caput II, 121.)

cosa, sin árboles ni polen. En su equipaje mental le acompañaba el proyecto recién emprendido de reformular una física atómica en la que solo intervinieran magnitudes observables: en lugar de supuestas órbitas para los electrones, una tabla de números con las frecuencias de las líneas espectrales y las amplitudes de emisión/absorción. Reanudado allí el esfuerzo con total dedicación, y tras decidir cómo suplir en el nuevo marco las reglas de cuantificación de Bohr-Sommerfeld, le asalta a Heisenberg la terrible duda de que el nuevo programa que acomete pueda violar la conservación de la energía; pasa a investigar esta cuestión en un modelo sencillo (oscilador 1D); los cálculos con los primeros términos de su tabla indican que la energía se conserva; esto le excita y anima a seguir con los siguientes, y tras varias horas de numerosos errores por sus nervios desatados, ya bien entrada la noche, concluye satisfactoriamente su control. La nueva física cuántica que ha concebido, y que luego sería desarrollada y conocida como mecánica cuántica de matrices, parecía consistente. Y él mismo escribe:<sup>14</sup>

*Al principio estaba profundamente asustado. Tenía la impresión de que, a través de la superficie de los fenómenos atómicos, estaba contemplando un interior extrañamente hermoso, y casi sentía vértigo ante la idea de que ahora tendría que someter a prueba esta rica estructura matemática que la naturaleza desplegaba tan generosamente ante mis ojos. Estaba demasiado excitado como para dormir, y con el amanecer de un nuevo día me encaminé hacia el extremo sur de la isla donde ansiaba trepar por una roca que se adentra en el mar. Lo conseguí ahora con no excesiva dificultad, y esperé desde su cima la salida del Sol.*

---

<sup>14</sup> Im ersten Augenblick war ich zutiefst erschrocken. Ich hatte das Gefühl, durch die Oberfläche der atomaren Erscheinungen hindurch auf einen tief darunter liegenden Grund von merkwürdiger innerer Schönheit zu schauen, und es wurde mir fast schwindlig bei dem Gedanken, daß ich nun dieser Fülle von mathematischen Strukturen nachgehen sollte, die die Natur dort unten vor mir ausgebreitet hatte. Ich war so erregt, daß ich an Schlaf nicht denken konnte. So verließ ich in der schon beginnenden Morgendämmerung das Haus und ging an die Südspitze des Oberlandes, wo ein alleinstehender, ins Meer vorspringender Felsturm mir immer schon die Lust zu Kletterversuchen geweckt hatte. Es gelang mir ohne größere Schwierigkeit, den Turm zu besteigen, und ich erwartete auf seiner Spitze den Sonnenaufgang.

(W. Heisenberg: DER TEIL UND DAS GANZE. GESPRÄCHE IM UMGEBUNG DER ATOMENPHYSIK, Piper Verlag 1969; PHYSICS AND BEYOND: ENCOUNTERS AND CONVERSATIONS, Harper and Row 1971.)

Los detalles y resultados de esta investigación aparecieron en la primera publicación científica con que se inauguraba una nueva era en la física.<sup>15</sup> A este trabajo se ha referido el nobel Steven Weinberg en estos términos:

*Si el lector [o lectora] se ha desconcertado ante lo que Heisenberg estaba haciendo, no está solo [sola]. Varias veces he intentado leer el trabajo que Heisenberg escribió a su regreso de Helgoland, y, aunque creo entender la mecánica cuántica, nunca he conseguido entender las razones de Heisenberg para ciertos pasos matemáticos en el mismo. Los físicos teóricos, en su trabajo más exitoso, tienden a desempeñar uno de estos dos papeles: o son sabios o son magos... Por lo general no es difícil entender las publicaciones de los físicos-sabios, pero las de los físicos-magos resultan a menudo incomprensibles. En este sentido, el trabajo de Heisenberg de 1925 es pura magia.*<sup>16, 17</sup>

También los matemáticos se han preocupado por la posible conexión entre la estética y las matemáticas. Un ejemplo notable es Sir Michael Atiyah OM<sup>18</sup> (medalla Fields, medalla Copley, y premio Abel); para él la matemática es arte, y también ciencia. Es arte en su núcleo más puro, y ciencia en su faceta aplicada. La atracción que ejerce sobre nosotros una obra matemática depende de los grados en que ostente diferentes cualidades como belleza, originalidad, profundidad, alcance, elegancia, utilidad, sencillez,... Pero nuestra apreciación de estas cualidades no es homogénea, afortunadamente, pues cada

---

<sup>15</sup> W. Heisenberg: *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*, Z. Phys. 33, 879-893 (1925).

<sup>16</sup> *If the reader is mystified at what Heisenberg was doing, he or she is not alone. I have tried several times to read the paper that Heisenberg wrote on returning from Helgoland, and, although I think I understand quantum mechanics, I have never understood Heisenberg's motivations for the mathematical steps in his paper. Theoretical physicists in their most successful work tend to play one of two roles: they are either sages or magicians ... It is usually not difficult to understand the papers of sage-physicists, but the papers of magician-physicists are often incomprehensible. In this sense, Heisenberg's 1925 paper was pure magic.*

(S. Weinberg: *DREAMS OF A FINAL THEORY*, Pantheon, New York, 1992, pp 53-54.)

<sup>17</sup> I. J. R. Aitchison, D. A. MacManus, Th. M. Snyder: *Understanding Heisenberg's "magical" paper of July 1925: A new look at the calculational details*, Am. J. Phys. 72 (11), 1370-1379 (2004).

<sup>18</sup> *Order of Merit.*



cual tiene sus sensibilidades especiales, lo mismo que ocurre ante una composición musical, un bodegón, una estatua, o una catedral.

Valoración muy especial y positiva se otorga a aquellos avances matemáticos que relacionan campos otrora muy alejados entre sí, o a demostraciones con argumentos inesperados y brillantes que abren nuevos caminos. Abundan los ejemplos tanto del pasado como de nuestro tiempo:

i/ las cónicas de Apolonio y la astronomía planetaria de Kepler;

ii/ la ecuación no-lineal de Korteweg-de Vries para las ondas de superficie en aguas poco profundas, con sus infinitas leyes de conservación, y la integración explícita de su flujo temporal mediante la transformación de dispersión inversa, gracias a la posibilidad de expresar KdV como un par de Lax;

iii/ la jerarquía de ecuaciones de Kadomtsev-Petviashvili para ondas de agua bidimensionales, base para la resolución por Shiota del problema de Riemann-Schottky, consistente en caracterizar, dentro del semiespacio superior  $H_g$  de Siegel, el subconjunto formado por las matrices de periodos de las superficies de Riemann de género  $g$ ;

iv/ los campos Yang-Mills y su aplicación a problemas de topología en baja dimensión, obtención de nuevos invariantes de nudos, o hallazgo de estructuras diferenciales exóticas en  $\mathbb{R}^4$ ;

v/ la insospechada conexión entre la geometría enumerativa y la teoría de supercuerdas propiciada por la simetría espejo;<sup>19</sup>

---

<sup>19</sup> Realmente espectacular fue la predicción del número preciso  $N_d$  de curvas racionales de orden  $d$  (número de puntos de intersección con un hiperplano genérico) sobre una variedad Calabi-Yau particular, un trifoldio quíntico  $Q$  en  $\mathbb{CP}^4$ , a través de una segunda CY, otra quíntica  $Q'$ , simétrica “espejular” de la anterior. Era ya sabido entonces por los matemáticos que  $N_1 = 2875$  (Harris, 1979),  $N_2 = 609\,250$  (Katz, 1986), y se acababa de concluir un penoso cálculo de  $N_3$ , con el valor de  $2\,682\,549\,425$  (Ellingsrud, Strømme, junio 1990). Por eso la propuesta por los físicos de los valores  $N_1 = 2875$ ,  $N_2 = 609\,250$ ,  $N_3 = 317\,206\,375$ ,  $N_4 = 242\,467\,530\,000$ ,  $N_5 = 229\,305\,888\,887\,625$ , y así sucesivamente hasta  $N_{10}$ , reproduciendo los dos primeros, dando un valor distinto para el tercero, y presentando como novedad los restantes, fue toda una revelación.

vi/ las funciones de partición en física estadística y su proyección sobre la hipótesis de Riemann y la conjetura de Pólya-Hilbert;

vii/ los próximos ordenadores cuánticos y los problemas de la factorización de enteros y cálculo de logaritmos discretos de modo eficaz (problemas que el algoritmo cuántico de Peter W. Shor lleva a clase BQP), o el problema de la ecuación de John Pell y de los ideales principales en cuerpos de números cuadráticos (que el algoritmo cuántico de Sean Hallgren hace computacionalmente tratable), o el problema de resolver eficientemente grandes sistemas de ecuaciones lineales (el algoritmo cuántico HHL de Harrow, Hassidim y Lloyd supone una mejora exponencial que puede repercutir de modo esencial en el aprendizaje automático y en la minería de *big data*); etc.

Este sorprendente influjo bidireccional entre matemática y física ha sido realmente provechoso para ambas ciencias.<sup>20, 21</sup> Estábamos acostumbrados al papel esencial de las matemáticas en todo tipo de actividad científica; bien nos avisó Galileo Galilei de ello en EL ENSAYISTA:<sup>22</sup>

*La filosofía está escrita en este enorme libro que está siempre abierto ante de nuestros ojos (me refiero al Universo), pero que no se puede entender si antes no aprendemos el lenguaje, y a conocer los caracteres en que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, y los*

---

(P. Candelas, X. C. de la Ossa, P. S. Green, L. Parkes: *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nuclear Phys. B **359**, 21-74 (1991).)

Pronto pusieron los matemáticos su rigor acostumbrado, y confirmaron todos estos resultados de los físicos, incluido el valor de  $N_3$ , tras detectar y corregir un error en su cálculo inicial.

(B.H. Lian, K. Liu, S.T. Yau: *The Candelas-de la Ossa-Green-Parkes Formula*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **67**, 106-114 (1998).

<sup>20</sup> M. Atiyah: *Mathematics: Art and Science*, Bulletin of the Amer. Math. Society **43**, 87-88 (2005).

<sup>21</sup> A. Galindo: *Matemáticas en la Física*, en el libro ASPECTOS MATEMÁTICOS EN LA CIENCIA Y EN LA SOCIEDAD, pág. 49-79, Instituto de España, Madrid 2008.

<sup>22</sup> *La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'Universo), ma non si può intendere, se prima non s'impara a intendere la lingua, e conoscere i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.*

(G. Galilei: IL SAGGIATORE, Roma 1623.)

caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuales es humanamente imposible entender nada; sin ellos es como vagar en vano por un oscuro laberinto.

Para Eugene Wigner,<sup>23</sup>

*El milagro de la idoneidad del lenguaje matemático para formular las leyes físicas es un don maravilloso que ni entendemos ni merecemos. Deberíamos estar agradecidos por ello y esperar que siga así en las investigaciones futuras, y se extienda, para bien o para mal, a gusto nuestro, aunque quizás para nuestro desconcierto, a amplias ramas del saber.*

Lo más valioso del diálogo mostrado entre matemáticas y física, esta última en sus extremos macro- y micro-, es la interacción de cada uno de estos dos mundos con el otro de valores totalmente opuestos, dos mundos en los que, como ha escrito el matemático Yuri Manin, la historia nos enseña que

*no podemos vivir uno sin el otro.... En este siglo el romanticismo proviene de la física: las grandes extensiones del universo, el comportamiento maravillosamente errático del microcosmos, el subjetivismo del observador y el poder de lo inobservable, el Big Bang, el principio antrópico, nuestros intentos unas veces humildes y otras megalomaniacos para lidiar con la irreverente naturaleza. La matemática nos proporciona hábitos higiénicos y dolores de cabeza.*<sup>24</sup>

---

<sup>23</sup> The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning.

(E. Wigner: *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Communications in Pure and Applied Mathematics, 13, 1-14 (1960).)

<sup>24</sup> We cannot live without each other. ... In this century romanticism comes from physics: the vast expanses of the Universe, the wonderfully erratic behavior of the microworld, the observer's subjectivism and the power of the unobservable, the Big Bang, the Anthropic Principle, our in turn humble and megalomaniacal attempts to cope with irreverent Nature. Mathematics supplies hygienic habits and headaches.

(Yu. I. Manin: *Interrelations between Mathematics and Physics*, Colloque Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXème siècle en l'honneur de Dieudonné (CNRS 1996).)

Teniendo en cuenta la asombrosa aportación de la física a las matemáticas que hemos indicado antes sin detalle, y que el mundo matemático reconoce y está aún digiriendo por la dificultad de dominar el lenguaje y técnicas de la física de los campos cuánticos y de las cuerdas, por supuesto con menos rigor del que es estándar en la investigación matemática pero con una rompedora potencia intuitiva, quizá procediera invertir la dirección del asombro de Wigner y mostrarse estupefacto ante la “irrazonable eficacia de la física en la matemática”.<sup>25</sup>

Atiyah también ha colaborado en la realización de un interesante experimento destinado a detectar una posible correlación entre las zonas cerebrales activadas por la percepción de la belleza matemática y la percepción de la belleza artística. Este experimento fue liderado por el neurólogo Semir Zeki, Director del Instituto de Neuroestética de la Universidad Colegio de Londres. Con una muestra de 15 matemáticos profesionales y 60 fórmulas sometidas a su valoración (en tres grados: bellas, neutras, feas), y usando imágenes de resonancia magnética funcional (fMRI) para determinar la parte cerebral activada, el experimento mostró que la zona activada por la belleza matemática estaba paraméricamente correlacionada con la misma que la activada por otras fuentes de belleza más sensoriales (como pueden ser la música o la belleza visual), a saber, la parte del cerebro emocional conocida como campo A1 de la corteza orbitofrontal medial.<sup>26</sup>

Esto es solo el comienzo. Quién sabe si en el futuro las matemáticas, a través de la percepción neuronal de su belleza, pueda enseñarnos algo sobre el cerebro humano, o éste, con su reacción ante lo bello, indicarnos algo sobre el universo.

De entre las fórmulas más bellas escogidas entre las 60 propuestas están la identidad de Euler, la identidad pitagórica, y las ecuaciones de Cauchy-Riemann; y entre las más feas, la identidad funcional de Riemann, y la serie de Ramanujan para  $1/\pi$  que luego comentaremos.

---

<sup>25</sup> M. Atiyah, R. Dijkgraaf, N. Hitchin: *Geometry and physics*, Phil. Trans. R. Soc. A **368**, 913-926 (2010).

<sup>26</sup> S. Zeki, J. P. Romaya, D. M. T. Benincasa, M. F. Atiyah: *The experience of mathematical beauty and its neural correlates*, Front. Hum. Neurosci. **8**, Art. 68, 13 February 2014.

Parafraseando a Lagartijo (o a Guerra, o a El Gallo), podríamos decir que, por lo general, ¡hay gustos “pa tó”!

Como un ejemplo importante de la reacción de los matemáticos ante este experimento y sus resultados comentaremos la del geómetra David Mumford (medallista Fields y premio Wolf);<sup>27</sup> opina que la población matemática es tan diversa en sus campos de investigación que son muchas las áreas corticales que se activarían con una muestra más amplia y significativa de individuos analizados; para hallar correlaciones con áreas más localizadas convendría hacer este tipo de experimentos escogiendo muestras tribales más homogéneas, y para ello sugiere Mumford clasificar a los matemáticos en cuatro grandes grupos o tribus que denomina los matemáticos “exploradores” (como Teeteto, Turston, Artin), los matemáticos “alquimistas” (como Viète, Euler, Gauss, Zariski, Atiyah, Singer),<sup>28</sup> los matemáticos “luchadores” (como Arquímedes, Cauchy, Sobolev, Yau) y los matemáticos “detectives” (como Eudoxo, Penrose, Grothendieck, Wiles, Perelman).

Otro interesante y más reciente experimento sobre las matemáticas y el cerebro humano parece indicar que, contra lo que se suponía, la capacidad matemática no radica en las zonas cerebrales relacionadas con el lenguaje, sino en aquellas otras vinculadas al espacio, al tiempo y a los números.<sup>29</sup>

## II.2. La razón áurea

Es la más célebre de las proporciones, y figura definida por vez primera en el Libro VI de los ELEMENTOS (Στοιχεῖα) de Euclides (Εὐκλείδης), de Alejandría, con el nombre de razón extrema y media (ἄκρον καὶ μέσον λόγον):

---

<sup>27</sup> D. Mumford: *Math & Beauty & Brain Areas*, Archive for Reprints, Notes, Talks, and Blog, October 11, 2015.

<sup>28</sup> Mumford dice que no sabe quién es el autor de la extraña serie para  $1/\pi$  que aparece con el número 14 en la lista de 60 fórmulas de Atiyah et al., pero que ese matemático bien podría ser del tipo “alquimista barroco”. Dicho matemático no es otro que Ramanujan.

<sup>29</sup> M. Amalric, S. Dehaene: *Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **113**, 4909-4917 (2016).

β'.

"Ἀκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμηθῆναι λέγεται, ὅταν ᾗ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμήμα, οὕτως τὸ μείζον πρὸς τὸ ἔλαττον.

2.

*Se dice que un segmento está dividido en razón extrema y media cuando el todo es al segmento mayor como el mayor es al pequeño.*

El matemático y monje franciscano Luca Pacioli le dio a comienzos del siglo XVI el nombre de "proporción divina" (en latín *divina proportio*). La denominación "razón áurea" (en alemán *goldener Schnitt*) es más tardía, de principios del XIX, posiblemente debida al matemático germano Martin Ohm (hermano pequeño del físico Georg Ohm, responsable de la famosa ley con su nombre). Su símbolo (a partir del pasado siglo) es  $\Phi$  (o  $\varphi$ ), la inicial de Φειδίας (Fidias), el famoso escultor y arquitecto griego vinculado al Partenón, o bien  $\tau$ , inicial de τομή (corte o sección).

Para Kepler, la proporción divina, junto con el teorema de Pitágoras, eran las dos joyas de la geometría.<sup>30</sup>

Existe una creencia bastante generalizada, y sin fundamente científico, en que este número  $\Phi$  irracional ("el más irracional de todos los irracionales", pero a la vez "el más noble de entre los números nobles")<sup>31</sup>

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}} = 2 \cos \frac{\pi}{5} = 1.6180339887498948482...$$

<sup>30</sup> *Atque hactenus vsui fuit aureum illud theorema Pythagorae de potentijs laterum in triangulo rectangulo, prop. 47. lib1. In caeteris duobus corporibus altero illo Geometriae thesauro opus est, de línea secundum extremam et mediam rationem secta, qui est propositio 30. sexti.*

(J. Kepler, MYSTERIUM COSMOGRAPHICUM, Cap. XIII).

<sup>31</sup> El más irracional, porque la fracción continua que lo representa es la más lentamente convergente; y entre los números nobles (que son aquellos cuya fracción continua termina en un número infinito de 1's), es el más noble pues menos ausencias de 1's presenta (no tiene ninguna), y esto se manifiesta en que aquellos sistemas dinámicos en que sus órbitas cerradas tienen periodos de cociente  $\Phi$  son más resistentes a la aparición del caos.

es un indicador de las proporciones que resultan más placenteras a la vista, esto es, un canon de belleza. El abuso ignorante de  $\Phi$  en toda una parafernalia esotérico-mística ha llevado a la mayoría de los matemáticos a exclamar, desesperados, que se trata de “un mito que se resiste en desaparecer”.

Nuestro poeta Rafael Alberti le dedicó desde el destierro este elegante soneto con el título “A la divina proporción”:<sup>32</sup>

*A ti, maravillosa disciplina,  
media, extrema razón de la hermosura,  
que claramente acata la clausura  
viva en la malla de tu ley divina.*

*A ti, cárcel feliz de la retina,  
áurea sección, celeste cuadratura,  
misteriosa fontana de medida  
que el Universo armónico origina.*

*A ti, mar de los sueños angulares,  
flor de las cinco formas regulares,  
dodecaedro azul, arco sonoro.*

*Luces por alas un compás ardiente.  
Tu canto es una esfera transparente.  
A ti, divina proporción de oro.*

Su presencia en la naturaleza (conchas de animales, brotes en los tallos de las plantas, etc.) no está firmemente respaldada por las medidas, así como tampoco su afirmada presencia en las dimensiones de la Gran Pirámide de Giza, en la fachada del Partenón, en las estatuas de Fidias, en la Gioconda, en el “hombre de Vitrubio”, y en los violines de Stradivarius; a lo sumo está sugerida de forma un tanto aproximada.

---

<sup>32</sup> R. Alberti, Soneto en el Proemio a LA DIVINA PROPORCIÓN, de Luca Pacioli, Editorial Losada, Buenos Aires (1946). Esta composición de Alberti está también recogida en la encomiable antología EXPLORANDO EL MUNDO. POESÍA DE LA CIENCIA, de Miguel García-Posada, Editorial Gadir, Madrid (2006), una cuidada selección de poemas que ilustran la atracción que sobre el mundo poético ejercen los descubrimientos científicos, fuente generosa de nuevas e increíbles metáforas.

Sí aparece con más contundencia, pues así se pintó a propósito, en el *Sacramento de la Última Cena* de Salvador Dalí; la imponente figura del dodecaedro, símbolo platónico del universo, lo atestigua con sus pentágonos.



Partenón.

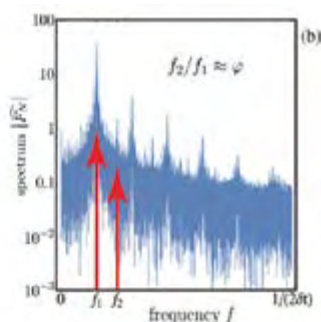
Curiosamente, muestra también su cara, en buena aproximación, en varias estrellas pulsantes detectadas por el telescopio espacial Kepler; sus frecuencias primaria y secundaria están en proporción (entre 1.58 y 1.64) compatible con la áurea, lo que, a la luz del teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), augura una dinámica estelar con atractores extraños (por tanto de geometría fractal) y no-caóticos. La estrella RRc Lyrae KIC 5520878 (con dos frecuencias dominantes de 0.266 d y 0.169 d) puede ser el primer caso detectado con este



Sacramento de la Última Cena.



Estrella pulsante RRc Lyrae KIC 5520878 (Olena Shmahalo/QuantaMagazine).



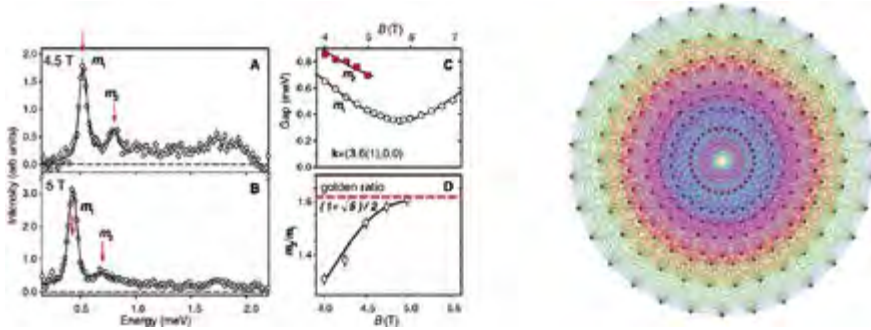
Espectro de la estrella pulsante RRc Lyrae KIC 5520878 (Lindner *et al.*)



comportamiento fuera del laboratorio.<sup>33</sup> Como razón del predominio de este cociente de frecuencias, se ha apuntado a su mayor estabilidad ante perturbaciones.

Otras muestras notables de la omnipresencia de la sección áurea se dan en magnetismo y en la física de los agujeros negros. Citemos sendos ejemplos:

1/ En la física del magnetismo, en un ferroimán cuasi-1D (cadena de Ising) de  $\text{CoNb}_2\text{O}_6$  (niobato de cobalto) enfriado a 40 mK y en presencia de un campo magnético de unos 5 T, se ha observado<sup>34</sup>, mediante dispersión de neutrones, una transición de fase, con emergencia de la simetría exótica de mayor orden posible representada por el grupo de Lie excepcional  $E_8$  (de dimensión 248). Los datos experimentales obtenidos cuando el campo magnético (5 T) es subcrítico y muy próximo al crítico (5.5 T) exhiben las resonancias debidas a las excitaciones asociadas a las dos primeras masas



Detección experimental de las dos primeras excitaciones del ferroimán descrito en el texto

Proyección Petrie 2D del diagrama de raíces del grupo de Lie excepcional  $E_8$ .

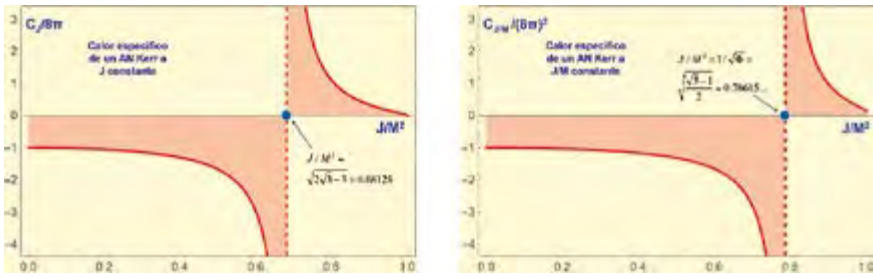
<sup>33</sup> J.F. Lindner, V. Kohar, B. Kia, M. Hippke, J.G. Learned, W.L. Ditto: *Strange Nonchaotic Stars*, Phys. Rev. Lett. **114**, 054101 (2015).

<sup>34</sup> R. Coldea, D.A. Tennant, E.M. Wheeler, E. Wawrzynska, D. Prabhakaran, M. Telling, K. Habicht, P. Smeibidl, K. Kiefer: *Quantum Criticality in an Ising Chain: Experimental Evidence for Emergent  $E_8$  Symmetry*, Science **327**,177-180 (2010).

$m_1$  y  $m_2$ , de las 8 de este grupo emergente, con un cociente  $m_2/m_1$  que resulta ser aproximadamente la razón áurea  $\Phi$  (valor exacto de  $m_2/m_1$  para  $E_8$ ). Esta fase había sido predicha por Alexander Zamolodchikov veinte años antes.<sup>35</sup>

2/ En cuanto a los agujeros negros (ANs), se sabe que los de tipo Schwarzschild tienen calor específico negativo, de modo que su pérdida de masa por evaporación Hawking hace que el AN, en lugar de enfriarse, se caliente.

Pero si el AN es Kerr, en una académica pérdida de energía a



Calores específicos de un AN Kerr: izquierda, con  $J$  constante; derecha, con  $J/M$  constante.

(momento angular  $J$ /masa  $M$ ) constante, pasaría de tener un calor específico negativo si  $J/M^2 < 1/\sqrt{\Phi}$  a positivo cuando  $J/M^2 > 1/\sqrt{\Phi}$ .<sup>36</sup>

Finalmente, recordaremos que incluso en las matemáticas modernas ha irrumpido la razón áurea; un ejemplo apropiado son los enlosados cuasi-periódicos de Sir Roger Penrose OM, cuyo espacio es no-conmutativo y con grupo dimensional el subgrupo de los enteros generado por el par  $\{1, \Phi\}$ .<sup>37</sup>

<sup>35</sup> A. Zamolodchikov: *Integrals of Motion and S-matrix of the Scaled  $T = T_c$  Ising Model with Magnetic Field*, Int. Mod. Phys. A **04**, 4235-4248 (1989).

<sup>36</sup> P.C.W. Davies: *The thermodynamic theory of black holes*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **353**, 499-521 (1977); *Thermodynamics of black holes*, Rep. Prog. Phys. **41**, 1313-1355 (1978); *Thermodynamic phase transitions of Kerr-Newman black holes in de Sitter space*, Classical and Quantum Gravity **6**, 1909-1914 (1989).

<sup>37</sup> A. Connes, NONCOMMUTATIVE GEOMETRY, Academic Press, San Diego, CA, 1994.

## II.3. Armonías y números

En el Libro I (Alfa) de su Metafísica (ΤΑ ΜΕΤΑ ΤΑ ΦΥΣΙΚΑ, Α), ese que comienza con la rotunda afirmación de que

*todos los hombres, por naturaleza, desean saber,*<sup>38</sup>

el Estagirita atribuye a los pitagóricos el cultivo de las matemáticas y su creencia doctrinal de que los números son el principio de todas las cosas y el universo entero una armonía o proporción<sup>39</sup>. Los pitagóricos resumían en su *Tetractis* (Τετρακτὺς) los números 1, 2, 3, 4 (fundamento de las razones octava 2:1, quinta 3:2, y cuarta 4:3, base de su escala musical),<sup>40</sup> siendo su totalización 10 una unidad estructural, símbolo del cosmos.<sup>41</sup> Pero hay que esperar a LOS ELEMENTOS de Euclides para admirar el genio matemático griego. Es un compendio (13 Libros) de todas las matemáticas conocidas entonces. Salvo los Libros VII, VIII y IX, dedicados a la teoría elemental de los números, los restantes versan sobre geometría. Su exposición es impecable, de corte moderno, con deducciones rigurosas (teoremas) a partir de unos postulados básicos y unas nociones comunes (axiomas).

Interesante es la siguiente apreciación:<sup>42</sup>

*A la edad de once años empecé a leer a Euclides, con mi hermano como tutor. Este fue uno de los grandes sucesos de mi vida, tan deslumbrante como el primer amor. No se me había ocurrido que hubiera en el mundo algo tan delicioso.*

(B. Russell)

---

<sup>38</sup> Πάντες ἄνθρωποι τοῦ εἰδέναι ὀρέγονται φύσει.

(Aristóteles: ΤΑ ΜΕΤΑ ΤΑ ΦΥΣΙΚΑ, Α, 980α.)

<sup>39</sup> Libro I, 985b-986a.

<sup>40</sup> La escala de 12 semitonos basada en la aplicación iterada de intervalos de quinta (3:2) y reducción al intervalo semiabierto [1,2) solo se aparta de la escala bien temperada en un 1.4% relativo.

<sup>41</sup> G. Bueno: LA METAFÍSICA PRESOCRÁTICA, Pentalfa, Oviedo 1974.

<sup>42</sup> *At the age of eleven, I began Euclid, with my brother as my tutor. This was one of the great events of my life, as dazzling as first love. I had not imagined that there was anything so delicious in the world.*

(B. Russell: AUTOBIOGRAPHY, con introducción de Michael Foot. Routledge 1998.)

Otra muestra de esta efusión russelliana:<sup>43</sup>

*Las matemáticas, con razón, no solo poseen la verdad, sino también la suprema belleza — una belleza fría y austera, como la de la escultura...*

(B. Russell)



Papiro de Oxirrinco con un fragmento de los Elementos



Euclides (¿?) (Escuela de Atenas).

Impresiona, efectivamente, la lectura de Los Elementos. Por ejemplo, empieza la aritmética en el Libro VII definiendo la *unidad* (μονάς) como aquello en virtud de lo cual cada cosa que existe es una, luego el *número* (ἀριθμός) como multitud de unidades, a continuación un número *divisor* de otro número (μέρος ἀριθμός ἀριθμοῦ) cuando mide a éste, en lugar undécimo, el *número primo* (πρῶτος ἀριθμός) como el que solo puede ser medido por la unidad, y como última definición (la vigésimo segunda), el número perfecto (τέλειος ἀριθμός), el que es igual a sus partes, es decir, el que es suma de sus divisores (excluido él mismo).

En el Libro IX se encuentra el teorema de infinitud de números primos, con una demostración maravillosa por su sencillez; es la clásica que aparece en todos los libros de aritmética que se precien, aunque debido a una notación muy limitada con respecto de la actual,

---

<sup>43</sup> Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty — a beauty cold and austere, like that of sculpture...

(B. Russell: MYSTICISM AND LOGIC: AND OTHER ESSAYS. Longman, London, 1919.)

Euclides se reduce a probar un ejemplo: que si existen tres primos, necesariamente existe otro. Tengamos presente que en aquella época ni se había introducido el infinito, ni el proceso de inducción. Nadie pone en duda que Euclides sabía que su demostración era extensible a cualquier colección finita de primos. Esta es la famosa proposición 20 del Libro IX de Euclides sobre el número de números primos:

*Hay más números primos que los de cualquier colección de números primos.*

(οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν).

Culmina el Libro IX con la proposición 36, relativa a los números perfectos:

*Si formamos siguiendo una proporción doble tantos números como queramos, empezando por la unidad, hasta que la suma de todos sea un número primo, el producto de esta suma por el último de aquellos números es un número perfecto.*<sup>44</sup>

Fue preciso esperar a Euler<sup>45</sup> para la demostración del recíproco:

*Todo entero perfecto y par es de la forma dada por Euclides.*

Es decir, un entero  $P$  es perfecto y par si y solo si

$$P = 2^{n-1}p, \text{ con } n > 1, \text{ y } p = 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \text{ primo.}$$

Los primos de la forma  $p = 2^n - 1$  se conocen como primos de Mersenne; para ello necesariamente  $n$  debe ser primo.<sup>46</sup>

---

<sup>44</sup> ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπαρ συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπαρ ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

<sup>45</sup> L. Euler: *De numeris amicibilibus* [Sobre los números amigos], *Commentationes arithmeticae* 2, 627-636 (1849). Publicación póstuma. Según Jacobi, fue leída por Euler en la Academia de Berlín en 1747.

<sup>46</sup> Se desconoce si hay números perfectos impares. Tampoco se sabe si el número de primos de Mersenne es infinito o no, y por tanto no se sabe nada sobre la finitud o infinitud de los números perfectos pares. De momento (diciembre 2016) se conocen 49 primos de Mersenne, asociados a los siguientes valores del exponente  $n$ : 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127,..., 32 582 657,..., 74 207 281. Los

No dejaremos el mundo griego sin hablar de la Aritmética (Ἀριθμητικά) de Diofanto de Alejandría (200/214-284/298), una obra de 13 libros de los que solo se conocen los seis primeros. Contienen una colección de más de un centenar de problemas algebraicos resueltos en números racionales positivos (desdeñó los negativos como absurdos y los irracionales como imposibles), desde ecuaciones diofánticas lineales a otras cuadráticas y cúbicas. Manejó identidades como la expresión de producto de dos sumas de dos cuadrados como suma de dos cuadrados (hoy serían la identidades  $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 = |z_1 z_2^*|^2$ ). No ofrece soluciones generales, sino particulares.

Especial mención merece el problema 8 del Libro II de la Aritmética de Diofanto; su traducción al latín en 1621 por Claude Gaspard Bachet de Méziriac inspiró a uno de sus lectores, el famoso Fermat, una de las afirmaciones cuyo intento de demostración se convirtió en un reto histórico insuperable a la comunidad matemática durante 358 años. En su copia de la obra, al lado del enunciado del problema 8 del Libro III

*Descomponer un cuadrado dado en dos cuadrados*<sup>47</sup>

escribió esto Fermat (~1637):

*Es imposible descomponer un cubo en dos cubos, o una cuarta potencia en dos cuartas potencias, o en general, cualquier potencia superior a la segunda en dos potencias del mismo exponente. He encontrado una demostración de esto realmente maravillosa. No cabe por la estrechez del margen.*<sup>48</sup>

La siguiente edición de esta obra (1670), dirigida por su hijo Clément-Samuel Fermat, incluye impresa, a continuación del problema 8, la anterior nota, tras este encabezamiento: OBSERVATIO DOMINI

---

primeros 44 (hasta el 32 582 657 inclusive), son todos los posibles en ese intervalo; entre el 44 y el último conocido (lugar 49) podría haber algún otro aún no hallado.

47 *Propositum quadratum dividere in duos quadratos.*

48 *Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.*

PETRI DE FERMAT. La afirmación de la nota mencionada se conoce como “último teorema de Fermat”.

Muchos de los grandes matemáticos del pasado se enfrentaron al reto de probar este teorema, y lo consiguieron para valores particulares del exponente.<sup>49</sup> Por ejemplo, el propio Fermat ( $n = 4$ ), Euler ( $n = 3$ ), Adrien-Marie Legendre, Dirichlet, y más tarde, póstumamente, Carl Friedrich Gauss ( $n = 5$ ), Gabriel Lamé y Henri Lebesgue ( $n = 7$ );<sup>50</sup> Sophie Germain inició un ambicioso proyecto de investigación sobre este problema de Fermat, demostrando, por ejemplo, que si  $n$  es primo impar y  $2n+1$  es también primo, entonces la ecuación de Fermat  $x^n + y^n = z^n$  carece de solución de tipo 1, esto es, carece de solución  $(x, y, z)$  no trivial ( $xyz \neq 0$ ) y tal que  $xyz \neq 0 \pmod n$ ; siglo y medio más tarde Leonard Adleman, Roger Heath-Brown y Étienne Fouvry han demostrado que esto es cierto para un colectivo infinito de exponentes impares.

Ernst Kummer, con sus números *ideales*, consiguió probar para otro colectivo de exponentes, el de los primos regulares (aquellos primos  $n$  tales que no dividen al numerador de ninguno de los números de Bernoulli  $B_{2k}$ , con  $2 \leq 2k \leq n-3$ ), que el teorema de Fermat es cierto. Aunque se conjetura que los enteros de una importante fracción  $e^{-1/2}$  ( $\approx 61\%$ ) de los primos son regulares, no se ha sabido aún demostrar que este colectivo sea infinito.

Mediante el uso de ordenadores, se probó en 1993 que el teorema de Fermat era cierto para todo primo irregular inferior a 4 000 000.

En 1983 Gerd Faltings (medallista Fields) demostró la conjetura de Mordell: toda curva algebraica sobre  $\mathbb{Q}$  de género  $\geq 2$  tiene a lo sumo un número finito de puntos racionales. En consecuencia, la ecuación de Fermat, para  $n \geq 4$ , tiene a lo sumo un número finito de soluciones enteras primitivas (es decir, coprimas a pares).

---

<sup>49</sup> Todo entero  $\geq 3$  es múltiplo de 4 o de algún primo impar. Sabiendo (por Fermat) que el teorema se cumple para  $n = 4$ , y que si falla para un entero, falla para cualquier divisor del mismo, es inmediato convencerse de que bastará con demostrar el teorema para todo  $n$  primo impar.

<sup>50</sup> Dirichlet intentó también resolver el caso  $n = 7$ ; se le resistió, y en cambio, lo logró para  $n = 14$ .



Pierre de Fermat.



Carl Friedrich Gauss.



Sir Andrew John Wiles.

El teorema de Fermat no se consiguió demostrar, para el caso más general  $n \geq 3$ , hasta 1992-1995; Andrew John Wiles, con la ayuda técnica final de su exalumno Richard Taylor, se alzó con el triunfo como consecuencia de su teorema de modularidad de las curvas elípticas sobre  $\mathbb{Q}$  que son semi-estables (toda tal curva elíptica semi-estable tiene una uniformización hiperbólica).<sup>51, 52</sup> Con este teorema se demostraba para algunos casos la afamada conjetura de Taniyama-Shimura-Weil, que afirmaba la modularidad de toda curva elíptica (no necesariamente semi-estable). Hoy esta conjetura es un teorema.<sup>53</sup> Wiles necesitó también apoyarse en otra conjetura, la conjetura  $\epsilon$ , para entonces ya teorema de Ribet.<sup>54</sup>

Sir Andrew Wiles KBE<sup>55</sup> fue galardonado con el premio Abel el año pasado,

*“por su impresionante demostración del último teorema de Fermat a través de la conjetura de modularidad para curvas elípticas semiestables, abriendo una nueva era en la teoría de los números”.*

---

<sup>51</sup> A. Wiles: *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Mathematics **141** (3), 443-551 (1995).

<sup>52</sup> R. Taylor, A. Wiles: *Ring theoretic properties of certain Hecke algebras*, Annals of Mathematics **141** (3), 553-572 (1995).

<sup>53</sup> C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor: *On the Modularity of Elliptic Curves Over  $\mathbb{Q}$ : Wild 3-Adic Exercises.* J. Amer. Math. Soc. **14**, 843-939, 2001.

<sup>54</sup> K. Ribet, *From the Taniyama-Shimura conjecture to Fermat's last theorem*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Sér. 5, **11** no. 1, 116-139 (1990).

<sup>55</sup> Knight Commander of the Most Excellent Order of the British Empire.



Y en entrevista celebrada el día anterior a la recepción de este importante galardón, contestaba así a la obligada pregunta de cuándo había empezado su interés por las matemáticas:<sup>56</sup>

*Sencillamente disfrutaba cuando era muy joven con las matemáticas. A los diez años curioseaba por los estantes de la biblioteca dedicados a las matemáticas. Extraía los libros y una vez retiré uno de E. T. Bell [1883–1960] titulado “El último problema”, que en su portada describe la ecuación de Fermat, el Premio Wolfskehl, y la historia romántica del problema. Me fascinó por completo.*

El heroico triunfo de Wiles es uno de los más sonados del ambicioso y visionario programa Langlands para la investigación matemática de estas décadas. Este programa, en forma de un paquete de conjeturas, fue presentado por vez primera por Robert Langlands a André Weil por carta en 1967, justo hace medio siglo. Trata de demostrar y explorar la conexión profunda que existe entre la teoría de representaciones y la teoría de los números, de lo que sería luminoso testigo la resolución por Wiles del problema de Fermat. En cierto modo, el programa de Langlands es el relevo del programa de Erlangen de Felix Klein; éste aplicó los grupos de simetría a la geometría, y aquél aplica las representaciones de dimensión infinita de los grupos de Lie a la aritmética.<sup>57</sup>

Es digna de destacarse la confluencia del programa Langlands geométrico (versión más restringida en la que los cuerpos de números se rebajan a cuerpos de funciones) y algunos modelos de campos cuánticos. La investigación en álgebras de Hecke finitas (HA), álgebras de Hecke afines (AHA), álgebras de Hecke finitas dobles (DAHA) o álgebras de Cherednik, campos de Yang-Mills supersimétricos (SYM), teoría de campos conformes (CFT), y dualidades,

---

<sup>56</sup> *I just enjoyed mathematics when I was very young. At the age of ten, I was looking through library shelves devoted to mathematics. I would pull out books and at one point I pulled out a book of E. T. Bell [1883–1960] titled The Last Problem, which on its cover describes the Fermat equation, the Wolfskehl Prize, and the romantic history of the problem. I was completely captivated by it.*

(M. Raussen, C. Skau: *Interview with Abel Laureate Sir Andrew Wiles*, European Mathematical Society. Journal **9**, No. 101, 29-38 (2016).)

<sup>57</sup> S. Gelbart: *An elementary introduction to the Langlands program*, Bulletin of the AMS **10** (2), 177-219 (1984).

concitan a matemáticos y físicos en la frontera para intercambiar conocimientos.<sup>58, 59</sup>

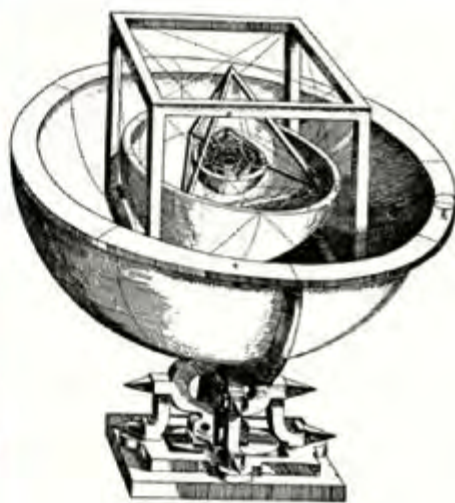
## II.4. Kepler el soñador

Siento una gran admiración por Kepler, brillante astrónomo de compleja personalidad, que en su juventud destacara por sus aciertos como astrólogo (actividad esta que le permitía sobrevivir, pero a la que tenía, sin embargo, en muy baja estima). Su tesón, su desbordante y fértil imaginación, y su búsqueda de causas físicas, le llevaron a encontrar las elipses como vías de los orbes, y su ley de armonías.

*Ubi materia, ibi geometría,*



Johannes Kepler.



Disposición planetaria según el *Mysterium Cosmographicum*.

---

<sup>58</sup> A. Kapustin, E. Witten: *Electric-Magnetic Duality And The Geometric Langlands Program*, Communications in Number Theory and Physics. 1 (1): 1-236 (2007).

<sup>59</sup> E. Frenkel: *Lectures on the Langlands program and conformal field theory*, in FRON-TIERS IN NUMBER THEORY, PHYSICS, AND GEOMETRY II, Springer pp. 387-533. (2007).

afirmó Kepler con anticipada visión.<sup>60</sup> Trescientos años hubo que esperar para ver este lema kepleriano plasmado en las ecuaciones de campo de la gravitación einsteniana.

Fue Kepler un gran admirador de Nicolaus Copernicus (Mikołaj Kopernik), a quien, en sus saludos al lector de la segunda edición del MYSTERIUM COSMOGRAPHICUM,<sup>61</sup> se refiere como “*hoc, melior mundi speculator, nominis*” (“nombre del mejor investigador del mundo”). Firme creyente en la armonía del cosmos, había varias cuestiones a las que buscaba respuesta:

*el número, las dimensiones, y el movimiento de los orbes.*<sup>62</sup>

El astrónomo de Weil der Stadt publica en 1619 su apasionado libro HARMONICES MUNDI LIBRI V,<sup>63</sup> donde con vena soñadora

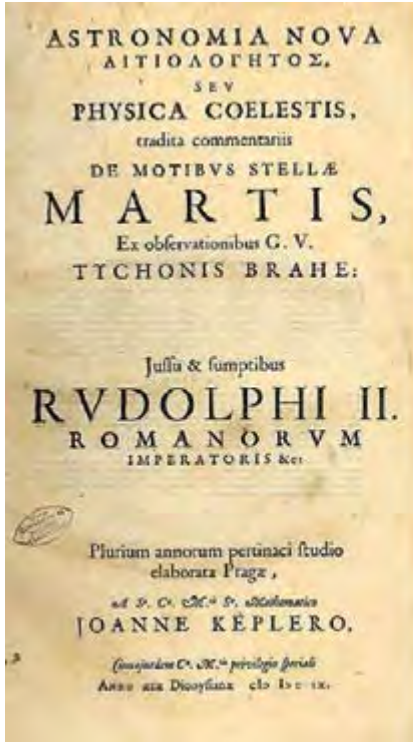
---

<sup>60</sup> J. Kepler, DE FUNDAMENTIS ASTROLOGIAE CERTIORIBUS. In JOANNIS KEPLERI ASTRONOMI OPERA OMNIA, Vol. I. Editit Christian Frisch. Frankfurt a.M.–Erlangae, Heyder & Zimmer 1858–1871.

<sup>61</sup> PRODROMUS DISSERTATIONUM COSMOGRAPHICARUM, CONTINENS MYSTERIUM COSMOGRAPHICUM, DE ADMIRABILI PROPORTIONE ORBIUM CÆLESTIUM, DEQUE CAUSIS CÆLORUM NUMERI, MAGNITUDINIS, MOTUUMQUE PERIODICORUM GENUINIS ET PROPRIIS, DEMONSTRATUM PER QUINQUE REGULARIA CORPORA GEOMETRICA. (Tubinga 1596, 1ª edición; Francofurti 1621, 2ª edición.)

<sup>62</sup> “*Numerus, Quantitas et Motus Orbium*” (Primer Prefacio al lector, MYSTERIUM COSMOGRAPHICUM).

<sup>63</sup> IOANNIS KEPLERI HARMONICES MUNDI LIBRI V.: QVORVM PRIMUS GEOMETRICVS, DE FIGURARUM REGULARIUM, QUAE PROPORTIONES HARMONICAS CONSTITUUNT, ORTU ET DEMONSTRATIONIBUS. SECUNDUS ARCHITECTONICVS, SEU EX GEOMETRIA FIGVRATA, DE FIGURARUM REGULARIUM CONGRUENTIA IN PLANO VEL SOLIDO: TERTIUS PROPRIË HARMONICVS, DE PROPORTIONUM HARMONICARUM ORTU EX FIGURIS; DEQUE NATURÂ ET DIFFERENTIIS RERUM AD CANTUM PERTINENTIIUM, CONTRA VETERES: QUARTUS METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS ET ASTROLOGICVS, DE HARMONIARUM MENTALI ESSENTIÂ EARUMQUE GENERIBUS IN MUNDO; PRAESERTIM DE HARMONIA RADIORUM, EX CORPORIBUS COELESTIBUS IN TERRAM DESCENDENTIBUS, EIUSQUE EFFECTU IN NATURA SEU ANIMA SUBLUNARI ET HUMANA: QUINTUS ASTRONOMICVS ET METAPHYSICVS, DE HARMONIIS ABSOLUTISSIMIS MOTUUM COELESTIUM, ORTUQUE ECCENTRICITATUM EX PROPORTIONIBUS HARMONICIS. APPENDIX HABET COMPARATIONEM HUIUS OPERIS CUM HARMONICES CL. PTOLEMAEI LIBRO III. CUMQUE ROBERTI DE FLUCTIBUS, DICTI FLUD. MEDICI OXONIENSIS SPECULATIONIBUS HARMONICIS, OPERI DE MACROCOSMO ET MICROCOSMO INSERTIS.



Astromonía Nova.

Harmonices Mundi.

y creativa teje un hermoso tapiz en el que la astronomía, la música, la filosofía, la poesía y la teología conviven bajo el soplo inspirador de Kepler.

De esta obra, LOS V LIBROS DE LA ARMONÍA DEL MUNDO, los libros I y II están dedicados a las simetrías geométricas que, en su opinión, subyacen todas las armonías existentes en la naturaleza; el libro III trata de la armonía musical, conjugando Kepler sus conocimientos sobre los movimientos de los planetas con los avances de la época en la música polifónica; en el libro IV asienta los fundamentos de la astrología sobre la influencia sobre las almas receptoras de las disposiciones armónicas de los astros; y finalmente, el libro V versa sobre las armonías en el sistema solar.<sup>64</sup> En este Libro V, Cap. 3, pág.

<sup>64</sup> B. Stephenson: *THE MUSIC OF THE HEAVENS: KEPLER'S HARMONIC ASTRONOMY*, Princeton Press 1994.

189-190, enuncia su tercera ley (descubierta en 1618),<sup>65</sup> que sugerirá algunas décadas más tarde la ley  $1/r^2$  de la gravitación a Hooke, Halley y Newton. Esta ley de la gravitación está en las entrañas de la ley armónica  $T^2 \sim D^3$ :

$$T^2 \sim D^3 \Rightarrow D / T \sim 1 / D^2$$

Es decir: aceleración inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Escribía Kepler:<sup>66</sup>

*Mas es cosa certísima y en todo exacta que la proporción que existe entre los tiempos periódicos de dos planetas cualesquiera sea precisamente la proporción sesquiáltera entre las distancias medias, esto es, entre los orbes mismos.*

En versión y lenguaje modernos: Los períodos de los planetas son proporcionales a la potencia  $3/2$  de sus semiejes mayores. O bien

$$T^2/a^3 = \text{const.}$$

Tan exultante y satisfecho estaba Kepler con su obra, que en el Proemium de dicho Libro V (p. 179), tras confesar que ha robado los vasos de oro de los egipcios para construir un tabernáculo para su Dios lejos de los límites de Egipto, escribe:<sup>67</sup>

*Si me perdonáis, me alegraré; si os irritáis, me aguantaré. La suerte está echada, y escribo el libro sin importarme que lo lean los presentes*

---

<sup>65</sup> Las dos primeras leyes de Kepler se hallan en su magna obra ASTRONOMIA NOVA. ASTRONOMIA NOVA ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ, SEV PHYSICA COELESTIS, TRADITA COMMENTARIIS DE MOTIBVS STELLAE MARTIS, EX OBSERVATIONIBUS G.V. TYCHONIS BRAHE: JUSSU ET SUMPTIBUS RVDOLPHI II. ROMANORVM IMPERATORIS &C.: PLURIMUM ANNORUM PERTINACI STUDIO ELABORATA PRAGAE, A ... MATHEMATICO JOANNE KEPLERO. - [S.L.]; [HEIDELBERGAE]: [G. VOEGELINUS], ANNO AERAE DIONYSIANAE 1609. (NUEVA ASTRONOMÍA, BASADA EN LAS CAUSAS, O FÍSICA CELESTE, TRATADA POR MEDIO DE COMENTARIOS A LOS MOVIMIENTOS DE LA ESTRELLA MARTE, A PARTIR DE LAS OBSERVACIONES DE TYCHO BRAHE...)

<sup>66</sup> *Sed res est certissima exactissimaque, quòd proportio quae est inter binorum quorumque Planetarum tempora periodica, sit praecisè sesquialtera proportionis mediarum distantiarum, id est Orbium ipsorum.*

<sup>67</sup> *Si ignoscitis, gaudebo; si succensetis, feram: jacio in aleam, librumque scribo, seu praesentibus seu posteris legendum, nihil interest: expectet ille suum lectorem per annos centum; si Deus ipse per annorum sena millia contemplatorem praestolatus est.*

*o los venideros. Que espere cien años a un lector, si Dios mismo ha estado esperando seis mil años a su observador.*

Y estalla al final (p. 243) con este grito de agradecimiento:<sup>68</sup>

*Te doy gracias, Señor Dios y Creador nuestro, por haberme concedido contemplar la belleza de Tu creación y regocijarme con Tus obras.*

Con Kepler murió el último científico romántico.

## II.5. Lengua y ciencia<sup>69</sup>

Según Francisco Rodríguez Adrados,<sup>70</sup> la primera ciencia creada por el hombre fue la lengua natural, pues esta proporcionó una primera clasificación del mundo. Por otro lado, la lengua es como una red que constriñe la descripción de nuevas realidades, y por eso siempre ha estado en evolución, abriéndose *paulatim* a los lenguajes científicos. Mientras la lengua natural es, por antonomasia, la lengua hablada, los lenguajes científicos tienden a ser escritos, en símbolos a menudo impronunciables.

En un conocido ensayo sobre el lenguaje científico Einstein reflexionaba sobre la lengua y el conocimiento, preguntándose si cabe el pensar sin auxilio del lenguaje.<sup>71</sup> ¿No hemos pensado a veces mediante conceptos o combinaciones de conceptos para los que cuales no acuden necesariamente palabras a nuestra mente, a pesar de estar clara la conexión entre “cosas”? Sin embargo, Einstein admite que

---

<sup>68</sup> *Gratias ago tibi Creator Domine, quia delectasti me in facturâ tuâ, et in operibus manuum tuarum exultavi.*

<sup>69</sup> A. Galindo: Extraído de “El léxico científico y el Vocabulario Científico y Técnico de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales”, ponencia desarrollada como Presidente de la RAC en la Mesa Redonda sobre “EL ESPAÑOL Y LAS INSTITUCIONES ACADÉMICAS Y CIENTÍFICAS”, verano de 2013, organizada por la Fundación Lilly y la Universidad Internacional Menéndez Pelayo, bajo la dirección de Pedro García Barreno.

<sup>70</sup> F. Rodríguez Adrados, *La lengua en la ciencia contemporánea y en la filosofía actual*, ponencia leída en la Semana de Filosofía celebrada en Madrid en abril de 1971.

<sup>71</sup> A. Einstein, *The Common Language of Science*, Ensayo radiado el 28 de septiembre de 1941.

el desarrollo mental de un individuo y su modo de formar conceptos dependen en sumo grado del lenguaje.

La palabra ejerce una atracción irresistible; al ingresar en nuestra Academia en 1897, se refería Práxedes Mateo Sagasta a la estética de la palabra como ese *quid divinum* de los sonidos articulados con que la admirable estructura gramatical de la lengua helénica permitió a Grecia convertirse en un gran pueblo.

La importancia de la lengua es reconocida desde antaño. Adrados nos lo recordaba en la ponencia mencionada, recogiendo la afirmación de Ludwig Wittgenstein (1922) de que toda Filosofía es crítica de la lengua y la aseveración de Rudolf Carnap (1937) de que la Filosofía es idéntica con la investigación de la lengua. Pero la lengua tiene una obligación ineludible: dar cabida a los conceptos nuevos que surgen continuamente de la investigación científica y el desarrollo tecnológico, proporcionando palabras claras y precisas para designarlos, y revisando cuando sea preciso aquellos de sus vocablos con acepciones que producen confusión a la luz de la ciencia moderna.

La lengua de un pueblo evoluciona, perdiendo vocablos en desuso, e incorporando otros que representan nuevos conceptos. El crecimiento exponencial de la producción científica en las últimas décadas ha acelerado el ritmo de aparición de nuevos vocablos técnicos, la mayoría en lengua inglesa,

*nuevas palabras que se sientan solas  
a la mesa, sin previa invitación,...*

(como decía Pablo Neruda),<sup>72</sup> y que esperan su anexión al idioma español, de una u otra forma, para que la comunicación entre nuestros científicos sea posible en castellano y lo que es más importante en mi opinión, para facilitar la formación científica que debemos transmitir a la sociedad de habla española, tanto niños como jóvenes y ciudadanos en general.

---

<sup>72</sup> Del poema de Pablo Neruda “Ya no sé nada” (LAS MANOS DEL DÍA, Losada, Buenos Aires 1968).

Nuestra hermosa lengua es hablada por casi 600 millones de personas, pero no será universal si la ciencia no puede expresarse en ella. Hubo un tiempo (siglo XIII) en que el latín, *lingua franca* del medievo, dejó paso al castellano en los libros de astronomía, medicina, matemáticas, y leyes procedentes, en lengua árabe, del mundo greco-romano, gracias al empeño del gran Rey Alfonso X el Sabio y al esfuerzo de sus traductores de Toledo. La prosa castellana logró su consolidación gracias al proyecto alfonsino.

La matemática es la herramienta más poderosa y económica de que disponemos para sintetizar sin vaguedades el conocimiento científico y para transmitirlo. Pero necesitamos también la lengua natural, con sus imprecisiones y sus limitaciones, que al fin al cabo son fruto de nuestra naturaleza humana, y el mejor sistema de que nos hemos ido dotando a lo largo de miles de años para intercambiar información primordial con nuestros semejantes y así no solo persistir sino también dominar sobre las otras especies.

Decía Einstein en su ensayo ya citado que el lenguaje de la ciencia es universal, supranacional, porque ha surgido del esfuerzo individual, pero cooperativo, de los mejores cerebros de todos los tiempos y de todos los países. Su sistema de conceptos nos ha guiado en medio del caos de percepciones, aprendiendo a captar verdades generales a partir de observaciones particulares.

El lenguaje científico no es suficiente para el hombre de ciencia, porque, como cualquier hombre de la calle, le gusta ensalzar los frutos de su profesión, asistiéndose de metáforas para embellecer su discurso. Pero los tropos cumplen una misión más utilitaria: las usa el científico para nombrar nuevos conceptos, como analizó magistralmente Martín Municio en su artículo “*La metáfora en el lenguaje científico*”.<sup>73</sup>

¿Hay una frontera separadora entre los lenguajes literario y científico? La literatura es la manifestación del lenguaje como un fin en sí mismo; el lenguaje científico es instrumento para describir algo obje-

---

<sup>73</sup> Boletín de la Real Academia Española, Tomo LXXII, Cuaderno CCLVI, 221-249 (1992).

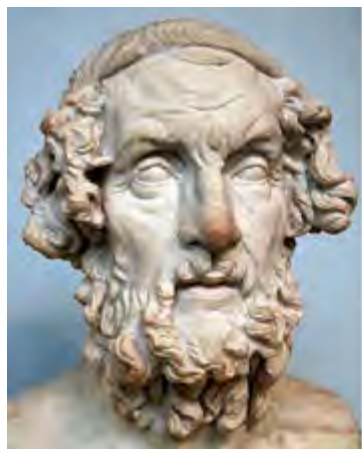


tivo, fuera del mismo. En otro interesante ensayo,<sup>74</sup> Martín Municio recoge esta clara opinión del escritor Luis Landero sobre la comparación entre poeta y científico:

*¿Cuál es la diferencia entre el científico y el poeta? Bueno, la ciencia si miente pierde su valor, y el poeta siempre dice la verdad, aunque mienta. Lo que se dice en verso nadie lo puede contradecir en prosa, porque no forma una opinión, sino un designio.*<sup>75</sup>

Lo que dice en un poema no es falsable; por contra, el científico está sometido al veredicto implacable de la naturaleza, y cuanto diga que no sea cierto pierde su valor.

¿Condena esto a que el lenguaje de los científicos no pueda ser bello? En absoluto. La ciencia pronto permeó la poesía. Ahí tenemos el canto XVIII de la ILÍADA (Ἰλιάς), en el que Homero describe el escudo de Aquiles recién salido de la fragua de Hefesto. De la parte central del escudo, repujada con escenas astronómicas, dice:<sup>76</sup>



‘Ομηρος



Escudo de Aquiles.

<sup>74</sup> A. Martín Municio, *Ambos son una cultura*, Rev. iberoam. cienc. tecnol. soc. vol.1 no.1 Ciudad Autónoma de Buenos Aires set. 2003.

<sup>75</sup> L. Landero: JUEGOS DE LA EDAD TARDÍA, Tusquets 1989.

<sup>76</sup> ἐν μὲν γαῖαν ἔτευξ', ἐν δ' οὐρανόν, ἐν δὲ θάλασσαν, / ἡέλιόν τ' ἀκάμαντα σελήνην τε πλήθουσιν, / ἐν δὲ τὰ τεῖρεα πάντα, τὰ τ' οὐρανὸς ἔστεφάνωται, / Πληϊάδας θ' Ὑάδας τε τό τε σθένος Ὠρίωνος / Ἀρκτόν θ', ἦν καὶ Ἀμαξαν ἐπὶ κλησὶν καλέουσιν, / ἥ τ' αὐτοῦ στρέφεται καὶ τ' Ὠρίωνα δοκεύει, / οἷη δ' ἄμμορός ἐστι λοετρῶν Ὠκεανοῖο.

*Allí puso la tierra, el cielo, el mar, el sol infatigable y la luna llena; allí las estrellas que el cielo corona, las Pléyades, las Híades, el robusto Orión y la Osa, llamada por sobrenombre el Carro, la cual gira siempre en el mismo sitio, mira a Orión y es la única que deja de bañarse en el Océano.*

En similar época, Hesíodo había escrito para cantar no solo las alabanzas de la vida bucólica sino también para transmitir enseñanzas sobre agricultura en sus poemas (LOS TRABAJOS Y LOS DÍAS, "Ἔργα καὶ Ἡμέραι"). Siglos después, Virgilio (70-19 a.C.) recogió en sus GEÓRGICAS (Georgica, en latín) la sabiduría rural, y Lucrecio Caro (ca. 60 a.C.), el poeta *damnatus*, nos regaló el mejor poema épico científico de todos los tiempos: DE RERUM NATURA. A pesar del determinismo que lo impregna, se obliga a que los átomos dejen un resquicio a la libertad humana, y con ello a la visión poética.

También Dante y Milton incorporaron el sistema ptolemaico en sus obras.

El informatólogo Eugene Garfield, creador del famoso Instituto para Información Científica (Filadelfia), y de la Red de la Ciencia y del Conocimiento, nos recordaba, hace tiempo, que en cada gran científico acostumbra a haber un poeta.<sup>77</sup> ¿Acaso no hay poesía al hablar de *quarks* con “encanto”, o del “viento solar”, o de la “cabellera de Berenice”, o de ese “Dios no arroja el dado”, o de los “criaderos de estrellas”, o de la “quintaesencia” que, para algunos, acelera la expansión del Universo,...? Son nombres puestos por científicos muy serios, que están en la frontera misma de la ciencia. Uno de los padres de la física cuántica, Niels Bohr, dijo:

*Debemos tener presente que, en lo tocante a los átomos, solo se puede usar el lenguaje como en la poesía. También al poeta, más que describir los hechos, le interesa crear imágenes y establecer conexiones mentales.*<sup>78</sup>

---

<sup>77</sup> E. Garfield, *Creativity and Science. Part 1. What Makes a Person Creative?*, Current Contents **43**, 3-7 (1989).

<sup>78</sup> Wir müssen uns klar darüber sein, daß die Sprache hier nur ähnlich gebraucht werden kann wie in der Dichtung, in der es ja auch nicht darum geht, Sachverhalte präzise darzustellen, sondern darum, Bilder im Bewußtsein des Hörers zu erzeugen und gedankliche Verbindungen herzustellen.

Hay un cierto parecido formal entre la poesía y la ciencia: ambas buscan encajes o estructuras minimales de palabras o símbolos, para transmitir su mensaje con la fidelidad propia esperada y con máxima economía de medios. El científico y el poeta son capaces de estar suspendidos a la vez en la duda y en la convicción. Se ha escrito (por matemáticos) que las matemáticas son la poesía de la ciencia. ¿Es una opinión arrogante? Francisco Rico, en la introducción de sus “MIL AÑOS DE POESÍA ESPAÑOLA”, dice:

*La piedra de toque de la poesía es conseguir formulaciones cuyos términos no puedan alterarse ni reemplazarse y que por eso mismo se resistan al olvido. Un poema es esencialmente un objeto verbal forjado para permanecer en la memoria y por ello construido como una red de vínculos capaces de lograr que la evocación de uno sólo de sus componentes arrastre a la evocación simultánea de todos los restantes.*

A mí me recuerda esto más a los estados enredados de la física cuántica, en los que cada subsistema está íntimamente correlacionado con cada uno de los otros, que a una tesis matemática, por bella que sea, pero cuya validez no siempre implica, por lo general, las hipótesis en que se fundamenta. Sin embargo, me rindo ante joyas matemáticas como la demostración euclidiana de la infinitud de primos, o la identidad de Euler. Creo que bien se han ganado los grandes matemáticos el derecho a un lugar en el Parnaso. Pero también los grandes físicos, químicos, biólogos y geólogos, los grandes científicos en general. ¿Acaso no fue François-Marie Arouet (“Voltaire”) quien dijo que hubo más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero?<sup>79</sup>

Para Peter Medawar no hay diferencia cualitativa entre la creación artística y la científica, y cree que el acto de creación, ποιησις,

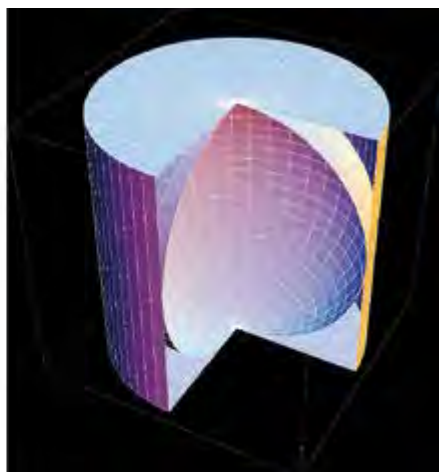
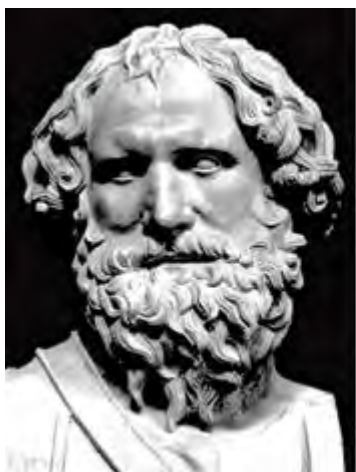
---

(We must be clear that when it comes to atoms, language can be used only as in poetry. The poet, too, is not nearly so concerned with describing facts as with creating images and establishing mental connections.)

(N. Bohr, en conversación con Heisenberg durante su histórico paseo hasta la cima de la montaña Hain próxima a Gotinga en 1922; ver DER TEIL UND DAS GANZE, o bien PHYSICS AND BEYOND, al final de su Cap. 3.)

<sup>79</sup> Il y avait beaucoup plus d'imagination dans la tête d'Archimède que dans celle d'Homère.

(François-Marie Arouet (Voltaire): DICTIONNAIRE PHILOSOPHIQUE, Cosse et Gaultier-Laguioni, Paris 1838.)



Ἀρχιμήδης

$$A_e/A_c = V_e/V_c = 2/3$$

es esencialmente el mismo en todos los contextos.<sup>80</sup> Decía Percival Bisshe Shelley que la poesía abarca a toda la ciencia, en el sentido de que los procesos creativos en poesía y en ciencia son similares.

En los albores de la revolución industrial se produce un enfrentamiento entre la poesía y la ciencia.<sup>81</sup> Luego lo comentaré a propósito de Newton.

Afortunadamente, la tormenta amainó, y a pesar de su respeto científico por Newton, grandes hombres de ciencia han amado la poesía e incluso la han cultivado. Un ejemplo sobresaliente ha sido James Clerk Maxwell, padre de la teoría del electromagnetismo.

Diferencias entre los científicos acerca del binomio lengua-ciencia las hubo siempre. Señalaba Martín Municio que, mientras para Antoine Lavoisier, la ciencia y el lenguaje avanzaban de modo in-

<sup>80</sup> ... ἀπὸ δὲ πάσης τῆς ποιήσεως ἐν μόριον ἀφορισθὲν τὸ περὶ τὴν μουσικὴν καὶ τὰ μέτρα τῷ τοῦ ὅλου ὀνόματι προσαγορεύεται. ποιήσις γὰρ τοῦτο μόνον καλεῖται, καὶ οἱ ἔχοντες τοῦτο τὸ μόριον τῆς ποιήσεως ποιηταί. (...y que del conjunto entero de creación se ha separado una parte, la concerniente a la música y al verso, y se la denomina con el nombre del todo. Únicamente a esto se llama, en efecto, «poesía», y «poetas» a los que poseen esta porción de creación.) Extracto del Συμπόσιον (Πλάτων), [205c].

<sup>81</sup> E. Garfield, *The Poetry-Science Connection*, Current Contents **29**, 5-10 (1983). Current Contents, #29, p.5-10, July 18, 1983.

separable, Michael Faraday discrepaba, y se excusaba por tener que introducir vocablos nuevos para designar los fenómenos eléctricos y magnéticos, convencido como estaba de que los nombres son una cosa, y la ciencia otra.<sup>82</sup>

No hay nada estructural que impida a la lengua española dar nombre cualquier concepto científico-técnico; la cuestión es que las gentes de ciencias no siempre nos ponemos de acuerdo con los lingüistas, y a menudo tampoco entre nosotros mismos. Pondré un ejemplo: cómo traducir o llamar en español a lo que en inglés se conoce como *gauge*. Existen, desde hace tres cuartos de siglo, importantes estructuras científicas, llamadas campos cuánticos, de presencia central en el mundo de las partículas elementales, para las que el calificativo de *gauge* les confiere unas propiedades muy especiales provenientes de su invariancia bajo cambios en los valores de dicho *gauge* (calibre, aforo, galga, contraste, patrón, indicador, en español). Blas Cabrera, por ejemplo, tradujo *gauge* como “aforo”, mientras que Ramón Ortiz Fornaguera, en su traducción directa desde el ruso de las obras de Landau-Lifshitz, prefirió usar “invariancia de ‘contraste’” para el ruso “калибровочная инвариантность”. Los físicos españoles que trabajan sobre partículas elementales han optado por incorporar el neologismo *gauge* tal y como se escribe en inglés,<sup>83</sup> e incluso con su fonética. Hay varias razones para ello: 1ª/ Economía del esfuerzo: *gauge* es una palabra muy corta. 2ª/ ¿Y galga? También es corta. Pero nos recuerda inconscientemente algo que no tiene nada que ver con lo que significa *gauge* en física. Aunque ocurre lo mismo con *gauge*, sin embargo, al ser nuevo en nuestro lenguaje, no colisiona con otros significados previos y por eso no provoca rechazo instintivo. ¿Qué podemos hacer los científicos en estos casos? Recurrir a la Academia Española para que nos aconseje, y, si no hay término en castellano que nos satisfaga, aceptemos el neologismo *gauge* de una vez. Existen otros, como *spin*, *quark*, que ya han pasado al DRAE como espín, y cuark.<sup>84</sup>

---

<sup>82</sup> A. Martín Municio, *Biología del habla y del lenguaje*, Discurso de ingreso en la Real Academia Española, 29 de enero de 1984.

<sup>83</sup> Los franceses usan su vocablo *jaugé*, que es equivalente. Los italianos dicen *invarianza di gauge*, y a veces *invarianza di calibre*. Los alemanes hablan de *Eichinvarianz*, donde *Eichung* denota “aforo, calibración”.

<sup>84</sup> Pero, atención, no creo que los profesionales acepten la forma fonética *gueich* en su lugar.

## II.6. Newton y la poesía

Considerado como el científico más grande de todos los tiempos (gloria a compartir a lo sumo con Arquímedes y tal vez Einstein), a Isaac Newton debemos, entre otras cosas, el cálculo de fluxiones directo (cálculo diferencial) e inverso (cálculo integral), la teoría de los colores, y la ley de la gravitación universal. Gestas todas realizadas a sus 23 años, en los 18 meses más fecundos de toda la historia de la imaginación creadora.

*Todo esto ocurría en los años de la peste de 1665 y 1666, pues en aquellos días me encontraba en lo mejor de la vida para la creación, y nunca tuve más afición que entonces por las matemáticas y la física,*<sup>85</sup>

escribía Newton medio siglo después.

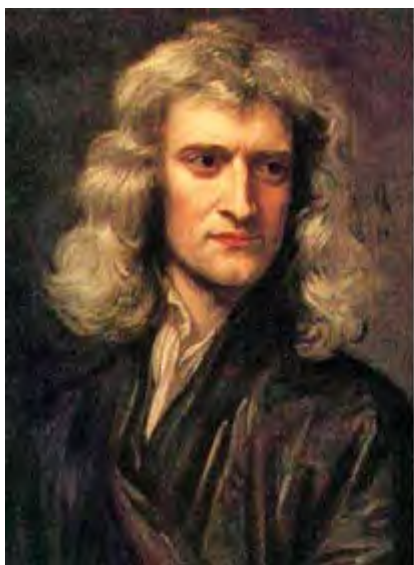
Sus famosos PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA (1687) son obra cumbre de la ciencia. No hay otra obra comparable a esta en toda la historia de la ciencia. Empezó a escribirla en diciembre de 1684, a los 42 años; a los 17 meses, en mayo 1686, había escrito los tres libros de los que consta. La mayor parte de las 98+53+42 proposiciones que contiene fueron demostradas durante estos 17 meses. Es la obra de un titán, más allá de cualquier ser humano. Están escritos los PRINCIPIA en lenguaje terso, escueto, sin concesiones al lector.<sup>86</sup> Como dice el historiador de la ciencia, filósofo y científico William Whewell:

*El pesado instrumento de síntesis, tan eficaz en sus manos, nunca ha sido después adoptado por nadie que pudiera usarlo para ese propósito; y lo contemplamos con curiosidad y admiración como a un gigantesco instrumento de guerra, que permanece ocioso en el arsenal de armas del pasado, y nos lleva a preguntarnos qué clase de hombre*

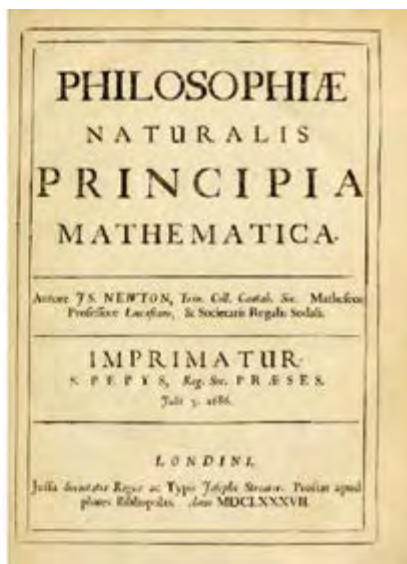
---

<sup>85</sup> *All this was in the two plague years of 1665 and 1666. For in those days I was in my prime of age for invention & minded Mathematics & Philosophy more than at any time since.* (Parte del borrador de una carta, hallado tras la muerte de Newton, que aparentemente escribió este a Pierre des Maizeaux.)

<sup>86</sup> S. Chandrasekhar: *Shakespeare, Newton, and Beethoven, or Patterns of Creativity*, in TRUTH AND BEAUTY. AESTHETICS AND MOTIVATIONS IN SCIENCE, The University of Chicago Press, Chicago 1987.



Isaac Newton.



Principia.

*fue aquel capaz de blandir como un arma lo que apenas podríamos nosotros levantar como un peso.*<sup>87</sup>

El propio Newton confiesa que lo escribió así de abstruso para ahuyentar a los ignorantes en matemáticas, y que solo los matemáticos bien preparados puedan seguir sus argumentos, y así aceptar sus teorías.

Como persona, Newton fue un desastre. Insensible, sin tacto, ciego y sordo a las artes, sin comprensión alguna para los demás. Su poder de abstracción era sobrehumano. Preguntado sobre cómo resolvía los problemas, siempre decía lo mismo: “pensando constantemente en ellos” (*by always thinking about them*); “tengo presente el tema de investigación constantemente ante mí, y espero a que aparezcan gradualmente las primeras luces del amanecer y poco a poco dejen paso a la claridad total” (“*I keep the subject of my inquiry constantly before me,*

---

<sup>87</sup> W. Whewell: HISTORY OF THE INDUCTIVE SCIENCES, Vol. II, p. 175, London (1847). *The ponderous instrument of synthesis [meaning Greek mathematics], so effective in his hands [that is Newton's hands] has never since been grasped by anyone who could use it for such purpose; and we gaze at it with admiring curiosity, as some gigantic implement of war, which stands idle among the memorials of ancient days, and makes us wonder what manner of man he was who could wield as a weapon what we can hardly lift as a burden.*

*and wait till the first dawning opens gradually, by little and little, into a full and clear light*”). Mas, como bien advierte Whewell, para la mayoría de los humanos podrían pasar muchos años sin ver rayar el alba.<sup>88</sup>

El gran economista John Maynard Keynes,<sup>89</sup> en su espléndida conferencia para la celebración del tricentenario del nacimiento de Newton (día de Navidad, 1642), escribió:<sup>90</sup>

*Su don peculiar era el poder mantener continuamente en su cabeza un problema puramente mental hasta ver a su través. Me imagino que su preeminencia se debe a que los músculos de su intuición eran los más fuertes y resistentes que un hombre haya tenido jamás... Creo que Newton era capaz de tener un problema en su mente durante horas, días y semanas hasta que este le rendía su secreto.*

Cierto día Joseph Spence preguntó a Newton qué opinaba de la poesía. Newton contestó: “*le daré la opinión de Barrow; es una especie de tontería ingeniosa*”.<sup>91</sup> Los poetas respondieron con dureza. “*La ciencia crece y la belleza mengua*”,<sup>92</sup> escribió Alfred Tennyson (1809-1892). David Herbert Lawrence (1885-1930) dijo: “*El “conocimiento” ha matado al Sol, convirtiéndolo en una bola de gas, con manchas...*”.<sup>93</sup> John Keats (1795-1821) se lamentaba de que la ciencia “*destejería un arco iris*”.<sup>94</sup> William Blake pintó a Newton, Locke y Bacon como una trinidad profana. Incluso se llegó a hablar de que la ciencia era peligrosa, y así Paul Verlaine escribía en su poema “*Petits amis qui*

---

<sup>88</sup> W. Whewell: *HISTORY OF THE INDUCTIVE SCIENCES*, Vol. II, p. 192, London (1847).

<sup>89</sup> J.M. Keynes: *Newton, the Man*. Proceedings of the Royal Society, Newton Tercentenary Celebrations, 15–19 July 1946, Cambridge University Press (1947). La II Guerra Mundial retrasó esta celebración al mes de julio del año 1946; J.M. Keynes falleció tres meses antes, siendo su hermano Geoffrey quien leyó el texto de la esta conferencia ante la Royal Society.

<sup>90</sup> *His peculiar gift was the power of holding continuously in his mind a purely mental problem until he had seen straight through it. I fancy his pre-eminence is due to his muscles of his intuition being the strongest and most enduring with which a man has ever been gifted... I believe that Newton could hold a problem in his mind for hours and days and weeks until it surrendered to him its secret.*

<sup>91</sup> *I'll give you that of Barrow: he said it was a kind of ingenious nonsense.* (Opinión recogida en J. Spence, *ANECDOTES*, sin publicar.)

<sup>92</sup> *Science grows and Beauty dwindles.*

<sup>93</sup> *Knowledge has killed the Sun, making it a ball of gas, with spots...*

<sup>94</sup> *Unweave a rainbow.*



*sûtes nous prouver /...*” (Pequeños amigos que supisteis demostrarnos /...), número 11 de su libro SAGESSE:<sup>95</sup>

...  
*Hermanos, dejad la ciencia golosa /*  
*Que quiere robar de las cepas prohibidas /*  
*El sangrante fruto que no hay que conocer. /*  
...

Afortunadamente, la tormenta amainó, y a pesar de su respeto científico por Newton, grandes hombres de ciencia han amado la poesía e incluso la han cultivado. Un ejemplo sobresaliente, como veremos a continuación, ha sido James Clerk Maxwell, padre de la teoría del electromagnetismo.

## II.7. El arte en Maxwell

Baste recordar sus famosas ecuaciones, de las que Boltzmann (parafraseando los versos de Goethe en Fausto), dijo:<sup>96</sup>

*¿Fue un dios quien escribió estos signos?*

Consideradas por muchos como las ecuaciones más bellas de toda la ciencia, simbolizan la unificación de la electricidad y del magnetismo, e identifican la luz como una onda electromagnética. Escritas en la forma original, como 12 ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, imponen más por lo que representan que por su aspecto. No parecen un canon de belleza, aunque mejoran mucho con notación vectorial, en la que se reducen a cuatro.

El formalismo 4D minkowskiano nos lleva a dos:

$$\begin{aligned}dF &= 0 \\ d*F &= *j\end{aligned}$$

---

<sup>95</sup> .../Frères, lâchez la science gourmande / Qui veut voler sur les ceps défendus / Le fruit sanglant qu'il ne faut pas connaître. /...

<sup>96</sup> War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb? En L. Boltzmann: VORLESUNGEN ZU MAXWELLS THEORIE DER ELEKTRIZITÄT UND DES LICHTS, Leipzig, Metzger und Wittig, 1893. Bd. II.



de la termodinámica. Precisamente Boltzmann, sensible también a los valores estéticos, expresaba así su admiración por el estilo narrativo de Maxwell:<sup>98</sup>

*Igual que un músico puede reconocer a Mozart, Beethoven o Schubert tras los primeros compases, un matemático reconoce a su Cauchy, Gauss, Jacobi, Helmholtz, o Kirchhoff tras las primeras páginas. Los franceses destacan por su extrema elegancia formal, y argumentación a veces débil de sus conclusiones, mientras que los ingleses lo hacen por su mayor fuerza dramática, sobre todo Maxwell. ¿Quién desconoce su teoría dinámica de los gases? Primero, desarrolla majestuosamente las variaciones de las velocidades; luego por un lado aparecen las ecuaciones de estado, y por el otro, las ecuaciones del movimiento en un campo central. Siempre sobrevuela el caos de las fórmulas. De repente, suenan las cuatro palabras “toma  $n = 5$ ”. El demonio maligno  $V$  [la velocidad relativa de las dos moléculas] desaparece; y, como en la música, un tono del bajo hasta ahora dominante se silencia de repente, lo que parecía insuperable ha sido sobrepasado como por arte de magia... No es el momento de preguntar por qué este cambio o aquel otro. Si no lo sientes así, deja el libro. Maxwell no escribe música programática con notas aclaratorias... Un resultado sigue a otro en rápida sucesión hasta que por fin, inesperadamente, se llega a las condiciones para el equilibrio térmico junto con las expresiones para los coeficientes de transporte, y cae el telón.*

---

<sup>98</sup> Wie der Musiker bei den ersten Takten Mozart, Beethoven, Schubert erkennt, so würde der Mathematiker nach wenigen Seiten, seinen Cauchy, Gauß, Jacobi, Helmholtz unterscheiden. Höchste äußere Eleganz, mitunter etwas schwaches Knochengerüste der Schlüsse charakterisiert die Franzosen, die größte dramatische Wucht die Engländer, vor allen Maxwell. Wer kennt nicht seine dynamische Gastheorie? - Zuerst entwickeln sich majestätisch die Variationen der Geschwindigkeiten, dann setzen von der einen Seite die Zustandsgleichungen, von der anderen die Gleichungen der Zentralbewegung ein, immer höher wogt das Chaos der Formeln; plötzlich ertönen die vier Worte: “Put  $n = 5$ .” Der böse Dämon  $V$  verschwindet, wie in der Musik eine wilde, bisher alles unterwühlende Figur der Bässe plötzlich verstummt; wie mit einem Zauberschlage ordnet sich, was früher unbezwingbar schien. Da ist keine Zeit, zu sagen, warum diese oder jene Substitution gemacht wird; wer das nicht fühlt, lege das Buch weg; Maxwell ist kein Programm-musiker, der über die Noten deren Erklärung setzen muß. Gefügig speien nun die Formeln Resultat auf Resultat aus, bis überraschend als Schlußeffekt noch das Warmegleich-gewicht eines schweren Gases gewonnen wird und der Vorhang sinkt.

Finalmente, Maxwell fue un poeta compulsivo. Nos dejó medio centenar de poemas, algunos sobre física. A veces los cantaba acompañándose de una guitarra. Su último poema lo tituló *Paradoxical Ode*, inspirado en el *Prometheus Unbound* de Percy Shelley. Maxwell dedicó la oda a su amigo desde la escuela, y también físico escocés, Peter Guthrie Tait, el mismo que mostrándole a Sir William Thomson (Lord Kelvin) OM, GCVO,<sup>99</sup> PC,<sup>100</sup> como interaccionaban entre sí los aros de humo, le había convencido de la importancia de los nudos, tanto, que este pretendió erigir todo un sistema atómico basado en la variedad topológica de los nudos en el espacio 3D, de cuyo estudio se encargó el propio Tait. En dicho poema habla de la relación entre azar y elección, religión y ciencia, muerte y eternidad.<sup>101</sup> He aquí su comienzo:<sup>102</sup>

*My soul's an amphicheiral knot /  
Upon a liquid vortex wrought /  
By Intellect in the Unseen residing, /  
While thou dost like a convict sit /  
With marlinspike untwisting it /  
Only to find my knottiness abiding; /  
...*

## II.8. Poincaré y la belleza

Como Maxwell, el gran matemático francés Henri Poincaré se enmarca en el pleno romanticismo. A diferencia de Maxwell, Poincaré no cultivó la poesía; pero sucedió en la Académie Française, salón 24, al poeta Sully Prudhomme, primer laureado Nobel en Literatura (1901), traductor al francés del gran poema épico-científico *DE RERUM NATURA* de Lucrecio. Y su discurso de ingreso está cuajado de poemas de Prudhomme, prueba sobrada del gusto de Poincaré por el arte poé-

---

<sup>99</sup> *Grand Cross of the (Royal) Victorian Order.*

<sup>100</sup> *(Her Majesty's Most Honourable) Privy Council.*

<sup>101</sup> D.S. Silver: *The Last Poem of James Clark Maxwell*, *Notices of the AMS* 55, 1266-1270 (2008).

<sup>102</sup> Mi alma es un nudo anfiquiral / hecho sobre un vórtice líquido / por el Intelecto que mora en el Invisible / mientras tú estás sentado como un convicto / desatándolo con un pasador / para encontrar solo que mi nudidad permanece; /...

tico, y por ende de su sensibilidad estética. Además, en su discurso, dice cosas tan profundas e interesantes como estas:<sup>103</sup>

*¿Debe la ciencia triunfante matar la poesía? ¿Secará su luz brutal a esa delicada flor que solo crecería bajo la sombra de los oscuros bosques? Sully no lo creía. Lo que él desea, no es la ignorancia ingenua de los poetas de antaño, sino por el contrario los vastos y luminosos horizontes que se abrirán ante los de mañana.*

...



Henri Poincaré.



Disco hiperbólico de Poincaré con tesselado triangular.

---

<sup>103</sup> *La science triomphante doit-elle tuer la poésie? Sa lumière brutale va-t-elle dessécher cette fleur délicate qui ne prospérerait que sous l'ombre des futaies obscures? Sully ne le pensait pas. Ce qu'il envie, ce n'est pas l'ignorance naïve des poètes d'autrefois, ce sont au contraire les vastes et lumineux horizons qui s'ouvriront devant ceux de demain.*

...

Si le mystère est nécessaire à la poésie, il n'y a pas à craindre qu'il disparaisse jamais, il ne peut que reculer. Quelque loin que la science pousse ses conquêtes, son domaine sera toujours limité; c'est tout le long de ses frontières que flotte le mystère, et plus ces frontières seront éloignées, plus elles seront étendues.

Les abîmes de grandeur et de petitesse que le télescope et le microscope nous dévoilent, l'harmonie cachée des lois physiques, la vie toujours renaissante et toujours diverse, voilà des sujets bien dignes de tenter les poètes. Ce ne sont pas ceux que Sully traite de préférence; ce qu'il admire, c'est l'âme du savant, c'est sa persévérance et son courage.

(H. Poincaré: *Discours de réception* (Académie Française, 28 janvier 1909).)



Espacio dodecaédrico de Poincaré.

Si es necesario el misterio para la poesía, no hay que temer que desaparezca nunca, solo puede retroceder. Por lejos que la ciencia lleve sus conquistas, siempre será limitado su dominio; el misterio flota a lo largo de sus fronteras, y cuanto más alejadas estén estas, más extensas serán.

Los abismos de lo grande y lo pequeño que nos desvelan el telescopio y el microscopio, la armonía oculta de las leyes físicas, la vida siempre renaciente y siempre diversa, he ahí temas dignos de tentar a los poetas. Pero no son los que Sully prefiere; lo que él admira es el alma del sabio, es su perseverancia y su coraje.

La aridez y dificultad de su campo de investigación pide de Poincaré una explicación. ¿Por qué esta elección? ¿Por su utilidad? Y en uno de sus valiosos libros divulgativos sobre filosofía de la ciencia Poincaré se justifica así:

*El sabio no estudia la naturaleza porque esto sea útil; la estudia porque le place, y le produce placer porque es bella. Si la naturaleza no fuera bella, no valdría la pena el ser conocida, y tampoco la vida el ser vivida. No hablo aquí, bien entendido, de esa belleza que detectan los sentidos, la belleza de las cualidades y apariencias; lejos de mí despreciar ésta, pero no tiene nada que ver con la ciencia; quiero hablar de esa belleza más íntima que proviene del orden armonioso de las partes, y que una inteligencia pura puede captar. Es la que da un cuerpo, un esqueleto, por así decirlo, a las brillantes apariencias que halagan nuestros sentidos, y sin este soporte, la belleza de estos sueños fugaces no sería más que imperfecta pues sería indecisa y huidiza. Por el contrario, la belleza intelectual es autosuficiente, y es por ella, y quizás también por el bien futuro de la humanidad, que el sabio se condena a largos y penosos trabajos.*<sup>104</sup>

<sup>104</sup> Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. Si la nature n'était pas belle, elle ne vaudrait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine

Y en el mismo libro justifica en la belleza la pasión científica por lo grande y lo pequeño:

*Y es porque la simplicidad y la grandeza son bellas por lo que investigaremos preferentemente los hechos simples y los hechos grandiosos, por lo que nos placera tanto el seguir el curso gigantesco de los astros como escrutar con el microscopio esa prodigiosa pequeñez que es también grandeza, o buscar en las edades geológicas las trazas de un pasado que nos atrae por su lejanía.*<sup>105</sup>

En el campo de las matemáticas, Poincaré iguala el sentimiento de satisfacción estética con la adaptación, de la solución hallada, a las necesidades de nuestra mente, igual que las cariátides del Erecteión soportan con gracia y sin esfuerzo sus cargas. Define maravillosamente las matemáticas como el arte de nombrar igual a cosas distintas, del mismo modo que hacen los físicos, que, por ejemplo, llaman energía a cosas diferentes en sus materias pero semejantes en sus formas.

## II.9. Hardy y Ramanujan

Pocos matemáticos han expresado su visión estética de las matemáticas con la agudeza y pasión del inglés Godfrey Harold Hardy. Su ensayo *A MATHEMATICIAN'S APOLOGY* es una justificación de su propia vocación y entrega a la investigación en matemáticas puras, aquellas

---

*d'être vécue. Je ne parle pas ici, bien entendu, de cette beauté qui frappe les sens, de la beauté des qualités et des apparences; non que j'en fasse fi, loin de là, mais elle n'a rien à faire avec la science; je veux parler de cette beauté plus intime qui vient de l'ordre harmonieux des parties, et qu'une intelligence pure peut saisir. C'est elle qui donne un corps, un squelette pour ainsi dire aux chatoyantes apparences qui flattent nos sens, et sans ce support, la beauté de ces rêves fugitifs ne serait qu'imparfaite parce qu'elle serait indécise et toujours fuyante. Au contraire, la beauté intellectuelle se suffit à elle-même et c'est pour elle, plus peut-être que pour le bien futur de l'humanité, que le savant se condamne à de longs et pénibles travaux.* (H. Poincaré: *SCIENCE ET MÉTHODE*, Flammarion 1947.)

<sup>105</sup> *Et c'est parce que la simplicité, parce que la grandeur est belle, que nous rechercherons de préférence les faits simples et les faits grandioses, que nous nous complairons tantôt à suivre la course gigantesque des astres, tantôt à scruter avec le microscope cette prodigieuse petitesse qui est aussi une grandeur, tantôt à rechercher dans les temps géologiques les traces d'un passé qui nous attire parce qu'il est lointain.*



Godfrey Harold Hardy.



Srinivasa Aiyangar Ramanujan.

alejadas, según él, de toda utilidad, con la teoría de los números como mejor muestra. He aquí dos perlas de la prosa hardiana:<sup>106</sup>

*La belleza es el primer test: no hay sitio permanente en el mundo para las matemáticas feas.*

*Reductio ad absurdum, que tanto gustaba a Euclides, es una de las armas más poderosas del matemático. Es un gambito mucho más fino que el de cualquier partida de ajedrez: un jugador de ajedrez puede ofrecer el sacrificio de un peón o de una pieza, pero el matemático ofrece la partida.*

El descubrimiento del matemático indio Srinivasa Aiyangar Ramanujan fue el incidente que marcaría su vida. Él mismo escribió:<sup>107</sup>

---

<sup>106</sup> *Beauty is the first test: there is no permanent place in this world for ugly mathematics.*

Reductio ad absurdum, which Euclid loved so much, is one of a mathematician's finest weapons. It is a far finer gambit than any chess play: a chess player may offer the sacrifice of a pawn or even a piece, but a mathematician offers the game.

<sup>107</sup> *I did not invent him —like other great men, he invented himself— but I was the first really competent person who had the chance to see some of his work, and I can still remember with satisfaction that I could recognise at once what a treasure I had found.*

(G.H. Hardy: *The Indian Mathematician Ramanujan*, *The American Mathematical Monthly* 44, 137-155 (1937).)



*No lo inventé, pues como todos los grandes hombres, se inventó a sí mismo, pero fui la primera persona realmente competente que tuvo la suerte de ver algo de su trabajo, y aún puedo recordar con satisfacción que pude reconocer al momento el tesoro que había encontrado.*

No voy a recontar la bien conocida historia del paso de Ramanujan por Cambridge; pero no resisto la tentación de mostrar aquí alguna de las fórmulas que, sin demostración adjunta, mandó Ramanujan a la atención de Hardy antes de zarpar hacia el viejo continente:

$$\frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \dots}}}} = \left\{ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\} e^{2\pi/5},$$

$$\frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1 + \dots}}}} = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{1 + \left\{ 5^{3/4} \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{5/2} - 1 \right\}^{1/5}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\} e^{2\pi/\sqrt{5}}.$$

Confiesa Hardy que:

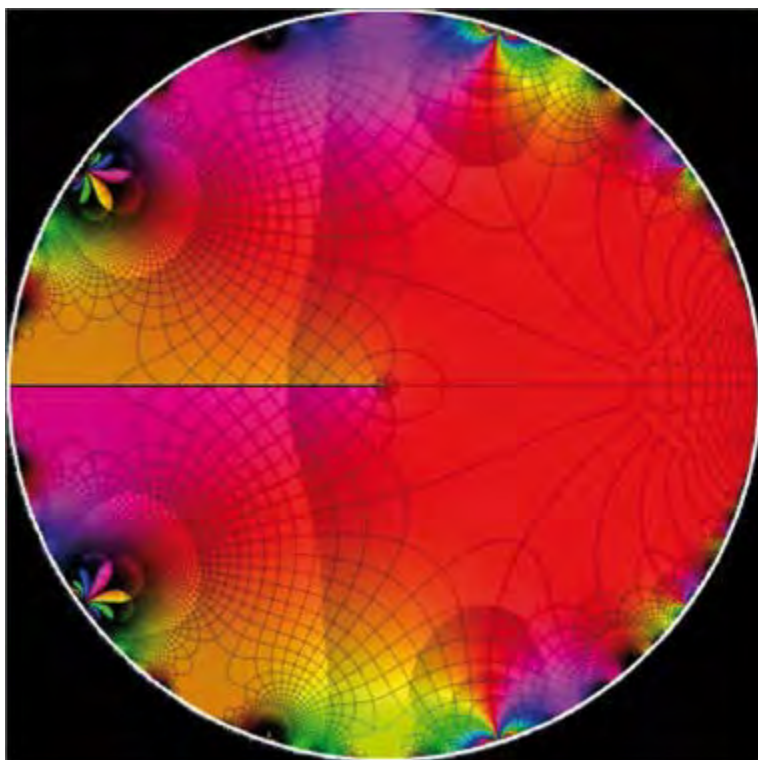
*Nunca había visto antes nada igual. Una simple mirada basta para concluir que el autor solo podía ser un matemático de clase suprema. Tenían que ser ciertas, porque, de lo contrario, nadie hubiera tenido la imaginación suficiente para inventárselas.*<sup>108</sup>

Son casos particulares de la siguiente afirmación que hacía Ramanujan:

---

<sup>108</sup> *I had never seen anything in the least like them before. A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one would have had the imagination to invent them.*

(G.H. Hardy: *The Indian Mathematician Ramanujan*, The American Mathematical Monthly 44, 137-155 (1937).)



Representación cromática de  $R(q)$  en el disco unidad.

Sea la función  $R$  definida por la siguiente fracción continua

$$r(\tau) = R(q := e^{2\pi i \tau}) := q^{1/5} \frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{q^2}{1 + \frac{q^3}{1 + \dots}}}} = q^{1/5} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{5n-1})(1 - q^{5n-4})}{(1 - q^{5n-2})(1 - q^{5n-3})}.$$

Entonces los valores  $r(i\sqrt{n}/2)$  son exactamente calculables para todo racional positivo  $0 < n \in \mathbb{Q}$ .<sup>109</sup>

---

<sup>109</sup> Para otros valores particulares de  $R$ , aparte de los mencionados en el texto, ver: B. C. Berndt, H. H. Chan: *Some values for the Rogers-Ramanujan continued fraction*, Can. J. Math. **47**, 897-914 (1995). Como muestra elemental de la aseveración de Ramanujan, es elemental comprobar que  $r(0)$ , esto es,  $\Phi-1$ , y su inverso  $1/(\Phi-1)$ , son raíces, respectivamente, de los polinomios mónicos  $x^2+x-1$ ,  $x^2-x-1$ . Idem,

Y así es, en efecto. Más aún: dichos valores son números algebraicos, mejor todavía, unidades algebraicas, esto es, enteros algebraicos cuyos inversos también lo son.<sup>110</sup>

Subyacen las propiedades de  $R$  las famosas identidades de Rogers-Ramanujan:

$$r(\tau) = R(q := e^{2\pi i \tau}) := q^{1/5} \frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{q^2}{1 + \frac{q^3}{1 + \dots}}}} = q^{1/5} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{5n-1})(1 - q^{5n-4})}{(1 - q^{5n-2})(1 - q^{5n-3})}.$$

que han sido recientemente generalizadas.<sup>111</sup> No podemos olvidar que en la física estadística, un campo aparentemente bien alejado de la pura teoría de números, también se han usado de modo esencial las identidades en cuestión, para hallar explícitamente la función de partición del modelo 2D de hexágonos duros.<sup>112</sup>

La fascinación que producen muchas de las identidades que nos dejó Ramanujan queda reflejada en estas palabras del matemático George Neville Watson en el penúltimo párrafo de su alocución ante la Sociedad Matemática de Londres en 1938:

*El estudio de la obra de Ramanujan y de los problemas que suscita nos recuerda inevitablemente el comentario de Lamé de que, al leer los trabajos de Hermite sobre funciones modulares, “se te pone la piel*

---

$r(i) = \sqrt{5}\sqrt{\Phi} - \Phi$ , y  $1/r(i)$  lo son de estos otros:  $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1$ ,  $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1$ . Más complicado es obtener que  $r(i\sqrt{5}) = \sqrt{5}/(1 + (5^{3/4}(\Phi - 1)^{5/2} - 1)^{1/5}) - \Phi$ , y  $1/r(i\sqrt{5})$  lo son de los polinomios mónicos de grado 20 con coeficientes (en potencias crecientes)

(+1,  $\mp 10$ , -90,  $\mp 280$ , -730,  $\mp 1022$ , -2410,  $\mp 2540$ , -3330,  $\mp 1730$ , -2006,  $\mp 1730$ , -3330,  $\mp 2540$ , -2410,  $\mp 1022$ , -730,  $\mp 280$ , -90,  $\mp 10$ , +1).

<sup>110</sup> B.C. Berndt, H.H. Chan, S.S. Huang, S.Y. Kang, J. Sohn, S. Son.; *The Rogers-Ramanujan continued fraction*, Journal of Computational and Applied Mathematics **105** (1-2), 9-24 (1999).

<sup>111</sup> M.J. Griffin, K. Ono, A.O. Warnaar: *A framework of Rogers-Ramanujan identities and their arithmetic properties*, Duke Math. J. **165** (8), 1475-1527 (2016).

<sup>112</sup> R.J. Baxter: *Hard hexagons: exact solution*, Journal of Physics A: Mathematical and General **13** (3), L61-L70 (1980).

de gallina”. Yo expresaría mi actitud de forma más prolija diciendo que una fórmula como

$$\int_0^{\infty} e^{-3\pi x^2} \frac{\sinh \pi x}{\sinh 3\pi x} dx = \frac{1}{e^{2\pi/3\sqrt{3}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2n(n+1)\pi}}{(1+e^{-\pi})^2 (1+e^{-3\pi})^2 \dots (1+e^{-(2n+1)\pi})^2}$$

me produce un estremecimiento indistinguible del que siento al entrar en la Sacristía Nueva de la Capilla Medicea y ver delante de mí la austera belleza de las cuatro estatuas representando al Día, a la Noche, al Crepúsculo y a la Aurora, que Miguel Angel ha puesto sobre las tumbas de Giuliano de Medici y de Lorenzo de Medici.<sup>113</sup>

Tiene Ramanujan, sin embargo, otras identidades que bastantes matemáticos tildan de poco atractivas, por no decir feas; entre ellas, una cuya utilidad es indiscutible, pues permitió en 1985 calcular por primera vez el número  $\pi$  con varios millones de cifras significativas. Me refiero a esta:<sup>114</sup>

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!}{(k!)^4} \frac{(1103 + 26390k)}{396^{4k}}.$$

---

<sup>113</sup> *The study of Ramanujan's work and the problem to which it gives rise, inevitably recalls to mind Lamé's remark that, when reading Hermite's papers on modular functions, "on a la chair de poule." I would express my own attitude with more prolixity by saying that such a formula as.....gives me a thrill which is indistinguishable from the thrill which I feel when I enter the Sagrestia Nuova of Capelle Medicee and see before me the austere beauty of "Day," "Night," "Evening," and "Dawn" which Michelangelo has set over the tombs of Guilano de' Medici and Lorenzo de' Medici.*

(G.N. Watson: *The final problem: An account of the mock theta functions*, J. London Math. Soc. 11, 55-80 (1936).

<sup>114</sup> Esta es la última de las 17 series para  $1/\pi$  que presentó Ramanujan (sin demostración) en su famosa primera y única publicación de 1914 (S. Ramanujan: *Modular equations and approximations to  $\pi$* , Quarterly J. Math. 45, 350-372 (1914)). Todas fueron demostradas años más tarde por los hermanos Jonathan y Peter Borwein en 1987. Después han sido descubiertas muchas otras series numéricas para  $1/\pi$ ,  $1/\pi^2$ ,... Especial mención merece la importante contribución del físico aragonés Jesús Guillera Goyanes, investigador matemático autodidacto, por su apertura de una nueva vía de generación de identidades para  $1/\pi$  (J. Guillera: *Some binomial series obtained by the WZ-method*, Adv. in Appl. Math. 29, 599-603 (2002); *History of the formulas and algorithms for pi*, in GEMS IN EXPERIMENTAL MATHEMATICS, Contemp. Math. 517, 173-178 (2010)).

Tiene la propiedad de que, con cada término de la serie que se añade en el cálculo, se generan ocho nuevos dígitos correctos del resultado. Alguien se preguntará para qué queremos conocer  $\pi$  con tantas cifras, si sus 43 primeras se bastarían para calcular la longitud del perímetro del universo observable (si conociéramos exactamente su radio)<sup>115</sup> con precisión del diámetro de un nucleón. El matemático es bien consciente de ello, por supuesto; pero  $\pi$  no es cualquier número;  $\pi$  es “el” número por antonomasia, el número históricamente más importante de la matemática, y siempre habrá algún matemático que deseará ir un poco más allá de lo que han hecho los demás, explorando algún rincón no explorado de su inacabable cabellera.<sup>116</sup> El ingenio y la técnica computacional han llegado a proporcionar e implementar algoritmos basados en teoría de funciones modulares y en el método de la media geométrico-aritmética de Gauss en que las iteraciones convergen a  $\pi$   $n$ -icamente ( $n = 2, 3, 4, \dots, 9, \dots$ ), esto es, cada paso multiplica aproximadamente por  $n$  el número de dígitos correctos. Actualmente el record de cálculo está en los 22.4 billones de dígitos de  $\pi$ . Más exactamente<sup>117</sup>

$$22\,459\,157\,718\,361 = \lfloor 10^{12} \pi^e \rfloor.$$

Por último, los especialistas en el número  $\pi$  han ideado un brillante y sagaz método (basado en la fórmula BBP)<sup>118</sup> para calcular dígitos de  $\pi$  individualmente (o por paquetes limitados) sin necesidad de conocer los dígitos que les preceden. Pero seguimos ignorando muchas cosas de este irracional transcendente, como, por ejemplo, si es (como casi todos los reales en sentido Lebesgue) o no es normal. Esta ignorancia se extiende a todos los irracionales que nos son más familiares, como  $e$ ,  $\log 2$ ,  $\pi$ ,  $\sqrt{5}, \dots$ ; de todos estos se espera, por evidencias computacionales, la normalidad. Como ejemplo de número real normal, están los números no computables de Chaitin (probabilidades de detención de máquinas de Turing universales), o el número real computable de Becher-Figueira.<sup>119</sup>

---

<sup>115</sup> Hoy se estima que el radio del universo observable es del orden de unos 14 Gpc.

<sup>116</sup> D.H. Bailey, J.M. Borwein, P.B. Borwein, S. Plouffe: *The Quest for Pi*, Mathematical Intelligencer, vol. 19, 50-57 (1997).

<sup>117</sup> *From a high-school project that went a little too far...* By Alexander J. Yee.

<sup>118</sup> D. H. Bailey, P. B. Borwein, S. Plouffe: *On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants*, Mathematics of Computation 66 (218), 903-913 (1997).

<sup>119</sup> V. Becher, S. Figueira: *An example of a computable absolutely normal number*, Theoretical Computer Science 270, 947-958 (2002).

## II.10. Einstein

En su tercer trabajo de 1905 Einstein funde espacio y tiempo en una unidad superior, espacio/tiempo. Mas esta unión no es formalmente ostensible hasta que su antiguo profesor de Zúrich, Hermann Minkowski, la incorpora a la estructura matemática en el modelo geométrico 4D que todos usamos desde entonces. Inicialmente, Einstein la recibe con frialdad y desdén, tachándola de “erudición superflua” (*überflüssige Gelehrsamkeit*).<sup>120</sup> Pronto cambiaría de opinión, al comprobar la utilidad del formalismo minkowskiano para su intento de incorporar la gravitación a la relatividad:

*Sin la importante concepción de Minkowski probablemente la teoría general de la relatividad seguiría todavía en pañales.*<sup>121</sup>

En carta a Sommerfeld, le confiesa:

*Pero una cosa es cierta [...] he llegado a sentir un gran respeto por las matemáticas, cuyas partes más sutiles consideré, hasta ahora, en mi ignorancia, como puro lujo.*<sup>122</sup>

Muy poco antes de reconocer esto, había dicho a propósito de la elegancia del esquema 4D de Minkowski:

*La elegancia debería mejor dejarse a la atención de sastres y de zapateros.*<sup>123</sup>

En su nota necrológica sobre Emmy Noether en el New York Times, ensalza Einstein las matemáticas puras como “la poesía, a su manera, de las ideas lógicas”.<sup>124</sup>

---

<sup>120</sup> A. Pais: *SUBTLE IS THE LORD*, Oxford 1982, p. 152.

<sup>121</sup> *Ohne den wichtigen Gedanken Minkowskis wäre vielleicht die allgemeine Relativitätstheorie in den Windeln stecken geblieben.*

(L. Kollros: *Albert Einstein en Suisse: Souvenirs*, Helvetica Physica Acta, Supplementum 4, 271-281 (1956).)

<sup>122</sup> *Aber das eine ist sicher [...] ich grosse Hochachtung für die Mathematik einge- flösst bekommen habe, die ich bis jetzt in ihren subtileren Teilen in meiner Einfalt für puren Luxus ansah!*

(A. Einstein: Carta a Sommerfeld, *THE COLLECTED PAPERS OF ALBERT EINSTEIN*, Vol. 5, Doc. 421.)

<sup>123</sup> L. Kollros: *loc. cit.*

<sup>124</sup> A. Einstein: *Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas* (New York Times, May 5, 1935).

En sus notas autobiográficas,<sup>125</sup> escritas a los 67 años de edad, recuerda Einstein el asombro que, a sus 4-5 años, le produjo, primero, el comportamiento de una brújula que le enseñó su padre, que difería de los fenómenos de su experiencia cotidiana, lo que le causaría una impresión profunda y duradera; y segundo, cuando ya tenía 12 años, la fascinación provocada por la lectura de un librito de geometría euclidiana del plano, con su afirmación, por ejemplo, de que las alturas de un triángulo se cortan en un punto, cuya demostración no dejaba cabida a la excepción de la regla:

*Esta lucidez y certeza me causó una indescriptible impresión.*<sup>126</sup>

Del teorema de Pitágoras le había hablado un tío suyo antes de disponer del libro mencionado; y el muchacho Einstein logró demostrarlo por semejanza de triángulos, apoyándose en que, salvo semejanza, los triángulos rectángulos quedan determinados por uno de sus ángulos agudos, convicción esta última que aceptó sin demostración, por serle evidente. Por cierto, el nobel Frank Wilczek, en su delicioso libro *A BEAUTIFUL QUESTION*, sugiere cuál pudo ser la demostración de Einstein y la califica, con toda razón, como la más sencilla y hermosa de todas las que se conocen.<sup>127</sup>

Hay dos momentos especiales en la vida de Einstein que me gustaría recordar. Uno, cuando consigue explicar el avance anómalo del perihelio de Mercurio en la semana del 11 al 18 de noviembre de 1915. Era su sueño desde 1907. De los fracasos en empeños previos, nunca habló en sus escritos públicos. Cuando, sin ninguna hipótesis

---

<sup>125</sup> A. Einstein: *Autobiographical Notes*, en ALBERT EINSTEIN, PHILOSOPHER-SCIENTIST, Ed. P. A. Schilpp, Harper Torchbooks 1959.

<sup>126</sup> *Diese Klarheit und Sicherheit machte einen unbeschreiblichen Eindruck auf mich.*

<sup>127</sup> F. Wilczek: *A BEAUTIFUL QUESTION*, Penguin Books 2015. Esta podría ser la demostración: sea ABC el triángulo rectángulo, de hipotenusa  $a = BC$ , y catetos  $b = AC$ ,  $c = AB$ . Sea  $A'$  el pie de la altura que pasa por A. Los triángulos rectángulos ABC,  $A'BA$  y  $A'AC$  son semejantes, por igualdad de sus ángulos. Sea  $\beta$  ( $>0$ ) el ángulo del vértice B. Por razones de dimensionalidad y semejanza, el área  $S(h, \beta)$  de cualquier triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud  $h$  y un ángulo agudo de valor  $\beta$  será de la forma  $S(h, \beta) = f(\beta)h^2$ , con  $f$  una función determinada, cuya estructura no viene al caso (para el curioso,  $f(\beta) = (\frac{1}{4})\text{sen}(2\beta)$ ). Como el área de ABC es la suma de las áreas de  $A'AC$  y  $A'BA$ , y las hipotenusas de estos son  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , respectivamente, y en todos ellos hay un ángulo de valor  $\beta$ , se tiene:  $f(\beta)a^2 = f(\beta)b^2 + f(\beta)c^2$ , es decir  $a^2 = b^2 + c^2$ , QED.

*ad hoc*, surge de sus cálculos la mítica cifra de los 40"/siglo aproximadamente, experimenta, según escribe Abraham Pais (*loc. cit.* p. 253) la sensación más fuerte quizás de toda su vida.

Hay que mirar la correspondencia de Einstein con sus amigos para ver su ánimo de esos días. Un ejemplo: en carta a su amigo el profesor de Medicina Legal o Forense en la Universidad de Zúrich, Heinrich Zangger, el 26 de noviembre 1915, le habla de su éxito con Mercurio y de sus ecuaciones finales del día 25. Y exclama:<sup>128</sup>

*La teoría es incomparablemente hermosa. Pero solo uno de mis colegas la ha entendido [se refiere a Hilbert], y está intentando “participar” [nostrificar] en ella de una manera astuta. En mi experiencia personal nunca he llegado a ver la miseria de la humanidad mejor que como resultado de esta teoría y de todo lo relacionado con ella. Pero me da igual.*

En misiva a Arnold Sommerfeld (9 dic. 1915) le dice que lea con cuidado los dos trabajos (del 18 y 25 de noviembre) que le ha enviado:<sup>129</sup>

*Asegúrate de mirarlos. Es lo más valioso que he hecho en mi vida... El resultado sobre el avance del perihelio de Mercurio me produce una honda satisfacción. ¡Cuán útil nos ha sido aquí la pedante exactitud de la astronomía que tantas veces ridiculicé en secreto!*

Y en otra a Paul Ehrenfest (17 enero 1916) escribe:<sup>130</sup>

*Imagínate mi dicha al darme cuenta de que la covariancia general era factible y obtener que las ecuaciones proporcionaban correcta-mente*

---

<sup>128</sup> Die Theorie ist von unvergleichlicher Schönheit. Aber nur ein Kollege hat sie wirklich verstanden und der eine sucht sie auf geschickte Weise zu “nostrifizieren”. Ich habe in meinen persönlichen Erfahrungen kaum je die Jämmerlichkeit der Menschen besser kennen gelernt wie gelegentlich dieser Theorie und was damit zusammenhängt. Es ficht mich aber nicht an.

<sup>129</sup> Sehen Sie sich dieselben ja sicher an; es ist der wertvollste Fund, den ich in meinem Leben gemacht habe... Das Resultat von der Perihelbewegung des Merkur erfüllt mich mit grosser Befriedigung. Wie kommt uns da die pedantische Genauigkeit der Astronomie zu Hilfe, über die ich mich im Stillen früher oft lustig machte!

<sup>130</sup> Denk Dir meine Freude bei der Erkenntnis der Durchführbarkeit der allgemeinen Kovarianz und bei dem Resultat, dass die Gleichungen die Perihel-Bewegung Merkurs richtig liefern. Ich war einige Tage fassungslos vor freudiger Erregung.





Albert Einstein.



Ecuaciones del campo gravitatorio.

*el movimiento del perihelio de Mercurio. Estuve varios días fuera de mí sumido en alegre excitación.*

La reacción mayoritaria de los científicos ante la teoría de la relatividad general fue de asombro y aprobación, máxime después del año 1919, tras la observación durante el eclipse solar del efecto gravitacional sobre los rayos de luz, compatible con la predicción einsteiniana (corregida al doble en el mismo trabajo que daba cuenta de la explicación del avance del perihelio mercuriano). Einstein se había convertido en un icono de la física, con lugar en el Parnaso al lado de Arquímedes y Newton. Me permito escribir aquí sus famosas ecuaciones del campo gravitatorio presentadas ante la Academia Prusiana de las Ciencias aquel histórico día, jueves 25 de noviembre de 1915:

$$G_{im} = -\kappa \left( T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right)$$

que en la actualidad suelen escribirse en la forma equivalente

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Me imagino que su contemplación dejará más bien frío a quien no haya desarrollado una cierta sensibilidad tanto en matemáticas

como en física: pero no me cabe duda de que la apreciación cambiará radicalmente cuando se le informe de otra lectura paralela de los mismos símbolos, la lectura inspirada en el aforismo de Kepler que ya comenté. A la izquierda del signo de igualdad, tenemos unos símbolos relacionados con la curvatura de la geometría métrica del espacio/tiempo, de la arena en que ocurren las cosas, y a su derecha, unos símbolos que representan la materia/energía que hay en ese teatro donde discurren los acontecimientos. Su igualdad expresa la afirmación de que la masa/energía es la fuente de la geometría, la que dicta a esta cómo debe curvarse para producir el fenómeno gravitatorio, así como la afirmación de que la curvatura de ese espacio/tiempo así generada conduce a los graves a moverse siguiendo las geodésicas, que son precisamente los recorridos de tiempo más largo. Así se mueven todos los orbes del universo; así se explica desde esa minúscula desviación que experimentan los planetas respecto de la física newtoniana de la gravitación, hasta esas titánicas deformaciones del espacio/tiempo que se conocen como agujeros negros, pasando por los espectaculares anillos de Einstein cuyas imágenes nos fascinan, y los cotidianos localizadores GPS que han inundado nuestras vidas.

De la teoría einsteiniana de la gravitación se han hecho comentarios tan positivos como estos que siguen:

*...la teoría de la relatividad general me pareció entonces, y sigue haciéndolo, la mayor proeza del pensamiento humano acerca de la naturaleza, la combinación más asombrosa de penetración filosófica, intuición física, y destreza matemática... Me atrajo como una gran obra de arte...*<sup>131</sup>  
(Max Born)

---

<sup>131</sup> *The foundation of general relativity theory appeared to me then, and it still does as the greatest feat of human thinking about Nature, the most amazing combination of philosophical penetration, physical intuition, and mathematical skill. But its connection with experience is slender. It appealed to me like a great work of art, to be enjoyed and admired from a distance.*

(Max Born, 1955, conferencia “Physics and Relativity” pronunciada en Berna el 50 aniversario del trabajo de Einstein sobre relatividad especial, y recogida en libro PHYSICS IN MY GENERATION, A SELECTION OF PAPERS by Max Born, Pergamon Press 1956.)

*La teoría de la relatividad de Einstein, al margen de toda cuestión sobre su validez, no puede dejar de considerarse como una magnífica obra de arte.*<sup>132</sup>

(Ernest Rutherford)

*Esta fusión de dos temas previamente desconectados — métrica y gravitación — debe considerarse como el logro más precioso de la teoría general de la relatividad.*<sup>133</sup>

(Wolfgang Pauli)

*La teoría de los campos gravitatorios, construida en el marco de la teoría de la relatividad, se conoce como la teoría general de la relatividad. Fue creada por Einstein (y formulada finalmente por él en 1916), y probablemente representa la más bella de todas las teorías físicas existentes. Es de notar que fue desarrollada por Einstein de modo completamente deductivo, y solo más tarde corroborada por las observaciones astrofísicas.*<sup>134</sup>

(Landau-Lifshitz)

*Resultaba difícil reconciliar la teoría newtoniana de la gravitación, con su propagación instantánea de fuerzas, con las exigencias de la relatividad especial; y Einstein, trabajando sobre esta dificultad, llegó*

---

<sup>132</sup> *The theory of relativity by Einstein, apart from any question of its validity, cannot but be regarded as a magnificent work of art.*

(E. Rutherford: en su contestación al brindis 'Science!' en la Real Academia de las Artes, 1932. Nótese la reticencia del gran neozelandés.)

<sup>133</sup> *Diese Verschmelzung zweier vorher vollständig getrennter Gebiete — Metrik und Gravitation — muß als die schönste Leistung der allgemeinen Relativitätstheorie bezeichnet werden.*

(W. Pauli: RELATIVITÄTSTHEORIE, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, B.G. Teubner Verlag, Leipzig 1921.)

<sup>134</sup> Теория гравитационных полей, построенная на основе теории относительности, носит название общей теорий относительности. Она была создана Эйнштейном (и окончательно сформулирована им в 1916 г.), и является, пожалуй, самой красивой из существующих физических теорий. Замечательно, что она была построена Эйнштейном чисто дедуктивным путем лишь в дальнейшем была подтверждена астрономическими наблюдениями.

(Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. Том 2. ТЕОРИЯ поля, Изда-тельство "Наука", Москва 1973.)

*a una generalización de su relatividad que fue probablemente el descubrimiento científico más grande jamás logrado.*<sup>135</sup>  
(P. A. M. Dirac)

*...la belleza de las ecuaciones de Einstein, por ejemplo, es tan real para cualquiera con cierta experiencia como lo es la belleza de la música. Aprendimos en el siglo XX que las ecuaciones que funcionan bien poseen una armonía interior.*<sup>136</sup>  
(Edward Witten)

Incluso su propio autor, al presentar el primer trabajo de Noviembre de 1915, no pudo reprimir su comprensible arrobó ante sus ecuaciones:

*Difícilmente nadie que haya entendido esta teoría podrá escapar a su magia; representa el verdadero triunfo de los métodos de cálculo diferencial general establecidos por Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci y Levi-Civita.*<sup>137</sup>

En muchas de las epístolas que cruzó Einstein con sus amigos y colegas tras la culminación de su obra se refiere al extenuante esfuerzo mental realizado en los meses precedentes. También alude a esto en su libro antológico publicado poco antes de morir:

*A la luz del conocimiento obtenido, este feliz logro parece casi evidente, y cualquier estudiante despierto puede entenderlo sin demasiado esfuer-*

---

<sup>135</sup> *There was difficulty reconciling the Newtonian theory of gravitation with its instantaneous propagation of forces with the requirements of special relativity; and Einstein working on this difficulty was led to a generalization of his relativity which was probably the greatest scientific discovery that was ever made.*

(Paul Adrien Maurice Dirac, citado por S. Chandrasekhar en: *On the "Derivation" of Einstein's Field Equations*, Amer. J. Phys. **40**, 224-234 (1972).)

<sup>136</sup> *But the beauty of Einstein's equations, for example, is just as real to anyone who's experienced it as the beauty of music. We've learned in the 20th century that the equations that work have inner harmony.*

(NOVA interview *Viewpoints on String Theory*, Edward Witten, July 2003.)

<sup>137</sup> *Dem Zauber dieser Theorie wird sich kaum jemand entziehen können, der sie wirklich erfaßt hat; sie bedeutet einen wahren Triumph der durch Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci und Levi-Civiter begründeten Methode des allgemeinen Differentialkalküls.*

(A. Einstein: *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin), Sitzungsberichte 778-786 (1915).)

zo. Pero los años de ansiosa búsqueda en la oscuridad, con su intenso anhelo, sus alternancias de confianza y agotamiento, y su salida por fin a la luz, solo aquellos que lo han pasado pueden entenderlo.<sup>138</sup>

## II.11. Dirac y su bella ecuación

*Era alto, delgado, extraño y sumamente callado... Era el prototipo de mente matemática superior; pero mientras en otros esto coexistía con multitud de otros intereses, en el caso de Dirac todo estaba dirigido a la realización de su gran misión histórica, el establecimiento de la nueva ciencia, la mecánica cuántica, a la que probablemente contribuyó tanto como el que más.*<sup>139</sup>

Señalemos, sin embargo, que Paul Dirac también tuvo otras pasiones: montañismo, viajes, y ajedrez. Y también se dan otras opiniones<sup>140</sup> más comprensivas hacia el hombre genio cuya infancia había transcurrido bajo una dolorosa e insoportable tiranía paternal.

Dirac estudió ingeniería, y matemáticas aplicadas. En éstas, su campo favorito fue, como no es de extrañar, la geometría proyectiva:

*El tema más apasionante que aprendí fue la geometría proyectiva. Tenía una belleza extraña y un poder que me fascinaban.*<sup>141</sup>

---

<sup>138</sup> Im Lichte bereits erlangter Erkenntnisse erscheint das glücklich Erreichte fast wie selbstverständlich, und jeder intelligente Student erfasst es ohne zu große Mühe. Aber das ahnungsvolle, Jahre währende Suchen im Dunkeln mit seiner gespannten Sehnsucht, seiner Abwechslung von Zuversicht und Ermattung und seinem endlichen Durchbrechen zur Klarheit, das kennt nur, wer es selbst erlebt hat.

(A. Einstein, *Einiges über die Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie*, im MEIN WELTBILD, Ullstein, Berlin, 1974.)

<sup>139</sup> He was tall, gaunt, awkward, and extremely taciturn... he was the prototype of the superior mathematical mind; but while in others this had coexisted with a multitude of interests, in Dirac's case everything went into the performance of his great historical mission, the establishment of the new science, quantum mechanics, to which he probably contributed as much as any other man.

(W. M. Elsasser: *MEMOIRS OF A PHYSICIST IN THE ATOMIC AGE*, New York Science History Publications 1978.)

<sup>140</sup> W. E. Carter: *An Interlude with Dirac*, *American Scientist* **100**, 438-441 (2012).

<sup>141</sup> The most exciting thing I learned was projective geometry. This had a strange beauty and power which fascinated me.

Pero solo la usaba en sus procesos de investigación, sobre todo en cuestiones de relatividad especial; hacia el exterior, para la publicación de sus resultados acudió siempre al álgebra y análisis. Es posible asimismo que, sabedor de que en geometría proyectiva el cuerpo base es conmutativo si y solo si se cumple el teorema de Pappus, le resultara mucho menos sorprendente que a otros (como Heisenberg o Born) la no conmutatividad de las magnitudes físicas exigida por la nueva mecánica cuántica que entre todos ellos habrían de edificar. También conocía Dirac perfectamente el cuerpo de los cuaterniones.

La característica de este gran científico (*de todos los físicos, Dirac tiene el alma más pura*, según Bohr)<sup>142</sup> que aquí nos interesa destacar es su culto a la belleza matemática. En cierta ocasión, a varios físicos muy afamados que se hallaban en la Universidad de Moscú les pidieron que escribieran en la pizarra una frase para la posteridad; la de Dirac fue esta: “*Una ley física ha de poseer belleza matemática*”.<sup>143</sup>

Insistía Dirac en que Erwin Schrödinger había llegado a su famosa ecuación por consideraciones meramente teóricas, buscando una bella generalización de las ideas de Louis-Victor de Broglie; así obtuvo la que luego se llamaría ecuación de Klein-Gordon (aunque el primero en obtenerla había sido Schrödinger). Los niveles energéticos para el hidrógeno que con esa ecuación conseguía Schrödinger no eran los correctos para el hidrógeno (pues esa ecuación no considera el espín del electrón), y por ello el físico austríaco la cambió por su bien conocida (y menos bella) aproximación no-relativista.

Debemos a Dirac el retoque que devolvió la belleza a la ecuación de ondas para el electrón y en general para las partículas de espín  $\frac{1}{2}$ . En su extremada modestia el gran Dirac no muestra esa ecuación, la suya, en sus escritos sobre la estética en la física; lo hará, tangencialmente, más tarde, hablando de las matemáticas “bonitas”. Mientras, lamenta que Schrödinger abandonara su primer intento relativista y adoptase la

---

(P. Galison: THE SUPPRESSED DRAWING: PAUL DIRAC'S HIDDEN GEOMETRY, *Representations* 72 (Autumn, 2000), pp. 145-166.)

<sup>142</sup> *Of all physicists, Dirac has the purest soul.*

(R. Peierls: *TRIBUTES TO PAUL DIRAC*, Ed. J. C. Taylor, Hilger, Bristol 1987.)

<sup>143</sup> *A physical law must possess mathematical beauty.* (R. C. Hovis, H. Kragh: P. A. M. Dirac and the Beauty of Physics, *Scientific American* 268, 104-109 (1993).) Bohr escribió esta otra: *Contraria non contradictoria sed complementa sunt.*

ecuación que lleva su nombre solo porque reproducía mejor los datos experimentales; y afirma como moraleja lo siguiente (algo que en la mayoría de los físicos produce rechazo instintivo):

*...es más importante la belleza de las ecuaciones que su adecuación a los experimentos.*<sup>144</sup>

Confiesa Dirac que una buena parte de su investigación ha sido orientada hacia la búsqueda de matemáticas bellas, sin ánimo de su posible aplicabilidad. Si luego resulta que esta última se da, entonces miel sobre hojuelas, pues uno ha sido afortunado.<sup>145</sup> Por ejemplo, su famosa ecuación

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0$$

es el hermoso resultado obtenido por Dirac<sup>146</sup> intentando hallar una ecuación relativista para el electrón con espín, como “linealización” (en  $p$ ) de la ecuación de ondas asociada a la de su hiperboloide de masas  $p^2 = m^2$ . Es fácil resolver esta cuestión para fermiones de masa nula, mediante las matrices 2x2 de Pauli; se obtienen así las ecuaciones que luego se denominarían de Weyl. Pero para linealizar  $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  con masa no nula necesitó Dirac cuatro matrices de cuadrado  $\pm I$  y que anticonmutaran todas entre sí. Lo consigue con matrices 4x4 y, en particular, obtiene la “raíz cuadrada lineal” de  $p^2$ :

$$p^2 := p^\mu \eta_{\mu\nu} p^\nu = \not{p}^2, \quad \not{p} := \gamma_\mu p^\mu, \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu},$$

---

<sup>144</sup> ...it is more important to have beauty in one's equations than to have them fit experiment.

(P. A. M. Dirac: *The Evolution of the Physicist's Picture of Nature*, Scientific American 208, 45-53 (1963); *Pretty Mathematics*, International J. of Theoretical Phys. 21, 603-605 (1982).)

<sup>145</sup> A good deal of my research work in physics has consisted in not setting out to solve some particular problem, but simply examining mathematical quantities of a kind that physicists use and trying to fit them together in an interesting way regardless of any application that the work may have. It is simply a search for pretty mathematics. It may turn out later that the work does have an application. Then one has had good luck.

<sup>146</sup> P. A. M. Dirac: *The Quantum Theory of the Electron*, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 117, 610-624 (1928).



Ecuación de Dirac para una partícula libre de espín 1/2 (BBC-Earth/Melissa Hogenboom).

Paul Adrien Maurice Dirac.

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es el tensor métrico de Minkowski en una carta inercial, y  $\gamma_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , son las famosas matrices 4x4 de Dirac.

La ecuación de Dirac es otra de las joyas de la física teórica; su belleza trasciende la elegancia de los trazos de los símbolos que la componen, está en su simplicidad matemática, y en lo que representa (comportamiento cuántico de un fermión relativista, y fusión por tanto de los dos revolucionarios constructos del siglo XX). Su utilidad no se hizo esperar: espectro del átomo de hidrógeno con correcciones por espín y por relatividad automáticamente incorporadas, predicción de la existencia de antimateria, y más tarde, papel central en la teoría de campos cuánticos y, en particular, en el sistema de ecuaciones que integran el actual modelo estándar de las partículas elementales. Puede decirse también que la ecuación de Dirac es germen matemático para formar ecuaciones relativistas de partículas con cualquier espín.

Se pregunta Dirac por qué las matemáticas son tan importantes para la ciencia, proporcionándole ecuaciones tan poderosas y bellas. No sabe la respuesta, pero este científico arreligioso dice, en su ensayo de 1963 antes citado:



*Quizás podríamos describir la situación diciendo que Dios es un matemático de orden supremo y usó matemáticas muy avanzadas para construir el universo. Nuestros débiles intentos con las matemáticas nos permiten entender un poco el universo, y a medida que desarrollemos matemáticas cada vez más avanzadas espero que lo entenderemos mejor.*<sup>147</sup>

Con ocasión del centenario de Einstein, Dirac se preguntó qué deberíamos hacer si la teoría einsteiniana de la gravitación no hubiera pasado alguno de los tests a los que ha sido sometida. ¿Rechazarla como básicamente errónea?

*Yo diría que la respuesta a la última pregunta es un No rotundo. La teoría de Einstein de la gravitación tiene carácter de excelente por sí misma. Cualquiera que aprecie la armonía fundamental que conecta el comportamiento de la Naturaleza y los principios matemáticos fundamentales debe sentir que una teoría de la belleza y elegancia de la teoría de Einstein tiene que ser substancialmente correcta. Si surgiera alguna discrepancia en alguna aplicación de la teoría, sería debida a alguna circunstancia secundaria de esta aplicación que no ha sido tomada debidamente en cuenta, y no un fallo de los principios generales de la teoría.*<sup>148</sup>

No puedo dejar a Dirac sin recordar aquí otra de sus “provocadoras” recomendaciones, esta vez dirigida a los estudiantes de física. Lo narra Weinberg así:

---

<sup>147</sup> One could perhaps describe the situation by saying that God is a mathematician of a very high order, and He used very advanced mathematics in constructing the universe. Our feeble attempts at mathematics enable us to understand a bit of the universe, and as we proceed to develop higher and higher mathematics we can hope to understand the universe better.

<sup>148</sup> I would say that the answer to the last question is emphatically No. The Einstein theory of gravitation has a character of excellence on its own. Anyone who appreciates the fundamental harmony connecting the way Nature runs and general mathematics principles must feel that the theory of the beauty and elegance of Einstein's theory has to be substantially correct. If a discrepancy should appear in some application of the theory, it must be caused by some secondary feature relating to this application which has not been adequately taken into account, and not a failure of the general principles of the theory.

(P. A. M. Dirac: *The Excellence of Einstein's Theory of Gravitation*, in *THE IMPACT OF MODERN SCIENTIFIC IDEAS ON SOCIETY* (Einstein Centenary), UNESCO, Munich-Ulm, September 1978.)

*Oí una vez a Dirac decir en una conferencia a una audiencia compuesta mayormente de estudiantes, que los estudiantes de física no deberían interesarse demasiado por el significado de las ecuaciones de la física, sino tan solo por la belleza de las mismas. Los profesores allí presentes gruñeron ante la perspectiva de que todos nuestros estudiantes optaran por imitar a Dirac.*<sup>149</sup>

El nobel Weinberg reconoce estar con Dirac solo en parte, a saber, cuando la belleza hace referencia a los principios que subyacen las ecuaciones, y no a estas en sí.<sup>150</sup> Los principios han de tener como cualidad su inevitabilidad. Y por ejemplo, compara Weinberg las teorías newtoniana y einsteiniana de la gravitación; aunque la de Newton podría considerarse de entrada como más bella que la segunda (ecuaciones más breves y simples), la de Einstein la bate en cuanto a la inevitabilidad en su seno de la ley  $1/r^2$  a grandes distancias y bajas velocidades (en ausencia de constante cosmológica), mientras que en la gravitación newtoniana sería fácilmente modificable para dar cabida en principio a cualquier otro exponente distinto del 2.

Cuando no se dispone de principios sólidos que orienten la búsqueda de las ecuaciones, Weinberg se coloca también al lado de Dirac, reconociendo que la belleza matemática puede ser la mejor guía; y da como ejemplo la propia ecuación de Dirac, que, propuesta como generalización de la de Schrödinger para partículas relativistas, solo cumplió su misión para las de espín  $1/2$ , y aún en este caso, la mecánica cuántica relativista iniciada por Dirac tuvo que dejar paso a una teoría más ambiciosa, la teoría cuántica de campos. Pero en ella permanecerá como patrón de las excitaciones elementales de los campos fermiónicos.

---

<sup>149</sup> *I once heard Dirac say in a lecture, to an audience which largely consisted of students, that students of physics shouldn't worry too much about what the equations of physics mean, but only about the beauty of the equations. The faculty members present groaned at the prospect of all our students setting out to imitate Dirac.*

(S. Weinberg: *Towards the final laws of physics*, in *ELEMENTARY PARTICLES AND THE LAWS OF PHYSICS: THE 1986 DIRAC MEMORIAL LECTURES*, Eds. R.P. Feynman, S. Weinberg, Cambridge Univ. Press 1987.)

<sup>150</sup> Unos años más tarde, sin embargo, escribía Weinberg esto: *Dirac told physics students they should not worry about the meaning of equations, but only about their beauty. This advice was only good for physicists whose sense of purely mathematical beauty is so keen that they can rely on it to see the way ahead. There have not been many such physicists – perhaps only Dirac himself.*

(S. Weinberg: Dirac Centenary Meeting, Bristol, August 2002.)

## II.12. Chandrasekhar

El científico indio Subrahmanyan Chandrasekhar, además de su gran aportación a la astrofísica (estructura estelar y la masa límite de las enanas blancas que lleva su nombre), e importante contribución a la relatividad general (análisis de soluciones especiales, teoría de agujeros negros, colisión de ondas gravitacionales), nos dejó una muestra de su interés por cuestiones filosóficas en torno a la investigación científica y a la estética en la ciencia.

Es autor de un librito, VERDAD Y BELLEZA, que reúne los textos de siete conferencias suyas a lo largo de cuarenta años sobre las motivaciones científicas y la búsqueda de la belleza. Es una referencia obligada, que se lee con deleite por su estilo y con provecho por sus ideas.<sup>151</sup>

La tercera (*Shakespeare, Newton, and Beethoven, or Patterns of Creativity*) y la cuarta (*Belleza, y su búsqueda en la ciencia*) de estas conferencias han sido para mí una generosa fuente de inspiración que me han orientado en el desarrollo de este discurso.

Sostiene Chandrasekhar que la belleza y la verdad van de la mano; cuanto es bello en matemáticas encuentra aplicación, pronto o tarde, en la descripción de la naturaleza. Dos aforismos latinos lo resumen:

*Simplex sigillum veri*                      Lo simple es el sello de lo verdadero

*Pulchritudo splendor veritatis*      La belleza es el esplendor de la verdad

Para justificar su afirmación, Chandrasekhar se apoya en Heisenberg, y acude a una conversación mantenida por este y Einstein en 1925, recogida en el libro de Heisenberg DER TEIL UND DAS GANZE ya citado. Un Einstein un tanto escéptico ante la nueva mecánica que pregona Heisenberg, le pregunta a este cómo puede estar tan seguro de una teoría con tantos problemas cruciales sin resolver.<sup>152</sup> Y Heisenberg le responde tras mucho cavar:

---

<sup>151</sup> S. Chandrasekhar: TRUTH AND BEAUTY. AESTHETICS AND MOTIVATIONS IN SCIENCE, The University of Chicago Press, Chicago 1987.

<sup>152</sup> Warum glauben Sie eigentlich so fest an Ihre Theorie, wenn doch so viele und zentrale Fragen noch völlig ungeklärt sind?



Subrahmanuyan Chandrasekhar.



Observatorio espacial Chandra de rayos X.

*Creo, igual que Vd., que la simplicidad de las leyes naturales tiene carácter objetivo, no es solo el resultado de una economía mental. Si la naturaleza nos lleva a formas matemáticas de gran simplicidad y belleza —por formas me refiero a sistemas coherentes de hipótesis, axiomas, etc.— a formas que hasta entonces nadie había encontrado, no podemos evitar el pensar que son “ciertas”, que revelan una característica genuina de la naturaleza... Vd. seguramente ha sentido esto también: la simplicidad e integridad casi aterradoras de las relaciones que la naturaleza despliega ante nosotros y para las que ninguno de nosotros estaba preparado lo más mínimo.*<sup>153</sup>

---

<sup>153</sup> Ich glaube ebenso wie Sie, daß die Einfachheit der Naturgesetze einen objektiven Charakter hat, daß es sich nicht nur um Denkökonomie handelt. Wenn man durch die Natur auf mathematische Formen von großer Einfachheit und Schönheit geführt wird - mit Formen meine ich hier: geschlossene Systeme von grundlegenden Annahmen, Axiomen und dergleichen - auf Formen, die bis dahin noch von niemandem ausgedacht worden sind, so kann man eben nicht umhin zu glauben, daß sie ›wahr‹ sind, das heißt daß sie einen echten Zug der Natur darstellen... Sie müssen das doch auch erlebt haben, daß man fast erschrickt vor der Einfachheit und Geschlossenheit der Zusammenhänge, die die Natur auf einmal vor einem ausbreitet und auf die man so gar nicht vorbereitet war.

Einstein le replica:

*El control experimental es, por supuesto, un prerequisite esencial para la validez de cualquier teoría. Pero no es posible controlarlo todo. Por eso me interesan tanto sus observaciones sobre la simplicidad. Aún así, yo nunca afirmaré que entiendo realmente lo que significa la simplicidad de las leyes naturales.*<sup>154</sup>

Vemos que la actitud de Einstein es más prudente que la del impetuoso joven Heisenberg. Un siglo antes, el ya citado poeta romántico John Keats había escrito un hermoso poema titulado *Oda a una urna griega*, cuyos últimos dos versos rezan así (en traducción de Julio Cortázar):

*“La belleza es verdad, y la verdad belleza” – nada más / se sabe en esta tierra, y no más hace falta.*<sup>155</sup>

La polvareda que levantaron estos versos fue grande, pues los críticos intentaban una interpretación filosófica de los mismos, sin hallar una adecuada que no fuese en detrimento del poeta; pero Chandrasekhar lo adopta como lema poético de su discurso.

Surge la pregunta de qué hacer con una teoría física que creamos bella, incluso muy bella, pero cuyas predicciones no son corroboradas por los experimentos, esto es, una teoría bella pero falsa. ¿Abandonarla sin más?

Para el matemático Hermann Weyl la respuesta era clara; nos recuerda Freeman Dyson:

*Una vez me dijo [Weyl] medio en broma: Mi trabajo siempre ha sido unir lo verdadero con lo bello; pero cuando tuve que elegir entre uno u otro, usualmente opté por lo bello.*<sup>156</sup>

---

<sup>154</sup> Die Kontrolle durch das Experiment ist natürlich die triviale Voraussetzung für die Richtigkeit einer Theorie. Aber man kann ja nie alles nachprüfen. Daher interessiert mich das, was Sie über die Einfachheit gesagt haben, noch mehr. Aber ich würde nie behaupten wollen, daß ich wirklich verstanden hätte, was es mit der Einfachheit der Naturgesetze auf sich hat.

<sup>155</sup> “Beauty is truth, truth beauty,” – that is all / Ye know on earth, and all ye need to know.

<sup>156</sup> He [Weyl] once said to me, half joking, ‘My work always tried to unite the true with the beautiful; but when I had to choose one or the other, I usually chose the beautiful’.

(F. J. Dyson: Prof. Hermann Weyl, *For.Mem.R.S.*, *Nature* **177**, 457-458 (1956); *Birds and Frogs*, *Notices of the Amer. Math. Soc.* **56**, Number 2, 212-223 (2009).)

Como prueba del acierto en la elección, cita Dyson el trabajo de Weyl sobre campos clásicos *gauge*,<sup>157</sup> buscando la unificación de la gravitación con el electromagnetismo. Rechazado por Einstein, Weyl no lo echó a la hoguera, a pesar de reconocer que Einstein tenía razón en su crítica; simplemente esperó, y cuando llegó la mecánica cuántica con su estructura compleja, volvió a la carga, pero con un cambio que resultó crucial: estos campos no alteraban las longitudes físicas, sino las fases de los estados cuánticos.<sup>158</sup> Hoy los campos de gauge forman parte esencial del modelo estándar que gobierna la microfísica con los extraordinarios aciertos de todos conocidos.

Otro ejemplo adicional, también con Weyl: su ecuación relativista del neutrino con funciones de onda de dos componentes. Mientras no se descubrió la violación de la paridad, fue arrinconada por los físicos, ya que describe partículas de espín  $\frac{1}{2}$ , de masa nula, y helicidad fija:

$$i\sigma^\mu\partial_\mu\chi=0 \quad \text{para helicidad } +\frac{1}{2},$$

donde  $\sigma^0$  es la matriz unidad  $2\times 2$ , y  $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$  son las matrices de Pauli. Para helicidad  $-\frac{1}{2}$  la ecuación es similar, pero cambiando las matrices de índice espacial por sus opuestas.

---

<sup>157</sup> H. Weyl, *Gravitation und elektrizität*, Sitz. König. Preuss. Akad. Wiss. **26**, 465-480 (1918).

<sup>158</sup> H. Weyl, *Elektron und gravitation*, Zeits. Phys. **56**, 330-352 (1929).

### III. RECEPCIÓN

Tengo que cerrar mi discurso. El tema de la belleza en la ciencia es inagotable, y solo he mostrado la punta del iceberg. Sé que algunos discreparán de lo que me han oído; espero que no sean menos los que asientan. Pues todos, modestamente, y en mayor o menor grado, hemos sentido alguna vez esas ráfagas de misterio que preceden a la luz, ese placer que anuncia la armonía de las partes, cuando una investigación culmina con el famoso Εὐρηκα. Nuestras obras científicas, como nuestra prole, nos parecen siempre hermosas; conscientes como somos de nuestras limitaciones, nos reconforta pensar que la belleza de las obras de los iluminados envuelve sobradamente a todas con su esplendor.

Solo me resta, para cumplir mi cometido, dar la bienvenida, en nombre de esta Institución, al nuevo Académico Excmo. Sr. D. Pedro Echenique Landiribar, deseándole una fructífera y larga estancia entre nosotros. Esperamos todos mucho de él; démosle también con holgura cuanto él espera de nosotros.

*Pedro adiskide, ongi etorri etxe honetara.*

He dicho.