REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

SENDEROS DE LA CIENCIA. DEL OPERADOR LAPLACIANO A LOS PROCESOS DIFUSIVOS NO LINEALES

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
COMO ACADÉMICO DE NÚMERO POR EL

EXCMO. SR. D. JUAN LUIS VÁZQUEZ SUÁREZ

Y CONTESTACIÓN DEL

EXCMO. SR. D. JESÚS ILDEFONSO DÍAZ DÍAZ

EL DÍA 26 DE MARZO DE 2014

MADRID
Domicilio de la Academia
Valverde, 22

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

SENDEROS DE LA CIENCIA.
DEL OPERADOR LAPLACIANO A LOS PROCESOS DIFUSIVOS NO LINEALES

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
COMO ACADÉMICO DE NÚMERO POR EL

EXCMO. SR. D. JUAN LUIS VÁZQUEZ SUÁREZ

Y CONTESTACIÓN DEL

EXCMO. SR. D. JESÚS ILDEFONSO DÍAZ DÍAZ

EL DÍA 26 DE MARZO DE 2014

MADRID
Domicilio de la Academia
Valverde, 22

ISSN: 0214-9540
I.S.B.N.: 978-84-695-9782-8
Depósito legal: M. 6.826-2014

Imprime:
Realigraf, S. A.
Pedro Tezano, 26. 28039 Madrid

Índice

DISCURSO DE INGRESO

DEL

EXCMO. SR. D. JUAN LUIS VÁZQUEZ SUÁREZ

Excelentísimo Señor Presidente,

Excelentísimos Señores Académicos,

Señoras y señores:

Hoy es un día solemne para mí y no puedo menos que empezar agradeciendo la benevolencia con que esta ilustre Academia ha tenido a bien considerar mis menguados méritos, quizá en atención al amor constante que he profesado a la ciencia matemática y a la solicitud que he dedicado a la empresa de hacer avanzar esta ciencia en nuestro país. Con especial agrado deseo expresar mi reconocimiento a los académicos don Jesús Ildefonso Díaz, don Amable Liñán y don Enrique Castillo, que tan benévolamente me honraron con su propuesta. Con el primero tuve estrecho contacto científico, sobre todo en los difíciles momentos de nuestra iniciación a la investigación matemática que después hemos venido realizando. Los otros dos son ingenieros de prestigio, y esa relación matemáticas-ciencia-ingeniería ha sido uno de los aspectos sobresalientes de las matemáticas de mi generación en España.

Me llama la ilustre Academia a ocupar un sillón que ocuparon antes hombres tan destacados por sus capacidades intelectuales como por su amor al trabajo bien hecho y al progreso. Uno de ellos fue don José de Echegaray, que en su discurso de recepción en la Academia [Ech1866] hace casi siglo y medio comenzaba con un estilo que hago mío con su permiso: *"La honra que de esta muy respetable Academia he recibido, honra tan superior á mis méritos, si méritos hay en mí, que no como justa recompensa sino como bondadoso estímulo debo considerarla, me impone grandes deberes. ... En cuanto de mi voluntad depende, procuraré mostrar mi profundo agradecimiento por este elevado título que sin merecer recibo, y que jamás esperé."* Pasa entonces don José a enunciar el primer deber que se impone: *"Voy á ocuparme de la historia de las Matemáticas puras en nuestra España; y entiendo por Matemáticas puras la ciencia eminentemente racional, no la Física, ni la Astronomía, ni todas aquellas que, si bien acuden al análisis algebraico ó geométrico como á poderoso auxiliar, son por su naturaleza, y por el carácter de los fenómenos* *que estudian, verdaderas ciencias de observación"*, y enuncia que es de sumo interés para la Academia, pues *"la importancia del punto que he escogido, los arduos problemas que encierra y su inmensa trascendencia para el porvenir, le hacen digno de estudio y meditación: que al fin es la ciencia, por más abstracta que en sus concepciones á primera vista parezca, germen fecundo de progreso para los pueblos, enérgico purificador del alma, luz que alumbra a la humana inteligencia con divinos resplandores".*

A lo largo de las páginas de ese notable documento se describe el glorioso panorama de la ciencia matemática hasta el momento y, por contraste, su muy discreto estado en España, y concluye el análisis con un duro dictamen, lo que hoy llamaríamos declaración de crisis, con una llamada a la acción urgente que encaminara los esfuerzos de la España venidera en una dirección decididamente más creativa, un "podemos hacerlo" dirigido a las mejores mentes y las más robustas voluntades. Hubo sobre ello largo debate, pues en nuestro país siempre hay sabios que opinan que no pasa nada o que el pasado fue el mejor posible, e incluso quien sostiene que es mejor "que inventen ellos". Desgraciadamente, don José Echegaray no contribuyó él personalmente a reparar la situación científica que tan certeramente había descrito pues la vida le llevó por otros caminos[1]; por su parte, los llamados intelectuales del 98, tan influyentes en el nuevo siglo y tan incisivos en tantas cosas, no supieron apreciar las opiniones del ilustre académico. En resumen, la modernidad científica ha sido entre nosotros y hasta tiempos muy recientes un tema siempre discutible y siempre aplazado.

Sea como sea, la tarea debía ser mucho más ardua de lo que él preveía, pues un siglo después, cuando me tocó ver el estado de la ciencia en nuestro país, como estudiante primero de ingeniería de Telecomunicación y luego de Matemáticas, no me fue difícil constatar que, si bien el trabajo modernizador estaba al fin encaminado, en algún área incluso muy bien encaminado, era sin embargo una tarea básicamente aún por hacer. Tan precaria situación en época tan reciente podía habernos conducido a la melancolía y al abandono,

[1]Don José fue cuatro veces ministro y recibió el Premio Nobel de Literatura en 1904; pero no perdió nunca la relación con nuestra ciencia, así fue dos veces presidente de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1894-1896 y 1901-1916), fue el primer Presidente de la Real Sociedad Matemática Española, en el período 1911-1916, y también primer Presidente de la Sociedad Española de Física y Química, creada en 1903.

reacciones propias de tantas épocas de nuestro pasado, pero esta vez no fue así. Como ya señalaba don Jesús Sanz Serna, actual Presidente de la Sección de Exactas, en su discurso de recepción, la feliz evolución política y social de nuestro país durante los últimos decenios del siglo XX ha permitido a mi generación participar en un proceso intenso y sorprendente de modernización de la ciencia patria a partir de esos fundamentos de los años 1960-70, en una evolución que quizá no haya tenido parangón en ninguna edad anterior por su éxito y amplitud. Tal privilegio ha marcado nuestras vidas de forma permanente y afortunada y está muy presente en estos momentos en que la Academia me concede tan claro honor. Me siento pues doblemente agradecido, al destino propicio y a la Academia. Creo firmemente que España puede y debe participar en el mundo global de la excelencia científica si se unen la inteligencia, el esfuerzo y el buen gobierno para resolver los problemas del presente. Con el apoyo de tantas personalidades sabias con que cuenta la Academia espero contribuir desde esta casa a tal propósito.

Problemas no faltarán y nunca han faltado. En las difíciles décadas que transcurrieron desde Echegaray a nosotros, dificilísimas a veces, hubo numerosos ejemplos de eminentes personalidades que sobresalieron en la ardua tarea de levantar nuestra ciencia. Viene ante todo a nuestra memoria el nombre venerable del histólogo don Santiago Ramón y Cajal, faro de nuestros científicos. Su investigación fue relevante e internacional, nos dio un Premio Nobel lleno de esperanzas y, conociendo los retos del futuro, escribió un librito llamado "Los tónicos de la voluntad" [RyC1897] que todo científico español puede leer con provecho[2]. La ciencia matemática contó con un profeta incansable de los nuevos modos en don Julio Rey Pastor, educado en Alemania, entonces a la cabeza de la matemática mundial[3]. Precisamente uno de sus discípulos y colaboradores, don Pedro Puig Adam, ocupó la medalla 6 de la sección de Exactas a partir de 1952. En el período del pasado siglo cuando yo era estudiante, sus libros, su ejemplo vital y sus ideas pedagógicas nos fueron muy queridas. Muestra de su modernidad es el tema de su discurso "Matemática y Cibernética".

[2]Ortega y Gasset consideraba estos consejos "luminosos e incomparables".

[3]Empezó su carrera de catedrático en mi ciudad natal, Oviedo. No dudó en exponerse a acerbas críticas al denunciar la mediocridad y el conformismo muy extendidos.

Quiero además mencionar a dos personalidades que ocuparon la medalla número 6 de la Academia en el pasado y representan una tendencia que ha sido de lo más fructífera como base para los éxitos recientes. Me refiero a la conexión de las matemáticas con la ingeniería, representada por don Esteban Terradas e Illa (1933) y don Gregorio Millán Barbany (1975). Habló el primero de "Programa de un curso sobre ecuaciones diferenciales", y aunque dedicó lo mejor de su vida a la ingeniería, fue incansable propulsor de la ciencia teórica e invitó a Albert Einstein a España en 1923[4].

Por su parte, don Gregorio Millán habló de los "Problemas matemáticos de la mecánica de fluidos; estructura de las ondas de choque y combustión", temas clave de la ingeniería que, bajo la influencia de don Amable Liñán, fueron en los últimos decenios favoritos de la investigación matemática que don José Echegaray llamaría pura y nosotros ya no lo hacemos[5]. El estudio matemático de las ecuaciones de los fluidos vive momentos de esplendor en todo el mundo, y en particular en España, y abarca un muy variado arco de intereses tanto teóricos como aplicados.

[4] Una visita que es famosa en la historia de la ciencia en España. Einstein había recibido el Premio Nobel en 1922. La visita comenzó en Barcelona donde le recibió don Esteban y continuó en Madrid donde celebró una sesión en la Real Academia de Ciencias y visitó a don Santiago Ramón y Cajal, a quien describe como "un viejo maravilloso", para finalizar en Zaragoza. Einstein dictaba sus conferencias en alemán por lo que suponemos que el público no entendería mucho, pero dicen que Terradas hablaba un alemán impecable.

[5] Nota.- Siguiendo la costumbre hoy día establecida en el trabajo científico, suprimiré el apelativo de don para las personas en lo que sigue. Usaré las mayúsculas para designar disciplinas científicas cuando me refiera a ellas como una entidad, lo que espero ayude a la claridad. También escribiré Laplaciano con mayúsculas por ser el protagonista. En todo el texto las menciones en inglés, francés o italiano no son traducidas, pues se supone que pueden ser identificadas fácilmente.

1. Matemáticas y ciencia

Lo que sigue es un relato y una reflexión personal sobre las matemáticas que he estudiado y practicado y su papel en el gran edificio de la ciencia. Sé que mis limitaciones no me permitirán ver más allá de los hechos y casos sencillos, pero ya el gran sabio, Isaac Newton, dijo aquello de *"If I have seen farther it is by standing on the shoulders of giants"*[6], y de eso se trata en lo posible.

Sabido es que el mundo moderno que se alumbró en el Renacimiento se asienta en el siglo XVII en las naciones avanzadas de Europa con la consolidación de esa nueva filosofía de la naturaleza que se llamará la Ciencia, la cual ha cambiado completamente el panorama vital a nuestro alrededor en el transcurso de cuatro siglos. Los pilares de la nueva Ciencia serán los experimentos y la teoría, como dejaron descrito respectivamente Francis Bacon (1561-1626) en el "Novum Organum" o "Nuevo Órgano" [Ba1620][7] y Galileo Galilei (1564-1642) en el "Discurso de las dos nuevas ciencias" [Gal1638][8], mientras René Descartes (1586-1650) discurre sobre cuál debe ser el Método, guía clara para llegar a la verdad fiable [Des1637][9]. Galileo, avezado experimentador, reivindica decididamente el papel estelar de las matemáticas en frase que es ya famosa en la historia de la cultura [Gal1623]: "la ciencia está escrita en lenguaje matemático"[10]. Pero lo que al principio era sólo una

[6] En carta a Robert Hooke, 1676.

[7] He aquí una corta descripción de las ideas de Bacon sobre el método científico: *For the purpose of obtaining knowledge of and power over nature, Bacon outlined in this work a new system of logic he believed to be superior to the old ways of syllogism, developing his scientific method, consisting of procedures for isolating the formal cause of a phenomenon (heat, for example) through eliminative induction. For him, the philosopher should proceed through inductive reasoning from fact to axiom to physical law.*

[8] El libro de las Dos Nuevas Ciencias trató por primera vez el movimiento matemáticamente y así abrió el camino para el estudio matemático de la física.

[9] Método que se separa de la lógica aristotélica, que como había ya dicho Bacon, "no sirve para la invención científica".

[10] Frase completa de Galileo: *"La filosofía está escrita en ese gran libro que constantemente está abierto ante nuestros ojos, el Universo, pero no puede entenderse a menos que se aprenda primero a comprender el idioma en que está escrito, a entender sus caracteres. Está escrito en el lenguaje matemático, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas..."*. He aquí la versión en su italiano original: *"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son*

apuesta intelectual se convierte en patente realidad a lo largo de ese siglo estelar, que cuenta con figuras gigantescas como Isaac Newton, junto con René Descartes ya citado, Pierre de Fermat, Gottfried Leibniz y otros.

De Newton y Leibniz heredan las ciencias físico-matemáticas, listo ya para usar, un instrumento tan abstracto en su formulación como eficaz en la práctica, el Cálculo, término que abarca el cálculo diferencial, el cálculo integral, el estudio de límites y series y la resolución de ecuaciones diferenciales. En manos de Newton este instrumento tiene un éxito espectacular e imperecedero en la fundamentación de la Mecánica [New1687], primera ciencia natural sometida al nuevo paradigma. El Cálculo suministra a la Humanidad el instrumento para comprender y describir el cambio o variación, sea temporal o espacial, de las cantidades continuas, un desafío que había escapado al genio de la Antigua Grecia. El sueño de Heráclito[11], "todo fluye", toma de pronto cuerpo en forma cuantitativa. El mundo no volverá a ser el mismo.

Con el siglo XVIII, el Siglo de las Luces, se desarrolla un campo de juego científico complejo, basado en la conjunción de las teorías de las ciencias naturales, cuya última verdad reside en el acuerdo con el experimento, con el formalismo matemático, que sirve de vehículo a la teoría. Esta permite la explicación, el razonamiento deductivo, y con ello la predicción y el control, y se ha de desarrollar dentro de los cánones seculares de la matemática, es decir, como matemática pura. Esta fecundísima dualidad inaugura un paradigma de cálculo diferencial y sus aplicaciones que dura hasta nuestros días.

En el primer período de desarrollo de los nuevos métodos, que abarca el siglo XVIII, se observa la eclosión de nuevas teorías y conceptos matemáticos o físico-matemáticos, que enriquecen el acervo de la matemática en forma hasta entonces insospechada. En el campo de las disciplinas matemáticas puras, el Cálculo Diferencial se expande en forma de Geometría Diferencial, Cálculo de Variaciones, Integración de Ecuaciones Diferenciales, Teoría de Funciones, Teoría de Variable Compleja, ... mientras que en el tablero de juego de la ciencia física los estudios de Mecánica de partículas y Gravita-

triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intendere umanamente parola, senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.

[11] Heráclito de Éfeso, filósofo griego presocrático (535 a. C.- 484 a. C.) que ponía el énfasis de la filosofía en el devenir.

ción à *la Newton* se expanden en forma de Mecánica Celeste, Mecánica de Vibraciones o Mecánica de Fluidos.

Apuntemos una diferencia sustancial entre las teorías físicas y el mundo ideal de las Matemáticas: la Matemática es un reino espiritual de entes ideales permanentes; *mientras la Mecánica de Newton ha sido corregida y superada en el siglo XX (y ese parece ser el estilo de las ciencias físicas), el Cálculo y sus hijos, el Análisis Matemático y las Ecuaciones Diferenciales, se han expandido en forma acelerada pero reposan siempre sobre las mismas bases.*

En un contexto más amplio, asistimos en el Siglo de las Luces a la consolidación del predominio intelectual y económico de las grandes naciones de Europa, de las cuales el destino aciago nos ha tenido por siglos bastante separados a pesar de los esfuerzos de nuestros Ilustrados. Pensemos sólo que en la vecina Francia el filósofo Voltaire trajo las ideas de Newton de Inglaterra, donde estuvo exilado, y las extendió[12]. Y el respeto inmenso por Newton se extiende a otros filósofos como David Hume o Immanuel Kant. Estudiaron a Newton, considerado un gigante incomparable del pensamiento, y creyeron posible extender su fabuloso éxito a todos los campos de la filosofía natural, tarea que ha resultado ser de una dificultad extrema. De hecho, todavía estamos ocupados en ella[13].

Dice José de Echegaray hablando de Newton en su Discurso, con un estilo muy de la época: *"y por fin Newton, geómetra inmortal, creador del cálculo de las fluxiones, que con Leibnitz penetra en los sublimes misterios del infinito, y por no dividir con nadie su nueva gloria, sólo se eleva á los espacios celestes, y de Dios recibe, espíritu semi-divino, el secreto de la atracción de los mundos"*. Pero en las fechas en que esto escribe, dos siglos después del genio, las ideas de Newton eran aún conocidas de pocos, apreciadas de menos, y poco practicadas en España, incluso en las universidades[14].

[12]Los Principia fueron traducidos al francés por su amiga, la Marquesa de Châtelet, con su colaboración, en 1756. Mujer muy notable, la Enciclopedia Británica la describe como "Gabrielle-Émilie Le Tonnelier du Breteuil, Marquise du Ch., French mathematician and physicist who was the mistress of Voltaire". Sólo en el texto del artículo se entera uno de sus méritos en la ciencia.

[13]Y lo estaremos en el futuro, véanse las "Cartas a Isaac Newton", de J. M. Sánchez Ron [SR2013].

[14]Con las raras excepciones que afortunadamente no han faltado.

1.1. Primera expansión y madurez

El desarrollo paralelo de las Matemáticas y de la Física en el siglo XVIII expandió en forma dramática el contenido y alcance de ambas ciencias, y a fines de siglo, o al comienzo del nuevo siglo XIX, una serie de distinguidos autores habían realizado o estaban realizando la tarea de sistematizar los avances en forma de textos fundamentales, muy de acuerdo con un siglo de las luces impregnado por el espíritu de la Enciclopedia[15]. Mientras Leonhard Euler (1707-1783) fundamentó el análisis matemático en textos como "Introductio in analysin infinitorum" (1748), "Institutiones calculi differentialis" (1755) e "Institutionum calculi integralis" (1768-1770), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) nos dejó la "Mécanique analytique" (1811), y su rival Pierre Simon de Laplace (1749-1827) nos legó sus impresionantes "Méchanique céleste" (1799) y la "Théorie analytique des probabilités" (1812).[16] Entrado el nuevo siglo Augustin-Louis Cauchy (1789-1827) asienta rigurosamente el Cálculo en sus cursos de la École Polytechnique de Paris, [Cau1821].

Estos y otros textos recogen un enorme tesoro de nuevos conceptos, nuevos símbolos, nuevos cálculos y múltiples aplicaciones que abrían avenidas al progreso. En aquellos momentos cundía la euforia y Laplace enunció en su Mecánica Celeste el famoso pronunciamiento determinista: *"si se conociera la velocidad y la posición de todas las partículas del Universo en un instante, se podría predecir su pasado y futuro"*. Durante un siglo su afirmación pareció correcta y, por ello, se llegó a la conclusión de que el libre albedrío no tenía espacio en mecánica clásica, ya que todo estaba determinado por el estado del universo en un tiempo anterior[17]. Parece pues que en aquellos momentos ni los mejores científicos pudieron vislumbrar que esto era sólo el comienzo de una gran expansión hacia la complejidad y la innovación, que sucedió en el siglo XIX, afortunado si los hubo no sólo en la ciencia. En efecto, el siglo vio nacer y tomar cuerpo las teorías del electromagnetismo, el

[15]La famosa "Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers", publicada en Francia entre 1751 y 1772 con el matemático Jean le Rond d'Alembert como coeditor.

[16]Notará el lector como el francés iba reemplazando al latín como idioma de la ciencia, pues era el vehículo de la modernidad.

[17]Hubo de llegar Henri Poincaré (1854-1912) para asentar la duda sobre la ilimitada capacidad de predecir en la mecánica celeste.

calor y la termodinámica, la geometría en espacios curvados en dimensiones arbitrarias, la mecánica estadística y la mecánica de los fluidos reales. En el ámbito puramente matemático la innovación es no menos espectacular, en particular en el terreno de la teoría de funciones y las ecuaciones diferenciales que más nos interesarán en lo que sigue.

Esta tendencia expansiva ha continuado hasta nuestros días, a pesar de lo cual la ciencia matemática se ha mantenido obstinadamente unida, quizá porque hay en ella una profunda unidad de fondo, una unidad que el Viejo Sabio del Tao Te Ching[18] describe en forma misteriosa, pues es esencial pero inefable.

1.2. Senderos de la ciencia

En todo caso, el espeso bosque intelectual que es hoy la Ciencia, y dentro de ella la Matemática, no es transitable sin guías expertos. Surgen así de forma paulatina y natural múltiples senderos que llevan desde las fuentes principales a los recorridos más emocionantes. La ciencia es una especie de "jardín de senderos que se bifurcan" de Borges [Bor1941], y cada uno lleva a una sucesión de mundos insospechados[19].

El sendero principal que propongo desarrollar hoy ante Ustedes es el que parte del Operador Laplaciano, digamos hacia 1800, y lleva tras múltiples etapas hasta las investigaciones a las que he dedicado casi cuatro décadas de mi vida. Partiendo de la introducción del Operador Laplaciano como un objeto matemático geométrico clave en la formulación de varios problemas básicos de la física, veremos cómo se transforma en el siglo XIX en objeto preferido en la formulación de un número creciente de problemas de muy diversas ramas de la física y también de la geometría. Su eclosión en el siglo XX es espectacular; proporciona un nexo entre las ecuaciones en derivadas parciales, el análisis funcional, los procesos estocásticos y la geometría, y es pieza clave en el estudio de varias teorías lineales, las cuales adquieren forma clásica. Asimismo abre un contacto continuo con muchas de las ramas

[18]Libro clásico de la filosofía china atribuido a Lao Tzu, según el cual el Principio que puede describirse con palabras no es el Principio Inmutable.

[19]La idea de los universos paralelos fue ya acariciada por Leibniz.

de la física y la ingeniería. En la segunda parte del siglo XX se alcanza la madurez teórica necesaria para tratar los problemas no lineales de las ciencias naturales, así como aquellos que aparecen en el desarrollo del análisis. El Laplaciano se hace hoy presente en todas las disciplinas y ocupa un lugar de incontestado privilegio en la cultura matemática contemporánea.

La obra del autor se ocupa preferentemente de procesos difusivos en el marco no lineal, que serán descritos en sus diversas variantes en la parte final de esta memoria, secciones 5 y 6. El tema señalado es fundamentalmente una rama de las ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) motivadas por los procesos naturales, con profunda influencia del análisis matemático, y también de las ecuaciones diferenciales ordinarias y la geometría. El amplio recorrido que les muestro toca múltiples temas como estimaciones a priori, soluciones generalizadas, semigrupos no lineales, fronteras libres, formación de singularidades - en particular explosión y extinción-, comportamiento asintótico, desigualdades funcionales - en particular las de tipo entrópico -, etc. Terminamos la presentación con una brevísima mención de los temas más actuales, como son los operadores laplacianos fraccionarios, cuya investigación matemática ocupa hoy día a numerosos grupos de investigadores, en particular en España[20].

El lector no acostumbrado a este mundo tendrá quizá la impresión de un cierto esoterismo, de una especie de sueño de Platón, y quizá sea así. Pero es el mundo en que los matemáticos viven felices y atareados, y estas teorías, que podríamos llamar “productos de la imaginación”, están en el núcleo del desarrollo tecnológico que sostiene el curioso mundo en que hoy vivimos. Es la herencia del mundo anunciado por Bacon, Galileo, Descartes y Newton, ellos quizá la imaginaban más o menos así de vasta y sorprendente. Newton dijo de su papel y de la vastedad de lo desconocido: *To myself I seem to have been only like a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me*[21].

[20] Ver sección 6.

[21] ¡Qué gran verdad! Salvada la distancia en el tiempo y en la capacidad intelectual, así se siente uno.

2. El Operador Laplaciano

En el enorme muestrario de la ciencia físico-matemática existen conceptos con una fascinación especial, objetos que capturan el papel estelar un poco donde van y se rodean por doquier de otros conceptos, que son como sus familiares, amigos y herederos[22]. Uno de ellos es el llamado *operador de Laplace*, o *Laplaciano,* que va a ocupar nuestra atención en este relato. Para definirlo en la forma más sencilla lo suponemos actuando sobre una función de tres variables, $u = f(x, y, z)$, que sea dos veces derivable[23]. El operador produce un resultado numérico en cada punto del espacio, que llamaremos provisionalmente $L(u)$ ó Lu, mediante la fórmula

$$L(u) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \tag{2.1}$$

y es evidentemente también función de (x, y, z). Los símbolos u_{xx}, u_{yy} y u_{zz} designan las derivadas parciales segundas de u respecto a las variables coordenadas x, y, z, referidas a unos ejes cartesianos ortogonales en el espacio[24].

Es en principio sorprendente que esta combinación de derivadas parciales, y no otra, fuera llamada a jugar un papel estelar en la nueva ciencia, pero así ha sido y a su sombra vivimos. Recibe su nombre en honor al gran matemático y astrónomo francés Pierre Simon de Laplace que, un siglo después de los hallazgos de Newton y junto con Siméon Denis Poisson (1781-1840), utilizó este operador en sus estudios de mecánica para describir la relación entre una distribución de masas en el espacio $\rho(x, y, z)$ y el potencial gravitatorio que crean, que denotaremos por $U(x, y, z)$. Se tiene entonces que $L(U) = -c\rho$ [25]. Recordemos que Newton había iniciado el tema y que la relación inversa se escribe $U = N(\rho)$, donde N designa a otro operador llamado el potencial newtoniano[26]. La relación entre Laplace y Newton iba a dar grandes frutos.

[22] Se crea en definitiva un mundo, como la Tierra Media de J. R. R. Tolkien.

[23] Precisiones de matemático.

[24] Así, el Laplaciano de la función lineal $u = a + bx + cy + dz$ es cero, el de la función cuadrática $u = x^2 + y^2 + z^2$ es 6, el de la exponencial $u = e^x$ es la misma función.

[25] Memoria de Laplace de 1784, ver obras completas [Lp1798].

[26] La fórmula del potencial newtoniano, que veremos más tarde, no es más que la bien conocida fórmula de Coulomb escrita para una distribución continua de masa.

En las regiones del espacio sin masas el potencial gravitatorio satisface la ecuación $L(U) = 0$, es decir

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \tag{2.2}$$

que es la llamada *ecuación de Laplace*[27], (EL), ecuación reina de la física matemática. Una función que cumple esta ecuación se llama *armónica*. Las funciones armónicas hicieron las delicias de los grandes matemáticos pioneros en el descubrimiento de los nuevos mundos del análisis, como Euler, Laplace, Cauchy, Gauss o Riemann, de quienes tendremos más noticias a lo largo del camino. Son una de las clases de funciones más hermosas de la ciencia y fuente de inspiración desde entonces a hoy.

El símbolo habitual hoy día para el operador de Laplace no es una L, claro está, sino Δ,[28] y una función armónica satisface la ecuación $\Delta u = 0$, que es el inicio de nuestro viaje. El símbolo Δ está presente día a día en nuestros trabajos, andanzas y anhelos, de modo que muchos de nosotros no somos sino "seguidores del Laplaciano". En este mundo creado alrededor de la Δ se desarrolla la Cultura Laplaciana de la que deseo darles noticia.

2.1. Origen geométrico. Lo lineal y lo armónico

Everything should be made as simple as possible, but not simpler
atribuida a Albert Einstein, 1933

Antes de embarcarnos en el largo viaje, demos una ojeada a los humildes orígenes geométricos del Laplaciano para asentar sus bases, pues el complejísimo edificio teórico de las ciencias físico-matemáticas se asienta en la total solidez de los fundamentos originarios, que son mecánicos o geométricos.

Gracias a Descartes, la mecánica se representa al modo geométrico, y todo reposa a fin de cuentas en el examen minucioso de la "geometría del cambio". Pedimos perdón al lector por adentrarnos en un tramo de detalles, pero la atención a los detalles y la escrupulosa "administración de las variables" son una de las características de la ciencia matemática. El lector avezado

[27] La denominación "Laplaciano" parece haber sido usada por primera vez en 1813.
[28] Más tarde veremos el símbolo alternativo ∇^2, quizá más esotérico.

encontrará lo que sigue en esta sección de muy fácil lectura y verá asomar algunas de las vueltas que tomará el camino; otros querrán saltarse esta sección, al menos en primera lectura.

Todos sabemos que el objeto clave en la descripción del cambio es la derivada, que para una función f de una variable real x se calcula como

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}\,, \tag{2.3}$$

lo que plantea nada más empezar la ardua dificultad de qué significa tomar el límite de cantidades evanescentes como los incrementos Δf y Δx.[29] Newton escribió ese límite para una función mecánica $x = x(t)$ con la notación $\dot{x}$, que no fue muy feliz; Leibniz tomó una ruta más sugerente e introdujo la notación

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \frac{dy}{dx}$$

con unos fantasmagóricos dy y dx que aún hoy atormentan a generaciones de estudiantes en todo el mundo, pero que son fuente de inspiración y vía de descubrimiento, pues podemos poner $dy = f'(x)dx$, integrar en la forma $y = \int f'(x)dx + c$, etc.

Sabido es que la feliz conjunción de la Geometría y la Mecánica[30] dio lugar al Cálculo. Este hubo de atender solícitamente a ambos padres, con sus puntos de vista tan distintos[31]. En la visión mecánica la derivada aparece en el cálculo de velocidades, al dividir el espacio por el tiempo y pasar al límite. Lo que en geometría es el paso de secante a tangente es en mecánica el paso de velocidad media a instantánea, concepto de imposible comprensión para quien no sepa geometría[32] y maneje con soltura la representación cartesiana de los movimientos, en lo que los matemáticos del siglo llamaban curvas mecánicas. La lección que recordamos es que en el reino de la Geometría la situación era mucho más clara que en la Mecánica (y afortunadamente esos grandes mecánicos eran al tiempo grandes geómetras y sabían bien la

[29] Este antiguo uso de la Delta para indicar incremento y no Laplaciano es para nosotros horrendo y no volverá a ser practicado en estas páginas.

[30] Y la extraordinaria benevolencia de los dioses en aquel final del siglo XVII.

[31] Desde su comienzo el Cálculo ha debido conjugar diversos puntos de vista, una marca de la casa que lo ha hecho tan útil.

[32] Recordemos la frase de Galileo.

equivalencia formal de ambos modos de pensar).

Señalemos por último que la idea geométrica de que los puntos de máximo o mínimo relativo de una curva $y = f(x)$ son puntos horizontales, en el sentido de que $f'(x) = 0$ en ellos, ha admitido enormes generalizaciones para obtener máximos y mínimos de las más diversas funciones que representan dependencias entre variables de la ciencia. Variables como presiones, energías, tiempos de espera o costes. Entramos así en el Cálculo de Variaciones, una de las ramas más activas y flexibles de las matemáticas, que no es nuestro sendero principal pero aparecerá una y otra vez.

Derivadas segundas, linealización, errores y convexidad. El lector observará que, si restringimos las variables de espacio de tres a una, el Operador Laplaciano deviene derivada segunda. Veamos de qué estamos hablando en este caso. Un paso decisivo en el cálculo de las propiedades de las curvas lo damos usando la fórmula de Taylor[33]. En particular, permite estimar el error de la curva $y = f(x)$ respecto a la tangente $T(x)$ trazada en un punto $(x = a, y = f(a))$, cuya fórmula precisa es $T(x; f, a) = f(a) + f'(a)(x - a)$. En efecto, Taylor nos dice que[34]

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(a)(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3) \\ &= T(x; f, a) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - a)^2 + O((x - a)^3), \end{aligned}$$

donde la notación de Landau $O(h^3)$ indica términos que son como máximo proporcionales a h^3 para valores pequeños de h, términos que van a ser despreciables según la jerga del oficio. Ello indica que, para valores pequeños de $h = x - a$, el *error de linealización* ó *desviación* es aproximadamente proporcional a la derivada segunda; además, existe en la fórmula un factor extra $h^2/2$. Más precisamente, si introducimos la fórmula del error:

$$e(h; f, a) = f(a + h) - T(a + h; f, a)\,,$$

como se ilustra en la figura:

[33]En honor a Brooke Taylor (1685-1731), amigo de Newton y presidente de la Royal

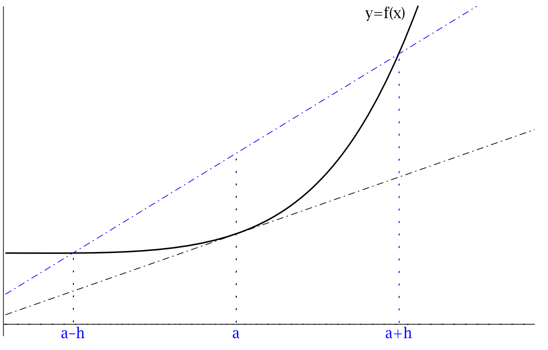

Figura 1: Los errores e y E entre la curva y su linealización

la fórmula de Taylor vista implica que

$$f''(a) = \frac{2}{h^2} e(h; f, a) + O(h) \sim \frac{2}{h^2} e(h; f, a).$$

Esta relación entre el error de linealización y la derivada segunda es aún más útil cuando se utiliza el error simetrizado

$$E(h; f, a) = \frac{1}{2}(e(h; f, a) + e(-h; f, a)) = \frac{1}{2}(f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)),$$

que no es otra cosa que la diferencia segunda de la función f y fue ya usada por Newton. Entonces

$$f''(a) = \frac{2}{h^2} E(h; f, a) + O(h) \sim \frac{2}{h^2} E(h; f, a). \tag{2.4}$$

Aquellas curvas planas que yacen siempre por encima de las tangentes trazadas en cada uno de sus puntos se dicen convexas y las que yacen por debajo se llaman cóncavas[35]. Vemos pues que las líneas rectas tienen segunda derivada cero, las curvas convexas tienen $f'' \geq 0$ y las cóncavas $f'' \leq 0$. Y la implicación contraria es asimismo cierta. La derivada segunda es pues una especie de centinela de la no linealidad, señalando con la exactitud que es propia de nuestra ciencia las partes lineales, cóncavas y convexas.

Hay aún otra manera útil de ver este aspecto geométrico: las curvas convexas

Society *(The Royal Society of London for Improving Natural Knowledge)*.

[34]Bajo la hipótesis de que f sea tres veces derivable, por ejemplo.

[35]Recuerdo los años de mi niñez cuando en castellano se decía exactamente al revés.

son aquellas que se caracterizan por la siguiente “propiedad de la secante”: si una recta r interseca a una curva plana convexa γ en dos puntos P_1 y P_2 de abscisas x_1 y x_2, entonces γ está situada por debajo de r en el intervalo $I = (a, b)$. Cambiando el signo, eso quiere decir que para estar situada por encima se necesita que la curva $y = f(x)$ satisfaga $f''(x) \leq 0$ en $I = (a, b)$. La oposición «estar arriba - derivada segunda negativa» es el primer síntoma de que *el Laplaciano es un objeto negativo* en algún sentido, idea de muy profundas consecuencias en lo que sigue, donde la dimensión dos se sustituirá por dimensión arbitraria o infinita.

Derivadas segundas en mecánica. Con Newton aparece la derivada segunda en la cinemática de una partícula como aceleración, $a = x''(t)$, jugando un papel estelar en una de las fórmulas más famosas de la ciencia contenida en los *Principia* de Newton, $F = m\,a$. Y entonces el lector inquisidor se dirá ¿en qué sentido un movimiento acelerado es convexo? Lo es, en el sentido de la representación cartesiana, y evidentemente los movimientos no acelerados son en ese sentido rectilíneos y los uniformemente acelerados parabólicos, notable mezcla del lenguaje de la Geometría y la Mecánica a la que nos hemos acostumbrado y ya no causa asombro. Es el comienzo de una saga mecánico-geométrica que nos llevará con el tiempo a la Relatividad.

Geometría en dos dimensiones. Si queremos pasar de la humilde consideración en una dimensión de espacio al análisis de cuestiones semejantes en dimensiones de espacio dos y tres, como nos pide la física, o a un número arbitrario n de dimensiones[36], como se hace en matemáticas desde el siglo XIX, hemos de hacer un esfuerzo notable. Para empezar hemos de cambiar los conceptos base y también la simbología (las notaciones). En dimensión $n = 2$ hablamos de superficies $z = f(x, y)$ y la fórmula del plano tangente $z = T(x, y)$ a esa superficie en el punto (a, b) es

$$T(x, y; f, a, b) = A + B(x - a) + C(y - b)$$

con $A = f(a, b)$, $B = f_x(a, b)$ y $C = f_y(a, b)$. Todo tiene un aire parecido pero más complicado. La derivada $f'(a)$ se ve sustituida por las derivadas

[36]Nos referimos al número de variables independientes, si se suma la variable dependiente z serán en total $n + 1$.

parciales f_x y f_y calculadas en el punto (a, b). Esto nos da ocasión para comentar una de las características fundamentales en el desarrollo del Nuevo Cálculo, la lucha continua y a veces agotadora por encontrar la expresión simbólica que permita "ver mejor en el oscuro laberinto". Esta obsesión es una herencia, afortunada creo yo, de la tradición secular del Álgebra y ha sido tan fructífera en general como desesperante en algunos casos. En el caso de las derivadas ha pervivido hasta nuestros días una multiplicidad de notaciones que a veces confunden al lector, pero que no hemos podido superar. Así se usan indistintamente las expresiones

$$f_x = f'_x = f_x(a, b) = \partial_x f = \partial_x f(P) = \frac{\partial f}{\partial x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{a,b} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P = D_1 f(P)$$

donde se ha puesto $P = (a, b)$. El lector avezado conocerá o se imaginará alguna variante más. Sustitúyase f por z y tendremos $z_x, z_x(a, b), \ldots$

Enfrentémonos ahora con los errores de linealización. Necesitamos la fórmula de Taylor en dos variables que no escribiremos por brevedad[37]. Si escribimos $x = a + h$, $y = b + k$, y definimos $e(h, k; f, a, b) = f(x, y) - T(x, y; f, a, b)$, entonces la fórmula de Taylor da

$$e(h, k; f, a, b) = \frac{1}{2}\left(f_{xx}(P)\, h^2 + 2f_{xy}(P)\, hk + f_{yy}(P)\, k^2\right) + O(r^3)\,,$$

donde $r = (h^2 + k^2)^{1/2}$ es la distancia euclídea de (a, b) a (x, y). Esto es correcto, pero a la hora de sacar conclusiones tenemos un exceso de información, pues en el plano los incrementos se pueden tomar en infinitas direcciones: $h = r\cos(\alpha)$, $k = r\sin(\alpha)$, con α y r variables. Entonces se nos ocurre una idea de gran eficacia para simplificar la muestra de resultados, a saber, tomar la media[38]. Tomamos pues una distancia fija $r > 0$ y hacemos el promedio de los errores $e(h, k; f, a, b)$ para diversos ángulos α suponiendo distribución uniforme de probabilidad. Si llamamos M_r a esta operación de media, fácilmente

[37] Leibniz se encargó de encontrar la expresión válida para toda dimensión de espacio.

[38] Una idea que está en la base del Cálculo de Probabilidades, que curiosamente nace por entonces aunque va a llevar muchos años de vida independiente; sólo tras la obra de Laplace, Maxwell y compañía se hace presente el Análisis en el mundo de lo probable.

se ve que

$$M_r e(f,a,b) = \frac{1}{2}\big(f_{xx}(P)\,M_r(h^2) + 2f_{xy}(P)\,M_r(hk) + f_{yy}(P)\,M_r(k^2)\big) + O(r^3)\,,$$

Además, un sencillo argumento muestra que $M_r(hk) = 0$, mientras que $M_r(h^2) = M_r(k^2) = r^2/2$, con lo que

$$M_r e(f,P) = \frac{r^2}{4}\,(f_{xx}(P) + f_{yy}(P)) + O(r^3)$$

y ahí nos aparece el Laplaciano de f como medida puntual del promedio del error de linealización. Dado que a estas alturas ya somos conscientes de la importancia de la notación, escribimos $f_{xx} + f_{yy} = \Delta f$ y obtenemos la conclusión cuantitativa:

$$(\Delta f)(P) = \frac{4}{r^2} M_r e(f,P) + O(r) \sim \frac{4}{r^2} M_r e(f,P)\,. \tag{2.5}$$

Podemos ahora comparar esta fórmula con la obtenida en una dimensión, (2.4). En el paso de una a dos dimensiones hemos obtenido una información clara y compacta, comparable en concisión y elegancia a la obtenida en las condiciones más fáciles de $n = 1$, a condición de tomar promedios uniformes en la circunferencia $C_r(P)$ de puntos (x,y) situados a distancia r del punto base $P = (a,b)$. Hablando más en general, nos queda la idea de que el Laplaciano es una especie de error o desviación media respecto a un estado ideal linealizado. Está idea volverá a aparecer como desviación con respecto a un estado de equilibrio en el capítulo 3.

Uno se puede preguntar, ¿es la información recabada relevante o nos hemos ido por las ramas? El tiempo dirá que hemos acertado. Como primera aproximación al problema, nos interrogamos sobre si las funciones bidimensionales con valor del Laplaciano igual a cero (armónicas) representan realmente superficies planas. La respuesta es obviamente no, basta recordar sencillos ejemplos bien conocidos como

$$z = x^2 - y^2, \quad z = xy, \quad z = x^3 - 3xy^2, \quad \ldots$$

Sin embargo, Euler ya descubrió que las funciones armónicas de dos variables son una clase privilegiada por su belleza matemática y pronto las aplicó a los problemas de la física. Resumiendo: una superficie armónica no es tan simple como una plana, es sólo plana "en media puntual", pero tiene la justa complejidad para ser eficaz en la física matemática. Hablamos de complejidad, y en efecto nada iba a ser fácil en el largo futuro.

Geometría en tres o más dimensiones. Mientras que el paso de una dimensión a dos implica la introducción de muy novedosos cambios en las fórmulas y los argumentos, el paso de $n = 2$ a $n = 3$ y de ahí a cualquier dimensión superior es sólo un problema de notación, lo que no quiere decir que fuera trivial en su día, aunque hoy nos lo parezca. Una buena notación es un regalo de los dioses que no siempre agradecemos como se debe, pues olvidamos el esfuerzo de obtenerla y la confusión y frecuentes frustraciones del proceso.

En este caso designamos a un punto genérico del espacio euclídeo de n dimensiones $\mathbb{E}_n$ por $X = (x_1, \ldots, x_n)$ y al punto fijo por $P = (a_1, \ldots, a_n)$ y entonces el incremento es $H = X - P = (h_1, \ldots, h_n)$; definimos además el Laplaciano n-dimensional de la función $f = f(X)$ mediante

$$\Delta f = f_{x_1x_1} + \ldots + f_{x_nx_n} = \sum_1^n \partial^2_{x_ix_i} f, \tag{2.6}$$

que son escrituras equivalentes para los mismos objetos. Si se define el error de linealización para funciones en $\mathbb{E}_n$ en la forma que no ofrece dudas, se puede razonar como antes para llegar a las fórmulas

$$(\Delta f)(P) = \frac{2n}{r^2} M_r e(f, P) + O(r), \quad (\Delta f)(P) = \lim_{r \to 0} \frac{2n}{r^2} M_r e(f, P)\,. \tag{2.7}$$

Ahora la media de errores, $M_r e$, se toma sobre la superficie esférica de puntos X que están a distancia r de P con $r = |H| = (h_1^2 + \ldots + h_n^2)^{1/2}$.

De nuevo se definen funciones armónicas en $\mathbb{E}_n$, para n entero mayor que 1, como aquellas de Laplaciano nulo. Distan mucho de ser lineales pero su teoría y aplicaciones son fascinantes. Y nos interesa también qué pasa cuando el Laplaciano no da exactamente cero. He aquí una propiedad importante: si se corta una hipersuperficie $z = f(X)$ por un plano $z = T(X)$ y la intersección de ambas es un conjunto Γ que se proyecta como el borde de un dominio Ω del espacio $\mathbb{E}_n$, entonces $z = f(X)$ está por debajo de $z = T(X)$ en todo $X \in \Omega$ si $\Delta f \geq 0$ en Ω. Eso motiva que *las funciones con Laplaciano positivo,* $\Delta f \geq 0$*, se llamen subarmónicas*, y no superarmónicas. Las últimas son aquellas en que $\Delta f \leq 0$.

3. Caminos de la Física y las Matemáticas en el siglo XIX. La magia de las ecuaciones

The long and winding path that leads to your heart
Lennon-McCartney, 1970

Nada en la exposición anterior nos prepara para un posible papel del Laplaciano en los diversos escenarios de la naciente Física. Y sin embargo así iba a ser. El siglo XIX, grandioso en casi todos los aspectos del pensamiento y las artes, nos iba a deparar grandes sorpresas laplacianas.

3.1. Vuelta al campo gravitatorio

Como quedó dicho, el protagonismo del Operador Laplaciano parece haber empezado con Pierre Simon de Laplace, quien fue capaz de describir que el potencial gravitatorio $U(x)$ es una función armónica que obedece a la *Ecuación de Laplace* (*EL* para abreviar), es decir, $\Delta U = 0$.[39] Y Siméon Denis Poisson señaló en 1812 que la ecuación no se verifica allí donde las masas están localizadas y estableció la relación entre una distribución continua de masa con densidad $\rho(x)$ en $\mathbb{E}_3$, y el potencial gravitatorio asociado $U(x)$ mediante la ecuación

$$\Delta U = -\rho, \tag{3.1}$$

llamada hoy día *Ecuación de Poisson* (EP), llamada también Ecuación de Laplace-Poisson. Observe el lector el signo cambiado: dado que $\rho \geq 0$ si intentamos tener potenciales positivos la teoría matemática lleva al signo menos, lo que confirma la sospecha que había surgido antes con las funciones subarmónicas. En este caso U será super-armónica.

[39]Justo es reconocer las enormes contribuciones a la formulación matemática de la mecánica de Joseph-Louis Lagrange, a quien Laplace debe mucho.

3.2. El campo eléctrico

Pronto la ecuación de Poisson amplia su radio de acción a las nuevas fronteras de las ciencias físicas, como son la teoría de la electricidad primero y del magnetismo después. Los estudios experimentales de Coulomb[40] y las matemáticas de Gauss[41] llevaron a establecer la relación entre una distribución ρ de cargas eléctricas situadas en el espacio $\mathbb{E}_3$ y el campo eléctrico $\mathbf{E}$ que llena este espacio. La relación es de tipo diferencial, más precisamente $\operatorname{div}\mathbf{E} = c\,\rho$. Como el campo admite un potencial de forma que $\mathbf{E} = \operatorname{grad} U$, se llega a la fórmula final

$$c\rho = -\operatorname{div}\operatorname{grad} U = -\Delta U\,, \tag{3.2}$$

que es de nuevo la ecuación de Poisson, salvo por la constante $c > 0$, que para el matemático no es esencial[42]. El sorprendente paralelismo entre gravitación y electrostática al nivel del modelo matemático es una especie de milagro, como un regalo de la Providencia para animarnos en la ardua búsqueda[43].

Otros operadores. Observe el lector la aparición de dos operadores diferenciales, a saber el *gradiente* de una función, $\operatorname{grad} U = (U_x, U_y, U_z)$, que es un vector, y la *divergencia de un vector* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, que viene dada por $\operatorname{div}\mathbf{v} = \partial_x v_1 + \partial_x v_2 + \partial_x v_3$, y es un escalar. Estos operadores parecen unos entes extraños, surgidos de no se sabe dónde, pero nos acompañarán en adelante a donde vayamos. Combinados ambos operadores en el orden justo producen como resultado el Laplaciano, es decir lo factorizan[44]. La relación

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} = \Delta$$

[40] Charles Augustin de Coulomb (1736-1806). Propuso la ley que lleva su nombre en 1785.

[41] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), príncipe de las matemáticas, uno de los mayores matemáticos de la Historia, cuyo rango de excelencia llegaba desde la teoría de números a la geodesia.

[42] En Física se suele escribir la constante c como $1/\varepsilon$, cosa que a los matemáticos gusta poco.

[43] Con una diferencia notable, la variable ρ es en un caso la masa gravitacional que es siempre positiva, en otro la carga eléctrica que viene con dos signos. Misterios básicos aún no resueltos.

[44] El sencillo cálculo ya era conocido de Euler, que empleó ambos operadores en sus estudios físicos.

es tan sencilla como maravillosa, y estos tres amigos ya no se separarán hasta nuestros días y se irán rodeando de la más variopinta familia.

3.3. Problemas matemáticos, PBP

Llega ahora el momento en que los matemáticos se plantean una cuestión central, la de abordar la catalogación y resolución de estos problemas en forma lógica, diáfana, coherente y eficaz. Surgen así formas y modos que se harán *canónicos* en la matemática-física, el primero de ellos es el siguiente:

Problema de existencia: "Dado un dominio Ω del espacio n-dimensional $\mathbb{E}_n$ y dada una función $\rho(x)$ definida para $x \in \Omega$, bajo qué condiciones sobre los datos Ω y ρ, y con qué datos adicionales más, se puede obtener una función U dos veces derivable en Ω y tal que la ecuación de Poisson se verifique para todo $x \in \Omega$".

En otras palabras, dada la densidad de masa hallar el potencial gravitatorio. El físico insistirá en que pongamos $n = 3$, o en todo caso $n = 2$, pero el matemático tendrá tendencia a no hacerlo y dejar una n general. El físico insistirá al principio en no olvidar los conceptos prácticos de masa y potencial gravitatorio, el matemático tendrá tendencia a olvidarlo, lo cual no es mala idea en virtud de las múltiples aplicaciones en que los mismos símbolos, cálculos y resultados se aplicarán a entes muy diversos[45].

A lo largo del siglo XIX se madura la forma en que se plantea la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales que van apareciendo, reflexión que cristaliza en la definición de Hadamard[46] de *Problema Bien Propuesto*, PBP, [Had1902], como aquel en que se especifica la ecuación o sistema y se le acompaña de los datos adicionales necesarios para tener al final del proceso matemático las siguientes tres propiedades: 1) existencia de alguna solución; 2) la unicidad de la solución; 3) la solución depende de manera continua de las condiciones iniciales en algún tipo de medida (una distancia, norma o topología).

[45] Ahí reside una de las mejores bazas de las matemáticas como ayudante y guía de las ciencias hoy día, su "transportabilidad".

[46] Jacques Hadamard (1865-1963), profesor en Paris, famoso también por el teorema de los números primos y por sus ensayos sobre la creatividad matemática.

En el caso de la Ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ planteada en un dominio acotado del espacio, estos datos adicionales requeridos se llaman *condiciones de contorno*[47] y las dos opciones más clásicas llevan los nombres de Dirichlet[48] y de Neumann[49]. La primera consiste en dar por sabido el valor del potencial en el borde del dominio, $u(x) = f(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$ en notación de hoy día. En el segundo tipo se da el valor de la derivada de u en dirección normal, $\partial_n u(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$.[50] La razón por la que estas elecciones iban a convertirse en estándares de la matemática, la física y el cálculo científico puede parecer de nuevo un misterio, pero dos siglos de desarrollo las confirman.

3.3.1. Núcleos de Green y Poisson

Para atacar la cuestión del PBP para la (EL) o la (EP) la demostración de existencia de una solución era evidente para los físicos por razones de su aplicación (pues para la mayoría de ellos el mundo real existe y es único, por lo que he visto). Pero la matemática pura es una realidad autocontenida que pide justificación última de sus asertos sólo a sí misma. Y hallar una fórmula que expresara u en función de ρ y del dominio Ω y los datos f o g no les fue fácil. Cuando el espacio no tiene límite, es decir en todo $\mathbb{E}_n$, la solución es una fórmula clásica, el potencial Newtoniano

$$U(x) = \int_{\mathbb{E}_n} N(x-y)\rho(y)\,dy, \qquad N(y) = c\,|y|^{2-n}\,, \tag{3.3}$$

válida no sólo en la dimensión física $n = 3$ (Ley de Coulomb) sino además en todas las dimensiones superiores[51],[52].

[47] Es decir, prescritas en el borde $\partial\Omega$.

[48] Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático alemán de variados intereses al que veremos más tarde proponiendo minimizar una energía de gran relevancia y resolviendo la sumación de series de Fourier.

[49] Carl Neumann, matemático alemán (1832-1925).

[50] Lo que se interpreta como que el flujo de u a través del borde es conocido.

[51] Según la notación moderna, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y $dy = dy_1, \ldots, dy_n$, pues es una integral múltiple.

[52] Hay una notable desviación en forma de corrección logarítmica en la fórmula válida en dimensión dos, $N(y) = (1/2\pi)\log(1/|y|)$, con profundas consecuencias en el estudio del electromagnetismo en el plano. Sin la corrección la forma sería demasiado fácil para ser verdad, *El Señor es sutil*, como dijo Einstein.

En el caso de trabajar en un dominio espacial limitado, difíciles investigaciones llevan a la fórmula de representación

$$U(x) = \int_{\Omega} G(x-y)\rho(y)\,dy + \int_{\partial\Omega} P(x-y)\rho(y)\,dS(y) \tag{3.4}$$

donde G y P son respectivamente los potenciales de Green y Poisson[53].[54]

El cálculo de los potenciales G y P ocupó a las mejores mentes durante años, pero sólo pudo ser realizado en forma explícita para dominios sencillos, como la esfera $B_r(x)$, lo cual fue una fuente de duro trabajo y de frustración. De esa forma se abrió la puerta a nuevos planteamientos, más abstractos, que permitieran superar el problema de no tener fórmulas, viendo el problema de existencia de una solución en forma menos algebraica pero más operativa.

Sucede además otra dificultad: tales potenciales son funciones continuas y derivables para casi todos los valores de las variables, pero tienen singularidades en ciertos puntos. Ello lleva a los matemáticos al problema de la validez de estas "integrales ingenuas". El concepto de integración fue entonces profundamente examinado, fundamentado y expandido por dos grandes genios, Cauchy, a quien ya conocemos, y Riemann[55], que hace así su entrada en el relato. En cuanto al mundo de las "integrales singulares", no podía imaginarse el juego que iban a dar en el siglo XX en manos de Antoni Zygmund (1900-1992), Alberto Calderón[56] (1920-1998) y su escuela.

3.4. Principio del mínimo de Dirichlet y Laplaciano

Peter L. Dirichlet estudió la existencia de soluciones para la ecuación de Poisson, $-\Delta u = f$, cuando los datos adicionales en el borde son del tipo

[53]De nuevo según la notación actual $dy = dy_1, \dots, dy_n$ mientras que $dS(y)$ indica integral de superficie, las matemáticas se complican pero todo es ya material clásico en nuestro oficio.

[54]George Green (1793-1841) fue un físico-matemático británico que escribió un famoso ensayo sobre la aplicación del análisis matemático al electromagnetismo [Green1828], del que nos ocuparemos pronto.

[55]Georg Bernhard Riemann (1826-1866), genio polifacético a quien recordamos en las geometrías riemannianas en que se apoyó Einstein; es universalmente conocido hoy día por la Conjetura de Riemann.

[56]Matemático argentino, profesor en Chicago, uno de los primeros matemáticos de nombre castellano y fama mundial.

$u = g$, problema que hoy se conoce como problema de Dirichlet. Para probar la existencia introdujo un principio de minimización que estaba destinado a tener larga y famosa historia. En efecto, se considera la hoy llamada *energía de Dirichlet:*

$$\mathcal{E}[v(x)] = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla v|^2 - vf\right) \mathrm{d}x \tag{3.5}$$

en un dominio $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ para funciones derivables (en Ω y su borde) que satisfagan la condición en el borde requerida $u = g$ en $\partial\Omega$. Un cálculo sencillo prueba que los mínimos $u(x)$ de esa energía satisfacen la ecuación de Laplace-Poisson, $\Delta u + f = 0$. Ese es pues un teorema de existencia, que el gran Riemann poco después llamó Principio de Dirichlet y utilizó con gran maestría[57].

Reinterpretando el Laplaciano. Esta idea formidable emparenta al Laplaciano con una rama respetable de la Matemática Aplicada como es el Cálculo de Variaciones y le da un sentido nuevo que merece una reflexión. En efecto, concluimos de este análisis que las funciones armónicas (de Laplaciano nulo) minimizan una energía intrínseca[58], lo que según la Mecánica ya establecida corresponde a un estado de equilibrio. Por otro lado, si el Laplaciano de una función no es cero, debe haber alguna desviación de la uniformidad o equilibrio, y siguiendo la idea base de que *la Naturaleza tiende a actuar para restaurar el equilibrio*, podemos pensar en una fuerza que restaure el equilibrio tras un proceso evolutivo. Este es el nuevo papel del Laplaciano, es el árbitro matemático del equilibrio de muchos medios físicos continuos[59].

[57] La historia no dejó de tener problemas de rigor pues el hecho de que exista un mínimo que sea una función derivable no está garantizado, como señaló Karl Weierstrass. Sólo a final del siglo Henri Poincaré (1854-1912) y David Hilbert (1862-1943) dieron una explicación suficiente, y para ello se introdujo una maquinaria funcional nueva y poderosa, que hoy llamamos Espacios de Hilbert y que jugarán un papel tan importante en la física y las matemáticas del siglo XX.

[58] En aplicaciones futuras esta energía será eléctrica, potencial elástica o mecano-cuántico cinética.

[59] Con la ayuda inestimable de algunas ecuaciones relacionadas, sus parientes.

3.5. La teoría de ondas

En nuestro siguiente escenario aparece el Operador Laplaciano en un contexto de evolución temporal, la ecuación de ondas. Dado que ya suponemos al lector poseído por el gusto de las fórmulas (al menos las muy famosas), se trata de la ecuación

$$u_{tt} = c^2 \Delta u\,, \tag{3.6}$$

donde $u = u(x, y, z, t)$ es una función escalar que describe una propiedad ondulatoria, u_{tt} es la derivada segunda respecto a la variable temporal, una aceleración pues, y c es la velocidad de propagación de las ondas[60]. Esta ecuación diferencial[61] aparece por doquier en la descripción de las ondas que se producen en diversos aspectos de la física, como son las vibraciones mecánicas de tipo elástico, las ondas sonoras, ondas de luz y las ondas de agua, en campos como la elasticidad, la acústica, la dinámica de fluidos y el electromagnetismo. El primer ejemplo de aparición de la ecuación que se menciona ocurrió en el estudio de las vibraciones transversales de una cuerda vibrante (de un instrumento musical por ejemplo), realizado por Jean d'Alembert[62] [Da1747], y fue acompañado de los estudios de Leonhard Euler, Daniel Bernoulli, y Joseph-Louis Lagrange, una ilustre compañía.

Añadamos una pincelada interesante. En su joven edad aún en Turín (1758), Lagrange hace un estudio completo de la propagación del sonido y deduce la ecuación diferencial del movimiento, vuelve a los estudios sobre la ecuación de vibración de la cuerda y obtiene la forma de las ondas de vibración sinusoidal, fórmula básica de la ciencia moderna, que fue primero una revolución en las matemáticas y está hoy en todas partes. La famosa fórmula es

$$u = A \sin(mx) \sin(kt)\,, \tag{3.7}$$

[60]Recordemos además que el Operador Laplaciano contiene derivadas segundas en las variables espaciales. Para el matemático que las variables espaciales sean tres o más o menos es indiferente, en las aplicaciones no lo es.

[61]Técnicamente, ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden.

[62]Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), uno de los primeros maestros del Cálculo en Francia, cuya fama llega al mundo cultural por su participación con Denis Diderot en la redacción de la famosa Enciclopedia ya citada. Había pues en aquellos tiempos felices matemáticos de gran talento preocupados por la sociedad, el arte y la cultura.

con un coeficiente $A > 0$ de amplitud que es arbitrario, y coeficientes m y k sujetos a reglas precisas y un tanto crípticas. Casi dos siglos más tarde, la Mecánica Cuántica nos asombrará con la propuesta de que los electrones son en realidad unas ondas que vibran de acuerdo con esta regla y otras parecidas[63], manejados por una ecuación diferencial laplaciana amiga de la presente[64].

La ecuación de ondas, que abreviamos (EO), es una de las ecuaciones básicas en todos los estudios de ecuaciones diferenciales y matemática aplicada en todo el mundo, y el modelo de la cuerda vibrante es el modelo usado para introducir la teoría matemática de las vibraciones. ¡El Laplaciano no podía empezar con mejor pie en el mundo evolutivo!

3.6. La teoría del calor

El segundo modelo básico de evolución laplaciana es la llamada Ecuación del Calor, (EC), de fórmula

$$u_t = k\Delta u.^{65} \tag{3.8}$$

Con esto hemos sido introducidos a las tres ecuaciones en derivadas parciales más clásicas de física matemática, que son ecuaciones lineales de segundo orden regidas por el Operador Laplaciano. Estas ecuaciones forman la base de cualquier introducción elemental al área de las EDPs.

El éxito de la descripción del proceso de propagación térmica, descrita por la ecuación (3.8) donde u es la temperatura, ha conocido una popularidad permanente desde que se publicó la *Théorie Analytique de la Chaleur* de Fourier [Fou1822],[66] Entre las aplicaciones en que la misma ecuación sirve

[63] En dimensión $n > 1$, existen otras fantásticas fórmulas de vibración multidimensional.

[64] La Ecuación de Schrödinger, que veremos en su momento.

[65] La constante de conductividad térmica, $k > 0$, es irrelevante para el matemático y la supondremos igual a 1.

[66] Joseph Fourier (1768-1830). La publicación fue azarosa pues influyentes matemáticos como Laplace se opusieron a ella durante años por la falta de suficiente rigor matemático del texto. Sin embargo el tema terminaría siendo uno de los más productivos de todas las matemáticas puras y aplicadas desde entonces hasta el momento presente, todo un motivo de reflexión.

de modelo matemático están los procesos de difusión de materia o energía formulados por Adolf Fick en 1855 (en que u es una concentración), procesos de difusión de poblaciones y un largo etc. Una vez formulada, la (EC) ha motivado el continuo crecimiento de las matemáticas (digamos puras) en forma de análisis de Fourier, teoría espectral, teoría de conjuntos, teoría de operadores, y así sucesivamente. Más tarde, ha contribuido al desarrollo de la teoría de la medida y la probabilidad, entre otros temas avanzados.

Señalemos aquí algunos hitos importantes en el enorme muestrario de ejemplos, conceptos y métodos que la ecuación del calor ha legado a la Cultura Laplaciana. El primero es el ejemplo de la función Gaussiana,

$$G(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-x^2/4t}, \tag{3.9}$$

donde para empezar el lector puede poner $t = 1$ y descubrir la distribución normal de probabilidad[67]. ¿Qué pinta tan distinguida función en la teoría del calor? Es precisamente el núcleo integral que permite calcular la solución $u(x,t)$ (distribución de temperatura tras un cierto tiempo) si se conoce la distribución inicial, $u(x,0) = f(x)$, y se supone que trabajamos en todo el espacio $\mathbb{E}_n$[68]. En efecto, la solución viene dada por

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{E}_n} G(x-y,t) f(y)\, dy. \tag{3.10}$$

Esta fórmula está en el origen de la teoría de operadores integrales, pero es también la fórmula generatriz del proceso de Wiener, modelo matemático del movimiento browniano[69]. La sorprendente conexión del movimiento browniano con la ecuación del calor fue investigada a fondo en el siglo XX por A. N. Kolmogórov[70].

[67] La famosa "Campana de Gauss", una de las curvas más influyentes en el mundo moderno, que todo estudiante de ciencias, ingeniería, economía o sociología debe saber.

[68] Y pedimos que la función f sea integrable o cualquier otra condición que haga válida la fórmula, con lo que entraremos ya en las técnicas del Análisis Matemático.

[69] Con lo cual seguimos la estela de Maxwell que encontró esta distribución en sus estudios fundacionales de la Mecánica Estadística, donde la Gaussiana pasa a llamarse Maxwelliana y describe la densidad de la distribución de velocidades.

[70] Andréi N. Kolmogórov (1903- 1987), fundador de la teoría de la probabilidad axiomática actual, uno de los grandes maestros de la matemática soviética.

Cambiando un poco la ruta, los expertos saben bien que estas fórmulas garantizan la generación de un semigrupo en el adecuado espacio funcional. Pero eso son ya temas avanzados y dejaremos este sendero aquí en este momento tras mencionar un último milagro: si integramos en el tiempo la solución fundamental del proceso evolutivo (EC) obtenemos el núcleo fundamental del proceso estacionario (EL)

$$\int_0^\infty G(x,t)\,dt = \frac{c}{|x|^{n-2}} := N(x)\,,$$

con lo cual unimos a Gauss con Newton[71]. Esta fórmula hace las delicias de los probabilistas[72].

3.6.1. El espectro del Laplaciano

Veamos ahora el segundo ejemplo, la famosa *técnica de separación de variables*, omnipresente en tantas ramas de la técnica y la computación. Para implementarla en la ecuación del calor, supongamos que el dominio espacial es un intervalo $\Omega = (0, a)$, y busquemos soluciones de la forma "de variables separadas", es decir, $u(x,t) = F(x)\,T(t)$. Pongamos además datos $u = 0$ en los extremos, $x = 0$ y $x = a$ para ser concretos[73]. Un sencillo cálculo, millones de veces repetido cada año en las universidades de todo el mundo, dice que las únicas soluciones son la lista

$$u_k(x,t) = \sin(\omega_k x)\,e^{-\lambda_k t}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.11}$$

y sus múltiplos, con la condición de que $\omega_k = k\pi/a$ $(k = 1, 2, \ldots)$, y $\lambda_k = \omega_k^2$. Esto es interesante: encontramos las oscilaciones sinusoidales de la (EO) pero con distinto comportamiento temporal; ahora las ondas son amortiguadas en el tiempo, una consecuencia cuantitativa de una enorme diferencia física subyacente, pues la ecuación (EO) es conservativa, pero la (EC) es disipativa.[74]

Lo anterior parece fácil y lo es, pero como de costumbre la vuelta de tuerca

---

[71] El cálculo es totalmente elemental, pruébelo el lector, pero la conexión es certera.

[72] Como explica Kai Lai Chung [Ch1995].

[73] Este es el caso modelo. Como el lector habrá adivinado, otras opciones de datos darán lugar a otros cálculos y otras listas finales.

[74] Nuevas palabras clave de senderos futuros del mundo laplaciano evolutivo.

no está muy lejos, basta con pasar a dimensión de espacio superior, $n > 1$, por ejemplo el espacio habitual $\mathbb{E}_3$. Si tomamos ahora como dominio un abierto acotado Ω de $\mathbb{E}_n$ y volvemos a probar la fórmula de variables separadas $u(x,t) = F(x)\,T(t)$ y aceptamos como dato adicional que $u(x,t) = 0$ en el borde de Ω, entonces tras los cálculos de rigor se obtiene de nuevo una lista discreta:

$$u_k(x,t) = F_k(x)\,e^{-\lambda_k t}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

pero los perfiles espaciales no serán las funciones seno del caso $n = 1$, sino las soluciones del problema estacionario

$$\Delta F_k + \lambda_k F_k = 0, \tag{3.12}$$

problema que se convertirá en un estándar famoso con el nombre de Problema de Autovalores Laplaciano. Con no poco trabajo se demuestra que para todo Ω con borde liso existe una lista ordenada de valores $\lambda_k \geq 0$ tales que $\lambda_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ y para cada λ_k existe una función F_k que resuelve la ecuación (ella y sus proporcionales).

Este es un problema nada trivial, origen de la disciplina llamada Teoría Espectral. El conjunto $\{(\lambda_k, F_k)\}$ se denomina *sucesión espectral* del Laplaciano en Ω con datos cero en el borde, o más concretamente *sucesión espectral de Dirichlet*. Calcular la sucesión espectral para el problema propuesto en forma explícita sólo fue posible para geometrías muy especiales, calcularlo en general exigió un esfuerzo de “abstracción en lo práctico” que duró un siglo y se realizó gracias a los increíbles avances del Análisis Funcional, es decir en un mundo nuevo.

La repercusión. Lo anterior puede parecer un "cálculo para matemáticos", pero pronto dio el salto al mundo de la ciencia teórica y de ahí a la tecnología. Dado que la SEL (sucesión espectral del Laplaciano) aparece en la separación de variables de la (EO), tiene interpretación en el estudio de las vibraciones, en las que λ_k se interpreta como una energía. Unas páginas mas adelante la veremos aparecer de nuevo en las vibraciones de los átomos, es decir, en la Mecánica Cuántica, claro que el operador al que se le calcula la SE ya no es sólo el Laplaciano sino algún pariente más complejo. Los "Reinos del Espectro" se hicieron así presentes en la vida científica, en la técnica y llegan hoy (con la medicina por ejemplo) a la vida diaria.

Final teórico. Por otra parte, la base de funciones $\{F_k(x) : k = 1, 2, \dots\}$ asociada al espectro es infinita y todas las funciones de la base son infinitamente diferenciables y además ortogonales en algún sentido que Hilbert precisará[75]. Es el comienzo del sendero que ve al Laplaciano con los ojos del Álgebra y de la Geometría en infinitas dimensiones. Camino que dejamos aquí apuntado y que el lector puede seguir en esta lectura sugerida [Sa2000].

3.6.2. El reino de Fourier

La contribución destacada de Joseph Fourier consistió en señalar que, si bien por combinación lineal de soluciones de la lista $\{u_k\}$ de (3.11) se obtiene una amplia gama de soluciones de la ecuación del calor con datos iniciales $u_k(x, 0) = F_k(x)$ variados, si deseamos sin embargo representar a todas las soluciones para todas las $f(x)$ iniciales físicamente aceptables, hemos de tomar sumas infinitas,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k F_k(x), \tag{3.13}$$

con unos c_k llamados hoy *coeficientes de Fourier*, que es preciso determinar y usando una convergencia que es preciso establecer. Es ahí donde la matemática levanta el vuelo y aparece de la nada un nuevo reino, el Análisis de

[75]Ortogonalidad en el espacio de Hilbert de funciones asociado, $L^2(\Omega)$, en el que se define un concepto de producto escalar y se pueden así realizar cálculos geométricos en dimensión infinita, algo tan sorprendente entonces como usual hoy día.

Fourier, que es hoy una de las ramas más activas del Análisis.

Fourier no llegó a establecer con rigor su programa ni siquiera en el ejemplo unidimensional del comienzo, pero ya en 1829 Peter L. Dirichlet presentó el primer teorema de convergencia [Dir1829], preludio de lo que sería una larga serie. No estaba nada claro al principio cual era el concepto natural de "clase muy amplia de funciones" $f(x)$ que deberían ser desarrolladas ni con que tipo de convergencia. Sabemos ahora que es la clase de Lebesgue[76], $L^2(\Omega)$, de funciones de cuadrado integrable, que hoy es un objeto básico de la Cultura Laplaciana, pero hubo de esperar casi un siglo para que esto fuera pensado y viera la luz. El teorema fundamental de sumación de series de Fourier en L^2 se debe a Lennart Carleson[77] y es de 1966.

Las series de Fourier tienen hoy día aplicación en muy diversos campos, como análisis de vibraciones, ingeniería eléctrica, acústica, óptica, mecánica cuántica, procesamiento de señales e imágenes, elasticidad, economía, ... Se les une su hermana, la Transformada de Fourier, objeto matemático realmente sofisticado, más propio del siglo XX.

Comentario. La productividad de los conceptos de los que arrancan estos senderos que acabamos de señalar es pues enorme y manifiesta. Nos parece que incluso justifica el aserto de que existen campos de investigación en que las matemáticas toman claramente el relevo a la física en la tarea de extraer el jugo de un concepto, y con ello proponer vías de futuro, nuevos reinos virtuales, que nos permiten ver en forma original y profunda el mundo que nos rodea, e incluso cambiarlo.

3.6.3. Retorno al equilibrio

Concluyamos estas excursiones calóricas tomando un sendero empezado por Dirichlet. Dijimos al hablar de su principio que implicaba que las funciones de Laplaciano no nulo denotaban una ausencia de equilibrio que la Naturaleza tiende a restaurar. La evolución calórica es uno de los métodos preferidos para esta restauración. Así, si suponemos que una función $u(x,t)$ satisface la

[76] Henri Lebesgue (1875-1941), saldrá en adelante con frecuencia.

[77] Matemático sueco (1928-), bien conocido en España, premio Abel de Matemáticas en 2006.

ecuación del calor en un dominio Ω y con datos cero al borde, se demuestra que la energía de Dirichlet $\mathcal{E}[u(t)] = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2\,dx$ se disipa de acuerdo con la regla

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}[u(t)] = -\int_\Omega (\Delta u)^2\,dx \le 0\,.$$

Este cálculo es el inicio del Sendero de los Flujos Gradientes. Dejemos aquí por el momento la caja de sorpresas. Volveremos a las ecuaciones del calor en el siglo XX como parte fundamental de nuestra línea principal de investigación matemática, en el capítulo 5.

3.7. La teoría de los fluidos viscosos

La teoría de los fluidos fue ya considerada por Newton, que en particular estudió las mareas. Esta teoría fue una de las primeras en matematizarse a fondo, presenció un desarrollo espectacular en la primera parte del siglo XVIII con los suizos: Johann Bernoulli (1667-1748), Daniel Bernoulli (1700-1782) y sobre todo con Leonhard Euler (1707-1783), que culminó la modelización de la teoría de fluidos ideales estableciendo el famoso sistema de Ecuaciones de Euler de los fluidos, que son aún hoy día el modelo que describe la evolución ideal del estado de los fluidos incompresibles.

Pero con todo el progreso que significaba esta teoría, había algo en la modelización que no casaba con el comportamiento de los fluidos reales, lo que entonces se plasmó en los nombres de Hidrodinámica para la ciencia teórica y de Hidráulica para la ciencia de las conducciones de agua y otros fluidos reales, es decir, para la ingeniería. Esto dice mucho sobre la honestidad intelectual de aquellos gigantes de las matemáticas.

Hubo de pasar un siglo de intentos para superar ese golfo de inadecuación. El concepto de *viscosidad* fue y es esencial para modelar los fluidos reales. El efecto de la viscosidad toma en cuenta los esfuerzos de contacto no perpendiculares a la superficie, los llamados esfuerzos cortantes, que dan lugar a un nuevo modelo matemático, el "Sistema de Ecuaciones de Navier-Stokes", (ENS). Estas ecuaciones son el resultado de un proceso de casi un siglo, y fueron formuladas por Claude-Louis Navier (1785-1836) en 1822 y deducidas con todo rigor matemático por George G. Stokes en 1845[78]. El resultado es sorprendentemente simple: "añádase un sumando proporcional al Laplaciano de la velocidad a la fórmula de Euler, de la forma[79]

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u}. \tag{3.14}$$

El Laplaciano aparece así como un "resuelve-problemas" de tipo viscoso. La *regularización viscosa de ecuaciones* es hoy un útil fundamental de la matemática teórica, de la modelización física y del cálculo numérico, estamos en presencia de un sendero con enorme futuro.

El lector se preguntará ¿cómo se las arreglan los propulsores para hacer aparecer el Laplaciano?, ¿dónde está el error o la oscilación de nuestras aplicaciones ya vistas? La clave está más bien en la factorización "div - grad". El lector se puede lamentar de que es una explicación muy técnica, pero "no hay camino real a las matemáticas"[80]. El supuesto técnico fundamental usado por Stokes en su deducción rigurosa de la dinámica de los fluidos viscosos es que las fuerzas de contacto dependen sólo del gradiente (o matriz jacobiana) de la velocidad. Dado que a la expresión del equilibrio de fuerzas en un elemento de volumen hay que aplicarle el teorema de Gauss, que convierte integrales de superficie en integrales de volumen, de la doble operación surge el Laplaciano. *Voilà*.

Otra pregunta relevante es si este modelo para los fluidos reales es seguido por muchos o todos los fluidos que se estudian en la práctica de las ciencias, ingenierías u otros ámbitos de la vida civil. La respuesta es que sí, de manera muy general. Hay fluidos que se desvían de este patrón, llamados *fluidos viscosos no newtonianos*, y su estudio es muy interesante y actual[81], pero en líneas generales la (ENS) reina en los fluidos reales como la (EO) reina en el mundo de las ondas o la (EC) en los procesos térmicos.

[78] George Gabriel Stokes (1819-1903), eminente matemático y físico irlandés.

[79] En la fórmula $\mathbf{u}$ es la velocidad, p la presión y ρ la densidad del fluido. Para $\mu = 0$ se obtiene la ecuación de Euler para los fluidos ideales. El símbolo d/dt indica derivada material, un concepto geométrico-mecánico básico en la teoría matemática y fuente de notables dificultades tanto teóricas como numéricas.

[80] Según la famosa frase atribuida a Euclides, como respuesta al rey Ptolomeo que deseaba una forma más sencilla de aprender matemáticas.

[81] Y les hemos dedicado atención en España en años recientes.

La eficacia del Sr. Laplaciano es legendaria. Tanto de legendaria como de potencialmente difícil: uno de los 7 problemas del Milenio propuestos por la Fundación Clay, de la que hablaremos, consiste en "Decidir si las soluciones de la (ENS) con datos iniciales regulares existen y son regulares para todos los tiempos $t > 0$", ver [Clay2000].

3.8. Fluidos armónicos planos

No sería propio del Laplaciano abandonar a su suerte al mundo de los fluidos ideales. De hecho, una de sus primeras apariciones sucedió en el estudio de los fluidos estacionarios ideales en el plano. Fue ya Euler el que señaló que en ausencia de turbulencia existía un potencial de velocidades, $\mathbf{u} = \operatorname{grad} \Phi$. Si como Euler sabía muy bien, un fluido incompresible satisface $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, sólo nos falta recordar la factorización "div - grad" para obtener $\Delta\Phi = 0$, o sea que $\Phi(x, y)$ es una función armónica. De ahí a la teoría de variable compleja hay un pequeño paso que completaron Cauchy y Riemann, y de esa forma arranca un glorioso sendero de la Aerodinámica (que no tiene nada que ver con el sendero anterior), y una posible vida de estudio, ver [Ac1990], [LL1991], [Vaz2003b].

3.9. La teoría electromagnética

Las ecuaciones de Maxwell predicen que las ondas electromagnéticas, de las cuales la luz es sólo una pequeña parte, pueden propagarse en el vacío sin que haya ningún soporte material que vibre (a diferencia de las ondas de sonido). Tras un largo proceso que incluye a Michael Faraday (1791-1867), Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), Hans Christian Œrsted (1777-1851), Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Jean-Baptiste Biot (1774-1862), Félix Savart (1791-1841) y Andre-Marie Ampère (1775-1836), se debe a James Clerk Maxwell[82] la formulación matemática de la teoría electromagnética en forma de sistema que relaciona los campos vectoriales básicos, que son el

[82](1831-1879), matemático escocés, considerado por Einstein un científico de la talla de Newton.

campo eléctrico y el magnético[83] entre sí y con la densidad de corriente, para dar lugar a un impresionante sistema de ecuaciones en derivadas parciales de evolución, publicado en [Max1873], un documento estelar de la ciencia moderna. Copiamos para el lector una versión en lenguaje de hoy día:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, \qquad & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{E}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho, \qquad & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Vemos [84] que los operadores diferenciales clave son la divergencia y un nuevo operador, llamado *rotacional,* que mide el giro instantáneo de un campo de vectores, cf. [Feyn1963]. La razón por la que div y rot aparecen en esta fórmula es larga y difícil y no es nuestra intención irnos en esa dirección. Lo que nos preocupa es qué tiene que ver esto con el Laplaciano y con la propagación de ondas. De hecho, Maxwell ya anunció en 1865 [Max1865] que los campos eléctrico y magnético viajan a través del espacio como ondas a la velocidad de la luz. Veamos pues por qué en forma esquemática: todo ello se reduce a combinar las dos primeras ecuaciones y usar un resultado de cálculo diferencial vectorial que dice que para campos de divergencia nula, como es $\mathbf{B}$, se tiene que

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{B}\,. \tag{3.16}$$

¡Esta es una nueva factorización del Laplaciano! El lector es invitado a hacer el cálculo que queda: ponga $\rho = \mathbf{j} = 0$ para simplificar (como sucede por ejemplo en el vacío), derive en t las primeras ecuaciones, utilice la segunda línea y tendremos que

$$\mathbf{B}_{tt} = \Delta \mathbf{B}, \quad \mathbf{E}_{tt} = \Delta \mathbf{E}\,, \tag{3.17}$$

[83] Es decir, 2 variables vectoriales, o en otras palabras 6 variables escalares.

[84] De hecho esta no es la formulación exacta de Maxwell, muy influido por el álgebra de cuaterniones de William R. Hamilton, su formulación contenía 20 ecuaciones con 20 incógnitas. La versión vectorial presente se debe a la influencia de Oliver Heaviside (1850-1925). Además hoy día utilizamos la "notación nabla" en la forma simbólica $\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}$, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}$, ver más abajo.

es decir la Ecuación de Ondas.[85] La teoría ha cubierto la distancia desde los experimentos de Faraday a la ecuación de ondas, un verdadero *tour de force*. En pocos años Heinrich Hertz descubriría las ondas electromagnéticas de frecuencias no visibles, y en unas décadas tendremos la telegrafía sin hilos. Milagros debidos a final de cuentas a J. C. Maxwell y sus colegas.

La lucha por los símbolos. Para terminar, señalemos una contribución simbólica[86]. En su tratado citado [Max1873], Maxwell usa la "notación nabla" para designar las combinaciones de derivadas parciales de una función o campo vectorial de varias variables que entran en los cálculos de la física matemática, es decir gradiente, divergencia y rotacional, se designan por ∇. En notación actual, el gradiente de una función escalar $f(x,y,z)$ es un vector llamado ∇f, la divergencia de un vector $\mathbf{v}$ es un escalar denotado por $\nabla \cdot \mathbf{v}$ y el rotacional de $\mathbf{v}$ es un vector denotado por $\nabla \times \mathbf{v}$. Con esta notación el operador de Laplace es

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\operatorname{div}\operatorname{grad}\,=\nabla\cdot\nabla=\nabla^2\,. \tag{3.18}$$

La notación ∇^2 para el Laplaciano es aún muy popular en ingeniería, pero en matemáticas el símbolo preferido es Δ. Las cuestiones de notación han jugado un papel nada trivial en el desarrollo del edificio físico-matemático. Es muy raro sacar adelante una buena teoría con una mala notación.

Terminemos esta excursión por el siglo apuntando que parte de la magia asociada a este elenco de ecuaciones, legendarias ya en nuestra cultura, está asociada a la estética de las notaciones afortunadas[87], que se une como igual a nuestra admiración por el ingenio de los conceptos, la profundidad de los desarrollos, la belleza de su lógica, y, como colofón, el sorprendente alcance de las aplicaciones, que sigue ampliándose en formas hace poco insospechadas y a veces impresionantes.

[85] Hemos perdido la constante c^2 de la velocidad de la luz pues habíamos decidido eliminar unas constantes ε y μ que aparecen en las ecuaciones (3.15) y que tienen importante sentido físico.

[86] Es decir, relativa a los símbolos que tanto respetamos.

[87] Pues en la ciencia aún *videmus nunc per speculum et in ænigmate*, vemos la realidad como en un espejo y mediante enigmas.

3.10. Riemann, Geometría y Laplaciano

La estructura lineal del espacio tridimensional euclídeo ya fue combinada desde la Antigüedad con el estudio del plano, $n = 2$, y la recta, $n = 1$, cuya estructura lineal es totalmente similar desde el punto de vista cartesiano. De ahí a la extensión a dimensiones superiores, $n > 3$, había un paso que los matemáticos dieron sin duelo, pero sin gran repercusión al principio. Dificultad distinta sucedía con la comprensión de las superficies o variedades de dimensión superior que generalizaran la relativa situación de las superficies en el espacio $\mathbb{E}_3$, percibiendo su geometría intrínseca sin ayuda de saber su relación con (un supuesto) espacio ambiente. La obra genial de Bernhard Riemann abrió el campo al estudio de los espacios geométricos de dimensiones superiores dotados de una distancia (métrica) que hoy llamamos Riemanniana. En los años 60 del siglo XIX Riemann y los amigos italianos elaboraron el concepto de la derivación sobre estas superficies, y establecieron la relación con la curvatura.

Entre los asombrosos descubrimientos aparece la versión del Laplaciano adaptada a este nuevo mundo ambiente. Lleva los nombres conjuntos de Laplace y Beltrami[88] y tiene la siguiente fórmula con la que esperamos impresionar al lector:

$$\Delta_{LB}\, u(x) = g^{-n/2} \sum_{i,j=q}^{n} \partial_i \left(g^{ij} g^{n/2} \partial_j u(x) \right) , \tag{3.19}$$

donde (g_{ij}) es la matriz de la métrica riemanniana, (g^{ij}) su inversa y g es su determinante.[89] Este es el inicio del Sendero Laplaciano en Variedades Diferenciables, que empieza calculando el espectro del operador LB sobre una variedad diferenciable riemanniana, [BGM1971], y alcanzó inusitada relevancia cuando esta geometría sirvió de base a la Relatividad General de Albert Einstein (1916)[90].

[88] Eugenio Beltrami (1835-1899), geómetra italiano, experto también en fluidos.

[89] Ponga el lector $g_{ii} = 1$, $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$, de modo que $g = 1$, y volveremos a nuestro Laplaciano euclidiano de siempre, gracias a Dios.

[90] La geometría diferencial ha abierto al Laplaciano senderos maravillosos que tienen una gran relevancia actual en los que no entraremos por razones de brevedad.

N. B.- Añadimos al final de la memoria una tabla de expresiones del Laplaciano y de fórmulas con operadores nabla para comodidad del lector curioso.

3.11. Europa y España

Tras este largo recorrido por los senderos laplacianos en la Europa del siglo XIX, que vivía una de sus más brillantes momentos, volvemos la atención a nuestro país. El debate de la ciencia en España versus ciencia en Europa no es nuevo. José Echegaray dice en su Discurso: *"Gran siglo, sí, para Europa el siglo XVII; mas ¿qué ha sido para nuestra España? ¿Qué descubrimiento analítico, qué verdad geométrica, qué nueva teoría lleva nombre español? ¿Quiénes los rivales de Viète, de Fermat, de Pascal, de Descartes, de Harriot, de Barrow, de Brouncker, de Wallis, de Newton, de Huygens, de Gregorio de San Vicente, de Leibnitz, de los Bernoulli? Yo los busco con ansia en los anales de la ciencia, y no los encuentro."*

En su "Historia de la Ciencia Española" Juan Vernet nos informa así de la llegada del siglo XVIII con la nueva monarquía en [Ver1998]: *"la sensación de frustración que existía en tiempos de los últimos Austrias permanecía viva a principios del siglo XVIII,... Parece indudable que en la primera mitad del Siglo de las Luces los españoles tuvieron conciencia muy clara de la incapacidad de las universidades para ponerse al corriente de la ciencia contemporánea"... "en muchas de la cuales faltaban estudios adecuados para las matemáticas o la física, consideradas como disciplinas introductorias al estudio de la medicina"*. Viajeros extranjeros dan cuenta de su pasmo ante la penosa situación, que fue cambiando con la nueva dinastía paulatinamente durante el siglo, sobre todo a partir de Carlos III por influencia de los Ilustrados; así, se trató de reformar las universidades, encontrando notable resistencia; el marqués de la Ensenada instauró una política de pensionados para enviar a estudiar a Europa a alumnos brillantes, entre ellos Agustín de Betancourt[91] Gaspar de Jovellanos fundó un Instituto de nuevo cuño en su ciudad natal Gijón en 1794[92]. Mayor importancia tuvo la creación del Cuer-

[91]Ingeniero e inventor español (1758-1824), fundador de la Escuela de Ingenieros de Caminos de España, 1802, y la de San Petersburgo, ministro de infraestructuras en Rusia donde vivió largos años.

[92]Sin grandes consecuencias, es preciso decir, no siempre grandes hechos siguen a grandes

po de Ingenieros (1799) que pronto se ocupó de traducir al español libros de referencia en Francia. Pero era una labor iniciática para introducir la matemática más útil, y llegaba a una exigua minoría aún aislada del contacto frecuente con la Europa más avanzada y sus estándares intelectuales, y pocos salvo el ilustre Jorge Juan[93] llegan a interesarse con provecho por las nuevas corrientes y sus infinitas aplicaciones, consistiendo la mayor parte de las contribuciones españolas a las matemáticas en esa época de comentarios o manuales, de erudición personalista, donde los temas centrales de la ciencia que hemos estado tratando brillan por su ausencia. A pesar de estos avances de ingenieros y academias militares, el siglo termina sin que las universidades se conmuevan.

Tras los enormes desastres de la guerra napoleónica y la larga e infeliz restauración, los gobiernos liberales de Isabel II emprenden de nuevo la modernización del país, en particular mediante la creación de las escuelas politécnicas (desde 1835), de tan feliz consecuencia para el progreso del Cálculo y sus aplicaciones. En 1834 se crea la Real Academia de Ciencias Naturales de Madrid, que tomó su forma actual como Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, el 25 de febrero de 1847[94]. Se ponen así poco a poco los cimientos de un edificio científico más sólido, período que diversos autores han descrito[95].

Con todo, es opinión del presente autor que cuando Echegaray escribe su discurso tres décadas más tarde, el cambio, aunque esbozado, era aún menor. Ya no eran los tremendos tiempos que había descrito en tan duras palabras, pero el camino hacia una plena integración en la ciencia europea estaba por andar y el duro dictamen que mencionamos en la introducción era comprensible: *"La ciencia matemática nada nos debe: no es nuestra; no hay en ella nombre alguno que labios castellanos puedan pronunciar sin esfuerzo"* ([Ech1866], página 28).

---

planes.

[93]Jorge Juan y Santacilia (1713-1773) fue humanista, ingeniero naval y científico, que fue alumno de la Escuela Naval Militar de San Fernando. De él dice Echegaray: "Yo pronuncio con orgullo, con legítimo orgullo, el nombre de Jorge Juan, y admiro, en fin, esta magnífica figura, honra y prez del ilustre cuerpo de Marina".

[94]Datos de la Academia.

[95]Ver por ejemplo el Discurso de Ingreso en la RAC de Ildefonso Díaz (1997) y su Discurso Inaugural del año académico 2009-2010.

Emular el formidable éxito científico protagonizado por las "grandes potencias políticas, económicas y culturales" no era una tarea fácil pero sí era una tarea urgente[96], y las "potencias emergentes", como los EE.UU. y Japón, se lanzaron en el fin del siglo XIX a la tarea de convertirse en actores activos del nuevo científico-tecnológico con una seriedad y decisión envidiables, lo cual dio cumplidos frutos tras unos decenios de notable y sagaz inversión.

Entre nosotros sin embargo, el lento proceso de modernización del país en el fin del siglo XIX dejaba lugar a albergar algunas esperanzas, pero no excesivas. Sólo con el final de siglo aparece la figura gigantesca de D. Santiago Ramón y Cajal y el sueño de una ciencia española de importancia universal cobra los colores de la esperanza y el realismo. Pero con eso entramos en otro siglo, que fue el nuestro, lleno de proyectos, ilusiones y de sobresaltos, con un final esperanzador.

[96]Recurrimos a una cierta simplificación pues algunos países "menores" de la misma área cultural-geográfica participaron notablemente en el progreso científico, pero creemos que la idea general es clara.

4. El primer tramo del siglo XX

Hemos visto la sorprendente presencia en las diversas ramas de la Física del Laplaciano, un objeto matemático en principio relacionado con consideraciones geométricas. Es famosa la frase del físico y matemático Eugene Wigner (1902-1995) que se asombraba de la "efectividad de las matemáticas en las ciencias más allá de lo razonable"[97]. Como hemos apuntado, una enorme parte de las mejores matemáticas se ha originado para explicar aspectos del mundo físico, pero rara vez las consecuencias dramáticas de las matemáticas han sido inmediatas. La formulación de los procesos físicos en clave matemática al gusto de Galileo exige un proceso de maduración que tiene sus reglas y ritmos, que van desde varios años, a varias décadas, o incluso varios siglos.

Había a finales del siglo XIX un sentimiento contradictorio. Por una parte los progresos increíbles del siglo parecían justificar el "optimismo laplaciano" (es decir, del marqués de Laplace) sobre el determinismo, la capacidad de predicción de la ciencia y la perfección de las teorías físico-matemáticas establecidas. Por otra parte, las mentes más inquietas detectaban problemas y contradicciones que parecían marginales pero llamaban la atención: las órbitas caóticas halladas por Henri Poincaré en la Mecánica Celeste, los experimentos sorprendentes de Michelson-Morley sobre la velocidad de la luz, la incapacidad de los expertos en fluidos en determinar si el vuelo propulsado era posible o no, o bien, y para finalizar la lista, la llamativa ignorancia de los científicos sobre la estructura fundamental de la materia aún a finales del siglo (es decir, si había átomos o no[98]).

En este ambiente de una cierta expectativa, el nuevo siglo sorprende con dos grandes novedades que serán revoluciones del siglo XX, disciplinas de la física totalmente nuevas y altamente matematizadas. Una es la Relatividad de Albert Einstein, la otra la Mecánica Cuántica, obra colectiva. Mientras la primera es una reflexión radical sobre el espacio, tiempo y la materia, y no recurre al Laplaciano para expresarse, la segunda es nuestra incursión afortunada en el mundo de lo muy pequeño, los átomos y las moléculas

[97]literalmente, *"the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences"*, conferencia impartida en Nueva York, 1959.

[98]Véase la agria polémica entre Ludwig Boltzmann y Ernest Mach.

(cuya existencia estaba recién confirmada), y el Laplaciano juega allí papel de héroe, quizá su mejor papel hasta la fecha.

4.1. La mecánica cuántica

Se dice que la teoría de los cuantos tiene su origen en 1900/1901, con los estudios de Max Planck (1858-1947) sobre la radiación del cuerpo negro, que le llevó a suponer que la energía se intercambia en paquetes discretos. Dos décadas de estudios sobre el comportamiento de la materia al nivel molecular y atómico[99] ocuparon las mentes de científicos de una talla extraordinaria como Albert Einstein (1879-1955), Niels Bohr (1885-1962), Louis de Broglie (1892-1987) y otros, que se encontraron con propiedades sorprendentes, muy en particular, en el obstinado comportamiento discreto. Fue a mediados de los años 1920 que el paso definitivo en la matematización de la naciente teoría fue dado en paralelo por Werner Heisenberg (1901-1976) en Gotinga mediante la mecánica de matrices y Erwin Schrödinger (1887-1961) en Zurich mediante el modelo de ondas, usando las ecuaciones en derivadas parciales. Este último gozó del favor de los estudiosos y se convirtió en el modelo habitual. Veamos las fórmulas que tanto sorprenden. La forma más general de la *Ecuación de Schrödinger* es

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{4.1}$$

y describe la evolución de un sistema cuántico representado por la *función de onda*, $\psi(x,t)$.[100] Lo que es curioso es que ψ no es una cantidad real como uno podría esperar sino compleja, lo que para los físicos significa que contiene la información del módulo y de la fase. Además i es la unidad compleja ($i^2 = -1$) y $\hbar$ es una constante extraordinaria, la constante de Planck reducida, que mide el tamaño pequeñísimo del mundo cuántico. Por último, H es un operador llamado Hamiltoniano cuántico, que indica la energía del sistema.

Problema arduo de este simbolismo fue identificar el sentido físico de la variable ψ. Según la llamada Escuela de Copenhague el módulo al cuadrado

[99] Niveles como dijimos recién descubiertos.
[100] Por supuesto, esta es la versión no relativista.

es la densidad de probabilidad de encontrar la onda-partícula en un punto determinado. Todo el mundo microscópico pasa a ser una cuestión de probabilidades, tal como defendió toda su vida Niels Bohr, aunque Albert Einstein nunca estuvo del todo contento, no veía sensatez tras esta interpretación de las inexorables matemáticas.

El lector se dirá, ¿donde está el Laplaciano? Respuesta: está en los detalles. Si tomamos el caso más simple de una onda-corpúsculo en un ambiente en que actúa sobre ella un potencial $V(x)$ entonces

$$H\psi = -c\Delta\psi + V(x)\psi\,, \tag{4.2}$$

con una curiosa constante $c = \hbar^2/2m$, donde m es la masa de la partícula. Pongamos para más sencillez $V = 0$ y separemos variables como habíamos aprendido con la ecuación de ondas. Entonces $\psi = e^{-i\omega_k t}F_k(x)$ donde

$$-\Delta F_k = \lambda_k\, F_k(x), \qquad \omega_k = \frac{\hbar\lambda_k}{2m}\,.$$

Sorprendente aparición del problema de autovalores laplaciano. Más aún, ¡los autovalores λ_k son las energías cuantizadas! Si el problema se pone en la esfera n-dimensional, las autofunciones del Laplaciano son los famosos *armónicos esféricos*, funciones clásicas que tanto papel juegan en la teoría atómica. Y todo es más o menos así pero mucho más interesante matemáticamente si V no es cero.

La ecuación de Schrödinger puede escribirse en una sola línea y, sin embargo, su capacidad de explicar el universo resultó ser fabulosa. Se ha expandido desde entonces en casi todos los aspectos de la física del siglo XX y otras disciplinas, como la química cuántica, la electrónica cuántica, óptica cuántica, y ciencia de la información cuántica. Es pues una historia que continúa en forma tumultuosa, y es una historia laplaciana.

La ecuación viene acompañada de otras no menos increíbles. Por poner un ejemplo particularmente hermoso, pronto aparece la ecuación de Dirac[101], que rige el comportamiento de las partículas elementales como los electrones y de

[101] En honor a Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), ingeniero eléctrico y matemático inglés.

cuya estructura el mismo Dirac dedujo la existencia de la antimateria (esto es, electrones de carga positiva) antes de que esta se detectara experimentalmente (1932). Esta es una muestra del poder predictivo de las matemáticas que emocionaría al mismo Galileo.

Por otra parte, uno se pregunta ante tamaño cambio, ¿qué hacer con el mundo clásico? La física del siglo XIX ha sido re-evaluada como el "límite clásico" de la teoría cuántica. Propuesta sorprendente, ahora resulta que somos un límite.

4.2. La teoría de probabilidades

En uno de los trabajos de su llamado año admirable[102], 1905, Albert Einstein estudió las disoluciones y dedujo la ecuación del calor como modelo matemático de la difusión de las partículas suspendidas en un coloide, explicando así en clave matemática el movimiento errático llamado movimiento browniano, [Einst1905]. Pero hubieron de pasar varios decenios para que la teoría de la probabilidad y su rama evolutiva, los procesos estocásticos, se dotaran de bases rigurosas (en el sentido del rigor de los matemáticos, antiguos y modernos). Ello sucedió gracias a los trabajos de Norbert Wiener (1894-1964), Paul Lévy (1886-1971), y Andrei N. Kolmogorov (1903-1987), que escribió un tratado ya clásico de la probabilidad axiomática, [Kol1933].

Veamos como surge el Laplaciano según las ideas de Kolmogórov. Tomemos una red discreta de puntos en el espacio $\mathbb{E}_n$, que suponemos por sencillez ortogonal e igualmente espaciada. Esto lo designan los matemáticos por $h\mathbb{Z}_n$, formado por los puntos $P = (hz_1, \ldots, hz_n)$ con todos los z_i enteros. Supongamos que desde cada punto $P(z)$ admitimos que el proceso probabilista permite dar saltos a los puntos próximos, es decir, aquellos con sólo una coordenada distinta, con diferencia de una unidad arriba o abajo. Existen $2n$ de tales puntos y suponemos que la probabilidad de salto es uniforme, es decir, $1/2n$ en cada caso. Supongamos también que los saltos se realizan cada k segundos. Si designamos por $p(z^0, t_j)$ la probabilidad de hallar a la partícula en el punto $z^0 \in \mathbb{Z}_n$ en el momento $t_j = jk$, $j = 1, 2, \ldots$, se tiene,

[102] *Annus mirabilis*, ver [St1988].

en razón de las leyes de la probabilidad condicionada, que

$$p(z^0, t_j) = \sum_{z \sim z^0} p(z, t_{j-1}) \frac{1}{2n},$$

donde $z \sim z^0$ indica punto más próximo en el sentido descrito antes. De esta forma

$$\frac{p(z^0, t_j) - p(z^0, t_{j-1})}{k} = \frac{h^2}{nk} \frac{\sum_{z \sim z^0} [p(z, t_{j-1}) - p(p(z^0, t_{j-1})]}{h^2}$$

Basta ahora pasar $k, h \to 0$ con la prudencia de poner $k = ch^2/n \sim h^2$ para hallar

$$\partial_t p = c \Delta p. \tag{4.3}$$

Este es el comienzo de la teoría de la difusión como proceso estocástico, y también del cálculo numérico para la ecuación del calor. Hechos fantásticos, como la aparición de la campana de Gauss como límite natural de los procesos difusivos abiertos, se convierten en hechos perfectamente normales.

4.3. Del pensamiento abstracto a la generalización

El siglo XX fue un siglo de enorme desarrollo de la matemática pura y también de eclosión de las aplicaciones más diversas. No se olvidará al Laplaciano ni éste perderá sus dominios adquiridos, pero la tendencia de la primera mitad del nuevo siglo será la de generalizar los conceptos y teorías hacia nuevos reinos matemáticos, unos consecuencia de lo anterior, otros esencialmente novedosos. Aún tras atravesar el peligro que encierra el "generalizar por generalizar" y otros males del siglo, al final de éste la nave seguía su rumbo.

• **Las cuestiones de la integración y la derivación.**[103] La piedra base para los desarrollos analíticos del siglo fue puesta muy poco antes de su inauguración oficial por Henri Lebesgue con su teoría de la medida e integración (1899),[104] que sustituyó a la anterior propuesta de integral de Riemann.

[103]Tomamos muchos detalles del material que sigue del artículo de Brezis y Browder [BB1998].

[104]Notable hito de las matemáticas, que se basó en parte en trabajo anterior de Emile

Surgen así el espacio de funciones integrables (en el sentido de Lebesgue), $L^1(\Omega)$, y el de las funciones de cuadrado integrable, $L^2(\Omega)$, que son espacios completos en sus respectivas normas, el segundo con una notable estructura algebraica (llamada hilbertiana): es un espacio vectorial de funciones dotado de una operación producto que llamamos producto escalar o producto interior. Tal estructura da lugar a la clase de los llamados Espacios de Hilbert.

Los espacios L^1 y L^2 inauguran la saga de los muchos espacios por venir, y lucharán por la primacía funcional en el mundo de la física-matemática desde entonces. Algunos derivados de estos espacios de Lebesgue han tenido gran fortuna. El espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$ de las funciones de $L^2(\Omega)$ que además tienen un gradiente[105] en $L^2(\Omega)$ es un útil fundamental de todos los matemáticos, siendo siempre el cálculo del mínimo de un funcional del Principio de Dirichlet el primer ejemplo de su aplicación. A propósito, y como fieles seguidores del Laplaciano, nosotros anotamos que una función armónica en el nuevo sentido débil será precisamente una función $u(x)$ integrable Lebesgue tal que

$$\int_\Omega u(x)\,\Delta\varphi(x)\,dx = 0$$

para toda función φ dos veces diferenciable y de soporte compacto (lo que llamamos una *función test*)[106]. Uno se pregunta cuánto de eficaz será tal ampliación del punto de vista, y cuán diferentes son estas funciones armónicas de las anteriores. A la primera pregunta el siglo responderá: la ampliación del punto de vista es fundamental; pero en el caso de las funciones armónicas en particular se demostrará (lema de Weyl[107]) que el conjunto de tales funciones es el mismo con el nuevo y viejo puntos de vista.

La familia de espacios de Lebesgue L^p, $1 \leq p \leq \infty$, aparecen como versiones no hilbertianas del espacio L^2, y fueron desarrollados por Frédéric Riesz (1880-1956) entre otros. Mientras tanto, se desarrolla la teoría de operadores integrales para resolver en general las ecuaciones diferenciales.

Siguiendo la senda de abstracción, Maurice Fréchet (1878-1973) introdujo

---

Borel.

[105] Gradiente en el sentido no clásico de derivada débil, es decir derivada por testeo.

[106] La fórmula débil se obtiene pues por multiplicación e integración por partes, dos operaciones combinadas que serán básicas en la matemática del siglo XX.

[107] Por Hermann Weyl (1885-1955).

el concepto de espacio métrico en su obra "Sur quelques points du calcul fonctionnel", (1906), pues no todo espacio de funciones usado por los matemáticos era un espacio de Hilbert.

Hito culminante en esta dirección es la obra de Stefan Banach sobre la teoría de los operadores lineales [Ban1922], libro fundamental en la teoría abstracta de operadores. Los espacios más usuales de la matemática serán en el siglo XX los espacios de Banach.[108] El Cálculo de Variaciones toma el rumbo hacia la minimización directa, como en la obra de Leonida Tonelli (1885-1946). Oliver Kellogg publica un libro básico en la teoría del potencial [Kel1929].

• **Ecuaciones en derivadas parciales elípticas.** La necesidad de un tratamiento más riguroso de las EDPs fue una motivación básica para el desarrollo del Análisis Funcional y Real. Ejemplos de ello serán la teoría de la integración, la teoría de operadores y el análisis espectral ya apuntados. Un instrumento fundamental para los nuevos desarrollos lo proporcionan las estimaciones a priori, concepto con el que entra en escena el área cultural rusa (que tanta importancia iba a tener) con Serguéy N. Bernstein, que introdujo tales estimaciones en sus artículos desde 1906, [Ber1906]. Este útil se haría clave con el tiempo en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales, sobre todo cuando son del tipo no lineal, tema preferente del final de siglo.

Otra de las características de la época será la generalización. Así, de la ecuación estacionaria de Laplace-Poisson se pasa a la consideración de la clase de ecuaciones de la forma

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\partial^2_{ij}u+\sum_{i=1}^{n} b_i\,\partial_i u+c\,u=f. \tag{4.4}$$

Si se pide que los coeficientes $(a_{ij}), (b_i), c$, sean constantes o incluso funciones regulares de $x\in\Omega$, y que f sea una función regular, se puede desarrollar una teoría similar a la ya obtenida para la ecuación de Laplace si se pide que la

[108]Una segunda contribución de Banach es el principio de contracción, pieza clave de tantas pruebas de existencia. La reputación de la matemática polaca de entreguerras radicada en Lwów, hoy día Ucrania, fue legendaria.

matriz (a_{ij}) sea definida positiva, más en concreto que

$$\lambda_1|\xi|^2 \le \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \lambda_2|\xi|^2$$

con $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. Es la llamada condición de elipticidad uniforme, y la clase de ecuaciones pasa a llamarse **clase de las ecuaciones elípticas**.[109] De cara a la teoría los términos más determinantes son los de mayor orden, a saber $a_{ij}(x)\,\partial^2_{ij}u$, que representan la variación sobre el Laplaciano original que ocupó la atención del siglo XIX.[110] Tales coeficientes variables se pueden deber a la inhomogeneidad y anisotropía del medio en el que tiene lugar el proceso (potencial, difusivo, vibratorio u otro), pero también se pueden deber a que usamos coordenadas no euclídeas, como hicimos en el caso del operador de Laplace-Beltrami.

El desarrollo de la teoría de las ecuaciones elípticas ha sido tarea fundamental en el siglo XX y adquirió forma clásica en los textos de Gilbarg-Trudinger [GT1988], de Ladyzhenskaya-Uraltseva [LU1968] y hoy día de Evans [Ev1998], que nuestros estudiantes conocen.

En una primera etapa se trató de hallar soluciones clásicas. Entre los hitos más relevantes está la derivación de estimaciones a priori por Juliusz Schauder (1899-1943) de los años 1934 y 1937, que permiten obtener existencia por el método de compacidad si se trabaja en los espacios funcionales de Hölder $C^{0,\alpha}$ y $C^{2,\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$. Importantes son también los trabajos de Renato Cacciopoli (1904-1959) en Italia. Otro instrumento fundamental para las teorías de existencia posteriores será el teorema del punto fijo de Schauder y el grado de Leray-Schauder. Por otra parte, Axel von Harnack (1851-1888) había deducido en 1887 la famosa desigualdad que lleva su nombre para las soluciones de la ecuación de Laplace, y esta fue luego extendida a las soluciones de ecuaciones elípticas por James Serrin (1955) y Jürgen Moser (1960). Otro resultado importante se debe a Eberhard Hopf (1902-1983), quien introdujo en 1927 el Principio del Máximo Fuerte, útil técnico básico

[109] De segundo orden, para ser más precisos. El nombre elípticas puede parecer sorprendente, pero viene bien para recordarnos cuán cerca de la geometría nos mantenemos todo el rato, aún sin decirlo.

[110] En otras palabras, vemos la matriz (a_{ij}) como una perturbación de la matriz identidad que corresponde al Laplaciano.

en la teoría cualitativa de ecuaciones de los tipos elíptico y parabólico al que yo dediqué luego uno de mis artículos más logrados.

Pasamos a otro de los temas de gran repercusión, la obra de S. L. Sóbolev[111] sobre los espacios de funciones débilmente derivables que conocemos con el nombre de Espacios de Sóbolev y con el símbolo $W^{k,p}(\Omega)$. El resultado más trascendente son las llamadas *inclusiones de Sóbolev*, que dominan las pruebas de existencia y regularidad de las ecuaciones en derivadas parciales desde entonces, y tienen importantes consecuencias en Análisis Funcional y Geometría diferencial sobre variedades. Es un tema muy conocido hoy día en nuestro país. El trabajo de Sóbolev tuvo como antecedente la obra de Jean Leray (1934-35) sobre las ecuaciones de Navier-Stokes[112], y fue ampliada en la teoría de distribuciones de Laurent Schwarz[113], [LS1950].

El dominio de estos espacios permitió el siguiente paso de generalización que consistió en tomar coeficientes no continuos en la ecuación general elíptica. La existencia de soluciones cambia de marco y se obtiene en los espacios $L^p(\Omega)$ y $W^{2,p}(\Omega)$, utilizando técnicas nuevas como las desigualdades de Calderón y Zygmund. La idea básica es que si trabajamos en el marco L^2 el operador Laplaciano, o su equivalente con coeficientes, controla a todas las derivadas segundas, de ahí se obtienen las estimaciones a priori, y la teoría sigue. Apuntemos un detalle técnico: las ecuaciones se escriben ahora en el formato llamado "de divergencia"

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\,\partial_j u) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i(b_i u) + c\,u = f. \tag{4.5}$$

El cambio dista mucho de ser trivial en la práctica. Cosas de expertos, me dirán, pero para nosotros es otro senderito por el que caminamos con esfuerzo y provecho.

[111]Serguéy Lvóvich Sóbolev (1908-1989), uno de los matemáticos más influyentes de la escuela soviética.

[112]Leray introdujo las soluciones débiles en el estudio de las ecuaciones de los fluidos. Su teoría de la ecuación de NS planteó problemas aún no resueltos que constituyen uno de los 7 Problemas Clay para el Milenio.

[113]Laurent Schwarz (1915-2002), primer matemático francés en recibir la Medalla Fields, en 1950, por esta teoría.

• **Ecuaciones en derivadas parciales parabólicas y difusiones.**

Del mismo modo que el estudio de procesos estacionarios se amplió de la ecuación de Laplace-Poisson a la ecuación general elíptica, el proceso evolutivo de tipo disipativo se amplió de la ecuación del calor a la ecuación general de tipo parabólico

$$\partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \partial^2_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i\, \partial_i u + c\, u = f\,, \tag{4.6}$$

y existe una forma de divergencia que el lector nos perdonará por no escribir aquí. La teoría evolutiva sigue un camino notablemente paralelo al caso elíptico, pero la novedad conceptual no es trivial pues una función $u(x,t)$ es vista como una función del tiempo con valores en un espacio vectorial de funciones en el espacio, en el caso más simple $L^2_{x,t} = L^2_t(H)$, con $H = L^2_x(\Omega)$.[114]

Siempre la práctica. La teoría de las ecuaciones parabólicas permite abarcar un gran número de procesos: así los términos $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\, \partial^2_{ij} u$ reflejan los procesos de difusión, los términos $\sum_{i=1}^n b_i\, \partial_i u$ los de convección, mientras que cu explica fenómenos de reacción o absorción, y f es la fuerza o excitación externa. Ver [LSU1968]. Matemáticamente, los términos más determinantes de la teoría son los de mayor orden de derivación, de ahí que nos fijemos prioritariamente en los efectos difusivos y a muchos efectos abreviemos las ecuaciones a la forma

$$\partial_t u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \partial^2_{ij} u\,,$$

que es el pariente afortunado de la ecuación del calor en el siglo XX. Pero el mundo de la reacción-difusión es notable, ver [Sm1983], como lo es la difusión-convección. Lo que sucede es que gran parte de la acción es no-lineal, tuvo su cenit en la segunda mitad del siglo y entra en el capítulo próximo.

• **Resultados notables en la teoría de regularidad**

A finales de los años 1950 se planteaba a los investigadores un problema importante a la hora de resumir los notables progresos de los decenios an-

[114]Esta es una notación un tanto críptica pero intuitiva, el subíndice indica la variable elegida en cada paso.

teriores en las teorías de existencia para ecuaciones de clases cada vez más amplias en marcos de “soluciones generalizadas”. Puesta en forma simple, la pregunta es la siguiente: ¿bajo qué condiciones las nuevas soluciones generalizadas de problemas más bien clásicos son en realidad funciones derivables, o al menos continuas? Este es en realidad el Problema 19 de la famosa lista de Hilbert[115] referido a las soluciones de ecuaciones elípticas que son mínimos de un problema del Cálculo de Variaciones.

En uno de los artículos más influyentes en las matemáticas del siglo XX, Ennio De Giorgi (1928-1996) resolvió este problema en 1957 (y publicó su resultado en italiano en una oscura revista, [DG1957]). Un resultado en el mismo estilo fue obtenido independientemente (1958) para ecuaciones parabólicas por John Nash[116] [Na1958]. Poco después Jürgen Moser publicó una prueba distinta que tuvo gran éxito, [Mo1960], así como la prueba de la desigualdad de tipo Harnack correspondiente [Mo1960].

Con estas herramientas, el acceso a las matemáticas del mundo no lineal estaba listo. En breve tiempo una verdadera catarata de resultados empezaría a aparecer en los terrenos más diversos. Tiempos notables donde la novedad era la ley.

[115] Famosa lista de 23 problemas del siglo planteada en el Congreso Mundial de Matemáticos de Paris en 1900.

[116] Dicen que saber que había perdido la prioridad le causó a Nash un enorme disgusto.

5. El mundo no lineal que he vivido

A la hora de abordar el final del siglo pasado, empecemos por dejar constancia de que, al entrar de lleno en la época de la especialización, existen reinos enteros de la herencia Laplaciana que vamos a dejar de lado, como el de las vibraciones y ondas, los fenómenos electromagnéticos y cuánticos, etc. Por otra parte, el mundo que he vivido era un mundo de ecuaciones no lineales, por lo que el objeto principal de lo que sigue serán las *ecuaciones en derivadas parciales no lineales de los tipos elíptico y parabólico*, con su sigla EDPNLEP, así como los sistemas, problemas y teorías en que intervienen de forma importante. Observemos por último que el texto se alarga y el autor dispone de un margen cada vez más estrecho para dar testimonio de ese mundo que ha vivido. Por ello el relato se vuelve personal, y por ende mucho menos brillante en general.

Una pregunta es prudente antes de arrancar: hasta qué punto es el tema que abordaremos un tema relevante. Deseo recordar antes de emprender el recorrido unas palabras del Premio Nobel John Nash de 1958 que me parecen muy oportunas.

"The open problems in the area of nonlinear p.d.e. are very relevant to applied mathematics and science as a whole, perhaps more so than the open problems in any other area of mathematics, and the field seems poised for rapid development. It seems clear, however, that fresh methods must be employed... Little is known about the existence, uniqueness and smoothness of solutions of the general equations of flow for a viscous, compressible, and heat conducting fluid..."

Más de medio siglo más tarde el progreso, al que él contribuyó con su artículo de aquel año, ha sido enorme, y para ello notables métodos han sido introducidos, pero algunos de los principales problemas matemáticos siguen abiertos, pues nuestra ciencia llega lejos por caminos lentos y atareados con mil detalles.

5.1. Idea personal de los 1960s y 1970s

Como estudiante de CC. Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid,[117] tuve ocasión de comprobar el movimiento renovador de la docencia científica en este país en los primeros años 1970, con la introducción en las clases de los temas y textos importados de las mejores universidades de los países de referencia, que eran esencialmente Francia y EE. UU., pero también Italia y la entonces Unión Soviética, según recuerdo. El deseo de superación de la endogamia y el conformismo seculares era muy patente. Como estilo de matemáticas la influencia del formalismo y del Bourbakismo era profunda.

En mis primeros años de estudiante doctoral, a partir de 1973, pude observar además la escasez de contactos reales con los grandes centros extranjeros; aquellos lugares donde las grandes figuras extendían su magisterio y tenían lugar las novedades, algunas de enorme impacto, quedaban aún distantes. Se estaba rompiendo el mito del "que inventen ellos", pero poner en marcha los nuevos modos no era fácil, y la tendencia anterior hacia el saber erudito y aislado estaba siempre presente.

Para lo que sigue es importante citar algunos ejemplos de los años 1960 cuya historia nos influyó más tarde. Así, el académico Alberto Dou (1915-2009),[118] ingeniero de Caminos, licenciado en Filosofía y en Matemáticas, jesuita. Yo le conocí como profesor de la ETS Ing. Caminos, Canales y Puertos, así como catedrático de Análisis Matemático en la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense. Había pasado largas temporadas de enseñanza e investigación en diversas universidades del mundo: estudió con W. Blaschke en Hamburgo, con Fritz John en el Courant Institute de la Universidad de Nueva York, visitó el Mathematics Research Center (MRC) de la Universidad de Wisconsin-Madison (1963). En 1966 publicó un artículo sobre elasticidad en la revista Communications on Pure and Applied Mathematics, una de las revistas de referencia hoy día, [Dou1966]. Alberto Dou era muy consciente de la necesidad de que España se abriera a la influencia del extranjero y esta-

[117] De 1965 a 1969 fui alumno de ingeniería en la Univ. Politécnica de Madrid, y ello tuvo también una influencia en lo que sigue.

[118] Reseña detallada en la Gaceta de la RSME, Vol. 12 (2009), No. 2. "Alberto Dou: su obra matemática y su papel en el progreso de la matemática española", por Jesús Ildefonso Díaz.

bleció lazos con el gran matemático francés Jacques-Louis Lions (1928-2001), quien con el tiempo tuvo una apreciable influencia en España.

Cuando en el otoño de 1976 me incorporé al Dpto. de Ecuaciones Funcionales de la UCM pude seguir de cerca la intensa actividad del también académico Miguel de Guzmán (1936-2004), del que ya tenía noticia por supuesto. Miguel tenía una larga formación investigadora en EE. UU. tras la invitación del Prof. Alberto Calderón para estudiar en la Univ de Chicago (1968). A su vuelta a España escribió un tratado que se hizo famoso en todo el mundo, [Guz1975], el primero de tal tipo que yo veía de un autor español, y se propuso una labor de apertura y dinamización del mundo investigador español que duró hasta su temprana muerte[119].

Gran influencia sobre los matemáticos aplicados madrileños iba a tener el académico Amable Liñan, cuya actividad todos ustedes conocen y tienen la ocasión de apreciar. Fue otro de los precursores de la modernidad en los años 1960 con su tesis en el California Institute of Technology (1963) y sus estancias en EE. UU. Amable ha sido desde la cátedra de Mecánica de Fluidos de la ETS Ing. Aeronáuticos de la Univ. Politécnica de Madrid el gran propulsor en España de los estudios matemáticos en mecánica de fluidos y teoría de la combustión, temas en los que es una autoridad mundial.[120]

Habrá sin duda otros ejemplos de precursores ilustres, pero espero que estas historias vitales den una idea cabal de las influencias en que me apoyé / nos apoyamos más tarde.

5.2. La "Escuela de Brezis"

En el año 1976 sucedió un hecho que iba a representar un cambio de orientación en mi vida matemática, la incorporación de una serie de personas de la Univ. Complutense de Madrid a lo que podemos llamar "la Escuela de Brezis" en España[121]. El primero de tales alumnos fue el hoy académico Ilde-

[119] Notable fue su atención a la búsqueda y promoción del talento matemático.

[120] Amable ha sido profesor en las universidades de California, Michigan y Princeton en los Estados Unidos y en la de Marsella en Francia. Desde 1997 es profesor adjunto en la Universidad de Yale.

[121] Tal denominación es informal, pero como tal ha sido usada.

fonso Díaz, que leyó su tesis doctoral precisamente en ese año[122]. A partir de entonces se formó un grupo en el que además estuvieron Miguel Ángel Herrero, José Carrillo que venía de París, Francisco Bernis que venía de Barcelona, Gregorio Díaz y Sixto Álvarez[123]. Rápidamente el grupo fue madurando gracias al seminario permanente de EDPs no lineales, del que Ildefonso Díaz fue animador y propulsor; a los viajes frecuentes a París; al para nosotros sorprendente interés del Prof. Haim Brezis, al que se unió otro profesor del entorno de Brezis, Philippe Bénilan (1940-2001), no menos benéfico y paciente. En pocos años leímos las tesis y nos fuimos incorporando a la docencia y la investigación en la universidad española.[124]

Es difícil describir ajustadamente la profunda influencia que iba a tener esta escuela francesa en las matemáticas que se hicieron luego en Madrid. Nacido en 1944, Haim Brezis, era ya en 1976 una estrella confirmada de las EDPs no lineales y el Análisis Funcional, profesor del reputado Laboratoire d'Analyse Numérique de la Univ. de París VI,[125] y su capacidad de dirección era ya conocida y llegó a ser proverbial.[126] A través de su magisterio (y del seminario de EDPs no lineales del Departamento), leímos sus artículos y conocimos la teoría de operadores maximales monótonos de su famoso libro [Br1973], y con ello la teoría de semigrupos generales en que descollaban sus amigos Philippe Bénilan y Michael Crandall, que pasaron pronto a ser referencias obligadas y amigos personales. Leímos además libros fundamentales escritos en los años 1960, como el "Quelques méthodes" de J. L. Lions [Li1969], el famoso libro de J. L. Lions y Enrico Magenes [LM1968], las notas de Guido Stampacchia en la Univ. de Montréal [St1966], o los trabajos de Louis Nirenberg, como

[122]Ildefonso nos aportó su experiencia y el interés por algunos temas que se harían permanentes como las fronteras libres y el soporte compacto, entre sus muchos intereses.

[123]Dejamos sin mención a otros excelentes colegas del departamento o del área de Madrid activos en temas afines que luego han destacado por la naturaleza personal del relato. Pero sí citaré a Miguel Escobedo en Bilbao y Xavier Cabré en Barcelona que luego tuvieron estrecho contacto con Brezis.

[124]Mi tesis fue presentada en febrero de 1979, oficialmente dirigida por Ildefonso Díaz, y con Haim Brezis en el tribunal. En el acto de la defensa mejoramos un teorema, que según Haim no podía quedar incompleto en la versión de la tesis. Fue para mí un momento especial, el idealismo científico en acción.

[125]De nombre Univ. Pierre et Marie Curie; el Laboratorio se llama ahora LJLL, Laboratoire Jacques-Louis Lions.

[126]Creo que él cuenta como uno de sus mayores éxitos la "rama española" de su familia científica.

[Ni1974], y de James Serrin, como [Se1959]. Brezis representó para mí la eficacia unida a la elegancia, el estímulo estético unido a mantenerse cerca de la física, el cuidado por la exposición clara, la difícil combinación del espíritu abstracto de la tradición francesa con el amor a lo sencillo, práctico y profundo de la tradición norteamericana[127]. Recuerdo su recomendación de huir del saber por el saber, peligro mortal para el investigador activo; "busca un problema abierto interesante, que importe a la comunidad, y resuélvelo", decía. Su impronta marcó mi trabajo desde entonces.

Sería injusto no repetir aquí la influencia simultánea de Philippe Bénilan, alumno de Brezis, cuya tesis en la Univ de Orsay (1971) es un documento de una profundidad sorprendente[128]. Y la influencia mutua de todo aquel grupo de personas que participamos en la "aventura francesa" de los finales de los 1970, años decisivos en el porvenir del país y decisivos también para la orientación de nuestras vidas profesionales. Por último, merece la pena apuntar el planteamiento de apertura y colaboración que vivimos en aquella época iniciática tan optimista, que se nota por ejemplo en la organización de eventos. Así, en 1979 se organizó en El Escorial el Primer Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (CEDYA), cuya celebración periódica se ha mantenido hasta nuestros días, y contó a Ildefonso Díaz como uno de los organizadores. Y se establecieron relaciones regulares con Francia en forma de acciones integradas y congresos conjuntos. Así, visitar París, o Besançon o Tours, pasó a ser para mi una actividad periódica prevista. A la lista pronto se unió Roma. Todo lo cual contrastaba enormemente con el mundo anterior que yo había vivido.

Cambio de escenario. La fortuna me iba a sonreír de nuevo a la hora de buscar un puesto permanente. Fui invitado a unirme al proyecto del Dpto. de Matemáticas de la Univ. Autónoma de Madrid y llegué al campus de Cantoblanco en enero de 1981. Un año después partía para los EE. UU. como Fulbright Scholar para pasar un año en la Universidad de Minnesota[129],

[127]Su famoso libro [Br1983] es un clásico en este sentido, y fue traducido inmediatamente al español. Es libro de texto en la UCM, la UAM y en muchas otras universidades españolas y europeas.

[128]Su apoyo fue muy importante en aquellos momentos de mi carrera; escribimos años después un artículo hermoso y muy conocido del que hablaré más adelante.

[129]Uno de los centros punteros de la EDPs en los EE. UU., con nombres tan conocidos

invitado por los famosos profesores Donald G. Aronson y Luis A. Caffarelli. Tras la emocionante iniciación a la investigación internacional en la Escuela de Brezis, la estancia en EE. UU. sería la influencia más profunda que he tenido; he vuelto a ese país en visitas repetidas, y a día de hoy sigo aprendiendo las virtudes del modo norteamericano de hacer investigación. Es para mi un gran honor ser Fellow de la American Mathematical Society (2012).

5.3. De vuelta al Laplaciano. Las teorías no lineales elípticas

Dejemos aquí la historia y volvamos a nuestro recorrido principal siguiendo los senderos laplacianos. En lo que sigue expondré algunos de los resultados que encuentro más interesantes de mi carrera con comentarios sobre su origen, motivación, contexto y repercusiones.

Uno de los temas de los años de mi tesis era la investigación de las propiedades de las soluciones de ecuaciones elípticas semilineales, como por ejemplo

$$-\Delta u + B(u) = f\,, \tag{5.1}$$

que es una simple perturbación de la ecuación de Laplace-Poisson en que aparece una no-linealidad en el término de orden cero, es decir $B(u)$. Un famoso artículo de Bénilan, Brezis y Crandall [BBC1975] mostraba como resolver el problema cuando B era una función real monótona creciente[130] con $B(0) = 0$, y f era una función meramente integrable en el espacio $\mathbb{E}_n$.

Pero la aplicación de tal resultado al estudio de la teoría atómica semiclásica de Thomas-Fermi (1927) (que describe aproximadamente el comportamiento de los electrones en torno al núcleo) exigía que f pudiera ser una masa de Dirac, [BL1979], y Bénilan y Brezis hallaron una incompatibilidad esencial a la existencia de soluciones en ese caso si $n = 3$ y $B(u) = u^p$ con $p \geq 3$,[131] [BB2003][132]. Ambos autores me plantearon el problema correspondiente

como James Serrin, Hans Weinberger, Walter Littman, Gene Fabes, David Kinderlehrer, Johannes Nitsche y otros, además de quienes me invitaban.

[130] O más generalmente, un grafo maximal monótono en el lenguaje de la época.

[131] La condición es $p \geq n/(n-2)$ para $n \geq 3$ general.

[132] La fecha de publicación es inverosímil, el manuscrito circulaba ya en fotocopia en el

en dos dimensiones donde se suponía que la incompatibilidad se daba para funciones $B(u)$ de tipo exponencial. En el articulo [Vaz1983] encontré que cuando $B(u) = e^{au}$, $a > 0$ la incompatibilidad puede darse, *pero sólo si f contiene una delta de Dirac con un coeficiente $c > c_* = 4\pi/a$*. El valor crítico c_* señala el límite de resolubilidad. Este es un ejemplo más de *fenómeno crítico*, tan frecuente en la física, y no tenía correspondencia en $n \geq 3$[133]. Muchos años después Brezis, Marcus y Ponce fundamentaron en esta idea una teoría general de singularidades admisibles, [BMP2004, BMP2007], que ha tenido bastante repercusión.

5.4. Modelos fuertemente no lineales. Los operadores p-Laplacianos y las fronteras libres

Una versión diferente de la ecuación de Laplace-Poisson con que abrimos el siglo XIX aparece cuando se minimiza una forma un tanto distinta de la energía de Dirichlet, a saber $\int |\nabla u|^p\,dx$ con $p \in (1,\infty)$, que es llamada p-energía. Este es el ejemplo más simple y no trivial en el intento de comprender el Cálculo de Variaciones con funcionales del tipo general $\int F(x,u,\nabla u)\,dx$, una tarea que para F general es de una alta dificultad [St1990, Dac2004].[134] Si añadimos el término de grado cero usual y además una constante de normalización, la energía total a minimizar es

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \int_\Omega f u\,dx. \tag{5.2}$$

La ecuación de Euler-Lagrange correspondiente es

$$-\mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f\,, \tag{5.3}$$

a lo cual hay que añadir las correspondientes condiciones de contorno. Estas energías p-Laplacianas y las correspondientes ecuaciones eran un tema de

año 1980.

[133] Valores críticos como 2π, 4π u 8π son típicos en dimensión dos; así, el valor crítico de las ecuaciones de la quemotaxis en el plano es $c_* = 8\pi$. Otro coeficiente crítico muy conocido se da en la desigualdad de Hardy, que veremos más adelante.

[134] Y muy importante para las aplicaciones a la elasticidad por ejemplo.

intensa investigación en los 1970s y 1980s. El llamado operador p-Laplaciano, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, es para $p \neq 2$ una versión no lineal del Operador Laplaciano que tiene una notable diferencia: es de tipo elíptico sólo en los puntos en que $|\nabla u| \neq 0$, mientras que en $|\nabla u| = 0$ la ecuación lo es en un sentido laxo que se llama elíptica degenerada si $p > 2$[135]; por otra parte, para $p < 2$ se llama elíptica singular[136].

Una de las consecuencias más llamativas de la degeneración de la ecuación p-laplaciana para $p > 2$ es la pérdida de la propiedad de positividad estricta de las soluciones no negativas, llamada usualmente Principio del Máximo Fuerte (PMF). Este es un fenómeno que interesó al grupo de Madrid, en particular a Ildefonso Díaz y Miguel Ángel Herrero, cf. [DH1978, Di1985]. La teoría de existencia, unicidad y regularidad de estas ecuaciones ha sido y aún es un favorito de los investigadores, cf. [DB1993].

En 1984 escribí un artículo [Vaz1984] donde caracterizaba cuando el PMF dejaba de ser válido para ecuaciones del tipo

$$-\Delta_p(u) + B(u) = f \tag{5.4}$$

donde $p > 1$ y B es una no-linealidad monótona como las encontradas antes en [BBC1975]. Con gran sorpresa para mí, este resultado ha sido útil a numerosos investigadores[137] y ha sido usado de forma destacada por Patrizia Pucci y James Serrin (1926-2012) en su notable libro sobre el Principio del Máximo [PS2007].

Comentario. En aquellos años me ocupé de resolver problemas de caracterización y construir contraejemplos; puede parecer un pasatiempo pero no lo es, no hay teoría sana sin estos ingredientes.

---

[135] Note el lector habituado que $|\nabla u|^{p-2}$ juega el papel de coeficiente de difusión elíptico, como el a_{ij} de la fórmula (4.5). Entonces el coeficiente de difusión se anula para $p > 2$.

[136] Pues el coeficiente se hace infinito en esos puntos.

[137] ¡Es mi obra más citada!

5.5. Teorías de EDPs no lineales. Procesos difusivos

Una ambición de la naciente teoría de ecuaciones no lineales en los años 1960 era la de construir una teoría matemática completa de soluciones generalizadas (es decir, soluciones no clásicas pero con sentido físico) para una muy amplia clase de ecuaciones con importancia tanto para las matemáticas como para las ciencias aplicadas. Dadas las esenciales diferencias existentes ya en la teoría lineal entre ecuaciones elípticas, parabólicas e hiperbólicas, se suponía que habría que desarrollar al menos tres teorías no lineales. La realidad de los decenios transcurridos es que, arrancando de esta división aproximada, el campo no lineal es muy variado y ha dado lugar a muchos senderos paralelos que se cruzan de formas inesperadas, unas veces por compartir técnicas, otros por compartir alguna aplicación importante. Senderos que se separan para volver a encontrarse, sólo un experto es capaz de *"aggirarsi per lo scuro labirinto"*.

La ausencia de soluciones clásicas era por entonces sabida y era claro que habría que utilizar conceptos de solución llamados en general soluciones generalizadas. Estas debían incluir en particular los límites teóricos de los procedimientos numéricos con que se aproximaban tales procesos, llamadas para entenderse *soluciones límite*, las cuales sin una teoría unificadora dependían del arbitrio del método aproximador. La investigación apuntaba al concepto de *solución débil* o de distribuciones como el sustituto más adecuado, y así ha sido en líneas generales, pero pronto los ejemplos de la teoría de leyes de conservación indicaron que era preciso algo más fino, y gracias a los trabajos de Olga Oleinik (1925-2001), Peter Lax (1926-) y Stanislav Kruzhkov (1936-1997) emergió el concepto más exigente de *soluciones de entropía*. Una vez abierta la puerta, no sin temor y precaución, una serie de otros conceptos han llegado y pueblan el tablero de trabajo del experto en EDPs no lineales: soluciones viscosas, soluciones de semigrupos llamadas *mild solutions*, etc.

Centrándonos en las ecuaciones no lineales que podremos considerar en el marco de los problemas parabólicos, uno de los tipos de ecuación más generales que se propusieron en los años 1960 era

$$\partial_t H(x,t,u) = \sum_i \partial_{x_i} A_i(x,t,u,\nabla u) + B(x,t,u,\nabla u)\,, \tag{5.5}$$

donde $\nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ y se ha de imponer al menos que $\partial_u H \geq 0$ y que la matriz (a_{ij}) sea no negativa en el sentido de las formas cuadráticas, además de pedir condiciones de crecimiento de $A_i(x,t,u,p)$ y $B(x,t,u,p)$ en las variables u y p.[138] Se supone que ello permite englobar una gran parte de los procesos difusivos en el primer término y de los procesos reactivos y convectivos en el segundo. En la aplicación a las ecuaciones de los fluidos, elasticidad, electromagnetismo y otros contextos, se trataría de un sistema de ecuaciones y no de una ecuación solitaria.

Pronto quedó claro que la multitud de fenómenos distintos que aparecían bajo tal generalidad no permitía un estudio unificado que fuese a la vez detallado y eficaz. Por ello la atención se volvió a las ecuaciones no lineales más características que tomaron desde los años 1970 protagonismo en el campo. Si prescindimos del termino $B(x,t,u,p)$, nos queda la clase de *ecuaciones difusivas no lineales*, a la que he dedicado una parte significativa de mis esfuerzos, junto a una extensa comunidad de investigadores radicados sobre todo en EE. UU., Francia e Italia, pero también en Gran Bretaña, Holanda, Israel, China, Argentina, Chile, ...

Si por el contrario uno desea poner el acento en los términos reactivos, es conveniente simplificar el proceso difusivo volviendo al Δu clásico y considerar la ecuación o sistema

$$u_t = \Delta u + f(x,t,u)\,, \tag{5.6}$$

que es el sistema de reacción difusión tratado por ejemplo en el libro de referencia [SGKM1897]. En este contexto habría que citar la influencia de los colaboradores japoneses y rusos.

5.6. Ecuaciones en medios porosos

Uno de los modelos más simples y populares de ecuación laplaciana de evolución es

$$\partial_t u = \Delta u^m\,, \tag{5.7}$$

[138] Aquí p es una manera de referirse a la dependencia de ∇u.

que fue propuesta en muy diversos contextos a lo largo del siglo XX como modelo de difusión de sustancias o transporte de calor. El nombre de Ecuación de los Medios Porosos (EMP) con que se la conoce es debido a su aplicación para describir la difusión de un gas politrópico en un medio poroso subterráneo, como sucede en la industria petrolífera, y de hecho fue propuesta por dos ingenieros, Morris Muskat en EE. UU. [Mu1937] y Leonid Leibenzon en Rusia [Le1945]. Los valores de m en este caso son o bien 2 o bien $1+\gamma$, donde γ es el exponente adiabático, y u representa la densidad del gas. Pero ya había sido propuesta por J. Boussinesq en 1903/4 para modelar la altura del agua en las capas freáticas [Bo1903], donde se introduce la ley de Darcy para relacionar la velocidad con la presión[139] y el valor del exponente m es 2. En ambos contextos *el proceso no es lineal*, y la investigación posterior ha venido a demostrar que no se parece a nada lineal.

Poco se avanzó en la teoría de la EMP hasta que los físicos soviéticos la propusieron en los años 1940/50 para modelar el transporte de calor en plasmas (a altísimas temperaturas) en el grupo del Prof. Yákov Zel'dovich [ZK1950]. Uno de sus jóvenes colaboradores, Grigori I. Barenblatt[140], con quien he tenido desde 1991 mucha amistad, escribió las famosas soluciones autosemejantes que llevan su nombre, [Bar1952, Bar1953], ver la fórmula en (5.8). Las soluciones son famosas pues reemplazan a la famosísima función gaussiana en estos procesos de difusión no lineal; son pues modelos característicos de difusiones anómalas, y tienen fronteras libres a distancia finita en vez de las colas exponenciales de la función gaussiana. Pocos años más tarde Olga Oleinik y sus colaboradores de la Univ. Lomonosov de Moscú dieron el primer teorema de existencia y unicidad de soluciones débiles, [OKC1958]. Tras este ejemplo notable de interacción Física-Matemáticas, la teoría matemática de la EMP podía desarrollarse, y con ella la teoría de la difusión no lineal[141].

Un enorme progreso se ha realizado de forma gradual e ininterrumpida desde entonces sobre las matemáticas de la EMP, que fue primero expuesto en una publicación del Prof. Aronson [Ar1986]. Por entonces el centro de gravedad

[139] Esta relación en un hecho fundamental en las matemáticas de los flujos en medios porosos, propuesta por el ingeniero francés Henri Darcy en 1856.

[140] Profesor primero en Moscú y tras 1991 en Cambridge y Berkeley.

[141] Eran los mismos años de De Giorgi y Nash, citados al final de la sección 4, y la fabulosa década de 1960 iban a empezar.

se había desplazado a EE. UU. Por aquel entonces tuve el honor de participar en el desarrollo y veintiún años después reuní en un volumen de más de 600 páginas una gran parte del progreso mucho más completo obtenido en ese período, [Vaz2007], donde también se describe la motivación física de más de una docena de aplicaciones. Contemporáneamente, los Prof. P. Daskalopoulos y C. Kenig escribieron un volumen que es complementario, [DK2007], de unas 200 páginas. Hoy día podrían escribirse algunos cientos de páginas más sobre el análisis matemático elaborado en este tema, que ha resultado ser uno de los *benchmarks* perfectos para el desarrollo de las técnicas matemáticas ligadas a la difusión no lineal, las ecuaciones degeneradas y las fronteras libres, así como del estudio de los procesos asintóticos.

5.7. Fronteras libres

Hablemos de fronteras libres por un momento. Con ese nombre se describe en la ecuación EMP recién vista el hecho de que, si por ejemplo se resuelve la ecuación en todo el espacio $\mathbb{E}_n$ para tiempos $t > 0$, a partir de una distribución inicial $u(x, 0) = f(x)$, y esta función es de soporte compacto (por ejemplo si $f(x) = 0$ para $|x| \geq R_0$), entonces esta propiedad de soporte compacto se mantiene para todo $t > 0$, estando la función $u(x, t)$ soportada en una bola quizá más grande $R(t) \geq R_0$, pero en todo caso finita. Esta es una propiedad física de gran relevancia. Aparece así una superficie Γ en el espacio-tiempo que separa los puntos en que $u(x, t) > 0$ ("zona con gas") de los puntos con $u = 0$ ("zona vacía"); $\Gamma \subset \mathbb{E}_{n+1}$ es llamada frontera libre, FL, y corrientemente la vemos a t fijo, $\Gamma(t)$.

El estudio de las fronteras libres de los procesos evolutivos era un tema favorito en los años 1970 y 1980 y abría una puerta a la interacción creativa de la Física, las EDPs, la Geometría Diferencial y la Teoría de Medida, puerta que con el tiempo dio lugar a un campo extenso. Existía una amplia comunidad americana a la que yo me uní a mi llegada al país. Existían otras tres ecuaciones o problemas que compartían y han seguido compartiendo con la EMP la atención de los investigadores que exploraron el mundo matemático de las fronteras libres móviles en el tiempo: Problema de Stefan, Problema de Hele-Shaw y la ecuación de evolución p-Laplaciana, $u_t = \Delta_p u$ con $p > 2$.

No hay lugar aquí para entrar en el detalle de este prolífico sendero no lineal, pero si citaré los trabajos fundamentales de Luis A. Caffarelli, que fue mi maestro[142], y de Avner Friedman, que escribió un extenso libro de referencia, [Fr1982].

Daré una idea de mis contribuciones más apreciadas: un artículo en que mejoraba el estudio de D. Aronson y L. Caffarelli sobre la regularidad de las fronteras libres de la EMP en una dimensión, $n = 1$, me valió mi invitación a Minnesota, [Vaz1983b]. A mi llegada allí, resolvimos en sentido negativo la conjetura de regularidad C^1 de las fronteras libres al menos en $n = 1$, y el artículo se publicó en Comm. Pure Applied Math., [ACV1985]. También caractericé cuándo se dan tiempos de espera, [Vaz1984b]. Más tarde, Aronson-Vázquez resolvimos la regularidad C^∞ de las partes móviles de las FLs para $n = 1$ [AV1987] y el mismo año Caffarelli-Vázquez-Wolanski establecimos el carácter Lipschitziano de las fronteras libres en varias dimensiones (bajo condiciones algo restrictivas pero necesarias), [CVW1987]. Se nos atascó el siguiente resultado, la regularidad C^∞ en varias dimensiones, un resultado que tardó 10 años más en ser probado (por Herbert Koch, un joven investigador de Heidelberg, Alemania, que aportó novedosas técnicas de análisis armónico).

En el año 1990 la comunidad internacional de Fronteras Libres celebró su congreso periódico en Montréal, Canadá, y allí fuimos invitados Ildefonso Díaz, Miguel Ángel Herrero y yo a organizar el evento siguiente. Lo organizamos en efecto con la inestimable colaboración de Amable Liñán, y así España tuvo el honor de albergar el "Free Boundary Problems: Theory and Applications, International Colloquium" en junio de 1993 en el marco espectacular de la ciudad de Toledo, con la presencia de más de 200 participantes, entre ellos las grandes figuras del área. En algún sentido, fue la puesta de largo de nuestros afanes de cara a nuestros paisanos, veinte años después de la graduación. Tiempos de grandes esperanzas.

[142] La reputación de Luis Caffarelli en el emergente campo de las fronteras libres se fundó en artículos fundamentales como [Ca1977] y [ACF1984] y viene recogida en el libro [CS2005].

5.8. Creación de singularidades. *Blow-up*

Por aquel entonces yo ya estaba embarcado en otra aventura en el mundo de evolución no lineal, el estudio de la propiedad de los problemas evolutivos no lineales de crear singularidades a partir de datos iniciales perfectamente inocentes (es decir, en lenguaje matemático, con datos lisos y con rápido decaimiento cuando x tiende a infinito). Este fenómeno "catastrófico" suele tomar la forma de soluciones tales que, al llegar a un determinado tiempo $T > 0$ (que es desconocido a priori), las soluciones se hacen ilimitadas en uno o varios puntos. Tal fenómeno es llamado muy expresivamente en inglés *blow-up* y en español explosión en tiempo finito. Señalemos que el escenario contrario, que es lo normal en el caso lineal, es que la solución con buenos datos exista para todo tiempo y se estabilice a algún valor asintótico. No hace falta recalcar el interés que tiene para el científico aplicado el poder prever tales disyuntivas entre fenómenos catastróficos y la apacible normalidad de la convergencia al equilibrio.

Empecé esta línea de trabajo de *blow-up versus* comportamiento asintótico más o menos durante el semestre de concentración que fuimos invitados a organizar Wei-Ming Ni, Lambertus Peletier y yo en la primavera de 1991 en el instituto IMA de la Univ. de Minnesota, entonces bajo la dirección de Avner Friedman. A este semestre acudieron por primera vez numerosos expertos soviéticos, como Grigori Barenblatt, Olga Oleinik y Shoshana Kamin (entonces en Israel). Uno de los jóvenes de Moscú, Victor Galaktionov, fue invitado a trabajar en España, primero en la UCM y luego conmigo en la UAM. En el período 1991 a 1996 Victor y yo, eventualmente con otros colaboradores, escribimos varias decenas de artículos sobre el tema del *blow-up* y del otro tema íntimamente relacionado, *la extinción completa en tiempo finito*, para ecuaciones del tipo reacción-difusión y similares. Por razones que aún se me escapan y me mortifican, no hubo manera de que la universidad española ofreciera un puesto permanente a esta figura prometedora de las matemáticas cuyo rendimiento era espectacular y ampliamente reconocido, y Victor se fue al Reino Unido en 1996, y es ahora *full professor* en la Univ. de Bath.[143]

[143] Se habla con justa preocupación hoy día de la fuga de cerebros, este es un caso ocurrido

Entre los muchos y variados artículos de esta tema y época, destacaría como publicaciones más relevantes primero [GV1995] en Archive Rat. Mech. Anal., donde se hace una caracterización completa del *blow-up* en $n = 1$ y sobre todo [GV1997] en Comm. Pure Appl. Math, donde se hace una contribución fundamental al concepto de continuación de soluciones tras un evento catastrófico de tipo *blow-up*. Años después publicamos un artículo *survey* [GV2002], que recoge un curso impartido en Chile y es muy usado en el campo junto a algunas otras referencias obligadas.

No hay obviamente lugar en este escrito para describir los muchos senderos que bifurcan de la conjunción de EPDs y *blow-up*. Solo decir que este tema atañe a muchas otras varias ecuaciones no pertenecientes a nuestro modelo reactivo-difusivo. Dos problemas en especial atrajeron poderosamente la atención de los investigadores al comienzo del siglo XXI, y son bien conocidos del público, por lo que merecen una mención.

Uno de ellos es el problema de *blow-up* o no de las soluciones de las *ecuaciones de Navier-Stokes* para los fluidos viscosos; es uno de los 7 problemas de la Clay Foundation (los famosos Millenium Prize Problems, que se pueden consultar en `http://www.claymath.org/millennium/`), y está aún casi tan abierto como siempre, a pesar de enormes esfuerzos y algunos progresos de muchos e ilustres investigadores[144]. Ver uno de los últimos avances fundamentales en [CKN1982].

El otro problema de *blow-up* y continuación tras el *blow-up* lo representa el *flujo de Ricci*, propuesto por Richard Hamilton (1982) para resolver la conjetura de Poincaré[145] y resuelto brillantemente por Grigori Perelman (2003) en lo que parece ser el resultado matemático más importante del nuevo siglo.

5.9. Comportamiento asintótico

Un tema central en el estudio de los procesos de transporte de calor y difusión es la cuestión del comportamiento a largo plazo de las soluciones, o bien en

ya en 1996.

[144]Ver mis comentarios en el artículo [Vaz2001], donde expongo un panorama histórico y mis ideas sobre el estado de la matemática pura y aplicada.

[145]Se trata de otro de los 7 Problemas Clay, el único ya resuelto.

forma de una convergencia a un equilibrio o bien en forma de un decaimiento hacia el estado estacionario con una cierta velocidad (tasa). Es lo que se llama *comportamiento asintótico*. Es bien conocido que las soluciones $u(x,t) \geq 0$ de la ecuación del calor definidas en todo el espacio y que parten de datos iniciales lisos e integrables convergen para tiempos largos a un múltiplo de la función de Gaussiana, (3.9), y eso es interpretado en términos probabilísticos (proceso de Wiener o movimiento browniano) como una forma del Teorema Central del Límite (TCL), ver [Fi2010][146].

En el caso de los procesos no lineales tales teoremas de convergencia necesitan técnicas especiales que fueron desarrolladas en los últimos decenios, y pude participar en su desarrollo en el caso de los procesos difusivos ya vistos. Así, en el caso de la EMP el papel de la función gaussiana lo juegan las *soluciones de Barenblatt*, [Bar1953], cuya expresión explícita es

$$U(x,t;C) = t^{-n\lambda}(C - k\,|x|^2 t^{-2\lambda})_+^{1/(m-1)}, \qquad \lambda = 1/(n(m-1)+2)\,, \tag{5.8}$$

donde k es una constante fija y $C > 0$ es arbitraria. A. Friedman y S. Kamin probaron en [FK1980] un primer teorema asintótico para soluciones no negativas de la EMP, del tipo (TCL) pero tomando como función asintótica una función de la familia (5.8) en vez de la gaussiana. Ello prueba que los procesos subyacentes a la EPM no son en ningún sentido asintótico asimilables a los procesos gaussianos, son en realidad *difusiones anómalas*.

En uno de mis primeros trabajos [Vaz1983b] probé una versión fina, con primer orden de error, de esa convergencia, en $n = 1$, y en un artículo con S. Kamin extendimos el resultado a funciones de ambos signos [KV1991], mientras que en [KV1988] los mismos autores demostramos el TCL no lineal para la ecuación de evolución p-Laplaciana. Muchos años después, mientras escribía un survey sobre el tema realicé una prueba general del teorema de convergencia asintótica de [FK1980] sin ninguna restricción, [Vaz2003]. Todo ello se refiere al problema en todo el espacio. Planteado en un dominio acotado el problema es totalmente distinto y el lector puede consultar el tema en [Vaz2004] y los capítulos correspondientes del libro [Vaz2007].

[146] Donde la obra de Laplace sobre el tema es discutida en detalle.

Por otra parte, como en capítulos anteriores hay multitud de bifurcaciones por senderos paralelos, algunos de gran interés y que han dado lugar a libros enteros, como [Hal1988]. Por poner un ejemplo dentro de mi trabajo, para las ecuaciones de difusión-absorción con exponentes críticos, V. Galaktionov y yo introdujimos un interesante método asintótico de sistemas dinámicos en [GV1991], uno de nuestros primeros artículos, que ha sido muy apreciado.

5.10. El mundo de la difusión rápida

Nuestro modelo base de ecuación del calor no lineal, la ecuación de los medios porosos, $u_t = \Delta u^m$, se transforma en forma notable cuando m pasa del rango de valores $m > 1$ al rango $0 < m < 1$. Aunque la teoría abstracta desarrollada por Bénilan, Brezis y Crandall, es formalmente la misma, pronto se observaron fenómenos cualitativos muy diferentes, muy importantes para las aplicaciones, como la propagación infinita, es decir la ausencia de fronteras libres (para datos no negativos). Por ello la ecuación se conoce en este rango como Ecuación de Difusión Rápida, EDR. Entre las propiedades que sorprenden más está la posibilidad de extinción completa de la solución débil cuando m es suficientemente pequeño, descrita por P. Bénilan y M. Crandall en [BC1981].

Tras algunas dudas de los estudiosos sobre el interés del nuevo tema, pues los matemáticos de las EDPs se suelen oponer a la generalización por sí misma, la opinión fue cambiando debido a diversas aplicaciones a la física (plasmas, semiconductores, límites cinéticos), al intrigante fenómeno de extinción y sobre todo a las hermosas conexiones con el Análisis Funcional y la Geometría Diferencial (flujos de Ricci y Yamabe). Parte del enorme progreso realizado está recogido en dos libros, uno del autor, [Vaz2006], y otro de P. Daskalopoulos y C. Kenig [DK2007]. Ver también la obra descriptiva muy original de John King [Ki1993].

Mi interés por el tema data de los años 80 y concierne la posibilidad de estudiar rigurosamente la difusión muy singular, caso $m \leq 0$. En un primer trabajo con mis alumnos Juan R. Esteban y Ana Rodríguez, [ERV1988], logramos una teoría con existencia y no unicidad para $-1 < m \leq 0$ en $n = 1$ con datos integrables. En el artículo [Vaz1992] demuestro la no existencia con datos integrables para ningún $m < 0$ si $n > 1$, resultado de no existencia del problema de Cauchy con datos pequeños que resulta muy inusual en la literatura y ha sido ampliamente comentado. Queda abierta la existencia para datos no integrables, tema que fue abundantemente investigado y es hoy bien conocido.

En artículos de los años 1996 y 1997 de nuevo con Juan R. Esteban y Ana Rodríguez atacamos la hoy famosa difusión logarítmica, $u_t = \Delta \log u$, que corresponde formalmente a la potencia $m = 0$ y representa el flujo de Ricci para superficies. Pero la historia se alarga en exceso y sólo deseo citar para concluir el otro modelo de difusión rápida en que hemos trabajado intensamente, el modelo p-Laplaciano, es decir, $u_t = \Delta_p u$ con $1 < p < 2$, que también cuenta con abundante literatura, ver [Vaz2006].

5.11. Feliz regreso al mundo elíptico

Durante gran parte de los años 80 y 90 trabajé como hemos ido viendo en problemas laplacianos no lineales de tipo parabólico, con o sin fronteras libres. Pero deseaba volver a las ecuaciones estacionarias (es decir, de tipo elíptico) pues una opinión extendida dice que no hay verdadera gloria laplaciana que no tenga una parte importante elíptica.

Dos temas no lineales elípticos me ocuparon en la década de los 90. Uno de ellos era el problema abierto de caracterizar la clase de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación elíptica p-Laplaciana,

$$-\Delta_p u = f \tag{5.9}$$

cuando el dato f es meramente integrable, $f \in L^1(\Omega)$.[147] El equipo formado por Philippe Bénilan, Lucio Boccardo, Thierry Gallouet, Ron Gariepy, Michel Pierre y yo mismo introdujimos una definición de solución llamada *entrópica*, que es más restrictiva que el concepto débil y garantiza la existencia y unicidad en esta clase, [BV1995]. En realidad la clase de ecuaciones que tratamos es más amplia, y a partir de este resultado se puede generar un semigrupo de L^1 contracciones para el proceso de evolución correspondiente,

[147] Y tomamos para simplificar condiciones de Dirichlet cero, o bien Ω es todo el espacio.

$u_t = \Delta_p u + f$. Este artículo ha tenido amplia repercusión. La extensión al caso en que f es una medida de Radón es un problema aún abierto, a pesar de los progresos realizados, ¡se necesita una idea nueva!

En otra dirección, Haim Brezis y yo estudiamos en [BV1997] la famosa desigualdad funcional de Hardy,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \frac{(n-2)^2}{4} \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\, dx + R\,, \tag{5.10}$$

donde el resto $R > 0$, $n \geq 3$, y la constante $(n-2)^2/4$ no puede mejorarse, cf. [Lb1983]. Esta desigualdad juega un papel importante en cuestiones de existencia y unicidad de soluciones y estimaciones a priori, que habían surgido en artículos con Ireneo Peral [PV1995]. El tema era como evaluar el resto de forma eficaz (lo que recuerda a las fórmulas del resto de la fórmula de Taylor). La fórmula del resto obtenida con Brezis fue después mejorada en un artículo con Enrique Zuazua [VZ2000] y ha dado lugar a abundante literatura.

Supongo que no hemos conseguido la elusiva gloria elíptica, pero estos artículos han sido referencia para muchos estudiosos.

5.12. Panorama de otros temas

El campo de las ecuaciones en derivadas parciales se caracteriza por la enorme variedad de intereses, sea por las peculiares propiedades de las ecuaciones, que se resisten a una descripción única, sea por la variedad de aplicaciones, que reflejan puntos de vista muy diversos, sea por la variedad de técnicas, que son transferidas continuamente de un tema a otro, pero a condición de ser adaptadas, en muchos casos de forma que se las reconoce apenas. A ello se une la costumbre de nuestra comunidad de establecer colaboraciones [148], bien por pura sociabilidad, o por aprender nuevas técnicas, problemas y horizontes. En consonancia con esta situación, no es de extrañar que el listado de temas anterior deje fuera muchos temas que también he frecuentado, algunos de los cuales son en si mismos muy interesantes. He aquí un breve apunte.

[148] Costumbre muy propiciada por las autoridades de todos los países, a veces en exceso, pues el trabajo creativo necesita sosiego y reflexión personal.

• Teoría de la simetrización. Aprendida en el curso del Prof. Giorgio Talenti en Cortona en el verano de 1979, dio de sí uno de mis primeros trabajos, la simetrización de la EMP y el cálculo de la mejor constante del efecto regularizante, [Vaz1982]. En ese artículo está contenida la idea original de comparación de concentraciones que ha sido luego muy usada, ver todo el detalle en el artículo survey [Vaz2005].

• Teoría de existencia de soluciones autosemejantes y su papel en la teoría de existencia, en la regularidad, y en el comportamiento asintótico. Deseo recordar el contraejemplo construido en [Vaz1990] a la teoría de la EMP con dos signos, o las muchas soluciones especiales construidas en el libro [Vaz2006]. Los estudios de autosemejanza llevan a delicados problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, que estudiamos en las primeras décadas con Don Aronson, Shoshana Kamin y Lambertus Peletier, y con mis alumnos.

• La teoría de soluciones viscosas: destaca el trabajo original con Luis Caffarelli [CV1999] introduciendo la definición adecuada del concepto para la EMP y demostrando que el problema está bien propuesto en este marco.

• Los problemas de la teoría termodifusiva en combustión: trabajo motivador con Luis Caffarelli, [CV1995] y después con diversos autores, véase el artículo survey [Vaz1996].

• Modelos de difusión del tipo EMP generalizada, o en medios no homogéneos, en trabajos con Arturo de Pablo y Guillermo Reyes.

• Los trabajos sobre otras ecuaciones clásicas como las ecuaciones de Stefan, Hele-Shaw, Navier-Stokes. Trabajos con Fernando Quirós, Victor Galaktionov, John King, Andrew Lacey y otros.

• Ecuaciones de tipo no difusivo. Un ejemplo son las leyes de conservación: trabajos con Miguel Escobedo y Enrique Zuazua.

• Teoría de la filtración en los suelos. Trabajos con G. Barenblatt y otros colaboradores.

• Reacción-difusión con *blow-up* en tiempo infinito. Trabajos con V. Galaktionov, W. Dold, A. Lacey e Ireneo Peral.

• Procesos de transporte de masa, generación de semigrupos, modelos de turbulencia, modelos elastoplásticos, ecuaciones cinéticas, modelos de tratamiento de imágenes,...

Puede parecer que lo anterior indica una gran fragmentación de las matemáticas, al menos de aquellas que se ocupan de la interacción con las aplicaciones. Y ello es en algún sentido verdad, mantenerse al día de las muchas cosas interesantes que suceden en los campos próximos es un esfuerzo agotador, que el público conoce mal pero ustedes Académicos, y usted, distinguido lector, sabrán por experiencia[149]. Pero sin embargo subsiste una profunda unidad de fondo de las matemáticas, que Sir Michael Atiyah resumía así: *The second half of the 20th century has been much more what I would call the "era of unification", where borders are crossed, techniques have been moved from one field into the other, and things have become hybridized to an enormous extent. I think this is an oversimplification, but I think it does briefly summarize one of the aspects that you can see in 20th-century mathematics.*[150]

5.13. Resumen de un período

Cuando, a iniciativa de la Unión Matemática Internacional, se organizó en España la celebración del Año Matemático Mundial 2000, tuve el honor de participar en el comité organizador y fui además invitado a redactar un manifiesto [Vaz2000] en el que recogía la opinión que nos habíamos hecho sobre el prodigioso avance de la investigación matemática en España a partir digamos de 1980. Era un sentimiento corroborado por datos significativos, la producción matemática española en investigación matemática se había multiplicado por 10 en unos 20 años, había grupos de investigadores en casi todas las áreas relevantes y, lo que es más importante, existían investigadores reputados a

[149]Y no digamos ya si un afán cultural con el que crecimos hace que uno quiera mirar más allá de la especialidad hacia el mundo de las ciencias más o menos próximas, o quiera no perder lo más relevante de las humanidades, como es natural en un científico integral y culto.

[150]Michael Francis Atiyah (1929-), matemático británico, Medalla Fields en 1966; en "Mathematics in the 20th Century", artículo del libro "The Evolution of...", edits. Abe Shenitzer y John Stillwell. Su CV refleja esa tensión creativa entre la gran diversidad y la unidad de fondo.

escala internacional que participaban como organizadores o conferenciantes principales en eventos del máximo nivel. Todo ello sucedía por primera vez en el país. El lamento de Echegaray había sido atendido y nuestro país entraba con paso decidido en la arena internacional, tal como habían hecho unos años antes la física, la química y la biología molecular, por nombrar a tres disciplinas de las que tenía información de primera mano.

Fruto de esta situación fueron algunos sucesos afortunados: ya en 1998 en una reunión habida en Dresde (Alemania), la Unión Matemática Internacional nos informó[151] de su idea de que España podría organizar el Congreso Mundial de Matemáticos de 2006, como así fue, en una especie de fiesta de bienvenida a nuestro país en el más alto nivel. Por el medio, diversos matemáticos españoles recibimos variados reconocimientos, símbolo de los tiempos de bonanza. Además, los índices de publicaciones, que de repente pasaron a ser omnipresentes, señalaban buenas noticias por doquier. Cierto que la expansión un tanto desordenada de la comunidad matemática española, el muy deficiente sistema de selección y un cierto descuido en la continuación de los estudios en el extranjero señalaban nubarrones en el horizonte[152], pero ese es otro tema, propio de una conversación futura.

Quien haya leído las páginas anteriores habrá notado que el relato de este capítulo es más bien personal, sin mención adecuada de los méritos de otros colegas que en este mismo período realizaron carreras afortunadas y muy reconocidas. Ello se debe a la dificultad de elegir entre tantas opciones, con el riesgo de ofender a unos y no satisfacer a otros, por la brevedad de la posible mención[153]. Pero sí me es posible reflejar aquí, como compensación, una mención que habría agradado a José Echegaray y a Julio Rey Pastor, la de los libros de investigación de autores españoles escritos en el área y que han conseguido un significativo favor del público.

En esta lista están el ya citado libro de Jesús Ildefonso Díaz sobre los problemas de frontera libre [Di1985], el famoso libro de Luis Caffarelli y Xavier

[151] A una delegación de las sociedades matemáticas españolas formada por José Luis Fernández, Sebastià Xambó y yo.

[152] Que algunas autoridades ilustradas no dejaron de percibir y prometieron reparar.

[153] Hice una mención detallada en conferencia tenida en esta Academia el 28 de Noviembre de 2011.

Cabré sobre las soluciones viscosas [CC1995], el libro de Julián López-Gómez sobre teoría espectral [LG2001], el de Stanislav Antontsev, Jesús I. Díaz y Serguéy Shmarev [ADS2002] sobre métodos de energía, el libro de Fuensanta Andreu, Vicent Caselles y José Manuel Mazón sobre el llamado "flujo de variación total" [ACM2004], y mis libros, uno con Victor Galaktionov, [GV2003], sobre estabilidad, y los dos sobre difusiones no lineales ya citados, [Vaz2006] y [Vaz2007]. A los que habría que añadir los aparecidos en áreas afines como análisis funcional y armónico, mecánica de fluidos, ecuaciones de ondas, análisis numérico o control.

6. Los temas de la última década

Tras recibir algunas distinciones en 2003, a los 30 años de la graduación, y de participar en el Congreso Mundial de Matemáticos de 2006, cuando cumplía los 60 años de edad, me planteaba cuál era el camino que debería seguir en adelante un matemático al que su país ha tratado bien y la edad convierte en senior. Podría haberme sobrevenido la carga de actividades representativas tan frecuente. Afortunadamente para mí, de este aspecto sólo he retenido el de organizador de eventos, varios de ellos en el marco incomparable de la UIMP en Santander. Por lo demás, estos últimos diez años han sido una época de trabajo de investigación intenso con algunos colaboradores brillantes y dedicados sobre nuevos temas de investigación de gran interés, acompañado de viajes y visitas muy interesantes[154]. Tengo una gran deuda de gratitud con unos pocos amigos que me ayudaron a tomar este camino.

6.1. Entropías como clave del mundo asintótico

Todo parte de las ideas de Boltzmann sobre la tendencia al equilibrio en las ecuaciones de los gases, controlada por su famoso funcional de energía H.[155] Alrededor del año 2000 surge un intenso movimiento para aplicar estas ideas a las ecuaciones del calor no lineales, de la mano de un numeroso grupo de investigadores entre los que citaré a Peter Markowich, Giuseppe Toscani y un joven español, José Antonio Carrillo. Estos dos últimos escriben un artículo muy influyente [CT2000] sobre la aplicación de un determinado funcional de entropía no lineal para probar la estabilización de las soluciones de la ecuación de medios porosos al perfil de Barenblatt. El tema no podía dejar de interesarme, y en particular el hecho de que el "método de entropías" no parecía funcionar para la ecuación de difusión rápida para valores del exponente m no próximos a 1. Un grupo formado por Jean Dolbeault en la Univ. de Paris Dauphine, Gabriele Grillo en Turín, yo mismo en la UAM, junto con la

[154] Entre ellos largas estancias en las Universidades de Texas y Berkeley.

[155] Ludwig Boltzmann (1844-1906), uno de los maestros de la Mecánica Estadística, merece ser citado en nuestro relato por la distribución de Maxwell-Boltzmann, que es la distribución de probabilidad de las velocidades de un gas asociada a la llamada estadística de Maxwell-Boltzmann; matemáticamente, es una gaussiana.

colaboración de los investigadores postdoctorales Adrien Blanchet y Matteo Bonforte, atacamos el problema y lo resolvimos en una serie de artículos en los que introdujimos nuevas versiones de la entropía y nuevas desigualdades funcionales. Un artículo survey de nuestros hallazgos fue publicado por los Proceedings de la National Academy of Sciences de los EE. UU., [B42010].

6.2. Estimaciones de tipo Harnack

Ya hemos visto como la idea de estimaciones a priori de A. Harnack sobre la oscilación controlada de las soluciones positivas de la ecuación de Laplace, $\Delta u = 0$, tuvo una profunda influencia sobre el progreso en la teoría de las ecuaciones elípticas y parabólicas, en particular gracias a los trabajos de Jürgen Moser y James Serrin en la década de 1960. La aplicación de tales estimaciones a las correspondientes ecuaciones no lineales fue laboriosa y se basa en las obras de Luis Caffarelli y Emmanuele di Benedetto. Pero el rango de pequeños exponentes de la ecuación de difusión rápida se resistía al análisis y se mantuvo por años como problema abierto. En los artículos [BV2006], [BV2010], Matteo Bonforte y yo resolvemos el problema mostrando que la versión clásica de las estimaciones no es cierta en general, pero existe una versión nueva que sí lo es. Y en artículos recientes extendemos la técnica a las ecuaciones de tipo fraccionario de las que se hablará a continuación.

6.3. La difusión fraccionaria

Una de las novedades más llamativas en la azarosa vida del Operador Laplaciano y sus variantes elípticas ha sucedido recientemente con el notable interés concedido al llamado "operador lapaciano fraccionario". Su definición no es fácil, salvo que uno tome la transformada de Fourier $\mathcal{T}$. Recordemos que en el caso del Laplaciano se tiene la fórmula

$$(\mathcal{T}(-\Delta f))(\xi) = |\xi|^2(\mathcal{T} f)(\xi),$$

aplicada a una función lisa $f(x)$, $x \in \mathbb{E}_n$, siendo ξ la variable en el espacio transformado. En resumen, el equivalente de Fourier del operador "menos

Laplaciano" consiste en multiplicar por $|\xi|^2$. Pues bien, el operador llamado Laplaciano fraccionario A_s, $0 < s < 1$, tiene como transformada la acción de multiplicar por $|\xi|^{2s}$, es lo que llamamos una interpolación. Si uno quiere una fórmula directa, el operador A_s deja de ser diferencial y se hace integral singular. El operador A_s es pues un amigo surgido del Análisis Armónico. Todo esto ya fue descrito alrededor de 1970 en los libros de Naum Landkof [Lk1972] y Elias Stein [St1970].

Lo que es totalmente novedoso es la construcción de toda una teoría de existencia y unicidad de soluciones para los problemas clásicos elípticos, parabólicos y de fronteras libres sustituyendo el operador $-\Delta$ por A_s, usualmente denotado por $(-\Delta)^s$. Esta ha sido la labor de un numeroso grupo de investigadores a partir de 2005 (más o menos), entre los que destaca el liderazgo de Luis Caffarelli. A sugerencia de Luis y en colaboración con él, y por otra parte con mis antiguos alumnos Arturo de Pablo, Fernando Quirós y Ana Rodríguez, hemos desarrollado una teoría para dos modelos de ecuación del calor con difusión de tipo Laplaciano fraccionario, que responden a motivaciones distintas que aparecen en las aplicaciones. Un artículo survey sobre el tema conteniendo los progresos hasta 2010 fue publicado en el Simposio Abel [Vaz2010]. Creo que este es un sendero laplaciano de gran futuro, la actividad es cada vez más intensa y diversos congresos internacionales reflejan el creciente interés en el tema, tanto teórico como numérico. Nuevos colaboradores, como Matteo Bonforte, Bruno Volzone, Diana Stan y Félix del Teso colaboran conmigo en las direcciones abiertas.

6.4. Fronteras libres y biología

En una colaboración con Benoit Perthame, de la Univ. de Paris VI, sede de mis primeras aventuras, y junto con Fernando Quirós de la UAM, desarrollamos un modelo de propagación de tumores basado en el modelo mecanicista de Hele-Shaw, [PQV2013]. El estudio del crecimiento de tumores, enmarcado en el gran campo de la Biología Matemática, es un tema de gran relevancia sobre el que desgraciadamente las matemáticas avanzan lentamente. Mi interés original por este tema se debe a Avner Friedman, notable promotor del uso de métodos de ecuaciones difusivas y fronteras libres en estos estudios. Existe en el momento actual un gran interés por parte de un muy numeroso grupo de investigadores de alto nivel, por lo que es de esperar un progreso sostenido tanto del conocimiento teórico como de la utilidad en la modelización y cálculo de situaciones prácticas[156].

No son estos los únicos temas nuevos, ni los viejos temas han perdido su favor, pero el recorrido termina aquí, "a la vista de la mítica Ítaca, que nos ha dado el bello viaje".[157]

[156]Entre los expertos españoles podemos citar a Antonio Bru y Miguel Ángel Herrero sin ninguna pretensión de entrar en este amplio terreno.
[157]Según el poema de Konstantinos Kavafis, que conocimos en la juventud en la música de Lluis Llach. Esperemos haber llegado aquí "llenos de aventuras y de conocimientos".

7. Apéndice. La magia de las fórmulas

Pocos matemáticos son inmunes al placer estético de las fórmulas. He aquí una página para la contemplación.

El Laplaciano en diversas coordenadas

- Laplaciano de una función en coordenadas cilíndricas (r, θ, z):

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.$$

- Laplaciano de una función en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ):

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\,.$$

Identidades vectoriales

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$$

$$\texttt{rot grad}\,\phi = \nabla\times\nabla\phi = 0$$

$$\texttt{div rot}\,\mathbf{u} = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$\nabla(\phi\,\psi) = \psi\,\nabla\phi + \psi\,\nabla\psi$$

$$\nabla\cdot(\phi\mathbf{u}) = \phi\,\nabla\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\phi$$

$$\nabla\times(\phi\mathbf{u}) = \phi\,(\nabla\times\mathbf{u}) + \nabla\phi\times\mathbf{u}$$

$$\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{u}) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\times\nabla)\mathbf{u}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\nabla\times\mathbf{u}) - \mathbf{u}(\nabla\times\mathbf{v})$$

$$\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{u}(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{u})$$

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = (\nabla\times\mathbf{u})\times\mathbf{u} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\nabla(\mathbf{u^2})$$

$$\Delta\mathbf{u} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}),\quad \texttt{rot}\,\texttt{rot}\,\mathbf{u} = \texttt{grad}\,\texttt{div}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}$$

$$\nabla\cdot(\Delta\mathbf{u}) = \boldsymbol{\Delta}(\nabla\cdot\mathbf{u})\,.$$

♠

Desearía terminar este relato con una reflexión. El enorme avance de la investigación matemática en España en los últimos 35 años es el resultado del esfuerzo, la inteligencia y la apertura mental de toda una generación a la que he tenido la suerte de pertenecer, y de las que la antecedieron y la siguen próximamente en el tiempo. Desearía que mi ingreso en la Academia se perciba como un reconocimiento más a este esfuerzo de todos y que la evolución afortunada de la que he intentado dar testimonio continue en el futuro, venciendo todas las dificultades que ahora nos preocupan.

Majadahonda y Tapia de Casariego, verano de 2013

Nota bibliográfica. He tomado las referencias históricas de diversas fuentes y libros, en particular de las fuentes generales de uso común hoy día, como Wikipedia, o "The MacTutor, History of Mathematics Archive", de la Univ. de St Andrews, cuya ayuda es incalculable y su fiabilidad excelente si es combinada con otras fuentes y lecturas, como las que están listadas a continuación. Sobre Historia de las Matemáticas he usado lecturas de diversos libros; los de C. Boyer, F. Cajori y M. Kline me han sido especialmente útiles en aspectos concretos. He usado ampliamente el material de mi artículo [Vaz2001]. Sobre historia de la ciencia española he consultado los discursos citados, a Juan Vernet y a José Manuel Sánchez Ron, entre otras varias fuentes.

Referencias

[Ac1990] Acheson, David J. "Elementary Fluid Dynamics". Clarendon Press, Oxford, 1990.

[ACF1984] Alt, Hans Wilhelm; Caffarelli, Luis A.; Friedman, Avner. *Variational problems with two phases and their free boundaries.* Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), no. 2, 431–461.

[ACM2004] Andreu-Vaillo, Fuensanta; Caselles, Vicent; Mazón, José Manuel. "Parabolic quasilinear equations minimizing linear growth functionals", Birkhäuser, Basel, 2004.

[ADS2002] Antontsev, Stanislav N.; Díaz, Jesús I.; Shmarev, Sergei. "Energy methods for free boundary problems". Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 48. Birkhäuser Boston, 2002.

[Ar1986] Aronson, Don G. *The porous medium equation.* "Nonlinear diffusion problems" (Montecatini Terme, 1985), 1–46. Lecture Notes in Math., 1224, Springer, Berlin, 1986.

[ACV1985] Aronson, Don G.; Caffarelli, Luis A.; Vázquez, Juan Luis. *Interfaces with a corner point in one-dimensional porous medium flow.* Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), no. 4, 375–404.

[AV1987] Aronson, Don G.; Vázquez, Juan Luis. *Eventual C^∞-regularity and concavity for flows in one-dimensional porous media*, Arch. Rational Mech. Anal. **99** (1987), no. 4, 329–348.

[Ba1620] Bacon, Francis. *Novum Organum*, en “Instauratio Magna”, 1620. Basil Montague, ed. y trad. inglesa “The Works”, 3 vols. (Philadelphia: Parry & MacMillan, 1854). Ed. española, Losada, Buenos Aires, 1949.

[Ban1922] Banach, Stefan. “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales”, Fundamenta Mathematicae (publ. en francés y polaco). Reimpreso por Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1993.

[Bar1952] Barenblatt, Grigori I. *On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium.* Prikl. Mat. Mekh. **16**, 1 (1952), 67–78 (en ruso).

[Bar1953] Barenblatt, Grigori I. *On some class of solutions of the one-dimensional problem of nonsteady filtration of a gas in a porous medium. Prikl. Mat. Mekh.* **17** (1953), pp. 739-742 (en ruso).

[BV1995] Bénilan, Philippe; Boccardo, Lucio; Gallouët, Thierry; Gariepy, Ron; Pierre, Michel; Vázquez, Juan Luis. *An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 22 (1995), no. 2, 241–273.

[BB2003] Bénilan, Philippe; Brezis, Haim. *Nonlinear problems related to the Thomas-Fermi equation.* Dedicated to Philippe Bénilan. J. Evol. Equ. **3** (2003), no. 4, 673–770.

[BBC1975] Bénilan, Philippe; Brezis, Haim; Crandall, Michel G. *A semilinear equation in $L^1(R^N)$,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **2** (1975), 523–555.

[BC1981] Bénilan, Philippe; Crandall. Michael G. *The continuous dependence on φ of solutions of $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$.* Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 161–177

[Ber1906] Bernstein, Serge. *Sur la généralisation du problème de Dirichlet. Première partie*, Mathematische Annalen **62** (1906), 253–271.

[BGM1971] Berger, Marcel; Gauduchon, Paul; Mazet, Edmond. "Le Spectre d'une Variété Riemannienne". Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194, Springer, Berlin-New York1971.

[BV2006] Bonforte, Matteo ; Vázquez, Juan Luis. *Global Positivity Estimates and Harnack Inequalities for the Fast Diffusion Equation,* Journal of Functional Analysis **240** (2006), 399–428.

[B42010] Bonforte, Matteo; Dolbeault, Jean; Grillo, Gabriele; Vázquez, Juan Luis. *Sharp rates of decay of solutions to the nonlinear fast diffusion equation via functional inequalities.* Proceedings Nat. Acad. Sciences, **107**, no. 38 (2010), 16459–16464.

[BV2010] Bonforte, Matteo ; Vázquez, Juan Luis. *Positivity, local smoothing, and Harnack inequalities for very fast diffusion equations.* Advances in Mathematics **223** (2010) 529–578.

[Bor1941] Borges, Jorge Luis. "El jardín de senderos que se bifurcan", Buenos Aires, 1941. Publicada en "Ficciones", 1ra. ed., Sur, Buenos Aires, 1944.

[Bo1903] Boussinesq, J. *Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrés dans le sol et sur le débit de sources.* Comptes Rendus Acad. Sci. / J. Math. Pures Appl. **10** (1903/04), pp. 5–78.

[By1968] Boyer, Carl B. "A History of Mathematics", Wiley, 1968. Reimpresión del original de 1968: Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.

[Br1973] Brezis, Haim. "Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert", North-Holland, 1973.

[Br1983] Brezis, Haim. "Analyse Fonctionelle. Théorie et applications", Éditions Masson, Paris, 1983. Segunda edición: Éditions Dunod, Paris, 1999.

[BB1998] Brezis, Haim; Browder, Felix. *"Partial Differential Equations in the 20th Century"*, Advances in Mathematics **135** (1998), 76–144.

[BL1979] Brézis, Haim; Lieb, Elliott H. *Long range atomic potentials in Thomas-Fermi theory*, Comm. Math. Phys. **65** (1979), no. 3, 231–246.

[BMP2004] Brezis, Haim; Marcus, Moshe; Ponce, Augusto. *A new concept of reduced measure for nonlinear elliptic equations,* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **339** (2004), 169–174.

[BMP2007] Brezis, Haim; Marcus, Moshe; Ponce, Augusto C. *Nonlinear elliptic equations with measures revisited.* “Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations”, 55–109, Ann. of Math. Stud., 163, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.

[BV1997] Brezis, Haim; Vázquez, Juan Luis. *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **10** (1997), no. 2, 443–469.

[Ca1977] Caffarelli, Luis A. *The regularity of free boundaries in higher dimensions.* Acta Math. **139**, no. 3-4 (1977), 155–184.

[CC1995] Caffarelli, Luis A.; Cabré, Xavier. “Fully nonlinear elliptic equations”. American Mathematical Society Colloquium Publications, 43. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[CKN1982] Caffarelli, Luis A.; Kohn, Robert; Nirenberg, Louis. *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35**, no. 6 (1982), 771–831.

[CS2005] Caffarelli, Luis; Salsa, Sandro. “A geometric approach to free boundary problems”. Graduate Studies in Mathematics, 68. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[CV1995] Caffarelli, Luis; Vázquez, Juan Luis. *A free-boundary problem for the heat equation arising in flame propagation.* Transactions Amer. Math. Soc. **347,** 2 (1995), 411–441.

[CV1999] Caffarelli, Luis; Vázquez, Juan Luis. *Viscosity solutions for the porous medium equation*, “Proc. Symposia in Pure Mathematics” volume **65**, in honor of Profs. P. Lax and L. Nirenberg, M. Giaquinta et al. eds, 1999, 13–26.

[CVW1987] Caffarelli, Luis A.; Vázquez, Juan Luis; Wolanski, Noemí I. *Lipschitz continuity of solutions and interfaces of the N-dimensional porous medium equation,* Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), 373–401.

[Caj1821] Cajori, Florian. “A History of Mathematical Notations”. The Open Court Company, Londres, 1928.

[CT2000] Carrillo, José Antonio; Toscani, Giuseppe. *Asymptotic L^1-decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity.* Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), 113–141.

[Cau1821] Cauchy, Augustin-Louis. “Cours d’analyse de l’École royale polytechnique”, Impr. royale Debure frères, Paris, 1821.

[Ch1995] Chung, Kai Lai. “Green, Brown, & Probability and Brownian Motion on the Line”. World Scientific Publishing Company, River Edge, NJ, 1995.

[Clay2000] Clay Foundation Millenium Prize Problems. `http://www.claymath.org/millennium/`.

[Dac2004] Dacorogna, Bernard. “Introduction to the Calculus of Variations”. Imperial College Press, Londres, 2004. Traducción del original francés de 1992.

[Da1747] D’Alembert, Jean le Rond. *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration.* Histoire de l’académie royale des sciences et belles lettres de Berlin, vol. 3, pages 214-219, 1747.

[DK2007] Daskalopoulos, Panagiota.; Kenig, Carlos E. “Degenerate diffusions”, EMS Tracts in Mathematics 1, European Mathematical Society, Zurich, 2007.

[DG1957] De Giorgi, Ennio. *Sulla differenziabilità e l’analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari.* Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 3 (1957), 25–43.

[Des1637] Descartes, René. “Discours de la Méthode”, Elzevier, La Haya, 1937. Ed. en esp. “Discurso del Método”, Alianza Editorial, Madrid, 2011.

[Di1985] Díaz, Jesús Ildefonso. “Nonlinear partial differential equations and free boundaries. Elliptic equations”. Research Notes in Mathematics, 106. Pitman, London, 1985.

[DH1978] Díaz, Jesús Ildefonso; Herrero, Miguel Ángel. *Propriétés de support compact pour certaines équations elliptiques et paraboliques non linéaires.* C.R. Acad. Sc. París, **286**, Série I, (1978), 815–817.

[DB1993] Di Benedetto, Emmanuele. “Degenerate parabolic equations”, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1993.

[Dir1829] Dirichlet, Peter Lejeune. *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, **4** (1829), 157–169. Cf. también "Werke", vol. 1, Ed. L. Kronecker, Berlin: Reimer, 1889; pp. 117–132.

[Dou1966] Dou, Alberto. *Upper Estimate of the Potential Elastic Energy of a cylinder,* Commun. Pure Applied Math. **19** (1966), 83–93.

[Ech1866] Echegaray, José. *Discurso de recepción en la RACEFyN,* Madrid, 1866.

[Einst1905] Einstein, Albert. *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen* (en inglés, "On the Motion of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid, as Required by the Molecular Kinetic Theory of Heat"), Annalen der Physik, 1905.

[ERV1988] Esteban, Juan R.; Rodríguez, Ana; Vázquez, Juan L. *A nonlinear heat equation with singular diffusivity.* Comm. Partial Differential Equations **13** (1988), no. 8, 985–1039.

[Ev1998] Evans, Lawrence C. 'Partial differential equations". Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[Feyn1963] Feynman, Richard. "Feynman Lectures On Physics (3 Volume Set)", Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co., 1963-65.

[Fou1822] Fourier, Joseph. "Théorie analytique de la Chaleur"; reprint of the 1822 original: Éditions Jacques Gabay, Paris, 1988. English version: *"The Analytical Theory of Heat"*, Dover, New York, 1955.

[Fr1982] Friedman, Avner. "Variational principles and free boundary problems". John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982.

[FK1980] Friedman, Avner; Kamin, Shoshana. *The asymptotic behavior of gas in an N-dimensional porous medium,* Trans. Amer. Math. Soc. **262** (1980), 551–563.

[GV1991] Galaktionov, Victor A.; Vázquez, Juan Luis. *Asymptotic behaviour of nonlinear parabolic equations with critical exponents. A dynamical systems approach.* Journal of Functional Analysis, 100, 2 (1991), 435-462. Anunciado en ruso como *Asimptoticheskoe pobedenie resheniĭ nelineĭnogo uravneniya diffuziĭ-pogloshcheniya pri kriticheskom pokazatele.* Doklady Akad. Nauk. SSSR **314**, 3 (1990), 530–533.

[GV1995] Galaktionov, Victor A.; Vázquez, Juan Luis. *Necessary and sufficient conditions of complete blow up and extinction for one-dimensional quasilinear heat equations.* Arch. Rat. Mech. Anal. **129**, 3 (1995), 225–244.

[GV1997] Galaktionov, Victor A.; Vázquez, Juan Luis. *Continuation of blowup solutions of nonlinear heat equations in several space dimensions.* Comm. Pure Applied Math. **1**, 1 (1997), 1–67.

[GV2002] Galaktionov, Victor A.; Vázquez, Juan Luis. *The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations.* Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, **8**, no. 2 (2002), pp. 399–433 (Proceedings of the Summer Course in Temuco, Chile, jan. 1999).

[GV2003] Galaktionov, Victor A.; Vázquez, Juan Luis. “A Stability Technique for Evolution Partial Differential Equations. A Dynamical Systems Approach”. PNLDE 56 (Progress in Non-Linear Differential Equations and Their Applications), Birkhäuser Verlag, 2003.

[Gal1623] Galilei, Galileo. “ Il Saggiatore”. Roma, 1623. En esp. “El Ensayador”. Trad Inglesa: Stillman Drake and C. D. O’Malley, en “The Controversy on the Comets of 1618”, University of Pennsylvania Press, 1960.

[Gal1638] Galilei, Galileo. “Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a due nuove scienze”, Leyden, 1638. Ver “Opere” (en italiano) Riccardo Ricciardi Editore, Milano-Napoli, 1953.

[GT1988] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S. “Elliptic Partial Differential Equations of Second Order”. Springer, 1988.

[Green1828] Green, George. *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, 1828; arXiv:0807.0088 [physics.hist-ph].

[Guz1975] Guzmán, Miguel de. “Differentiation of Integrals in $\mathbb{R}^n$”, Lecture Notes in Math. **481**, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[Had1902] Hadamard, Jacques. *“Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique”*. Princeton University Bulletin, 1902. Pp. 49–52.

[Fi2010] Fischer, Hans. “History of the Central Limit Theorem: From Classical to Modern Probability Theory”. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer, New York, 2010.

[Hal1988] Hale, Jack K. “Asymptotic Behavior of Dissipative Systems”. Mathematical Surveys and Monographs, 25. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[KV1988] Kamin, Shoshana; Vázquez, Juan Luis. *Fundamental solutions and asymptotic behaviour for the p-Laplacian equation*. Revista Mat. Iberoamericana **4** (1988), 339–354.

[KV1991] Kamin, Shoshana; Vázquez, Juan Luis. *Asymptotic behaviour of the solutions of the porous medium equation with changing sign*. SIAM Jour. Math. Anal. **22**, 1 (1991), 34–45.

[Kel1929] Kellogg, Oliver Dimon. “Foundations of potential theory”, F. Ungar, 1929. Reimpreso por Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 31, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967

[Ki1993] King, John R. *Self-similar behaviour for the equation of fast nonlinear diffusion*. Phil. Trans. Roy. Soc. London A **343** (1993), 337–375.

[Kli1972] Kline, Morris. “Mathematical Thought from Ancient to Modern Times”, Oxford Univ. Press, 1972. Ver pág 786.

[Kol1933] Kolmogorov, Andrei N. “Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung” (en alemán). Berlin, 1933. Translation, “Foundations of the Theory of Probability”, New York (1956).

[LSU1968] Ladyzhenskaya, Olga A.; Solonnikov, Vsevolod A.; Ural’tseva, Nina N. “Linear and quasi-linear equations of parabolic type”, Translations of Mathematical Monographs 23, Providence, RI: American Mathematical Society, 1968.

[LU1968] LADYZHENSKAYA, OLGA A.; URAL'TSEVA, NINA N. "Linear and Quasilinear Elliptic Equations", Mathematics in Science and Engineering 46, New York and London: Academic Press, 1968.

[LL1991] LANDAU, LEV L.; LIFSHITZ, EVGENY M. "Mecánica de Fluidos", Reverté, Barcelona, 1991.

[Lk1972] LANDKOF, NAUM S. "Foundations of Modern Potential Theory". Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. **180.** Translated from the Russian by A. P. Doohovskoy. Springer, New York, 1972.

[Lp1798] LAPLACE, PIERRE S. "Traité de Mécanique Céleste", Duprat, Paris, 1798–1827. Ver la edición actual de sus Obras Completas en Gallica.

[Le1945] LEIBENZON, LEONID S. *General problem of the movement of a compressible fluid in a porous medium*, Izv. Akad. Nauk SSSR. Geography and Geophysics **9** (1945), 7–10 (en ruso).

[Lb1983] LIEB, ELLIOTT H. *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities*. Ann. Math. **118** (1983), 349–374.

[Li1969] LIONS, JACQUES-LOUIS. "Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Nonlinéaires", Dunod, Paris, 1969.

[LM1968] LIONS, JACQUES-LOUIS; MAGENES, ENRICO. "Problèmes aux limites non homogènes et applications". Vol. 1, 2, 3. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17, 18, 20. Dunod, Paris 1968, 1968, 1970.

[LG2001] LÓPEZ-GÓMEZ, JULIÁN. "Spectral Theory and Nonlinear Functional Analysis". Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics Series, 2001.

[Max1865] MAXWELL, JAMES CLERK. "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field". Philosophical Transactions of the Royal Society of London **155** (1865), 459–512.

[Max1871] MAXWELL, JAMES CLERK. *Proc. London Math. Soc.* **3** (1871), 224–32; The Scientific Papers, Vol. 2, 257–66.

[Max1873] MAXWELL, JAMES CLERK. "A Treatise on Electricity and Magnetism", London, 1873.

[Mo1960] MOSER, JÜRGEN. *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations.* Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960) 457–468.

[Mo1960] MOSER, JÜRGEN. *A Harnack inequality for parabolic differential equations.* Comm. Pure and Appl. Math. **17** (1964), 101–134.

[Mu1937] MUSKAT, MORRIS. "The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media". McGraw-Hill, New York, 1937.

[Na1958] NASH, JOHN. *Continuity of solutions of elliptic and parabolic equations.* Amer. J. Math. **80**, no 4 (1958), 931–954.

[New1687] NEWTON, ISAAC. "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", 1687. En esp. "Principios matemáticos de la Filosofía Natural", Alianza Ed., Madrid, 1987.

[Ni1974] NIRENBERG, LOUIS. "Topics in nonlinear functional analysis" (Revised reprint of the 1974 original). Courant Lecture Notes in Mathematics, 6. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[OKC1958] OLEINIK, OLGA A.; KALASHNIKOV, ALEKSANDER S.; CHZOU, YUI-LIN. *The Cauchy problem and boundary problems for equations of the type of unsteady filtration.* Izv. Akad. Nauk SSR Ser. Math. **22** (1958), 667–704.

[PV1995] PERAL, IRENEO; VÁZQUEZ, JUAN LUIS. *On the stability or instability of the singular solution of the semilinear heat equation with exponential reaction term.* Arch. Rational Mech. Anal. **129** (1995), 201–224.

[PQV2013] PERTHAME, BENOIT; QUIRÓS, FERNANDO; VÁZQUEZ, JUAN LUIS. *The Hele-Shaw asymptotics for mechanical models of tumor growth.* Archive Rat. Mech. Anal., to appear.

[PS2007] PUCCI, PATRIZIA; SERRIN, JAMES "The maximum principle". Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 73, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[RyC1897] RAMON Y CAJAL, SANTIAGO. "Los tónicos de la voluntad: reglas y consejos sobre investigacion cientifica". Extracto de su discurso de ingreso en la Real Academia. Versión disponible *online*, o en papel en Editorial Gadir, 2005.

[SGKM1897] Samarskii, A. A.; Galaktionov, Victor A.; Kurdyumov, S.P.; Mikhailov, A.P. "Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations". Nauka, Moscow, 1987 (en ruso); traducción inglesa: Walter de Gruyter, **19**, Berlin/New York, 1995.

[Sa2000] Sadun, Lorenzo. "Applied Linear Algebra: The Decoupling Principle". Pearson, 2000. Second Edition, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[SR2000] Sánchez Ron, José Manuel. "El siglo de la ciencia". Taurus, Madrid, 2000.

[SR2013] Sánchez Ron, José Manuel. "Cartas a Isaac Newton". Espasa Libros, S.L.U., 2013.

[LS1950] Schwarz, Laurent. "Théorie des distributions". Hermann, Paris, 1950-1951.

[Se1959] Serrin, James, *Mathematical principles of classical fluid mechanics*, en "Handbuch der Physik", vol. VIII/I (1959), Springer-Verlag, pp. 125–263.

[Sm1983] Smoller, Joel. "Shock waves and reaction-diffusion equations". Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), Vol. 258, Springer-Verlag, New York, 1983, 1994.

[St1988] Stachel, John. "Einstein's miraculous year". Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1998.

[St1966] Stampacchia, Guido. "Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus". Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, Québec, 1966.

[St1970] Stein, Elias. E. M. Stein. "Singular integrals and differentiability properties of functions". Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[St1990] Struwe, Michael. "Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems". Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Vaz1982] Vázquez, Juan Luis. *Symétrisation pour $u_t = \Delta\varphi(u)$ et applications.* C. R. Acad. Sc. Paris **295** (1982), pp. 71–74.

[Vaz1983] Vázquez, Juan Luis. *On a semilinear equation in $\mathbb{R}^2$ involving bounded measures.* Proc. Royal Soc. Edinburgh **95 A** (1983), 181–202.

[Vaz1983b] Vázquez, Juan Luis. *Asymptotic behaviour and propagation properties of the one-dimensional flow of gas in a porous medium.* Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), pp. 507–527.

[Vaz1984] Vázquez, Juan Luis. *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations.* Applied Maths. & Optimization **12** (1984), 191–202.

[Vaz1984b] Vázquez, Juan Luis. *The interfaces of one-dimensional flows in porous media.* Trans. Amer. Math. Soc. **285** (1984), no. 2, 717–737.

[Vaz1992] Vázquez, Juan Luis. *Non-existence of solutions for heat nonlinear equations of fast-diffusion type.* Journal Math. Pures et Appliquées, **71** (1992), 503–526.

[Vaz1990] Vázquez, Juan Luis. *New selfsimilar solutions of the porous medium equation and the theory of solutions with changing sign.* J. Nonlinear Analysis, **15,** 10 (1990), 931–942.

[Vaz1996] Vázquez, Juan Luis. *The free boundary problem for the heat equation with fixed gradient condition.* En "Free boundary problems, theory and applications", Pitman Research Notes in Mathematics Series **363**, M. Niezgodka and P. Strzelecki eds., Longman, 1996.

[Vaz2000] Vázquez, Juan Luis. *Las matemáticas y los objetivos del año 2000. Un llamamiento a los matemáticos españoles.* Gaceta de la Real Soc. Matem. Española, **3**, 1 (2000), pp. 9–22.

[Vaz2001] Vázquez, Juan Luis. *The importance of Mathematics in the development of Science and Technology.* Boletín Soc. Esp. Mat. Aplicada **19** (2001), 69–112.

[Vaz2003] Vázquez, Juan Luis. *Asymptotic behaviour for the Porous Medium Equation posed in the whole space.* Journal of Evolution Equations **3** (2003), 67–118.

[Vaz2003b] Vázquez, Juan Luis. "Lecciones de Mecánica de Fluidos", Notas de los cursos impartidos en la UAM. Online.

[Vaz2004] Vázquez, Juan Luis. *Asymptotic behaviour for the PME in a bounded domain. The Dirichlet problem.* Monatshefte für Mathematik **142**, Numbers 1-2 (2004), 81–111.

[Vaz2005] Vázquez, Juan Luis. *Symmetrization and Mass Comparison for Degenerate Nonlinear Parabolic and related Elliptic Equations.* Advanced Nonlinear Studies, **5** (2005), 87–131.

[Vaz2006] Vázquez, Juan Luis. "Smoothing and decay estimates for nonlinear diffusion equations. Equations of porous medium type". Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 33. Oxford University Press, Oxford, 2006.

[Vaz2007] Vázquez, Juan Luis. "The porous medium equation. Mathematical theory". Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.

[Vaz2010] Vázquez, Juan Luis. *Nonlinear Diffusion with Fractional Laplacian Operators.* "Nonlinear partial differential equations: the Abel Symposium 2010", H. Holden & K. H. Karlsen eds., Springer, 2012. Pp. 271–298.

[VZ2000] Vázquez, Juan Luis; Zuazua, Enrike. *The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential.* J. Funct. Anal. **173** (2000), no. 1, 103–153.

[Ver1998] Vernet, Juan. "Historia de la Ciencia Española". Editorial Alta Fulla, Barcelona, 1998.

[ZK1950] Zel'dovich, Yákov B.; Kompanyeets, Aleksander S. *Towards a theory of heat conduction with thermal conductivity depending on the temperature.* "Collection of papers dedicated to 70th Anniversary of A. F. Ioffe", Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1950, pp. 61–72.

CONTESTACIÓN

DEL

Excmo. Sr. D. Jesús Ildefonso Díaz Díaz

Excmo. Sr. Presidente,

Excmos. Sres. Académicos,

Señoras y Señores.

Es para mí un honor dar la bienvenida a Juan Luis Vázquez Suárez en nombre de los miembros de esta Real Academia de Ciencias, lo que es una grata tarea por tratarse de alguien a quien conozco bien ya desde el curso 1970/71 en el que ambos éramos estudiantes de tercero de la Licenciatura de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Juan Luis Vázquez nació en Oviedo en 1946 y desde muy pronto vivió en tres ambientes diversos: los veranos en Quirós, en el valle del que eran sus padres y los inviernos entre Las Segadas y Oviedo. Hizo el Bachillerato en el Colegio Loyola, de los Padres Escolapios de Oviedo. En la web de este Colegio aparece como el alumno más brillante que haya pasado por allí en más de 50 años de historia. Y es que, como veremos, toda su vida ha estado unida a la labor bien hecha y a la excepcionalidad. Además, no podremos entender su persona, su trayectoria vital, sin aludir a su condición de asturiano, que él reivindica con una bandera ondeante en su web personal. No es difícil reconstruir su pasado pues le han hecho muchas entrevistas en la prensa, en especial en el diario ovetense *La Nueva España*, en donde el pasado año apareció una serie de artículos sobre él en la sección de Memorias. También de Las Segadas es su esposa, Mariluz García Álvarez[158], que tan presente ha estado en su vida y en sus largos viajes. Mariluz terminó la Licenciatura de Químicas en la UCM a la vez que él la de Matemáticas. Ella es también artífice del perfil vital que siempre le ha caracterizado.

Catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad Autónoma de Madrid, fue elegido brillantemente, incorporándose así al Instituto de España, para cubrir la plaza de Académico (Medalla nº 6) de la Sección de Exactas, convocada, por fin, en el BOE de 1 de febrero de 2013 tras el fallecimiento, en el 2004, del último poseedor de tal medalla, el Excmo. Sr. D. Gregorio Millán Barbany.

Según los estatutos, mis breves palabras han de dar contestación a su discur-

[158]Con quien se casó en la emblemática iglesia de San Miguel de Lillo.

so. Él se ha referido a la larga historia y a la relevancia de quienes portaron esa medalla y me ha parecido oportuno dedicar una buena parte de mi contestación a fortalecer el recuerdo que tenemos de ellos, al menos de los que han dejado una huella más profunda hasta el punto de que sus nombres acompañan hoy al de varias instituciones, asociaciones, institutos de enseñanza y premios científicos. Por la naturaleza escueta de mi cometido, esto irá en detrimento de poder descender a los detalles sobre otros comentarios que me vienen a la cabeza tras el discurso de Juan Luis Vázquez sobre el operador laplaciano. La prudencia y la voluntad de no hacer esta presentación demasiado pesada aconsejan limitarme tan solo a un mero listado de esos posibles comentarios que quizás pueda dejar para otra ocasión ante una audiencia más especializada y tan solo desarrollar ahora uno de ellos que por su naturaleza histórica puede ser más fácilmente digerible. Me ha parecido muy lúcido por su parte que, en su desarrollo más matematizado sobre el laplaciano, intercalase un par de secciones en las que hace alusión al ambiente científico que vivió esa parcela de la ciencia en nuestro país en aquellos años. A mi juicio, acierta al mencionarlo en ese contexto y subrayar así como las contribuciones españolas significaron una aportación con sello propio en una inmensa literatura científica que no ha cesado de crecer. Al referirme, más adelante, a esta etapa de nuestras vidas estaré pues contestando también su discurso. Pero antes quiero glosar la figura de Juan Luis Vázquez, sus muchos méritos y su persona, auténtico protagonista de esta sesión.

Cuenta Juan Luis Vázquez en una entrevista que le hicieron recientemente en *La Nueva España* que su andadura universitaria comenzó en el curso 1964/65 en el que se matriculó en Ingeniería de Minas, en Oviedo, "en un curso en el que de ciento y no sé cuántos aprobamos sólo dos". En octubre de 1965 se desplazó a Madrid iniciando sus estudios en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación[159]. En 1969 se matriculó simultáneamente en los estudios de Matemáticas de la UCM. Los primeros cursos los hizo como alumno libre, aunque venía con alguna frecuencia a clase, pero su presencia

[159]Relata en la serie de sus memorias en *La Nueva España* que el primer año mantuvo la duda entre esta titulación y la de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos, por lo que se matriculó en ambas. Allí fue donde habría podido conocer a Dou, tal y como se refiere en su Discurso, pues aunque Dou enseñaba en tercero su fama le hacía ser uno de los profesores más populares de la Escuela.

fue ya constante en tercero, cuarto y quinto. Esos años los describe con detalle en sus memorias; menciona que se casó con Mariluz antes de finalizar los estudios lo que tuvo repercusiones de todo tipo, en particular la necesidad de aportar un sustento económico que le llevó a aprovechar las ocasiones que se presentaban en el camino[160].

Como alumno de licenciatura, era absolutamente excepcional entre los compañeros de nuestra promoción de la UCM a la que, sin ningún género de dudas, se la puede calificar también de excepcional. No me consta que de ninguna otra hayan salido tantos Catedráticos y Profesores Titulares de Universidad, superando con creces la veintena. Hoy cinco de nosotros formamos parte de esta Academia[161]. Sin duda tuvimos unas oportunidades privilegiadas: a la brillantez de gran parte de nuestro profesorado, algunos de ellos jóvenes matemáticos que regresaban del extranjero, se unieron unas circunstancias socio-económicas más favorables.

El desarrollismo propiciado por el franquismo en la década de los 60 dio lugar a un *boom* demográfico, y por tanto a un incremento sustancial del número de estudiantes universitarios[162]. No es difícil obtener datos del gran incremento correspondiente a los años 1975 y 1976 en la media de estudios de la población española y cómo esa brusca pendiente positiva aparece paralela a la correspondiente de la población ocupada. Es decir, el aumento demográfico llega a los estudios universitarios y a una sociedad con unas mejores posibilidades de empleo que en los años anteriores. En particular, la sociedad española requiere en esos años un rápido aumento de profesores de Matemáticas a todos los niveles de enseñanza y, en concreto, la universidad, caracterizada por un profesorado permanente muy reducido, debía resolver el problema de la enseñanza en sus aulas tan masificadas mediante los profe-

[160]En sus primeros años en Madrid dio clases en una academia privada y también tradujo dos libros del alemán: *Atlas de las Matemáticas, 1*", Alianza Atlas, Alianza Editorial, Madrid, 1974 e *Introducción a la Topología Diferencial*, Th. Bröcker, K. Jänich, Editorial AC, Madrid, 1977.

[161]El tercer Académico de número, como nosotros, es Pedro Jiménez Guerra, José Rodríguez Sanjurjo y Miguel Ángel Herrero son Correspondientes Nacionales.

[162]Véase, por ejemplo, J.I. Díaz y M. de León, *Elementos para una historia de la Matemática en la España democrática*. En la enciclopedia *España Siglo XXI* (S. del Campo y J. F. Tezanos, Directores), Capítulo 3 del Volumen 4: *Ciencia y Tecnología*, Editorial Biblioteca Nueva, Madrid, 2009, páginas 101-178.

sores no numerarios (PNNs) reclutados entre las generaciones de licenciados de la década de los 70[163]. Ese mayor número de alumnos y esas posibilidades de trabajo, inexistentes para generaciones anteriores, cristalizan en hechos sin parangón en tiempos pasados: un elevado tanto por ciento de las promociones de matemáticos (como la nuestra) permanecen en la universidad tras finalizar sus estudios y además gozan ya de la posibilidad de realizar tesis doctorales en nuestro país o bien con directores de tesis de otros países con los que ya se tenían contactos precedentes. Se suceden así, en los 70, unas promociones de gran calidad, nombres que hoy día constituyen una parte sustancial del elenco de nuestros departamentos de matemáticas. Las fuentes de financiación provenientes del Ministerio, Embajadas y Fundaciones comienzan a ser más que simbólicas. Esos jóvenes, a su vez, reciben la posibilidad de ocupar puestos de profesores permanentes y, tras ello, forman a nuevas generaciones con más posibilidades que las anteriores. Hubo una renovación del capital humano de la universidad española y la instauración de la democracia normalizó el rendimiento científico separándolo del de reivindicaciones de carácter más político que, en algunos casos, llevaron a eclipsar brillantes carreras científicas incipientes.

Para dar idea de la brillantez de Juan Luis Vázquez como alumno puedo contar aquí los recuerdos de Baldomero Rubio, compañero de la Facultad de Matemáticas de la UCM y persona a quien le debo muchas cosas[164], entre otras una amistad mantenida tras haber sido alumno suyo en primero y tercero de carrera. Baldomero y Miguel de Guzmán, junto a otros profesores, formaban parte de la Comisión encargada de las pruebas de la *Reválida de fin de Licenciatura* de mi promoción, en el curso 1972/73, y se quedaron perplejos cuando tras corregir los 10 ejercicios propuestos de entre todas las asignaturas de la carrera vieron que un alumno, Juan Luis Vázquez, había hecho los 10 ejercicios para un 10, lo que era muy excepcional para esa prueba.

[163]Desgraciadamente, dentro de unos años pasarán en su mayoría a la jubilación, sin un relevo generacional claro pese a tantos matemáticos galardonados entre los más jóvenes.

[164]Baldomero Rubio fue uno de mis pigmaliones. No cesó de animarme a que me presentara a la plaza de Adjunto de 1978 y a la Agregaduría de 1980. Era Decano de la Facultad cuando se convocó la plaza que me permitió regresar a Madrid tras mi paso por Santander. De hecho, mi instalación en el bello barrio en el que tengo la suerte de habitar desde 1984, a tan solo unos metros de su domicilio, se debe a una de nuestras cenas en su casa.

No es nada extraño que el tema de las Ecuaciones Diferenciales fuera un "atractor"(jerga que utilizamos en nuestro campo) en nuestra trayectoria matemática tras la licenciatura. El gran artífice de este hecho, en España, era la persona de Alberto Dou a la que ya se ha referido él en su discurso, pero esa atracción se materializó en nuestro caso en dos trayectorias inicialmente distintas. Juan Luis se encuadró en el curso 1973/74 en el Departamento de Geometría y Topología de la UCM, en particular en el grupo de Sistemas Dinámicos que dirigía Enrique Outerelo. En lo que a mi atañe, Dou me atrajo hacia su grupo, en el Departamento de Ecuaciones Funcionales, ya desde finales de su curso de 3º, en Junio de 1971, cuando me propuso que le ayudase con las clases prácticas de su curso en el ICAI, cosa que simultaneé desde comienzos de Octubre de aquel año con la finalización de mi licenciatura. Luego hice la *Tesis de Licenciatura*, en vez de la Reválida, bajo la dirección de José Luis Andrés Yebra que acababa de llegar de París tras hacer la tesis con J.L. Lions. Mi tesina versaba sobre una reciente noción de operadores no lineales (denominados pseudo-monótonos) que un jovencísimo colaborador de J.L. Lions había introducido logrando un gran impacto que rápidamente se extendió a Estados Unidos y otros países punteros. Aquel joven colaborador no era otro que Haïm Brezis[165] al que Juan Luis ha dedicado especial atención en su Discurso.

Pero retomemos los recuerdos. Explicaré por qué fui yo quien le invitase a formar parte de lo que él ha denominado el "grupo español de Brezis". El poder disponer de una ubicación en aquel departamento desde cuarto de carrera me permitió una constante comunicación con sus integrantes y asistir a sus conferencias y cursos de doctorado antes incluso de completar la licenciatura. A través de la Embajada de Francia, Dou y Guzmán invitaron a Brezis en 1974. Desde entonces mantuve un estrecho contacto con él por medio de numerosos viajes a París, ya que por motivos familiares tuve que renunciar a una Beca de la Embajada Francesa que recibí en 1974. Me propuso unos problemas que tuve la suerte de resolver rápidamente y leí mi tesis[166] tempranamente en Octubre de 1976.

[165]Nacido en Francia, en 1944, en 2012 fue considerado por la Sociedad Europea de Matemáticas como uno de los 4 matemáticos europeos vivos más citados. Desde 1999 es Correspondiente Extranjero de esta Academia.

[166]En varios lugares he dejado constancia ya de que quien me propuso los problemas de mi

Me pareció una pena que otros compañeros no se aprovecharan de las oportunidades y retos científicos que estaba intuyendo y en la primavera de 1976 comencé a movilizar al grupo de gente que él ha mencionado en su discurso, y en primer lugar a él mismo. Como he podido refrescar la memoria con varios de ellos, esa movilización amistosa fue previa a su contratación en el Departamento de Ecuaciones Funcionales de la UCM[167].

Viendo su trayectoria vital y su lista de publicaciones[168], creo que acerté. Pero es claro que eso no resta un ápice a la meritoria obra monumental de Juan Luis Vázquez: de no haber sido yo, otro le hubiese encaminado inicialmente a otro campo en el que él habría mostrado sus cualidades excepcionales.

En el seminario permanente de EDPs del que fui propulsor, al que se ha referido Juan Luis, mi papel era el de catalizador del grupo: iba marcando los artículos que leíamos y exponíamos entre nosotros. Propicié el contacto de todos con Brezis, Bénilan, Véron y muchos otros. En general yo sugerí el punto de partida de los temas de sus tesis, pero en el de Juan Luis Vázquez me limité a asesorarle inicialmente y a proponerle el tema de su último capítulo.

La mayoría íbamos juntos a todos los congresos que podíamos, aquí y en

tesis fue Haïm Brezis y que conté con la guía cercana de su primer alumno Philippe Bénilan. Como Director oficial de la tesis figuró Alberto Dou. Su maestría modeló mi carrera desde Junio de 1971. Tuve el honor de firmar con él un bello artículo (el último sobre ecuaciones diferenciales de su dilatada lista de publicaciones). Él fue quien me propuso, junto a otros Académicos, para las plazas de Correspondiente y Numerario para las que fui elegido en 1991 y 1997 respectivamente.

[167]Tenía trato amistoso con Dou, Guzmán y especialmente Baldomero Rubio y no hizo falta tener que interceder ante ellos pues sus muchos méritos se defendían solos. Me limité a informarles de las convocatorias de esas plazas. Juan Luis estaba en el Departamento de Geometría y Topología, otros dos compañeros de curso también aceptaron venir a los seminarios: Miguel Ángel Herrero y Sixto Jesús Álvarez Contreras quienes, como yo, daban clases en el recién inaugurado Colegio Universitario Arcos de Jalón de la UCM (el primero con contrato en el Departamento de Análisis y el segundo contratado en mi propio Departamento). Ambos dieron clase también sobre Bioestadística en la Universidad de Alcalá de Henares. Mi hermano Gregorio tenía un contrato en la Escuela de Caminos y no se incorporaría al Departamento de Ecuaciones Funcionales hasta años después, como también fue el caso de José Carrillo (quien me fue presentado en París por Haïm Brezis) y de Francisco Bernis (compañero de Andrés Yebra en la Escuela de Ingenieros de Telecomunicación de Barcelona).

[168]Ninguna antes de esto en revista alguna. En esos años Juan Luis participaba en la Coordinadora Nacional de PNNs y dedicó mucho tiempo y esfuerzo en esa dirección y a su militancia política de entonces. En sus memorias hace alusiones de agradecimiento a Outerelo, en cuyo libro de homenaje al jubilarse testimonió admiración como profesor y como erudito.

Francia. En muchos casos apretados en un solo coche, con recorridos de varios miles de kilómetros y sufragándonos los gastos de nuestro bolsillo. Poco a poco aquel despliegue de energías se fue reconociendo. Saqué la plaza de Adjunto en la UCM en el 1978 y luego la de Agregado, esta vez en la Universidad de Santander, donde permanecí por dos cursos, desde Octubre de 1980. Pese al relativo éxito, no tenía capacidad para consolidar en plazas permanentes a la gente del grupo y fue cuando Juan Luis se movió a la Autónoma de Madrid en busca de mejores perspectivas.

Desde Octubre de 1981 Juan Luis inició una carrera científica enteramente propia. Quizás sea oportuno en este instante acudir a dos máximas de la cultura griega: la primera, grabada en el atrio del templo de Apolo en Delfos y atribuida a alguno de los Siete Sabios, dice "conócete a ti mismo". La otra, formulada por el poeta Píndaro y que Unamuno mencionó en Niebla, afirma: "Ojalá llegues a ser el que eres". Estos dos pensamientos continúan presentes y fueron reinterpretados, entre otros, por Sócrates, que puso de relieve la importancia de la conciencia crítica como el eje más firme para construir la felicidad, y por Goethe con su máxima "realiza al máximo las posibilidades que llevas contigo".

Su primer curso en la Universidad Autónoma de Madrid lo hizo como Profesor Agregado Interino y en el curso siguiente inició una serie de estancias largas en la Universidad de Minnesota de los EE.UU.[169], que le permitió abrir una estrecha colaboración con prestigiosos matemáticos norteamericanos, como Donald Aronson, Avner Friedman, Mike Crandall y especialmente Luis Caffarelli, que ha mantenido hasta nuestros días y de la que nos hemos beneficiado también numerosos especialistas españoles. Una lista exhaustiva de sus publicaciones se puede encontrar en la base de datos matemáticos Mathscinet, la más usada en la profesión. En ella Juan Luis Vázquez es autor de más de 250 artículos de investigación. Como índice de calidad, en enero de 2014 había sido citado 4452 veces por 1816 autores, y tiene un artículo citado más de 500 veces en otros de la misma base, lo que lo convierte en uno de los

[169]En 1991 fue co-organizador de un semestre de concentración en el IMA de esa universidad, al igual que está siendo también co-organizador del *Free Boundary Programme*, en el Newton Institute de la Universidad de Cambridge del Reino Unido, durante el primer semestre de 2014.

10 más citados del mundo en el área 35, *partial differential equations*, de la clasificación AMS. El índice de impacto h es 30, no superado en matemáticas en España. El número de sus colaboradores en estos artículos ronda los 90, de 24 países, entre ellos 2 Medallas Fields (P.L. Lions y C. Villani). Ha dirigido 11 tesis doctorales y buena parte de sus colaboraciones ha tenido lugar con jóvenes matemáticos de muchos paises a los que él ha brindado su apoyo.

Desde 2003 viene siendo asiduamente uno de los ocho científicos españoles más citados según el Institute of Scientific Information.

Su artículo más citado apareció en 1984. Trata sobre el principio fuerte del máximo para ecuaciones elípticas no lineales que mucha gente conoce como el "Principio de Vázquez". Su libro de 2007, en la Oxford University Press, sobre la Ecuación de los Medios Porosos es, objetivamente, la mejor referencia matemática sobre los procesos de difusión no lineales y figura, por ejemplo, en la clasificación por años de la base de datos de libros de Mathscinet, como el segundo más citado del mundo en su sección 35 (Ecuaciones en Derivadas Parciales) el año de su publicación 2007. Es autor también de otros libros en editoriales internacionales de prestigio que son ya referencia obligada en el campo. Sus dotes como divulgador, algo que ha quedado patente esta tarde, fueron reconocidas en el 2001, cuando recibió el Premio de Divulgación de la Sociedad Española de Matemática Aplicada por su artículo *La importancia de las Matemáticas en el desarrollo de la Ciencia y de la Tecnología.*

En 2003 recibió el Premio Nacional de Investigación "Julio Rey Pastor"de Matemáticas y Tecnologías de la Información y Comunicaciones[170].

Todas estas distinciones se quedan cortas al poder afirmar que Juan Luis Vázquez ha sido el primer matemático español en la historia en ser invitado a impartir una conferencia plenaria en uno de los Congresos Internacionales de Matemáticos (ICM) que se vienen celebrando cada cuatro años desde su creación en 1897. Lo realizó en el ICM celebrado en Madrid en el 2006[171].

La lista de conferenciantes que acudieron al congreso internacional celebra-

[170]La primera ocasión que se otorgó a un matemático desde su instauración, ya que la asignación del premio se comparte secuencialmente con especialistas de Tecnologías de la Información y Comunicaciones.

[171]Sobre la modesta participación española en los ICM véase G. Curbera: Una mirada histórica a los International Congress of Mathematicians, *Arbor*, vol. 183, núm. 725, 2007.

do en El Escorial, en Junio de 2007, con motivo de la celebración de su 60 aniversario es impresionante: es casi imposible mencionar a alguno de los más reputados especialistas en difusión no lineal de los últimos 30 años que no figure en tal elenco. El aprecio hacia Juan Luis no se limita a su obra científica, también a sus amistosas relaciones con todos ellos. En la entrevista que le hicieron a Luis Caffarelli en *La Nueva España* por aquel motivo señala como grandes dotes de Juan Luis Vázquez su intuición y originalidad, incluso al considerar temáticas que no habían sido tratadas previamente en la literatura.

Además, Juan Luis ha dedicado importantes esfuerzos a la gestión científica en nuestro país: fue Presidente de la Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA) de 1996 a 1998, Miembro fundador y miembro de la primera Junta de Gobierno (2004-2009) de la Confederación Española de Sociedades Científicas (COSCE) y Presidente de la Comisión de Estudio Lecyt (2009-2010). De 2007 a 2010 fue también Presidente de la Comisión Científica de la Real Sociedad Matemática Española (RSME).

No debo dejar de mencionar que Juan Luis Vázquez es miembro del Comité Editorial de destacadas revistas internacionales y eso, unido a todo lo antes comentado, junto a su dilatada experiencia como organizador de casi un centenar de cursos, escuelas de verano, congresos, etc., hacen de él uno de los matemáticos españoles con mayor proyección fuera y dentro de nuestras fronteras. Ha ganado en estos 30 años y pico una certera reputación de investigador que combina la tradición clásica con la búsqueda continua de la innovación y el estudio de los temas de frontera, y de haber inspirado a un buen número de jóvenes investigadores de diversos países.

Por acabar con este punto de mi contestación, señalaré que una de las pasiones de Vázquez es el conocimiento de otras lenguas[172]. Habla fluidamente inglés, francés, alemán e italiano, y con diferentes destrezas, el ruso, catalán y el portugués, además de amar, conocer y emplear la lengua latina. Su condición de "asturiano de la diáspora" ha sido objeto de varias distinciones no académicas[173].

[172] "Viajar y aprender idiomas son un método científico", ha citado en alguna ocasión.

[173] "Asturiano del mes", distinción de La Nueva España, Septiembre de 2003, y personaje seleccionado en el libro *Asturias de mis amores*, de Alejandro López Pedrero, Ediciones

Permítanme que dedique ahora unos escuetos comentarios históricos sobre algunos de los académicos que portaron la Medalla 6 asignada a Juan Luis Vázquez desde su elección el 29 de mayo de 2013[174]. Se trata de una medalla que no tiene *per se* más denominador común que el estar asignada a la Sección de Exactas. Sin embargo, se da la circunstancia de que todos sus portadores han estado ligados a la Física-Matemática y varios de ellos a la Ingeniería. Conviene recordar que las Facultades de Ciencias no fueron creadas hasta la Ley Moyano de 1857. Previamente, los estudios de Matemáticas estuvieron integrados en la Facultad de Filosofía. Por el contrario, los estudios politécnicos aparecen con mayor antelación. Por ejemplo, la Escuela de Caminos, fue creada ya en 1802 por el insigne Agustín de Betancourt (1758 - 1824)[175]. No debe extrañar pues la presencia de tantos ingenieros en la Real Academia de Ciencias ya desde su fundación en 1847.

Desde el Académico Fundador Agustín Valera y Viaña (1801-1879), nombrado por los dieciocho Académicos designados por la Reina Isabel II en 1847, hasta la fecha quizás se pueda decir que el nombre de mayor impacto popular de entre los Académicos de la Medalla 6 ha sido José Echegaray y Eizaguirre (1832-1916), quien unió a sus muchos méritos científicos, y de gestión a nivel de Estado, el de Premio Nobel de Literatura en 1904. Alumno nº 1 de su promoción en la Escuela de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos con tan sólo veinte años, simultaneó su pasión autodidacta hacia las matemáticas, con otras muchas actividades que como él mismo reconoció en su autobiografía[176] le procuraban un mayor sustento económico.

Por todos es reconocida su enorme capacidad de trabajo, la trascendencia para la matemática española de sus cursos sobre materias que eran innovadoras para nuestro país, aunque no lo eran tanto fuera de nuestras fronteras, como por ejemplo el Cálculo de Variaciones (1858) o la Teoría de Grupos de Galois (1897). Su aportación matemática más citada fue su Discurso de

---

Azulcel, Avilés, 2010.

[174]Como señalé en el Discurso Inaugural del curso 2009/10 (J. I. Díaz, *Observación y Cálculo: los comienzos de la Real Academia de Ciencias y sus primeros Correspondientes Extranjeros*, RACEFyN, 2009) las 36 medallas iniciales no datan de 1847 pues no fueron instauradas hasta 1856. Desde entonces el número de académicos ha sufrido diversas variaciones hasta alcanzar el número actual de 54, en 2001.

[175]Nombrado Correspondiente Extranjero de la Academia de Ciencias de París en 1807.

[176]J. Echegaray, *Recuerdos*, 3 vols. Ruiz Hermanos editores, Madrid, 1917.

recepción en la Academia en 1866, *De las Matemáticas puras en España.* Con tan solo 31 años, su discurso armó un gran revuelo por alimentar una polémica que venía ya de antes y que casi se alargaría hasta los escritos de Laín Entralgo[177].

La rotundidad del título de su discurso y el tono provocativo del mismo ha sido desde entonces mencionado por numerosas personas con diferentes propósitos. Aquel Discurso también recibió críticas negativas. La primera de ellas apareció en la prensa y fue firmada por F. Picatoste[178], profesor de Matemáticas en el Instituto San Isidro de Madrid. También algunas de las alusiones de Julio Rey Pastor[179] en 1915 iban en esa dirección. Alegaba el matemático riojano, entre otras cosas, que aquellas meritorias memorias del Premio Nobel ignoraban las contribuciones más recientes de matemáticos que cambiaron el curso de la disciplina como las de Gauss y Cauchy, por citar tan solo a dos de una larga lista. Como investigué personalmente en la preparación del Discurso de inauguración del Curso 2009/10, previamente a Echegaray ya hubo diversos españoles que habían tenido un cierto trato con uno y con otro hasta el punto de que Gauss fue elegido Correspondiente Extranjero en 1848 y Cauchy fue el único de la lista de candidatos que no fue refrendado, probablemente por razones de tipo político[180].

A mi modesto entender, siendo consciente de que los episodios históricos se han de reconstruir dentro de los parámetros de su tiempo, el título y el tono que eligió aquel joven académico hubiese sido más coherente si hubiese emanado de alguien con publicaciones originales en esa dirección o bien tuviese una vocación clara de hacerlo en un inminente futuro. Pero es conocido que la lista de publicaciones de Echegaray[181] no incluyó ningún trabajo que se

---

[177]Enrique García Camarero y Ernesto García Camarero (eds.), *La polémica de la ciencia española*, Alianza, 1970 Madrid.

[178]F. Picatoste, 1866, *El discurso del señor Echegaray en la Academia de Ciencias.* Las Novedades. Madrid 17 de Marzo de 1866.

[179]Discurso de 1915 en Valladolid: Discurso inaugural de la sección primera (Ciencias Exactas) de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias.

[180]Tuve la suerte de encontrar la carta de agradecimiento de Gauss (y de muchos otros) cuya existencia y paradero se desconocía incluso en la Fundación Gauss de Göttinguen. Véanse más detalles en mi monografía antes citada.

[181]Echegaray cultivó la erudición como un fin en sí mismo (algo a lo que se refiere Juan Luis Vázquez en su discurso). Véase el extenso estudio realizado en J.M. Sánchez Ron, José Echegaray: entre la ciencia, el teatro y la política, *Arbor*, 2004, 601-688.

pudiese calificar de medianamente original respecto de los resultados conocidos en su tiempo, y mucho menos aún en Matemática Pura. Preparando esta contestación he encontrado un dato que me parece indicativo: a petición propia, tan sólo un año más tarde de su discurso, se trasladó de la Sección de Ciencias Exactas a la Sección de Ciencias Físicas por acuerdo de 27 de enero de 1868. También he comprobado que Echegaray no intervino en la propuesta como miembros de esta Academia de los pocos matemáticos que comenzaron a producir resultados matemáticos originales, con algún impacto internacional, como fueron los casos de los Académicos Zoel García de Galdeano y Yanguas (elegido Correspondiente en 1884), Eduardo Torroja y Caballé (elegido Numerario en 1893) o Ventura Reyes y Prósper (elegido Correspondiente en 1911), por citar tan solo a los anteriores a Julio Rey Pastor, quien no ingresó hasta 1920. De entre todas las propuestas (tan solo 7) que firmó Echegaray durante los 50 años de su dilatado paso por esta Academia, la única relativa a la Matemática Pura fue la que hizo 33 años más tarde cuando en 1889 firmó la propuesta de nombramiento del gran matemático portugués Francisco Gomes Texeira (1851-1933)[182]. En esos momentos Echegaray era Presidente del Ateneo de Madrid, y ya había sido, repetidas veces Ministro. Echegaray fue Presidente de la Academia por dos veces: de 1894 a 1896 y de 1901 hasta su fallecimiento en 1916, habiendo sido también Vicepresidente de 1890 a 1892[183]. En 1907, a propuesta de Ramón y Cajal, la Academia de Ciencias creó la Medalla Echegaray y se le concedió a José Echegaray la primera de ellas.

Desde 1933 hasta su fallecimiento en 1950, la Medalla 6 la portaría Esteban Terradas e Illa. Se ha escrito mucho sobre la posible influencia de razones políticas en su fracaso en 1931 en la Oposición a la Cátedra de Ecuaciones Diferenciales de la Universidad Central[184], lo que sin duda motivó el

[182]Diez años más tarde, su *Tratado de las Curvas Especiales Notables* fue premiado, en 1899, por esta Real Academia de Ciencias. Una versión francesa, corregida y aumentada, se publicó en 1908 bajo el título *Traité des courbes spéciales remarquables*. La versión francesa Binoux recibió en 1917 el premio de la Academia Francesa de Ciencias y fue reeditado en dos ocasiones: en 1971 por Chelsea Publishing Co., N. York y en 1995 por Éditions Jacques Gabay, París.

[183]No ocupó la Cátedra de Física Matemática de la Universidad Central hasta el 1905. Fue Presidente de la Sección de Matemáticas de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (1908); y primer Presidente de la Sociedad Matemática Española (1911).

[184]Que luego ocuparía desde 1941.

estrambótico título de su Discurso de recepción en la Academia: "Programa de un curso sobre ecuaciones diferenciales". Sus vinculaciones políticas fueron muy explícitas pero este no es el lugar ni la ocasión para comentarlas. Fue autor del que creo que podemos considerar como el primer artículo original[185] de un científico español sobre el Cálculo de Variaciones, tema de su participación en el Congreso Internacional de Matemáticos de Cambridge de 1912. Parece oportuno, en esta singular ocasión de hoy, mirar hacia atrás en la historia de la participación española en los Congresos Internacionales de Matemáticos a la que me he referido antes. Si la primera comunicación original española escrita no aparece hasta 1912, la conferencia plenaria de Juan Luis Vázquez en el de 2006 atestigua las dimensiones internacionales de la valoración de sus contribuciones y, en cierto modo, de toda la comunidad investigadora española en las presentes fechas.

Volviendo a la figura de Terradas, y sin ningún ánimo de ser exhaustivo, de entre las muchas cosas que se pueden ilustrar sobre su carrera científica yo señalaría su multidisciplinar erudición, que compaginó con numerosos puestos de gestión y responsabilidad[186] en el Instituto Nacional de Técnica Aeronáutica (INTA), que hoy lleva su nombre, de cuyo Patronato fue su primer Presidente. Propició que Rey Pastor plasmara un giro en su interés matemático hacia las ecuaciones de la física-matemática con la publicación del texto de sus conferencias[187] allí. Me parece muy relevante su intervención en la visitas a Madrid de Einstein en 1923, de von Kármán en 1948 y de von Neumann en 1949[188],[189], entre muchos otros.

Otro antecesor de Juan Luis Vázquez, en la Medalla 6, fue Pedro Puig Adam (1900-1960). Poco se puede añadir sobre Puig Adam a lo mucho escrito, in-

[185]Sur le mouvement d'un fil. *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2, 250-255, 1912.

[186]La presencia de investigadores matemáticos activos en puestos de responsabilidad social es un tema que se presta a una interesante reflexión. Una figura muy ilustrativa en ese sentido es la de J.L. Lions (véase el libro A. Dahan-Dalmedico: *Jacques-Louis Lions, un mathématicien d'exception entre recherche, industrie et politique*, Éditions La Découverte, coll. Histoire des Sciences/Textes à l'appui, Paris, 2005).

[187]J. Rey Pastor, *Los problemas lineales de la Física.* Instituto Nacional de Técnica Aeronáutica. Madrid, 1955.

[188]Véase, por ejemplo, J.M. Sánchez-Ron: *La Física Matemática en España: de Echegaray a Rey Pastor*, Arbor, 1991, pp. 9-59.

[189]De quien prologó la primera versión de su famoso libro de Mecánica Cuántica.

cluso más allá de nuestras fronteras, sobre sus extraordinarias aportaciones a la Didáctica de la Matemática. Yo quisiera subrayar tan sólo algunas de sus incursiones en la Matemática Aplicada con una notable intuición anticipadora y que quizás su extremada modestia le llevó a mantener en un segundo plano frente a la omnipresencia de la obra de Rey Pastor. Recordemos que su tesis doctoral de 1921 trataba sobre problemas de la Mecánica Relativista Restringida, cuando las teorías de Einstein eran conocidas por muy pocos en España. Señalemos también que en su Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias, en 1952, hizo mención a trabajos suyos sobre fracciones continuas que resuelven cuestiones conectadas a la obra de Norbert Wiener, quien visitó Madrid en 1945, dando las primeras aplicaciones de las máquinas de cálculo automático. También es digno de mencionar su trabajo *Sobre la estabilidad del movimiento de las palas del autogiro* (Revista de Aeronáutica, 1934), en el que respondió al problema que le planteó Juan de la Cierva, que tenía en construcción un modelo de autogiro para velocidades mayores que las ya ensayadas, Su modelización y resolución numérica confirmaron plenamente las intuiciones de De la Cierva. Hoy el nombre de Puig Adam lo porta la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas[190] así como un Instituto de Educación Secundaria en Getafe.

El anterior portador de la Medalla 6 a Juan Luis Vázquez fue el ingeniero aeronáutico Gregorio Millán Barbany (1919-2004) a quien tuve la suerte de tratar estrechamente puesto que fue Presidente de la Sección de Exactas desde junio de 1992 hasta su fallecimiento. Sus múltiples cualidades le llevaron a jugar un papel importante en el desarrollo científico y tecnológico español. Como señaló su discípulo más notable, el Académico Amable Liñán[191], desde 1945, cuando terminó sus estudios de Ingeniería Aeronáutica con el número uno de su promoción, hasta 1957, su actividad estuvo dedicada a la docencia e investigación en la Escuela de Ingenieros Aeronáuticos y en el INTA. En este periodo hizo contribuciones muy importantes a la aerodinámica y a la formulación y análisis de los procesos de combustión.

Gregorio Millán inició su actividad investigadora en combustión después de la mencionada visita de Teodoro von Kármán al INTA, donde impartió un

[190]Quienes celebran el *Día escolar de las matemáticas*, el día de su nacimiento.
[191]El País, 3 de Diciembre de 2004.

ciclo de conferencias sobre aerodinámica transónica y supersónica. Tras su visita, von Kármán, que se había propuesto desarrollar el análisis multidisciplinar de los procesos de combustión, solicitó la colaboración de Gregorio Millán iniciándose una estrecha relación profesional y personal. Millán creó en el INTA el Grupo de Combustión en el que se encuadró Amable Liñán. Los resultados de aquel grupo aparecieron en diversas publicaciones internacionales y fueron también recogidos en la monografía publicada en 1958 por Gregorio Millán con el título *Aerothermochemistry*. Millán acompañó a von Kármán durante el curso 1951/52 en el que colaboró con la docencia que éste impartió en la Sorbona de París.

Su Discurso de recepción se demoró más de lo habitual desde su elección como Académico, principalmente por sus responsabilidades como gestor[192]. Lo compensó con creces ofreciendo en 1975 una voluminosa memoria *Problemas matemáticos de la mecánica de fluidos; estructura de las ondas de choque y combustión* de un gran valor científico.

Como miembro de la Sección de Exactas puedo dar testimonio de sus grandes dotes de gestión constructiva durante su presidencia. A él se debió la propuesta inicial del Programa de Promoción de la Cultura Científica de esta Real Academia que más tarde impulsó el entonces Presidente de la Academia (Ángel Martin Municio) y que Millán expuso en una sesión especial presidida por el Príncipe Felipe en 1998. Además jugó un papel multiplicador esencial en el éxito de otras dos actividades maestras de esta Real Academia en los últimos quince años: el Programa de Promoción del Talento Precoz en Matemáticas, propuesto por Miguel de Guzmán, y la creación de la Serie A de Matemáticas de la Revista de esta Real Academia, que yo denominé RACSAM y dirigí inicialmente, desde 2001 a 2004, y que desde entonces dirige con tanta dedicación y éxito Manuel López Pellicer[193].

[192]Entre otros cargos, fue Director General de Enseñanzas Técnicas del Ministerio de Educación Nacional, de 1957 a 1961, promoviendo la modernización de la enseñanza en las Escuelas de Ingeniería.

[193]RACSAM ha alcanzado una importante valoración internacional, tanto por el contrato de distribución con Springer-Verlag desde mayo de 2010 como por su catalogación en el listado 2012 JCR del ISI el que está situada en el primer tercio de las revistas de matemáticas, ocupando la posición 84 de un total de 296 seleccionadas con criterios muy exigentes.

En 2007 se creó en la Universidad Carlos III de Madrid el Instituto "Gregorio Millán Barbany"de Modelización y Simulación en Fluidodinámica en honor de este gran impulsor de la ciencia y la tecnología española a quien tanta admiración y afecto muchos de nosotros profesamos.

Como última parte de esta contestación, permítanme tan solo unas brevísimas notas sobre el operador laplaciano que con tanta maestría ha glosado Juan Luis Vázquez. Como dije al principio, hay una pléyade de comentarios que me vienen a la cabeza pero cuyo desarrollo dejaré para otra ocasión más oportuna.

Por ejemplo, me ha gustado que Juan Luis no se haya limitado a la descripción del propio operador laplaciano sino que en su sección 4.2, refiriéndose a la conexión entre el pensamiento abstracto y la generalización, haya comentado cómo muchas de sus propiedades son también inherentes a la clase de operadores denominados elípticos[194]. Como él ha mencionado, la inhomogeneidad y anisotropía de los medios suelen ser las razones por las que aparecen distintos coeficientes[195]. Mi reflexión consiste en señalar que este enfoque posee una gran actualidad y está unido a la formulación matemática de la tecnología de nuevos materiales cuya materialización a escala nanométrica, la Nanotecnología, ha abierto y fecundará en un futuro escenarios insospechados para la sociedad hace tan solo un par de decenios[196].

Distintos coeficientes en los operadores en derivadas parciales aparecen también en modelos de las matemáticas financieras como, por ejemplo, la ecuación de Black-Scholes. También se puede considerar, para ciertos aspectos, como una "ligera modificación"del operador laplaciano al llamado operador de superficies mínimas tan omnipresente en modelos de elasticidad y mecánica de fluidos. El artículo sobre el movimiento de hilos de Terradas, sin ir más lejos, ya requiere el manejo de este tipo de operadores. Como ha

[194] Denominados así porque al interpretar las derivadas parciales como componentes de un vector bi-dimensional, pongamos por caso si es que estamos trabajando con problemas en dos dimensiones espaciales, los operadores se convierten en las ecuaciones de elipses.

[195] También, como él ha señalado, por manipulaciones del propio modelo, por transformación de coordenadas, por el uso de coordenadas no euclídeas, etc.

[196] Está relacionado también con el estudio de procesos de escalas múltiples, técnicas que en mi área se conocen como de homogeneización y en las que varios investigadores españoles como Amable Liñán y Enrique Sánchez-Palencia hicieron contribuciones seminales. Yo he tenido la suerte de colaborar con ambos.

señalado Juan Luis Vázquez en su apartado 5.4, ahora el operador pasa a ser cuasi-lineal y las matemáticas se complican enormemente pero también ofrecen novedades casi insospechadas, como es, por ejemplo, la formación de fronteras libres en casos en los que serían inexistentes de estar el laplaciano por medio. Buenos ejemplos son el operador p-laplaciano y el de los medios porosos.

A mi juicio, el estudio de problemas de fronteras libres ha caracterizado el tipo de aportaciones que el grupo español de especialistas ha aportado al panorama mundial[197]. Una adecuada fórmula mixta, como si de un brebaje se tratase, de mágica combinación entre técnicas de modelización, de sofisticado análisis funcional para el tratamiento de los modelos, técnicas asintóticas para conocer los casos límites y una sensibilidad hacia los llamados problemas inversos y de control en donde uno deja de poner el centro de atención en la solución para hacerlo en los propios datos del problema, que muchas veces o no son totalmente accesibles o bien se han de elegir apropiadamente si es que uno pretende que la solución se comporte de una manera especial.

A veces la propia modelización ya parte de la seguridad de que tales fronteras libres están presentes con toda seguridad: es el caso de los problemas unilaterales, que conducen tan solo a desigualdades en vez de a ecuaciones, por lo que en nuestra jerga reciben el nombre de inecuaciones variacionales. La formulación matemática de esos complejos problemas se puede realizar alternativamente mediante el uso de los llamados operadores multivaluados: algo que se puede mostrar que no obedece a mentes calenturientas que aman la sofisticación por la sofisticación como arma para alejar el seguimiento cercano de las audiencias y lograr así una cierta (vacía diría yo) aureola. Todo lo contrario, esos operadores tienen un perfecto sentido lógico, pues en ciertos casos, si no se introduce esa eventual multivocidad, no es posible encontrar solución alguna. Situaciones tan peculiares aparecen en contex-

[197]Parece oportuno aludir en este punto que la valoración internacional sobre las contribuciones y madurez de este grupo de especialistas españoles vino refrendada, quizás por primera vez a titulo colectivo, cuando nos fue encargada la celebración en España de uno de los congresos mundiales sobre fronteras libres que se vienen desarrollando cada dos años desde 1978. En aquella ocasión pedimos el auxilio de nuestro siempre admirado Amable Liñán y por nuestra parte, Juan Luis Vázquez, Miguel Ángel Herrero y yo mismo organizamos un gran congreso internacional, en Toledo, en Junio de 1983, que según nos cuentan es muy recordado entre los especialistas en el área.

tos insospechados como Climatología, Glaciología, Tratamiento de imágenes, ciertos modelos de tumores, etc.

El operador de Laplace también aparece en modelos híbridos en los que coexisten términos deterministas y estocásticos (por ejemplo la influencia de volcanes en modelos climáticos) que tienen un porvenir muy prometedor.

Se podrían decir también muchas cosas sobre los operadores de orden superior a dos, como el llamado operador bi-laplaciano, tan unido a la Elasticidad desde sus comienzos de la mano de los Bernoulli y de Euler, y se podría, muy especialmente, ahondar en el significado de la ecuación de Schrödinger como inmenso caudal para adentrarnos en el mundo a escala de las partículas elementales. Sin ella no se podrán entender los alcances y logros de la Nanotecnología y de la generación de energía, por citar tan sólo algunos aspectos capitales de la sociedad en la que vivimos.

Por último, en este listado de temas, me quedo con ganas de haber podido entrar en más detalles en el significado y belleza de los fenómenos críticos como el que descubrió Juan Luis Vázquez al analizar la condición necesaria para la existencia de soluciones de problemas semilineales con medidas. Siempre me han atraído los resultados negativos de no-existencia. Es mediante ellos como los matemáticos podemos "superar"(si se me permite esta expresión coloquial) la increíble intuición de físicos e ingenieros. La formulación precisa de esos topes requiere fórmulas matemáticas. No basta con ver, hay que pasarlos al papel pues de otra manera no podrán deslindar indeterminaciones. Podría ser como el caso de una bella música sin partitura: no podrá ser difundida ni apreciada más allá de la presencia de su autor.

Pero acabando ya, quisiera terminar refiriéndome a algo que él ya ha mencionado y que me gustaría subrayar aún más: cuando el término de laplaciano se utilizó por primera vez, allá por 1823, probablemente de la mano de Poisson, tal tipo de expresiones diferenciales eran muy familiares, bajo otros formatos, a muchos matemáticos anteriores empezando por Jakob (1655-1705), Johann (1667-1748) y Daniel (1700-1782) Bernoulli, continuando con Euler (1707-1783), y sin duda también D'Alembert (1717-1783), Lagrange (1736-1813) mas de 60 años antes que Laplace (1749-1827) y la primera mención de 1813. Por ser necesariamente esquemático, he de recordar aquí como los Bernoulli y Euler propusieron la modelización del movimiento de una cuerda mediante una sucesión de muelles elásticos acoplados. Sin embargo, la paternidad de la primera versión de la ecuación hiperbólica de la cuerda vibrante se debe asignar a D'Alembert en 1751. Era la primera ecuación en derivadas parciales de la historia y, al parecer[198], originó al principio una gran desorientación (similar a cuando los primeros fractales irrumpieron en escena) pues los métodos de las ecuaciones diferenciales ordinarias no eran de aplicación automática y se tardó un cierto tiempo en diseñar métodos *ad hoc* y en adaptar métodos anteriormente existentes. Euler vio que tal ecuación no era más que la ecuación límite a la que se llegaba mediante tal sucesión de muelles y que por tanto estos representaban un modelo (que podríamos denominar analógico) de la discretización de ondas unidimensional. El término crucial de aquella ecuación, modelizando de manera *naïve* las tensiones internas de ese medio continuo, es el de la derivada segunda en el espacio, que cuando se generaliza al caso, por ejemplo, de una fina membrana bidimensional (como hizo Euler en 1759) da lugar al operador que años más tarde sería denominado haciendo alusión a Laplace[199].

Pero si todo lo anterior es relevante en la reconstrucción histórica del operador laplaciano, lo es mucho más la memoria de Euler[200] de 1752 en la que, analizando los fluidos incompresibles, escribe que una clase particular de los movimientos de los fluidos no viscosos son aquellos en los que las condiciones de contorno y las fuerzas de cuerpo permiten que sean irrotacionales. Son los llamados flujos potenciales, para los que Euler escribe explícitamente que la ecuación de la continuidad conduce a una ecuación en derivadas parciales que coincide al cien por cien con la que luego sería denominada como ecuación de Laplace por haber sido éste quien la formuló en su estudio del campo gravitatorio[201] de 1784. Pero sin duda ninguna, eso sucedió 32 años después

[198] Como se señala en C. Truesdell, *The Rational Mechanics of flexible or elastic bodies (1638-1788)*, en Leonhardi Euler: *Opera Omnia II*, vols. 10 & 11, Zurich, 1960.

[199] En la extensa obra de Euler, esa inmerecida pérdida de paternidad aparece repetidas veces: teoría de los llamados Multiplicadores de Lagrange, la llamada ecuación de Bessel, etc. (véase la obra de Truesdell antes citada).

[200] Euler escribió, en latín, su primer artículo sobre fluidos *Principia motus fluidorum* que presentó en la Real Academia de Prusia en Berlin el 31 de Augosto de 1752.

[201] *Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes*. París, 1784.

de que lo hiciese Euler[202].

Este uso de una terminología poco respetuosa con el origen histórico del concepto aparece con frecuencia en matemáticas y en muchas otras ciencias[203]. Hasta incluso fuera de ellas: sin ir más lejos basta recordar la polémica de haber asignado el nombre de América al "nuevo" continente en homenaje a Américo Vespucio en detrimento de los viajes previos de Cristóbal Colón[204].

Mis últimas palabras serán para expresar el sentir general de satisfacción de que por fin se haya presentado el momento en el que el nombramiento de Juan Luis Vázquez como Académico haya podido materializarse. Sin duda repercutirá muy favorablemente en la vida y proyección internacional de esta Real Academia. Pero además, si el prestigio de esta Academia va unido a figuras tan señeras como Echegaray, Terradas, Puig Adam y Millán a las que me he referido anteriormente, estoy plenamente seguro de que ese prestigio se acrecienta al incorporar a una persona que atesora una carrera científica tan reconocida como excepcional no solo en nuestro país si no, lo que le distingue de sus predecesores, con baremos vigentes en los países más avanzandos de nuestro tiempo.

Muchas gracias por su atención.

[202]En su posterior artículo de 1755, también sobre Mecánica de Fluidos (una visión adelantada casi un siglo a desarrollos posteriores), Euler menciona la potencia de la modelización matemática (lo que Juan Luis se ha referido como "extraer el jugo de un concepto").

[203]Se puede recordar también a este respecto la polémica sobre la primacía temporal del artículo de D. Hilbert sobre el de A. Einstein sobre la Teoría de la Relatividad restringida, por cierto con muy cercanas aportaciones previas de H. Poincaré y H.A. Lorentz (véase, por ejemplo J. I. Díaz *Retos y progresos de la Física Matemática contemporánea a Blas Cabrera (1878-1945).* Actas del II Simposio "Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1936: Cabrera, Cajal y Torres Quevedo", Amigos de la Cultura Científica, Lanzarote, 2000.

[204]Es bien conocido que el comerciante y cosmógrafo Américo Vespucio (Florencia 1454-Sevilla 1512) no se anticipó a Colón. Naturalizado castellano en 1505, Vespucio participó en varios viajes de exploración publicando entre 1503 y 1505 el *Mundus Novus* y la *Carta a Soderini*, que le atribuyen un papel protagonista en el Descubrimiento de América. En su mapa de 1507 el cartógrafo Martín Waldseemüller acuñó el nombre de "América".