REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

LECCIÓN INAUGURAL

DEL AÑO ACADÉMICO 2012-2013

LEÍDA EN LA SESIÓN CELEBRADA EL DÍA 24 DE OCTUBRE DE 2012

POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

EXCMO. SR. D. MANUEL LÓPEZ PELLICER

SOBRE EL TEMA

ALREDEDOR DE LA HIPÓTESIS DE RIEMANN

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA
VALVERDE, 22 - TELÉFONO 917 014 230
2012

Depósito legal: M. 32.546-2012 - I.S.B.N.: 978-84-87125-54-6 - I.S.S.N.: 1138-4093

Impreso en Realigraf, S. A. - Pedro Tezano, 26. 28039 Madrid

Alrededor de la Hipótesis de Riemann

«Es muy probable que todos los ceros no triviales de la función $\varsigma(z)$
tengan parte real igual a 1/2»

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

*«Lo primero que haría si volviese a la vida dentro de quinientos años
sería averiguar si alguien había resuelto la Hipótesis de Riemann»*

David Hilbert (1862-1943)

*«Es muy posible que la Hipótesis de Riemann llegue sin demostración
a su bicentenario, no creo que se trate de un resultado indemostrable,
pero su demostración puede ser tan compleja que podría suceder
que el cerebro humano no consiga nunca alcanzarla»*

Atle Selberg (1917-2007)

*«Cuando se demuestre la Hipótesis de Riemann
se hará sin usar ordenadores»*

Gerhard Frey (1944-)

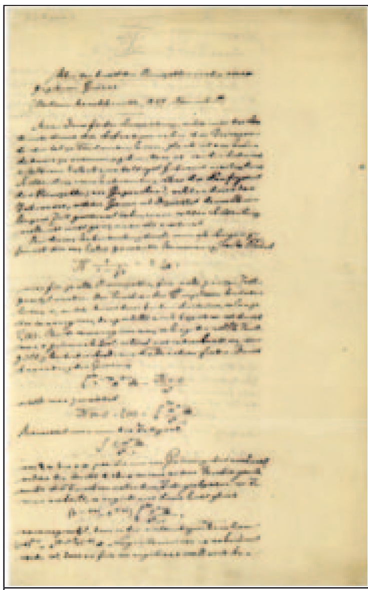
*«La demostración de la Hipótesis de Riemann nos dará la posibilidad
de orientarnos en el mundo matemático como la solución del problema
de la longitud ayudó a los exploradores del siglo XVIII
a navegar en el mundo físico»*

Andrew John Wiles (1953-)

Excmo. Sr. Presidente de la Academia, Excmas. y Excmos. Sres. Académicos, Sras. y Sres.

La Hipótesis de Riemann es un problema abierto desde 1859 cuya demostración, en palabras de Andrew Wiles, quien en 1993 probó el Último Teorema de Fermat, *nos dará la posibilidad de orientarnos en el mundo matemático como la solución del problema de la longitud ayudó a los exploradores del siglo XVIII a navegar en el mundo físico*.

1. LA HIPÓTESIS DE RIEMANN, PROBLEMAS DE HILBERT Y PROBLEMAS DEL MILENIO

	1. La hipótesis del continuo. 2. Consistencia de los axiomas de la aritmética. 3. Transformación de un poliedro en otro de igual volumen por descomposición poliédrica. 4. Construir todas las métricas con rectas geodésicas. 5. ¿Grupo continuo implica grupo diferenciable de forma automática? 6. Axiomatizar toda la Física. 7. ¿Es a^b trascendente, siendo a algebraico diferente de 0 y 1 y b irracional algebraico? 8. La hipótesis de Riemann y la conjetura de Goldbach.	1. P *versus* NP (existe problema NP que no sea P). 2. La conjetura de Hodge (todo ciclo de Hodge es combinación racional de ciclos algebraicos). 3. La conjetura de Poincaré (variedad de dimensión 3 cerrada y simplemente conexa es homeomorfa a la esfera de dimensión tres). 4. La Hipótesis de Riemann. 5. Fundamentación matemática de la teoría de Yang-Mills. 6. Ecuaciones de Navier-Stokes. 7. Probar la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer.
Página X de la Memoria de Riemann de 1859	8 de los 23 problemas de Hilbert de 1900	Los siete problemas del milenio del año 2000

«¿Quién de nosotros no gozaría descubriendo el velo tras el cual se oculta el porvenir, dejando caer su mirada sobre los futuros progresos de la Matemática y sobre los secretos de su desarrollo durante los próximos siglos?» A estas conocidas palabras de David Hilbert en su discurso en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900 les siguieron diez problemas. No le dio tiempo de comentar los veintitrés problemas que había preparado, que se publicaron en las actas del congreso y que han marcado la investigación matemática del siglo XX[1].

La parte principal[2] del octavo problema es la demostración de la hipótesis formulada por Riemann de que los valores complejos donde la función $\zeta(z)$ es cero están situados sobre la recta $x = \frac{1}{2}$. Hilbert sentía pasión por la Hipótesis de Riemann, convencido de que su resolución abriría muchas puertas. Cuando se le preguntó por lo primero que haría si volviese a la vida dentro de quinientos años respondió: «*Averiguar si alguien había resuelto la Hipótesis de Riemann*».

En el año 2000 y con motivo del centenario de los 23 problemas de Hilbert, se anunció en el Collège de France de París una nueva colección de siete problemas, conocidos como «*Los siete Problemas del Milenio*». Entre los matemáticos proponentes estaban Alain Connes, creador de la Geometría no conmutativa, y Andrew Wiles.

Cada Problema del Milenio tiene un premio de un millón de dólares, ofrecido por London T. Clay, hombre de negocios apasionado por la Matemática. Según Clay, «*lo que espolea a los matemáticos es el deseo de verdad y la sensibilidad ante la belleza de las Matemáticas»*. Sus palabras recuerdan a Henri Poincaré para quien «*el científico no estudia la Naturaleza solo por la utilidad de hacerlo; también la estudia por su belleza*», y también a Whitehead, que decía que *la auténtica sabiduría es inconcebible sin un sentimiento claro del valor estético de la perfección y la belleza*[3].

---

[1] Originalmente Hilbert incluyó 24 problemas en su lista, pero decidió excluir el problema vigésimo cuarto. Hacía referencia a un criterio de simplicidad y a métodos generales en la teoría de la demostración. Lo redescubrió el historiador Rüdiger Thiele en el año 2000 en notas manuscritas de Hilbert.

[2] El resto es la resolución de la conjetura de Golbach de que cada número par mayor que 2 es la suma de dos números primos.

[3] Platón predicaba *la suprema forma de bondad en que consiste la belleza.*

Uno de los siete Problemas del Milenio es demostrar la Hipótesis de Riemann. Los otros seis son inéditos y no tienen el espíritu de los veintitrés problemas de Hilbert, dirigidos a transformar la Matemática de disciplina de fórmulas y ecuaciones a ciencia de ideas y teorías abstractas, siguiendo el espíritu que dejó la obra de Riemann.

La función zeta se define con ayuda de los números primos. Es bien conocido que un número natural *a* mayor que 1 es primo si sus únicos divisores son 1 y *a*. Esta sencilla definición motivó que Hardy escribiese en *Apología de un matemático,* que «7 *es un número primo no porque nosotros pensemos que lo es o porque nuestra mente esté conformada de un modo o de otro, sino porque lo es, porque la realidad matemática está hecha así*». En el mismo sentido, Connes afirmó que «*con independencia de la mente humana existe una realidad matemática pura e inmutable, que conforma el único lenguaje universal»*. En el mismo sentido se lee en la *Apología* de Hardy que «*las lenguas mueren, pero las ideas matemáticas no*» y que «*un matemático tiene más probabilidades que cualquier otro ser humano de entender lo que la palabra inmortalidad designa*».

2. EUCLIDES, FERMAT Y EULER


Euclides (325-265 antes de Cristo) aproximadamente


Pierre de Fermat (1601-1665)


Leonhard Euler (1707-1783)

Lo que nos permite afirmar que lo que establecieron los antiguos griegos continúa siendo cierto es la demostración, sexto sentido para gestionar los objetos matemáticos que proporciona sensación de realidad a entes que no percibimos en el mundo físico, como los espacios de dimensión mayor que tres o los conjuntos infinitos.

La demostración, gran aportación del genio griego, la encontramos en las famosas paradojas de Zenón de Elea[4] y, sobre todo, en *Los Elementos* de Euclides[5] donde se fijan los axiomas de la geometría, con categoría de verdades evidentes que describen relaciones entre elementos geométricos. De los axiomas se deducen en *Los Elementos* unos quinientos teoremas que ayudan a la descripción y comprensión del mundo físico. Además contienen muchas propiedades de los números con demostraciones geniales de gran sencillez, como el teorema de existencia de infinitos números primos, deducido al observar que el resultado de sumar 1 al producto de los primeros k números primos contiene un factor primo mayor que esos k números.

La dificultad de encontrar una fórmula que diese todos los números primos motivó el obtener expresiones que proporcionasen infinitos números primos.

Fermat creyó, erróneamente, que

$$2^{2^n} + 1$$

sería siempre un número primo. Pudo confundirle el que los cuatro primeros valores de esta fórmula son los números primos 5, 17, 257 y 65537, pero Euler demostró que $2^{2^5} + 1$ es un número de 10 cifras múltiplo de 641.

Gauss[6] descubrió que si $N = 2^{2^n} + 1$ es primo se puede construir un polígono regular de N lados con regla y compás. Por eso el genio griego fue capaz de construir un pentágono regular con regla y compás. La construcción con regla y compás del polígono de 17 lados la realizó Gauss a los 19 años y escribió que «*la Matemática es la reina de las ciencias y la Aritmética es la reina de las Matemáticas*».

[4] Escritas para apoyar a su maestro, el gran filósofo Parménides de Elea.

[5] Fue escrito tres siglos antes de Cristo, en la famosa Biblioteca de Alejandría fundada por Ptolomeo I.

[6] Este teorema aparece en su famoso libro *Disquisitiones Aritmeticae.*



Marin Mersenne (1588-1648) | François Edouard A. Lucas (1842-1891) | Derrick Henry Lehmer (1905-1991)

El monje Marin Mersenne también estuvo obsesionado por obtener un listado de números primos y en su *Cognitata Physico-Mathematica* afirmó, también sin demostración, que para $n \leq 257$.

$$2^n - 1$$

sería primo si y solo si n era uno de los números 2, 3, 5, 7, 13, 19, 31, 67, 127 y 257. Cuando Mersenne hizo esta conjetura era casi imposible comprobar si $2^{257} - 1$ era o no primo. En 1876, Édouard Lucas ideó un método, perfeccionado por Derrick Henry Lehmer en 1930, para averiguar cuándo un número de Mersenne $2^n - 1$ es primo. Lucas probó que el noveno número de Mersenne, $2^{127} - 1$, es un número primo de treinta y nueve cifras, y que la conjetura de Mersenne era falsa por la inclusión del 67 y 257. Más adelante se probó que Mersenne había omitido los números 61, 89 y 107. Los números primos de la forma $2^n - 1$ se llaman números primos de Mersenne[7].

No debe extrañar que Fermat y Mersenne anunciaran resultados sin demostración, pues era habitual en esa época sobrevalorar las aproximaciones empíricas. Fue Euler, en el siglo XVIII, quien recuperó el espíritu griego de la necesidad de la demostración, si bien muchos de sus argumentos aún contenían pasos no totalmente rigurosos.

[7] Se conocen 47 números primos de la forma $2^n - 1$. Han sido obtenidos gracias al método del Lucas-Lehmer, a la ayuda de grandes ordenadores y al proyecto de computación distribuida Great Internet Mersenne Prime Search, desarrollado en Internet por George Woltman. El número que ocupa la posición 47 es $2^{43112609} - 1$. Es un número primo de casi trece millones de cifras.

Euler no siguió la carrera eclesiástica de su padre, pastor protestante, por su precoz talento matemático, descubierto por Johan Bernoulli. Con el apoyo de Daniel Bernoulli consiguió una plaza en la academia de San Petersburgo[8], donde cumplió con creces las expectativas de Catalina la Grande en Hidráulica, Balística y Topografía.

Allí sufrió algún desprecio del filósofo francés Denis Diderot, quien afirmaba despectivamente «*que la Matemática no añadía nada a la experiencia y solo servía para interponer un velo entre los hombres y la naturaleza*». Afortunadamente para Euler, Catalina la Grande se cansó pronto de Diderot. No fue este el único desprecio a Euler, pues en la Academia de Berlín, donde estuvo entre 1741 y 1766, sufrió ironías de Voltaire y la soberbia de Federico II, que le llamaba ***mi*** *cíclope ilustrado*, en alusión a su ojo sin visión. Estas insolencias motivaron su regreso a San Petersburgo[9].

Entre los múltiples trabajos académicos en San Petersburgo y Berlín, Euler encontró tiempo para investigar en todas las partes de la matemática de su época. La academia de San Petersburgo necesitó cincuenta años para la publicación póstuma de los artículos inéditos de Euler, quien, además, tuvo tiempo para escribir un *Tratado musical*, considerado demasiado matemático por los músicos y demasiado musical por los matemáticos, y la colección de sus célebres *Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de Física y Filosofía*.

El nombre de Euler se asocia al de los siete puentes sobre el río Pregel en la ciudad de Könisberg. En la demostración de que no era posible pasear cruzando los siete puentes una sola vez se sitúa el nacimiento de la Topología.

Investigar en propiedades de números era lo que más cautivaba a Euler dentro de su enorme producción científica. Se refería con frecuencia «*al placer que le proporcionaban las investigaciones en Teoría de Números y al grato cambio*

[8] En los años centrales del siglo XVIII, Europa estuvo regida por déspotas ilustrados, Luis XV y Luis XVI en Francia, Pedro el Grande y su esposa Catalina en Rusia y Federico II en Prusia. Bajo su mecenazgo, las Academias de París, San Petersburgo y Berlín impulsaron la Ilustración, ayudando a los soberanos a aumentar su distinción y su capacidad industrial y militar.

[9] Cuando llegó Euler a Berlín, el director de la Academia era Maupertuis. Al fallecer Maupertuis, Euler se molestó al no ser nombrado director de la Academia, pues el espíritu afrancesado de Federico II prefirió pedir a D'Alambert que aceptase ser director de la Academia. D'Alambert no quiso abandonar París y Federico II se quedó sin Euler, que regresó a San Petersburgo, y sin D'Alambert.

que hallaba respecto a las labores más directamente ligadas a las aplicaciones prácticas».

Además de gran habilidad en la manipulación de fórmulas, poseía una excepcional capacidad de cálculo. El académico francés François Arago decía que «*Euler calculaba sin esfuerzo aparente, como los hombres respiran o las águilas se sostienen en el aire*». Así se explica que construyese la tabla de números primos menores de 100.000 y que percibiese la casi imposibilidad de obtener una fórmula que diese todos los números primos, pues en 1751 escribió: «*hay algunos misterios que la mente humana no penetrará jamás. Para convencernos basta con que echemos un vistazo a las tablas de números primos. Observaremos que en ellas no hay orden ni ley*».

En 1737, veinte siglos después de que Euclides probase la existencia de infinitos números primos, Euler demostró que la serie de los inversos de los números primos, $\sum_{p \in P} \frac{1}{p}$, es divergente y en 1749 obtuvo que la serie de término general n^{-x} es convergente para $x > 1$ y que su suma $\zeta(x)$ coincide con el producto infinito de término general el inverso de $1 - p^{-x}$, cuando p varía en el conjunto de los números primos. La igualdad entre el producto infinito y la serie,

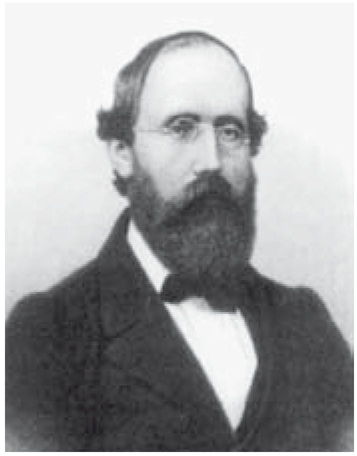
$$\Pi_{p \in P} \{1 - p^{-x}\}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} ,$$

se conoce como fórmula de Euler, y permite utilizar cualquiera de sus miembros para definir la *función zeta* $\zeta(x) = \Pi_{p \in P} \{1 - p^{-x}\}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$, para $x > 1$. La Teoría Analítica de Números comienza con esta fórmula.

3. EL TEOREMA DE LOS NÚMEROS PRIMOS: GAUSS, CHEBYSHEV Y RIEMANN

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894)



Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

El origen del *Teorema de los números primos* está en una tabla de logaritmos que le regalaron a Gauss en 1792 y que al final contenía una tabla de números primos. Su capacidad de observación, que no correspondía a la de un niño de quince años, le llevó a estimar que la cantidad $\pi(N)$ de números primos menores que N es, aproximadamente:

$$\pi(N) \approx \frac{N}{\ln N}$$

y anotó su descubrimiento en la última página de su tabla de logaritmos, añadiendo la frase: «*No os podéis imaginar cuánta poesía hay en un tabla de logaritmos*».

Pocos años después, la intuición de Gauss, enriquecida por Análisis Matemático y Teoría de la Probabilidad, le permitió mejorar su primera estimación de la cantidad $\pi(N)$ de números primos mediante la función logaritmo integral, $\mathrm{li}x = \int_2^N \frac{dx}{\ln x}$, resultando que:

$$\pi(N) \approx \int_2^N \frac{dx}{\ln x}$$

Comunicó su descubrimiento al matemático y astrónomo Johann Encke la noche de Navidad de 1849. Entonces Gauss tenía más de setenta años y conjeturaba que, en porcentaje, la diferencia entre la cantidad $\pi(N)$ de números primos menores que N y el logaritmo integral de N decrece al aumentar N. Esta afirmación es *la conjetura de Gauss del decrecimiento en porcentaje*. Fue motivada por indicios experimentales elementales, posteriormente enriquecidos al comprobar que para $N = 10^6$ la diferencia porcentual es del 0,17%, en tanto que para $N = 10^9$ se reduce a 0,003%.

El 24 de mayo de 1848, Chebyshev leyó en la Academia de San Petersburgo su primera memoria sobre la distribución de los números primos, que se publicó en 1850 y contiene el primer estudio de la función $\pi(N)$ por métodos analíticos. Chebyshev tomó logaritmos en la representación de la función zeta en producto de Euler y obtuvo la expresión

$$\zeta(x)-1-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}\right)e^{-t}t^{x-1}dt$$

que le permitió deducir que si existe una fórmula para $\pi(N)$ del tipo

$$\pi(N)=\sum_{k=1}^{r-1}\frac{a_k N}{(\ln N)^k}+O\left(\frac{N}{(\ln N)^r}\right)$$

debe suceder que $a_k = (k-1)!$, para $1 \le k \le r-1$. Esta fórmula coincide con el desarrollo asintótico de la función logaritmo integral de Gauss.

En un segundo artículo, Chebyshev se aproximó a la conjetura del decrecimiento en porcentaje, al demostrar que la diferencia porcentual entre $\pi(N)$ y $N/\ln N$ es menor del 11%. Aunque este porcentaje está muy alejado del 0,003%, asegura que el error porcentual se mantiene «siempre» acotado para la primera estimación de Gauss[10].

[10] Lo que Chebyshev demostró en 1851 es que $0{,}92 \le \frac{\pi(N)}{N/\ln N} \le 1{,}11$ y que si existe el límite de $\frac{\pi(N)}{N/\ln N}$ cuando $N \to \infty$, entonces ese límite es 1. Este resultado fue mejorado por Sylvester en la segunda mitad del siglo XIX al probar que $0{,}956 \le \frac{\pi(N)}{N/\ln N} \le 1{,}045$ para valores grandes de N.

Se cree que la justificación de los 57 años transcurridos entre la primera estimación de Gauss del teorema de los números primos y la comunicación a Encke está en la importancia que atribuía a la demostración, sin dejar que ahogase la intuición, pues como dijo Hadamard, «*el objeto del rigor matemático es sancionar y legitimar las conquistas de la intuición*».

También se ha escrito que Gauss no comunicaba las primeras versiones de sus resultados desde que la Academia de París valoró sus *Disquisiciones arithmeticae* como libro *oscuro y denso,* tal vez por la influencia del principio de la revolución francesa de que «*el progreso de la matemática debía orientarse a la prosperidad del Estado*». Este principio se acentuó por la reforma napoleónica, que relegaba *la Matemática a instrumento para el desarrollo de sus horizontes aplicados y militares*, lo que permite entender que el director de l'École Polytechnique de París escribiese que: «*Cauchy exageraba claramente con la enseñanza de la Matemática pura en l'École y que una tan inmotivada extravagancia era dañina para las demás disciplinas*».

Francia consiguió que su matemática prestase gran atención a temas aplicados, pero no pudo impedir que París siguiera teniendo eminentes matemáticos puros. Uno de ellos, Adrien-Marie Legendre, mejoró la primera aproximación de Gauss de la cantidad de números primos menores que N mediante la modificación

$$\pi(N) \approx \frac{N}{\ln N - 1{,}08366}.$$

Para valores grandes de N, la fórmula de Legendre es peor que la fórmula del logaritmo integral de Gauss, pues el error porcentual de la fórmula integral de Gauss para $N = 10^{16}$ es un millón de veces menor que el error de la fórmula de Legendre.

El clima intelectual alemán era muy diferente del francés, pues von Humboldt, nombrado ministro de instrucción en Prusia en 1809, potenció *el conocimiento por el conocimiento mismo,* pues compartía con Jacobi que *honrar el espíritu humano es el único objetivo de la ciencia*.

Humboldt creó nuevas escuelas secundarias a cargo de licenciados y potenció la investigación en las universidades, *para que con la comprensión de la unidad de la ciencia se favoreciese su avance*.

Riemann fue admitido en una escuela secundaria nueva de Luneburgo. Su director, Schmalfuss, detectó sus grandes habilidades matemáticas y le dio libre acceso a su biblioteca, donde Riemann encontró la «*Théorie des nombres*», de Legendre, cuyas casi 900 páginas grabó en su mente en pocas semanas.

Riemann deseaba ser pastor luterano y seguir los pasos de su padre. Fue a la Universidad de Gotinga a estudiar Filosofía y Teología. Pero unos cursos con Gauss le llevaron a la Matemática.

En 1847 se trasladó a Berlín, donde conoció a Jacobi, Steiner y Lejeune-Dirichlet. Allí se familiarizó con los dos elementos que le inmortalizaron al juntarlos genialmente:

- La utilización por Dirichlet (1805-1859) de la función zeta de Euler que le permitió probar en 1837 que si a y b son primos entre sí entonces la progresión aritmética $(a + bn)_n$ contiene infinitos números primos, mejorando la intuición no demostrada de Fermat de la existencia de infinitos números primos en una progresión aritmética $(1 + pn)_n$, cuando p es un número primo[11].

- El desarrollo de la Teoría de Variable Compleja, que publicaba Cauchy en extensos[12] y numerosos artículos en la revista *Comptes Rendus*, siguiendo el camino iniciado por Euler. Después de estudiar la obra de Cauchy en varias semanas, Riemann dijo: «*Esta es la nueva matemática*».

Riemann volvió a Gotinga en 1849 para completar su tesis doctoral bajo la dirección de Gauss, quien ese año comunicó a Enke su fórmula del logaritmo integral para estimar la cantidad de números primos. Entonces Riemann aún no se preocupaba de los números primos, pues estaba concentrado en la Teoría de Variable Compleja. En 1851 presentó su tesis que Gauss valoró como «*trabajo propio de una mente creativa, activa, genuinamente matemática y de una originalidad magníficamente fértil*».

Durante varios años postdoctorales dependió de los inciertos honorarios de unos pocos alumnos particulares. Su situación mejoró al ser nombrado asistente de Weber, eminente físico que había establecido una línea telegráfica entre su

[11] Ciento nueve años después, Selberg consiguió una demostración sencilla de este resultado sin utilizar la función zeta.

[12] Para prevenir algún otro caso de gran producción como el de Cauchy, se impuso una limitación en el número de páginas en los artículos de la revista Comptes Rendus, que se mantiene en la actualidad con rigidez.

laboratorio y el observatorio de Gauss[13]. Weber profetizó que: «*pronto el globo terráqueo estará cubierto de una red de hilos telegráficos, que prestará servicios comparables a los del sistema nervioso en el cuerpo humano*».

En 1854, Riemann aceleró la presentación de su Tesis de Habilitación, pues le preocupaba el estado de salud del anciano Gauss, quien aún pudo oír las ideas de Riemann sobre la Geometría y sus relaciones con la Física, originadas durante su colaboración con Weber. Riemann estaba convencido de que con Matemáticas se podían contestar muchas preguntas fundamentales de Física y seis años más tarde, ya catedrático en Gotinga, elaboró la Geometría Riemanniana, uno de los pilares que utilizaría Einstein.

Gauss murió un año después[14] y le sucedió Dirichlet, quien en Berlín había conocido a Riemann y apreciaba su modestia y la originalidad de su trabajo.

En alguna ocasión Dirichlet consiguió sacar a Riemann de la biblioteca y le llevó a pasear. Las conversaciones matemáticas inspiraron a Riemann la nueva forma de ver los números primos contenida en su memoria de 1859, que tuvo la obligación de escribir al ser nombrado miembro de la Academia de Berlín. Riemann debía conocer que «*lo bueno, si breve, es dos veces bueno*», pues su memoria solo tiene diez páginas y contiene:

1. La obtención de la representación integral $\zeta(z)=\dfrac{1}{\Gamma(z)}\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}t^{z-1}dt$ de la función $\zeta(z)=\Pi_{p\in P}\left\{1-p^{-z}\right\}^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}$, cuando Re($z$) > 1[15].
2. Su prolongación analítica[16] a una función meromorfa[17], llamada función zeta de Riemann y la obtención de sus ecuaciones funcionales estándar y simétrica respecto a la recta x = 1/2, llamada *recta crítica*, $\zeta(z)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\dfrac{\pi z}{2}\right)\Gamma(1-z)\zeta(1-z)$ y $\pi^{-z/2}\Gamma\left(\dfrac{z}{2}\right)\zeta(z)=\pi^{-(1-z)/2}\Gamma\left(\dfrac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z)$. La función ζ($z$) es cero en los enteros negativos pares, llamados ceros triviales.

[13] Gauss colaboró activamente en problemas matemáticos de esta línea telegráfica.
[14] Sus ideas matemáticas le sobrevivieron, dando mucho trabajo a la generación siguiente.
[15] Como en la igualdad de Euler, P es el conjunto de los números primos.
[16] Mediante deformación del contorno de integración.
[17] Tiene un polo simple con residuo 1 en z = 1.

3. La representación integral del logaritmo de $\zeta(z)$ para $\mathrm{Re}(z) > 1$, $\frac{1}{z}\ln\zeta(z) = \int_1^{\infty}\Pi(t)t^{-z-1}dt$, mediante la función $\Pi(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \cdots$, para la que demuestra que $\pi(x) = \Pi(x) + O(\sqrt{x})$, para $x > 1$.
4. La inversión de esta representación integral le permite expresar $\Pi(x)$ como una integral compleja, que calculó por el método de los residuos, localizados en la singularidad de $\ln\zeta(z)$ en $z = 1$ y en los ceros no triviales de $\zeta(z)$. Obtuvo que $\Pi(x) = \mathrm{li}(x) - \sum_{\rho}\mathrm{li}(x^{\rho}) + \int_2^{\infty}\frac{du}{(u^2-1)u\ln u} - \ln 2$, donde $\mathrm{li}(x^{\rho})$ es el logaritmo integral de x^{ρ} y el sumatorio está extendido a todos los ceros no triviales de la función $\zeta(z)$.
5. El comentario de que *es muy probable que todos los ceros no triviales de la función* $\zeta(z)$ *tengan parte real igual a* 1/2, con una demostración esquemática de que el número de ceros de $\zeta(z)$ en el rectángulo $0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1$, $0 < \mathrm{Im}\, z < T$, es aproximadamente $(T/2\pi)\ln(T/2\pi)-(T/2\pi)$. Precisamente la *Hipótesis de Riemann*[18] *es la afirmación de que los ceros no triviales de la función* $\zeta(z)$ *están en la recta* $x = 1/2$.

La lectura de la fórmula de Riemann

$$\pi(x) = li(x) - \sum_{\rho} li(x^{\rho}) + \int_2^{\infty}\frac{du}{(u^2-1)u\ln u} - \ln 2 + O(\sqrt{x})$$

de la cantidad de números primos menores que x nos dice que la distribución de los números primos depende de los ceros no triviales de la función zeta. Además, el error con que $\pi(x)$ es aproximado por el logaritmo integral depende de la Hipótesis de Riemann, pues en 1901, Helge von Koch, demostró que $\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(\sqrt{x}\,\ln x)$ si y solo si se cumple la Hipótesis de Riemann, resultado refinado por Lowel Schoenfeld en 1976 al probar que la Hipótesis de Riemann es equivalente a que $\left|\pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln x$, para todo $x \ge 2657$.

[18] La recta $x = 1/2$ se llama recta crítica. El enunciado habitual de la Hipótesis de Riemann es que los ceros no triviales de $\zeta(z)$ están en la recta crítica.

Después de 1859, Riemann disfrutó un breve período de felicidad, pues obtuvo la cátedra que habían tenido Gauss y Dirichlet, consiguió un alojamiento decoroso y tiempo para elaborar su nueva Geometría Riemanniana. Pronto enfermó de pleuresía y ya no recuperó su salud. Realizó varios viajes a Italia para evitar el frío de Alemania. El último, en 1866, fue una huida del enfrentamiento de los ejércitos de Hannover y de Prusia en Gotinga que afectó su débil salud. Falleció a los treinta y nueve años.

Al poner orden en el despacho de Riemann se quemaron muchos de sus apuntes inéditos. Los que sobrevivieron al fuego permitieron conocer, medio siglo después, que Riemann sabía mucho más de lo que había publicado.

Son muchas las cuestiones, matemáticas y no matemáticas, que dependen de la Hipótesis de Riemann. Por ejemplo, el resultado de Mozzochi de 1986 de que la diferencia entre dos números primos consecutivos verifica la desigualdad

$$p_{n+1} - p_n < p_n^{\theta}, \qquad con \quad \theta = \frac{11}{20} - \delta, \qquad donde \quad \delta \leq \frac{1}{384}$$

se mejora si se admite la Hipótesis de Riemann, que hace posible obtener la desigualdad $p_{n+1} - p_n < p_n^{1/2} \ln p_n$. Luego veremos que la demostración de la Hipótesis de Riemann facilitará procedimientos más rápidos de obtención de números primos de muchas cifras, lo que afectará significativamente la seguridad del comercio electrónico, que depende en parte de nuestra gran lentitud para descomponer el producto de dos números primos muy grandes.

4. STIELTJES, HADAMARD Y DE LA VALLÉE-POUSSIN

Thomas Stieltjes era hijo de un notable parlamentario holandés. Se dedicaba totalmente a las matemáticas, por lo que suspendió tres veces los exámenes de ingreso en la Universidad. Como idolatraba a Gauss, deseaba trabajar en un observatorio. Una sugerencia de su padre le proporcionó un puesto de trabajo en el observatorio de Leiden, donde se centró en comprender la matemática del movimiento celeste. En doce años intercambió más de 400 cartas con Hermite, que, impresionado por sus ideas, le consiguió una cátedra en la Universidad de Toulouse.

Thomas Jan Stieltjes
(1856-1894)

Jacques Salomon Hadamard
(1865-1963)

Charles J. G. N. de la Vallée
Poussin (1866-1962)

En 1875 Stieltjes creyó tener una demostración de la Hipótesis de Riemann, que había fallecido nueve años antes. Hermite deseaba conocerla, pero nunca se la presentaba con la excusa de que faltaban pequeños detalles. Para motivarle a terminarla, Hermite consiguió que la Academia de París dedicase el *Gran Premio de Ciencias Matemáticas* de 1890 a la demostración de la conjetura de Gauss de disminución porcentual de la diferencia entre la cantidad de números primos y la estimación mediante el logaritmo integral. Entonces se sabía que para demostrar esta conjetura solo hacía falta probar que las abscisas de los ceros no triviales de la función zeta de Riemann son menores que 1, condición mucho más débil que la Hipótesis de Riemann.

Stieltjes no se presentó al premio, que fue concedido a Hadamard, discípulo de Hermite, por las ideas aportadas. El trabajo de Hadamard tenía algunas lagunas que completó posteriormente. Desde entonces la conjetura de Gauss de disminución porcentual pasó a llamarse *Teorema de los números primos*. Hadamard comparte la gloria de su demostración con Charles de la Vallée-Poussin, que de forma independiente y casi simultánea obtuvo otra prueba de la que dedujo además que

$\pi(N) = \int_2^N \frac{dx}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln x} e^{-a\sqrt{\ln x}}\right)$, siendo a una constante.

Stieltjes afirmó toda su vida que tenía una demostración de la Hipótesis de Riemann, ingresando en el amplio grupo de matemáticos que han comunicado tener su demostración y jamás la han publicado[19].

[19] Otros han publicado pruebas que luego han retirado al encontrar algún error. Xian-Jin Li presentó en julio de 2008 el artículo A proof of the Riemann hipótesis (arXiv:0807.0090v4), que retiró

5. HILBERT, MINKOWSKI Y LANDAU

David Hilbert
(1862-1943)

Hermann Minkowski
(1864-1909)

Edmund Georg Hermann
Landau (1877-1938)

Hilbert admiraba que las demostraciones de Riemann se guiasen por el razonamiento y no por cálculos y tuvo varias oportunidades para implementar este principio. La primera fue en 1893 al recibir el encargo de la Sociedad Matemática Alemana de elaborar un informe sobre el estado de la *Teoría de los Números*, para recopilar su gran desarrollo desde la publicación en 1801 de las *Disquisitiones aritmeticae* de Gauss. Fue ayudado por su amigo Hermann Minkowski, que tenía gran prestigio en Teoría de números desde que obtuvo el *Gran Premio de Ciencias Matemáticas* de la Academia de París a los 18 años.

---

al detectar un error en la página 29. Xian-Jin Li aplicaba análisis de Fourier para obtener una versión refinada del resultado de E. Bombieri sobre la condición de positividad de A. Weil, que implica la Hipótesis de Riemann.

También son frecuentes las publicaciones sobre posibles métodos de solución de la Hipótesis de Riemann. En febrero de 2009 se propuso un método físico matemático basado en un modelo de coincidencia, en término medio, de los niveles de energía de un átomo con la posición de los ceros de la función zeta de Riemann. El primer paso experimental sería la realización física del modelo matemático propuesto en 1999 por Berry, Keating y Connes. Esta idea no es nueva, pues desde hace algunas décadas hay científicos que sospechan que es posible demostrar la Hipótesis de Riemann desde la Física, convirtiendo la función zeta de Riemann en solución de una ecuación similar a las usadas en Física cuántica, en las que los ceros de una ecuación corresponden a los niveles de energía de un sistema cuántico. Se considera posible construir en laboratorio un sistema físico cuyo espectro sea los ceros de la función zeta de Riemann. Los métodos físicos facilitarán intuiciones similares a las de los ordenadores que han comprobado que billones de ceros no triviales de la función zeta están en la recta crítica; pero billones de ceros no es comparable con infinitos ceros. Por tanto, la demostración de la Hipótesis de Riemann deberá hacerse en términos exclusivamente matemáticos.

En 1895, Félix Klein, profesor en Gotinga, ofreció a Hilbert ser candidato a un puesto en esa Universidad. Hilbert obtuvo la plaza por el apoyo de Klein frente a otros profesores de Gotinga que opinaban que «*nunca se valdría por sí solo*». En otoño de 1895, Hilbert se trasladó a la Universidad de Gotinga para continuar la revolución de Riemann.

En 1898, Hilbert abandonó la Teoría de los Números y se centró en las nuevas geometrías surgidas en el siglo XIX. Conocía las dudas de Gauss sobre el modelo geométrico griego para la descripción de la realidad física[20].

Gauss nunca publicó sus resultados sobre nuevas geometrías no euclidianas, cuyas primeras aportaciones escritas se deben a Nikolai Lobachevsky y a Janos Bolyai en 1830. Su impacto inicial fue muy reducido, pues se creía que una geometría sin el axioma del paralelismo de Euclides no sería consistente al contener alguna contradicción, lo que fue refutado por Hilbert al demostrar que la consistencia de la aritmética implica la consistencia de la geometría, euclidiana y no euclidiana. Entonces Hilbert observó que no se había probado que la aritmética careciese de contradicciones, lo que originó el comienzo de su investigación en verdades matemáticas fundamentales, siguiendo las ideas elaboradas por Emmanuel Kant en Königsberg, ciudad natalicia de Hilbert.

A finales de 1899 se invitó a Hilbert a pronunciar una de las conferencias centrales del Congreso Internacional de Matemáticos que debía celebrarse en París en 1900. Hilbert decidió hablar sobre temas no demostrados, bien proyectos de trabajo o cuestiones abiertas, presentando su famosa lista de problemas, convencido de que la razón pura encontraría la solución, pues su posición filosófica era opuesta al pesimismo de Emil du Bois-Reymond sobre la existencia de límites en nuestra capacidad para entender la naturaleza. Ya se ha indicado que la Hipótesis de Riemann era parte del problema octavo[21].

[20] Gauss midió los ángulos de un triángulo de haces de luz proyectados desde las cimas de tres colinas cercanas para comprobar que la suma de los tres ángulos no era 180º y deducir que la geometría más apropiada en ciertos fenómenos físicos no es la euclídea. La escala utilizada por Gauss era demasiado pequeña para contradecir la concepción euclidiana de la Física y su intuición no se pudo confirmar hasta el 29 de mayo de 1919, en que un eclipse solar permitió a Eddington medir en las islas Príncipe que las estrellas que debían aparecer cerca del Sol estaban un poco desplazadas, pues su luz era curvada por el campo gravitatorio solar. Así avaló la teoría de relatividad general de Einstein. Se han hecho varias comprobaciones posteriores más exactas del desplazamiento de la luz de las estrellas al pasar cerca del Sol.

[21] Se comentó antes que en el problema octavo proponía, además, la demostración de la conjetura de Goldbach.

Minkowski falleció por una apendicitis a los 46 años. Hilbert le sustituyó en Gotinga por Edmund Landau, quien, junto a Harald Bohr[22], obtuvo un gran resultado en dirección hacia la solución de la Hipótesis de Riemann. En lenguaje informal nos dice que los ceros no triviales de la función zeta de Riemann entre las rectas $x = 0{,}5$ y $x = 0{,}5 + \varepsilon$ representan una gran proporción del total de ceros no triviales, por pequeño que sea el número positivo ε.

6. HARDY, LITTLEWOOD Y RAMANUJAN

Godfrey Harold Hardy (1877-1947)

John Edensor Littlewood (1885-1977)

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920)

Otro paso hacia la posible solución de la Hipótesis de Riemann lo dio Hardy al probar que infinitos ceros de la función zeta de Riemann están situados sobre la recta crítica $x = 0{,}5$, resultado valorado por Hilbert como extraordinario[23].

En 1910 Hardy encontró en el Trinity College a un matemático ocho años más joven, John Edensor Littlewood, con quien publicó más de cien artículos conjuntos durante treinta y siete años de fecunda colaboración.

Littlewood fue un estudiante brillantísimo. Al finalizar sus estudios pidió a su tutor, Ernest Barnes, un primer problema para comenzar a investigar. Barnes, en un alarde de ignorancia de los esfuerzos realizados para demostrar la Hipótesis

[22] Harald Bohr fue hermano de Niels Bohr, uno de los creadores de la Mecánica Cuántica.

[23] Este resultado está muy distante de la Hipótesis de Riemann. Poco después Hardy escribió felicitaciones a sus amigos con motivo del Año Nuevo que terminaban con varios deseos. El primero era demostrar la Hipótesis de Riemann.

de Riemann, escribió la definición de la función zeta y le pidió que determinase sus ceros durante el verano. Como era de esperar, Littlewood fracasó en la determinación de los ceros no triviales, pero redescubrió la relación entre la función zeta y los números primos, resultado debido a Euler y sobre el que había trabajado Riemann cincuenta años antes.

Hardy, que tal vez era entonces el único matemático inglés que conocía los recientes progresos de Hadamard y de la Vallée-Poussin sobre el teorema de los números primos de Gauss[24], se dio cuenta de la capacidad matemática de Littlewood y le consiguió un puesto de trabajo en el Trinity College.

Hardy no se equivocó con Littlewood, quien pronto dio resultados fundamentales sobre la mejora de Riemann a la fórmula del logaritmo integral de Gauss y sobre otra conjetura de Gauss, la conjetura de sobreestimación, que afirmaba que su logaritmo integral siempre sería mayor que la cantidad de números primos menores que *N*.

Riemann, con su resultado de la cantidad de números primos menores que *N,* pretendió mejorar la estimación de Gauss mediante el logaritmo integral. Se ha comprobado que la fórmula de Riemann es más precisa que la de Gauss en los primeros millones de números. No obstante, Littlewood probó que para números muy grandes la estimación de Gauss resulta más precisa.

En 1912 se había verificado la conjetura de sobreestimación de Gauss para valores de *N* menores que 10.000.000, pero Littlewood demostró que se llegaría a una zona numérica donde el logaritmo integral subestimaría la cantidad de números primos. Unos veinte años más tarde, Stanley Skewes[25] probó, admitiendo la Hipótesis de Riemann, que se detectaría subestimación con valores de *N* del orden de $10^{10^{10^{34}}}$. Este número se llama número de Skewes y según Hardy, era el mayor número utilizado hasta entonces en una demostración matemática. En 1955 Skewes mejoró su resultado de subestimación sin necesidad de admitir la Hipótesis de Riemann, pero tuvo que cambiar su número de Skewes por el número aún mayor, $10^{10^{10^{963}}}$.

Littlewood demostró con sus dos resultados que Gauss y Riemann también tuvieron intuiciones equivocadas, pues la certeza matemática es, y solo

[24] Ya se ha indicado que este teorema afirma que el logaritmo integral proporciona la cantidad de números primos no mayores que N con precisión relativa creciente al aumentar N.

[25] Satanley Skewes era discípulo de Littelwood.

es, demostración. Esta afirmación es el mensaje de Hardy, con su muy peculiar estilo, a su amigo Bertrand Russell cuando le dijo: «*Si yo consiguiera demostrar con la lógica que tú morirías dentro de cinco minutos, estaría consternado por tu muerte inminente, pero mi dolor quedaría mitigado por el placer de la demostración*».

Hardy y Littlewood investigaron la distribución de números primos en una progresión aritmética $(h + kn)_n$, cuando h y k son primos entre sí[26]. Sustituyeron la función zeta por las *L-funciones*[27], definidas por

$$L(z, \chi) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^z}$$

cuando Re $z > 1$, y donde $\chi(n)$ es una función multiplicativa con período k tal que $\chi(1) = 1$[28]. Las L-funciones verifican una identidad análoga a la del producto de Euler y también se prolongan analíticamente[29]. La Hipótesis de Riemann generalizada de Hardy y Littlewood afirma que los ceros de la prolongación analítica de $L(z, \chi)$ en la franja $0 <$ Re $z < 1$ también están situados en la recta $x = 1/2$.

Admitiendo la Hipótesis de Riemann generalizada, Hardy y Littlewood probaron el siguiente resultado tipo Goldbach[30]: Existe un número natural n_0 tal que cada número impar mayor que n_0 es la suma de tres números primos[31]. En 1997, Deshouillers, Effinger, te Riele y Zinoviev consiguieron una prueba de este resultado con $n_0 = 7$.

---

[26] Ya se dijo que Dirichlet obtuvo que entonces la progresión aritmética contiene infinitos números primos.

[27] También se las llama *L-funciones de Dirichlet*.

[28] Se dice que $\chi(n)$ es un carácter de módulo k. El carácter principal es la función definida por $\chi_1(n) = 1$ si n y k son primos entre sí y $\chi_1(n) = 0$ en caso contrario.

[29] La prolongación de $L(s, \chi_1)$ es meroforma con un único polo en $z = 1$. En los demás casos la prolongación es una función entera.

[30] Goldbach, en una carta a Euler de 1742, le expresó su creencia de que cada entero mayor que cinco se puede expresar como suma de tres primos. Goldbach consideraba 1 como un número primo. Euler le contestó que su afirmación era equivalente a que cada entero par mayor o igual que 4 es la suma de dos números primos. Se llama problema ternario a la conjetura de que cada entero impar mayor que 7 es la suma de tres números primos y se llama problema binario a la conjetura de que cada número par mayor que 2 es la suma de dos números primos.

[31] Una demostración de este resultado de Hardy y Littlewood independiente de la Hipótesis de Riemann Generalizada fue obtenida por Vinogradov en *Some theorems concerning the theory of prime numbers* (1937), donde potencia la aplicación de sumas trigonométricas en teoría de números, siguiendo la técnica iniciada por Weyl en 1916 y continuada por Hardy y Littlewood.

Mientras Hardy y Littlewood investigaban sobre números primos con ayuda de la función zeta de Riemann, a cinco mil millas de distancia, Srinivasa Ramanujan, un joven empleado del puerto de Madrás con un salario de 20 libras anuales y con formación matemática casi nula, se dedicaba ávidamente a intuir resultados matemáticos.

En la formación juvenil de Riemann tuvo gran influencia el excelente libro *Teoría de Números,* de Legendre. A Ramanujan le marcó el pésimo libro «*A Sinopsis of Elementary Results in Pure Mathematics*»[32], que consta de 6.165 teoremas ordenados, sin apenas pruebas y con algunas referencias cruzadas. Este libro es fiel a su subtítulo, *with abridged demonstrations*, y se lo dieron a Ramanujan en 1903, cuando solo tenía 15 años.

Ramanujan dedicó los años siguientes a estudiar el libro y a intuir la veracidad de sus afirmaciones. El libro le impidió familiarizarse con la idea de demostración formal, pero fue el principio de la catarata de fórmulas de Ramanujan, que escribía en deshilachados cuadernos grandes, pues compartía con Euler la capacidad de dar vueltas a las fórmulas hasta hacer surgir nuevas perspectivas. Alrededor de un tercio de las fórmulas obtenidas por el joven Ramanujan eran erróneas y otro tanto redescubrimientos. Quedaba un tercio de fórmulas correctas y originales[33].

La concentración absoluta de Ramanujan en su mundo matemático le impidió aprobar los exámenes de admisión en la Universidad de Madrás, pues, además de matemáticas, se exigían conocimientos de inglés, historia, sánscrito y fisiología. La influencia de la red brahmánica y la impresión que producían sus sucios cuadernos le proporcionaron un empleo en el puerto de Madrás y empezó a publicar en el Journal of the Indian Mathematical Society.

---

[32] Lo escribió en 1880 George Shoobridge Carr, que era un preparador privado para unos exámenes difíciles de Matemáticas en Cambridge, conocidos como los «Mathematical Tripos», por el taburete de tres patas donde se sentaban los estudiantes. Desde su comienzo en 1730 consistían en la resolución de laboriosos problemas de matemáticas durante cuatro días completos, una semana de descanso y, a continuación, comenzaba otra serie de cuatro días de problemas. El prestigio de los Mathematical Tripos clasificaba a los participantes, determinando en buena medida su futuro professional. La mejor puntuación obtenida fue de 16.368 puntos de un total de 33.541; se valoraba la rapidez y el número de respuestas correctas.

[33] Para Hadamard las etapas de un descubrimiento matemático son preparación, incubación, iluminación y verificación. Ramanujan tenía dones naturales para la tercera etapa, pero ni siquiera concebía la necesidad de la cuarta: la demostración.

Su nombre llamó la atención de las autoridades británicas de Madrás. Por mediación de Griffith, miembro del Instituto de Ingeniería, se envió la obra de Ramanujan a Hill, profesor del University College de Londres, quien en principio quedó aturdido por la falta de formalismo convencional de Ramanujan y por algunas expresiones.

La opinión de Hill no fue totalmente negativa, lo que animó a Ramanujan a enviar sus descubrimientos a tres matemáticos de Cambridge, E. W. Hobson, H. F. Baker y Godfrey Harold Hardy. Los dos primeros no se molestaron en leer sus resultados. Hardy también estuvo tentado de hacer lo mismo, pues su primera impresión fue negativa, al no creer en la afirmación de Ramanujan de que había encontrado una fórmula que proporcionaba la cantidad de números primos hasta 100.000.000, «*en general sin ningún error y en algunos casos con un error de* 1 *o de* 2».

No obstante, decidió reunirse con Littlewood para examinar los papeles de Ramanujan. Después de analizar el lenguaje no convencional de Ramanujan se dieron cuenta que estaban ante un genio brillante falto de preparación formal.

Hardy respondió a Ramanujan en términos muy positivos, pidiéndole que enviase las demostraciones detalladas y Littlewood añadió una nota pidiendo la fórmula de la cantidad de números primos y todas las pruebas lo más rápidamente posible.

Hardy y Littlewood pasaron muchas cenas y noches intentando descifrar otras partes de la carta de Ramanujan. Hardy comentó a Bertrand Russell que «*creía haber encontrado a un segundo Newton, un empleado hindú de Madrás con un sueldo de 20 libras al año*».

La segunda carta de Ramanujan contenía varias fórmulas sin demostración para calcular la cantidad de números primos. Hardy y Littlewood se dieron cuenta que Ramanujan había concebido una parte de los términos que añadía la fórmula de Riemann a la de Gauss del logaritmo integral para obtener la cantidad de números primos menores que N. Esta segunda carta de Ramanujan inspiró a Littlewood cómo acotar el error entre la cantidad de números primos menores que N y la estimación de Gauss. Entonces Littlewood exclamó: *Ramanujan es al menos un Jacobi*. Hardy consiguió traerle a Cambridge.

La salud de Ramanujan nunca fue buena. Es posible que llegase a Inglaterra con amebiasis; allí el clima húmedo, el frío y las dificultades añadidas por la Primera Guerra Mundial, que le impedían encontrar algunos de los alimentos adecuados de su dieta vegetariana, empeoraron su estado físico. Estuvo en varios sanatorios antituberculosos, pero su estado de salud no le impidió seguir su actividad matemática. La única explicación que Littlewood encontraba para la potencia matemática de Ramanujan en condiciones precarias era que «*cada entero positivo era un amigo personal de Ramanujan*».

Esta poética frase enlaza con la anécdota de la visita que hizo Hardy a Ramanujan en un hospital. Al encontrarle muy enfermo solo le comentó que había venido con un taxi cuya matrícula era el poco atractivo número 1729, a lo que Ramanujan respondió que «*era el menor número que se podía descomponer de dos formas diferentes en suma de dos cubos*», pues $1729 = 10^3 + 9^3$, *y también* $1729 = 12^3 + 1^3$. Hardy, asombrado, le preguntó si conocía la respuesta al problema correspondiente para la cuarta potencia y, después de un momento de reflexión, respondió que «*el ejemplo no era obvio y que el primero de tales números debía ser muy grande*».

Como no recobraba la salud, al finalizar la Primera Guerra Mundial, Hardy le sugirió volver a la India para completar su convalecencia. Falleció en Madrás el 26 de abril de 1920, con solo 33 años[34].

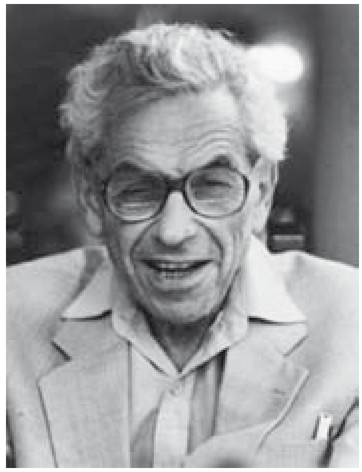
[34] En las biografías de Ramanujan se cuenta que Hardy y Littlewood hicieron todo lo posible para traer a Ramanujan a Cambridge, encargando a Neville, un profesor del Trinity College de visita en la India, que le convenciese de la necesidad de unirse a ellos. Una carta entusiasta de Hardy abrió todos los resortes de la universidad y de la administración a favor de Ramanujan, que se instaló en Cambridge en 1914. Nunca logró familiarizarse con el rigor occidental, pero la colaboración con Hardy fue muy fecunda. Uno de sus resultados más brillantes fue la obtención de la función compleja definida en el conjunto de los números naturales, cuya parte entera da los valores de la función de partición $p(N)$. Con unos segundos de reflexión se obtiene que $p(4) = 5$, pero sería muy laborioso comprobar que $p(200) = 3.972.999.029.388$, lo que nos permite apreciar la dificultad de la fórmula de Hardy-Ramanujan.

Por sus méritos de investigación, Cambridge le otorgó el título de Bachelor in Arts en 1916. El 6 de diciembre de 1917 Ramanujan fue elegido miembro de la London Mathematical Society. Al año siguiente fue elegido Fellow de la Royal Society, se le nombró profesor del Trinity College, la Universidad de Madrás le concedió otra beca y le creó una cátedra de matemáticas. Estas distinciones estimularon aún más su actividad matemática, que no cesó ni en los momentos de mayor deterioro físico.

7. SIEGEL, SELBERG Y ERDÖS

Carl Ludwig Siegel
(1896-1981)

Atle Selberg
(1917-2007)



Paul Erdös
(1913-1996)

El padre de Edmund Landau descubrió que en su misma calle de Berlín vivía Siegel. Tenía fama de ser un precoz talento matemático y le regaló el libro de su hijo sobre teoría de números.

Siegel había decidido estudiar Astronomía, pensando que esta disciplina no tendría nada que ver con la guerra, pero por el retraso de los cursos de Astronomía empezó unos cursos de Matemáticas y dedicó su vida a la exploración del universo de los números.

Su negativa a ir a la guerra provocó su reclusión en un manicomio, de donde fue liberado por intervención del padre de Landau. Ya licenciado en Matemáticas visitó a Landau, quien le explicó con detalle uno de sus últimos teoremas con demostración muy larga y complicada. Al regresar a su casa se le ocurrió otra demostración sencilla, que se la envió al día siguiente en el reducido espacio de una tarjeta postal.

Siegel comentó sus ideas sobre la Hipótesis de Riemann a Hilbert, que le ayudó en la obtención de un puesto en la Universidad de Frankfurt y en el acceso a lo que se pudo salvar de los escritos inéditos de Riemann depositados en la Biblioteca de Gotinga. Al descubrir un paquete con una gran cantidad de folios repletos de complicados cálculos numéricos, se le desmoronó la imagen de Riemann como matemático conceptual que elaboraba sus ideas sin realizar cálculos.

Siegel adquirió conciencia de que Riemann, el gran defensor del *pensamiento abstracto* y de los *conceptos generales*, conocía bien la *importancia de la experimentación numérica*. Tal vez pensó que los grandes conceptos generales de Riemann surgían del análisis de complicados cálculos numéricos.

Los folios de Riemann eran de mala calidad y estaban atestados de cálculos para ahorrar dinero, pues tuvo que mantener a su hermana en sus últimos años. La paciencia de Siegel le permitió encontrar una fórmula para obtener los valores de la función zeta, que Riemann había utilizado para comprobar que los primeros ceros de la función zeta están situados sobre la recta $x = \frac{1}{2}$[35]. Hoy se la llama fórmula de Riemann-Siegel[36] y demostró su gran potencia desde 1936 en que Ted Titchmarsh, matemático de Oxford, la utilizó en la obtención de los primeros[37] 1.041 ceros no triviales de la función zeta de Riemann, adaptando una máquina diseñada para el cálculo de los movimientos celestes.

A finales de 1933 la situación en Gotinga empeoró. Las clases de Landau eran boicoteadas por su ascendiente judío y presentó la dimisión tras oír el improperio del matemático Teichmüller de que «*su modo judío de presentar el cálculo infinitesimal era incompatible con el pensamiento ario*».

Al año siguiente, Siegel se trasladó de Frankfurt a Gotinga para cubrir la vacante de Landau, pero en 1940 se exiló a Estados Unidos en protesta por la guerra. Hitler destruyó en poco tiempo todo lo que Gauss, Dirichlet, Riemann y Hilbert habían creado en Gotinga. Siegel volvió a Alemania al terminar la guerra.

---

[35] Riemann siguió el siguiente método: El número de ceros $N(T)$ de $\zeta(z)$ en el rectángulo **R** de vértices -1-iT, 2-iT, 2+ iT, -1+ iT viene dada por la integral de Cauchy $N(T) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} - \frac{\zeta'}{\zeta} ds$, suponiendo que T no es la parte imaginaria de un zero. El -1 se debe al polo simple de la función $\zeta(z)$ en el punto 1 con residuo 1. El cálculo de la función $\zeta(z)$ y de su derivada se hace con gran precisión con ayuda de la fórmula de Riemann-Siegel. Además, Riemann introdujo la función $\xi(t) = \frac{1}{2} z(z-1)\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$, con $z = \frac{1}{2} + it$, que es una función entera impar cuyos ceros tienen parte imaginaria entre – $i/2$ e $i/2$. Al ser esta función continua y real para valores reales de t, tendrá un número impar de ceros entre cada dos puntos en los que $\xi(t)$ cambia de signo. Eligiendo adecuadamente puntos en el intervalo [-T,T] se puede concluir, por comparación con $N(T)$, que todos los ceros en el intervalo [-T,T] son simples y que satisfacen la Hipótesis de Riemann en este intervalo.

[36] La primera parte de esta fórmula de Riemann había sido redescubierta sesenta años después por Hardy y Littlewood.

[37] Siempre se supone que los ceros no triviales están ordenados por su componente imaginaria.

Entonces supo que Selberg había continuado la investigación alrededor del octavo problema de Hilbert.

Selberg era un matemático de Oslo formado en la soledad de los libros de matemáticas de su padre, donde encontró un artículo de Ramanujan, cuyas fórmulas le parecieron extrañas y bellas. Su padre le regaló los *Collected Papers* de Ramanujan, que le permitieron tener artículos originales cuando se matriculó en la Universidad de Oslo en 1935. En 1937 mejoró la fórmula del número de particiones de Hardy-Ramanujan, pero pronto supo que poco antes había sido obtenida por Rademacher, también huido de Alemania por sus ideas pacifistas.

Releyendo a Hardy y a Littlewood, Selberg consiguió demostrar que la densidad de ceros de la función zeta entre k y $2k$ no tiende a 0 cuando k tiende a infinito. La exposición de este resultado en el Congreso Escandinavo de Matemáticas de Copenhague atrajo la atención de Hermann Weyl, que también abandonó Gotinga en 1933 y se fue a Princeton. Selberg aceptó la invitación de Weyl y en Princeton compartió experiencias matemáticas con el húngaro Paul Erdös, otro prófugo europeo.

Erdös, igual que Selberg, tuvo un padre que le facilitó su pasión por los números, pues dándole ingeniosamente la vuelta al razonamiento de Euclides le indicó cómo construir k números consecutivos de los que ninguno fuese primo[38].

Parece que solo Euler ha escrito más artículos de matemáticas que Erdös, quien detestaba la soledad en el trabajo, tan amada por Selberg. La colaboración de Erdös con innumerables matemáticos ha permitido atribuir a casi todos los matemáticos y a muchos otros científicos el número de Erdös, que es la distancia colaborativa con Erdös. Por ejemplo, el número de Erdös de Albert Einstein es 2, pues escribió un artículo con Ernst G. Straus, quien tiene un artículo con Erdös[39].

Erdös regalaba lo que ganaba a sus estudiantes en premio a las respuestas de las muchísimas preguntas que formulaba[40]. Cuando le gustaba mucho una prueba decía: «*Esta demostración llega directamente del Gran Libro*».

El primer resultado de Erdös tiene su antecedente en 1845, cuando Bertrand conjeturó que entre N y $2N$ siempre hay un número primo, lo que fue probado

[38] Ninguno de los números $(k+1)!+i$, cuando i varía entre 2 y k+1, es primo.

[39] Hay más de 5.000 matemáticos con número de Erdös igual a 2.

[40] En una ocasión ofreció el factorial de diez mil millones de dólares por uno de sus problemas. El matemático que lo resolvió también sabía que esa cantindad era impagable y renunció al premio.

por Chebyshev[41]. En 1931 Erdös publicó otra prueba sencilla, que más tarde supo que estaba en uno de los últimos artículos de Ramanujan. Esto le motivó a mejorar los resultados de Chebyshev y Ramanujan y se centró en el problema de obtener la diferencia entre dos números primos consecutivos, por el que llegó a ofrecer una recompensa de diez mil dólares, convencido de que se necesitaría más de diez mil horas de trabajo para su resolución.

Poco después Erdös oyó decir a Mark Kac, en una conferencia en Princeton, que la variable número de factores primos de un número debía seguir la distribución de Gauss, pero que no conocía suficiente Teoría de Números para su demostración. Erdös redactó una demostración rigurosa mientras se desarrollaba la conferencia, lo que marcó el comienzo de su pasión por combinar la Teoría de Números con la Probabilidad, siguiendo el ejemplo de Gauss en su estimación de la cantidad de números primos con el logaritmo integral.

Ingeniosas manipulaciones con la función zeta de Riemann habían permitido a Hadamard y a de la Vallée-Poussin probar el Teorema de los números primos y a Dirichlet mejorar la intuición de Fermat de la existencia de infinitos números primos en la sucesión $(1 + pn)_n$, siendo p un número primo.

El resultado de Dirichlet motivó varias investigaciones realizadas un siglo después. En la nota 11 se dijo que, en 1946, Selberg concibió una demostración elemental de esta intuición de Fermat, que la hubiesen entendido los griegos. Selberg contó su demostración y algunas otras fórmulas al matemático húngaro Paul Turán, autorizándole a exponerlas en una conferencia. Erdös fue uno de los asistentes y se dio cuenta que había oído lo que necesitaba para dar una demostración sencilla del postulado de Bertrand de existencia de un número primo entre N y $2N$. Además generalizó el postulado de Bertrand, pues probó que si k es un número entre 1 y 2 se puede determinar un N_k tal que para $N > N_k$ existe un número primo entre N y kN.

Erdös comentó su generalización a Selberg, quien la utilizó para elaborar una demostración elemental del Teorema de los Números Primos. Entonces Erdös le propuso escribir un artículo conjunto sobre esta demostración elemental, a lo que no accedió Selberg, argumentando que hacía las matemáticas solo y que no publicaba en colaboración[42].

---

[41] Chebyshev obtuvo este resultado en 1850.

[42] Selberg solo escribió un artículo en colaboración con el matemático indio Saravadam Chowla.

Selberg modificó su demostración del Teorema de los Números Primos para evitar la fórmula de Erdös y la publicó en *Annals of Mathematics*. Hermann Weyl medió entre Selberg y un furioso Erdös, quien más tarde publicó otra demostración elemental del Teorema de los Números Primos, utilizando su fórmula y reconociendo el papel de Selberg, galardonado con la medalla Fields en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1950[43] y con el premio Wolf en 1986, que Erdös también había obtenido dos años antes.

Diez años después, Selberg recibió una gran ovación en la conferencia que pronunció en Seattle en 1996 con motivo del centenario del Teorema de los Números Primos. Allí dijo que es muy probable que la Hipótesis de Riemann llegue sin demostración a su bicentenario, que no creía que se tratase de un resultado indemostrable, pero que podía suceder que su demostración fuera tan compleja que el cerebro humano no consiga nunca alcanzarla.

8. GÖDEL, TURING Y ALONZO CHURCH

Kurt Gödel
(1906-1978)

Alan Mathison Turing
(1912-1954)

Alonzo Church
(1903-1995)

---

[43] Entonces Hadamard tenía ochenta años y quiso asistir al congreso para celebrar la simplificación de la demostración que había descubierto cincuenta años antes. A Hadamard y a Laurent Schwartz se les negó el visado de entrada por las restricciones del maccarthismo. La intervención del presidente Truman les facilitó el visado. En la concesión de la Medalla Fields también se valoró que Selberg tenía el récord de cantidad de ceros de la función zeta localizados sobre la recta crítica $x = 1/2$. En los años sesenta Norman Levinson mejoró la cantidad de ceros no triviales de la función zeta localizados en la recta crítica; un tumor cerebral cortó el desarrollo sus brillantes ideas. En 1987, Brian Conrey probó que, en promedio, el cuarenta por ciento de los ceros no triviales de la función zeta están sobre la recta crítica.

Hilbert estaba convencido de la solución positiva del problema de la consistencia de los axiomas de la Aritmética[44]. Era el segundo problema de su célebre lista, potenciado por la paradoja de Bertrand Russell, que fue resuelta en el *Principia Mathematica*[45].

Max Newman se sintió seducido por las ideas expuestas por Hilbert sobre la consistencia en el Congreso Internacional de Matemáticos de Bolonia de 1928, que fue la primera ocasión en que se invitó a una delegación alemana después de la Primera Guerra Mundial. Hilbert fue recibido con una gran ovación a la que respondió diciendo que «*La matemática no conoce razas y que para los matemáticos el mundo entero de la cultura es una sola nación*».

Pero Kurt Gödel, joven austríaco de veinticinco años, desmoronó en su tesis doctoral de 1930 la opinión de Hilbert sobre el problema de la consistencia al probar que desde unos axiomas no es posible demostrar su consistencia. Tres años antes, Heisenberg había señalado limitaciones a los físicos con su principio de incertidumbre. Ahora Gödel hacía lo propio con los matemáticos.

Otro resultado de la tesis doctoral de Gödel es su *Teorema de incompletitud*, que afirma que si unos axiomas son consistentes y pueden describir la Teoría de Números y la Aritmética, entonces habrá proposiciones indecidibles de las que no se puede demostrar ni su certeza ni su falsedad a partir de esos axiomas. Este resultado hizo pensar que algunas conjeturas no demostradas, como la Hipótesis de Riemann[46], podrían pertenecer a la clase de proposiciones formalmente indecidibles en un sistema axiomático consistente.

El teorema de incompletitud hizo pensar a Hilbert en la posibilidad de un algoritmo o máquina capaz de indicar a los matemáticos si un enunciado podía deducirse o no de unos axiomas. Lo llamó *problema de la decibilidad* y recuerda a su décimo problema de 1900, que pregunta por la existencia de un método para saber si una ecuación diofántica tiene o no solución entera.

Max Newman, al ver desmoronado el programa de su admirado Hilbert, se sintió atraído por las ideas de Gödel. Cinco años después comenzó a explicar el

---

[44] Ya se comentó que llegó al problema de la consistencia con el estudio de las geometrías no euclidianas.

[45] Libro escrito por Bertrand Russell y Norbert Whitehead.

[46] También se pensó que la conjetura de Golbach de que cada número par es la suma de dos números primos podría ser otra proposición no demostrable.

Teorema de incompletitud. Alan Mathison Turing (1912-1954), cuyo centenario estamos celebrando, oyó una de sus conferencias y la dificultad de las demostraciones de Gödel le llevó a intuir la inexistencia de una máquina que resolviese el problema de decibilidad propuesto por Hilbert.

A Turing se le asocia con el descubrimiento del sistema de cifrado de Enigma, la máquina de cifrar mensajes del ejército alemán durante la Segunda Guerra Mundial, con lo que contribuyó a salvar muchas vidas. No está tan popularizado que en su primer artículo de investigación obtuvo el Teorema Central del Límite y, como les sucedió a Erdös y a Selberg, se llevó la sorpresa de que había sido obtenido diez años antes por J. W. Lindeberg. Este artículo demostró el potencial de Turing y le facilitó la obtención de una plaza de profesor en el King's College a los veintidós años.

Turing compartió con Selberg el amor a la soledad y al desarrollo de sus propias ideas. Desde antes de la Segunda Guerra Mundial, se centró en obtener máquinas físicas capaces de enfrentarse a los problemas abstractos. Sus primeros resultados fueron máquinas teóricas, llamadas *máquinas de Turing*, que seguían nuestro comportamiento al hacer cálculos aritméticos y que son el antecedente teórico de los ordenadores.

Turing demostró la inexistencia de un algoritmo capaz de determinar en un número finito de pasos si una de sus máquinas funcionando continuamente produciría o no un determinado número.

Poco después utilizó una técnica original de Cantor[47] para probar que si una máquina de Turing fuese capaz de indicar si un conjunto de proposiciones eran o no deducibles de un conjunto de axiomas se podía construir una proposición que esa máquina no sería capaz de decirnos si era o no deducible del conjunto de axiomas[48]. Así resolvió en negativo el problema de la decibilidad.

Alonzo Church, matemático de Princeton, también obtuvo la misma conclusión que Turing, pero se adelantó en la publicación. Gracias a Max Newman,

[47] Es la conocida técnica utilizada por Cantor para demostrar que si a cada número racional se le asocia un número irracional siempre queda un irracional no asociado a ningún número racional.

[48] Por supuesto si se modificase la máquina para que nos pudiese decir si esa proposición era o no deducible del conjunto de axiomas, se podría construir otra proposición diferente que la nueva máquina no sería capaz de decirnos si se deduce o no de los axiomas.

también Turing publicó su resultado, que tuvo mayor repercusión que el de Church, pues el análisis de Turing del problema de la decibilidad permite la obtención de una ecuación que da todos los números primos, como se comentará en el apartado siguiente.

Después del éxito compartido con Church en el problema de la decibilidad, Turing dirigió su investigación hacia la Hipótesis de Riemann. Influido por el pesimismo de Hardy[49], dirigió su atención a la utilización de máquinas para obtener ceros no triviales de la función zeta con el método de cálculo de Riemann redescubierto por Siegel, con la esperanza de obtener algún cero complejo fuera de la recta crítica[50].

Turing adaptó una máquina sofisticada, utilizada en la previsión de las mareas, para el cálculo de ceros no triviales de la función zeta. Su trabajo fue interrumpido por la Segunda Guerra Mundial, que supuso su concentración total en averiguar el sistema de cifrado de la máquina Enigma en Bletchley Park[51].

Al final de la guerra, Turing comenzó a trabajar con Max Newman en el recién construido Laboratorio de Cálculo de la Royal Society. Construyeron una máquina calculadora programable para cálculos diversos. Con esta máquina Turing comprobó en 1950 que los 1.104 primeros ceros no triviales de la función zeta estaban situados sobre la recta $x = 1/2$. Turing superó los 1.041 ceros de Ted Titchmarsh, pero no consiguió su objetivo de probar la falsedad de la Hipótesis de Riemann. Desde entonces su vida se vio inmersa en varios problemas y fue hallado muerto en 1954, tal vez envenenado con cianuro[52].

[49] Hardy llegó a creer en la falsedad de la Hipótesis de Riemann, tal vez por su fracaso en encontrar la demostración tras las muchas horas de trabajo empleadas en su búsqueda.

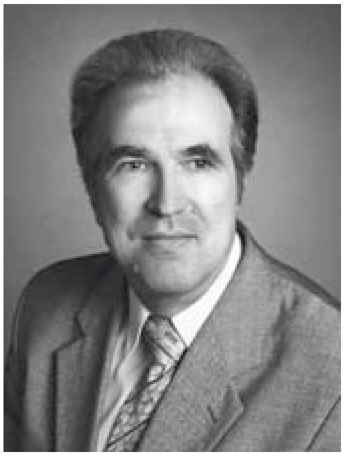
[50] Turing sabía que el método de modificar máquinas lo había utilizado Ted Titchmarsh en Oxford.

[51] El éxito de Turing en el descifrado del código secreto alemán fue consecuencia de su excelente preparación informática previa, dirigida a la obtención de valores de la función zeta.

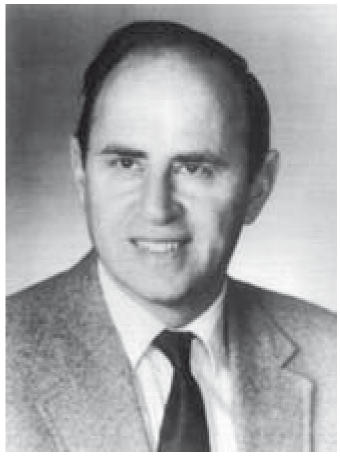
[52] Su casa fue desvalijada. Turing llamó a la policía. El ladrón resultó ser conocido de uno de los amantes de Turing. La policía se ocupó también del acto de indecencia grave, como estaba tipificado entonces, que Turing reconoció y que podía ser castigado con cárcel. El testimonio de Max Newman le libró de la cárcel con la condición de someterse a un tratamiento para controlar su comportamiento sexual.

9. ROBINSON, MATIJASEVITCH Y COHEN

Julia Hall Bowman Robinson (1919-1985)



Yuri Vladimirovich Matiyasevich (1947-)



Paul Joseph Cohen (1934-2007)

Pronto las nuevas máquinas de cálculo permitieron superar los 1.104 ceros no triviales de la función zeta obtenidos por Turing. En 1956, Derrick Henry Lehmer (1905-1991) comprobó que los 25.000 primeros ceros no triviales de la zeta de Riemann están en la recta crítica $x = 1/2$. Este resultado y un anuncio de prensa sobre un número primo muy grande[53] impresionaron a Julia Robinson, una niña a la que unas fiebres reumáticas retuvieron dos años en cama y le dejaron dos secuelas: Un corazón debilitado y una paciencia inagotable.

El amor de Robinson hacia los números se transformó en pasión por las obras de Gödel y Turing. El famoso lógico polaco Alfred Tarski, de visita en Harvard en 1939, llevó la atención de Julia Robinson hacia el décimo problema de Hilbert de *la existencia de un algoritmo para decidir si una ecuación diofántica con coeficientes enteros tiene solución entera.*

La inexistencia de un algoritmo capaz de asegurarnos si una máquina de Turing producirá o no un número, llevó a Julia Robinson a formular su *conjetura de correspondencia* que a cada máquina de Türing asocia una expresión algebraica cuyos valores son la sucesión de números que la máquina genera.

Robinson observó que de la certeza de su conjetura se deduce la resolución en negativo del décimo problema de Hilbert, por no existir ningún algoritmo

[53] Que más tarde se comprobó que no era primo.

que asegure que la sucesión producida por una máquina de Turing contiene el valor cero.

Julia Robinson, Martin Davis y Hilary Putnam redujeron la conjetura de correspondencia a probar la existencia de una expresión algebraica capaz de generar una sucesión concreta de números, lo que fue demostrado por Yuri Matiyasevich, un matemático ruso de veintidós años. Robinson le dijo que «*le alegraba pensar que era un niño cuando formuló la conjetura de correspondencia y que para confirmar su validez solo había tenido que esperar a que creciese*».

Es ejemplar que tanto Robinson como Matiyasevich atribuyesen al otro mayor mérito en la resolución del décimo problema de Hilbert[54].

La existencia de una máquina de Turing capaz de generar la lista de los números primos y el trabajo de Robinson y Matiyasevich implicaban la existencia de una expresión algebraica que daría todos los números primos. En 1971, Matiyasevich elaboró un método para obtenerla. Se publicó en 1976 y contenía 26 variables[55].

Durante el final de la resolución del décimo problema de Hilbert, Paul Cohen (1934-2007), un joven amigo de Julia Robertson, comenzó a trabajar en el primer problema de Hilbert, que proponía probar la hipótesis del continuo[56]. Le bastó un año para demostrar en 1963 que desde los axiomas estándar de teoría de conjuntos[57] no se puede demostrar ni refutar la hipótesis del continuo. Con este resultado Cohen consiguió deshacer el mito de que las proposiciones indecidibles en el sentido de Gödel eran proposiciones «complejas y extrañas», obtener la medalla Fields en 1966 y el estímulo para concentrar sus esfuerzos en

---

[54] La generosidad de Robinson está implícita en sus palabras *«el mundo matemático es "una nación sin distinciones de origen, raza, credo, sexo, edad y ni siquiera de tiempo" —también los matemáticos del pasado son nuestros colegas—, donde todos se dedican a la más bella de las ciencias».*

[55] La fórmula inicial tuvo que sufrir una mínima modificación, pues al sustituir las variables por números enteros se obtenían todos los números primos y un subconjunto de números negativos.

[56] La hipótesis del continuo supone que no existe un conjunto de cardinalidad comprendida entre los cardinales de los conjuntos de los números naturales y de los números reales. Su negación permite poder considerar cardinales intermedios, como los cardinales acotante y dominante, utilizados en Análisis Funcional.

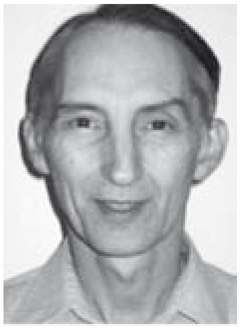
Por ejemplo, es muy conocido que el espacio de Grothendieck Köthe es un espacio de Fréchet no distinguido. Esta propiedad se demuestra con facilidad al probar que la tightness de su dual fuerte es el cardinal dominante y que un espacio de Fréchet es distinguido si, y solo si, su dual fuerte tiene tightness numerable, resultados obtenidos en el artículo *Tightness and distinguished Fréchet spaces,* J. Math. Anal. Appl. 324 (2006) 862-881.

[57] También llamada axiomática de Zermelo-Fraenkel.

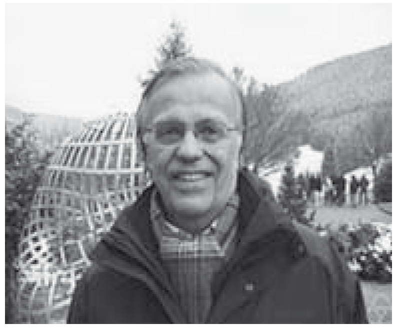
el octavo problema de Hilbert, donde no repitió el éxito anterior, pues todos sus intentos de demostrar la Hipótesis de Riemann no le llevaron a ningún avance significativo.

10. DON ZAGIER, BRENT Y FREY

Don Bernard Zagier
(1951-)



Richard Brent
(1946-)



Gerhard Frey
(1944-)

Sin la ayuda del ordenador tal vez no sabríamos que $2^{43112609} - 1$ ocupa la posición cuarenta y siete en la lista de números primos de Mersenne. Pero parece improbable que el ordenador pueda averiguar si existen infinitos números primos de Mersenne[58] o si los infinitos ceros no triviales de la función zeta están sobre la recta crítica[59].

Muchos matemáticos de los años setenta conocían que el ordenador había constatado que los primeros tres millones y medio de ceros no triviales de la función zeta están situados sobre la recta crítica, pero no veían razón suficiente

[58] Según Paul Erdös, la obtención de la cardinalidad del conjunto números primos de Mersenne es uno de los problemas más difíciles de teoría de números.

[59] El ordenador es de gran utilidad en demostraciones que se reducen a comprobación de un número finito de casos. Tal vez el demostrar que son suficientes cuatro colores para colorear un mapa de manera que dos naciones con frontera común tengan colores diferentes sea el primer ejemplo de demostración hecha con ordenador. Minkowski afirmó poder resolverlo, convencido de que se habían ocupado de su demostración matemáticos de tercera fila. Después de varias sesiones de infructuosos intentos en pizarra se oyó un fuerte trueno cuando entraba en el aula y exclamó: «El cielo se enfada por mi arrogancia. Mi demostración no funciona».

En 1976, Kenneth Appel y Wolfgang Haken tuvieron la genialidad de probar que el problema podía reducirse al análisis de 1.500 mapas fundamentales. A su genialidad hubo que añadir 1.200 horas de ordenador para comprobar que cada uno de esos 1.500 mapas podía colorearse con cuatro colores de manera que dos naciones con frontera común tuviesen colores diferentes.

para abandonar su escepticismo respeto a la Hipótesis de Riemann. Don Zagier, del Max Planck Institut für Mathematik y buen conocedor de las limitaciones de los ordenadores de los años setenta, afirmó que sería algo menos escéptico respecto a la validez de la Hipótesis de Riemann cuando se comprobase que los trescientos primeros millones de ceros no triviales de la función zeta están situados sobre la recta crítica.

El aumento de la capacidad de cálculo de los ordenadores permitió a un equipo en Amsterdam dirigido por Herman te Riele y a otro en Australia, cuyo responsable era Richard Brent, comprobar que los trescientos primeros millones de ceros no triviales de la función zeta están sobre la recta crítica $x = 1/2$.

Desde ese momento, Zagier se convirtió en convencido partidario de la Hipótesis de Riemann. Comparaba el ordenador en Matemáticas con el acelerador de partículas en Física y decía que *cree en la Hipótesis de Riemann con más convicción que sus mejores defensores a priori por su gran belleza o elegancia, pues su convicción se apoya en los trescientos millones de ceros sobre la recta crítica*.

Jan van de Lune, uno de los componentes del equipo de te Riele, ha empleado tres ordenadores y parte de su tiempo tras su jubilación en la exploración de que los 6.300 primeros millones de ceros no triviales de la función zeta de Riemann están situados sobre la recta crítica.

En 2004 Gourdon anunció la comprobación numérica de que los primeros diez billones de ceros no triviales de la *función zeta* están situados sobre la recta crítica. En 2005 se desarrolló el proyecto ZetaGrid de computación distribuida capaz de verificar billones de ceros por día. Tampoco consiguió el contraejemplo de un zero de la función zeta no situado en la recta crítica.

Estas últimas aportaciones habrán conseguido incrementar el convencimiento de Zagier sobre la verosimilitud de la Hipótesis de Riemann, si bien por este camino nunca se demostrará la certeza de la Hipótesis de Riemann. Por eso Gerhard Frey, el descubridor de una relación fundamental entre el último teorema de Fermat y las curvas elípticas, afirma que *cuando se demuestre la Hipótesis de Riemann se hará sin usar ordenadores*.

11. MERTENS, ODLYZKO Y TE RIELE

Franz Carl Joseph Mertens
(1840-1927)

Andrew Odlyzko
(1949-)

Herman te Riele
(1947-)

Hay propiedades equivalentes a la Hipótesis de Riemann. Una de ellas es una propiedad de acotación de la función *M* de Mertens, que nos dice que dado un número $\varepsilon < 0$ existe un natural *p*, dependiente de ε, tal que si $n > p$ sucede que $|M(n)| < n^{\varepsilon+1/2}$. El valor de la función de Mertens en $x \geq 1$ es $M(x) = \sum_{1 \leq k \leq x; k \in N} \mu(k)$, donde $\mu(k)$ es –1, 0 y 1 según que al factorizar *k* se obtenga un número impar de factores primos distintos, factores primos repetidos o un número par de factores primos distintos[60].

Mertens conjeturó que $|M(n)| < \sqrt{n}$ para cada natural *n*, lo que implica la Hipótesis de Riemann[61] y comprobó esta desigualdad para valores de n inferiores a 10000. Hoy sabemos que la conjetura de Mertens es cierta para valores de n inferiores a 10^{30}, pero Andrew Odlyzko, ayudado por el supercomputador Cray I del laboratorio de investigación de la empresa de comunicaciones AT&T y por el equipo de Herman te Riele en Amsterdam, probó su falsedad. Si algún

---

[60] μ es la función de Möbius.

[61] Otra forma de demostrar que la conjetura de Mertens es más fuerte que la Hipótesis de Riemann es mediante la fórmula $\frac{1}{\zeta(z)} = z\int_1^{\infty} \frac{M(x)}{x^{z+1}}dx$, definida para Re(z)>0, pues la desigualdad de Mertens implica que la integral converge para Re(z)>1/2 y, por simetría respecto a la recta crítica, la integral también converge para 0<Re(z)<1/2. Por tanto, la conjetura de Mertens implica que los ceros no triviales de la función $\zeta(z)$ estarían situados en la recta crítica $x = 1/2$.

día se prueba la certeza de la Hipótesis de Riemann sabremos que modificarla un poco nos lleva a la falsa conjetura de Mertens.

Odlyzko y te Riele, tras su éxito al refutar con el ordenador la conjetura de Mertens, completaron teóricamente su trabajo al demostrar en 1985 que existen infinitos valores de n para los que $M(n) > 1{,}06\sqrt{n}$ y que también existen infinitos valores de n que verifican que $M(n) < -1{,}009\sqrt{n}$.

12. LA SEGURIDAD EN CRIPTOGRAFÍA: RIVEST, SHAMIR Y ADLEMAN

Ronald Rivest
(1947-)

Adi Shamir
(1952-)

Leonard Adleman
(1945-)

Transcurrieron 27 años desde que Édouard Lucas probó en 1876 que el octavo número de Mersenne, $2^{67} - 1$, no es primo hasta que Frank Nelson Cole presentó su descomposición en 1903, durante una reunión de la American Mathematical Society. El largo aplauso que recibió por sus tres años de trabajo, frente a la dificultad en descomponer un producto de dos números primos grandes, duró mucho más que su conferencia, que se redujo a escribir la igualdad:

$$2^{67} - 1 = 193.707.721 \times 761.838.257.287$$

Entonces no era previsible que la dificultad en descomponer un número grande daría seguridad a muchas transacciones comerciales por Internet.

El encriptado de mensajes es casi tan antiguo como la humanidad. Hasta 1976 el receptor necesitaba conocer instrucciones de cada emisor para poder descifrar sus mensajes codificados. Las instrucciones evolucionaron desde características mecánicas en Esparta[62] a protocolos de cifrado en la máquina alemana Enigma en la Segunda Guerra Mundial.

El que no iba a ser factible que las empresas recibiesen instrucciones de cada uno de sus potenciales clientes para descifrar los mensajes codificados fue previsto en 1976 por Whit Diffie y Martin Hellman, profesores de la Universidad de Stanford en California. En su artículo *New Directions in Cryptography* propusieron que todos los mensajes dirigidos a un mismo destinatario deberían codificarse con una misma clave, llamada *clave pública*, de manera que solo pudiesen ser descodificados por el destinatario con otra *clave privada*.

El desarrollo de un sistema criptográfico de clave doble obsesionó a Ronald Rivest, investigador de complejidad computacional en el Instituto Tecnológico de Massachussets. Pronto se dio cuenta que necesitaría informática, lógica y matemática, por lo que solicitó la colaboración de Leonard Adleman y Adi Shamir. Adleman le confesó que solo le interesaba el mundo de Euler y Gauss, en tanto que el matemático israelí Shamir aceptó trabajar con Rivest.

Encontraron una clave doble basada en teoría de números y pidieron a Adleman que les confirmara su seguridad. Con una noche de trabajo les demostró la inseguridad de su clave doble. Rivest y Shamir redoblaron sus esfuerzos y encontraron una idea útil en el resultado de Euler de que *si* p y q son *dos números primos*, x y $x^{(p-1)(q-1)+1}$ *dan el mismo resto al dividirlos por* pq. Es justo decir que este teorema lo motivó el Pequeño Teorema de Fermat[63].

Por tanto si $N = pq$ es mayor que x, el resto de la división de $x^{(p-1)(q-1)+1}$ entre $N = pq$ es x. Rivest y Shamir encriptaron el número x hallando el resto k de la división de x^E entre $N = pq$, siendo E un divisor de $(p - 1)(q-1)+1$. La reproducción de x se obtiene hallando el resto de la división de $k^{[(p-1)(q-1)+1]:E}$ entre N.

La clave pública está formada por los números N y E y la clave privada es la descomposición $N = pq$. La seguridad de este sistema criptográfico de doble

[62] Escribían el mensaje sobre un tira de pergamino enrollada sobre un cilindro, que resultaba ilegible al desenrollarla. Cuando el receptor la enrollaba sobre un cilindro idéntico podía leer el mensaje.

[63] En 1636, Fermat enunció sin demostración que si N es un número primo para cada número natural a sucede que son iguales los restos de las divisiones de a^N y de a entre N. Un siglo más tarde, Euler demostró el resultado de Fermat y obtuvo el resultado expuesto en el texto.

clave depende de que se necesita mucho tiempo de computación para factorizar el producto de dos números primos muy grandes.

Rivest comentó esta idea con Adleman y le mostró una primera redacción del artículo con los tres nombres. Adleman le pidió que eliminase su nombre por su escasa participación, pero Rivest le recordó que su noche de trabajo evitó un gran fracaso. Adleman condicionó ser coautor a que su nombre ocupase el tercer lugar.

Así nació el acrónimo RSA con que se designa este sistema de encriptado[64]. Rivest, Shamir y Adleman para crear conciencia de la seguridad del método RSA propusieron en 1991 en Scientific American la factorización del número RSA129, que era un número de 129 cifras obtenido por la multiplicación de dos números primos grandes.

Se equivocaron en la estimación del tiempo que necesitaría la comunidad internacional para factorizarlo, pues no valoraron ni la aparición de métodos cada vez más rápidos de factorización, como *la criba cuadrática* de Carl Pomerance, que mejora el método de factorización de Fermat[65], ni consideraron las posibilidades de colaboración que iba a facilitar Internet. En septiembre de 1993, Arjen K. Lenstra y Mark Manasse lanzaron en Internet un programa para repartir el trabajo del método de la criba cuadrática entre varios ordenadores. Ocho meses después, en abril de 1994, se conseguía factorizar el número RSA129.

La criba cuadrática de Pomerance ha sido mejorada con la *criba del campo númerico*, que ha permitido a Herman J. J. te Riele factorizar el RSA155 en 1999 y, seis años después, Jens Franke factorizó el RSA200.

---

[64] Su popularización debe mucho a la revista Scientific American, donde Martin Gardner publicó un artículo de divulgación que atrajo el interés por el código RSA del mundo comercial y de los servicios secretos. Su utilización se generalizó con más lentitud de la que esperaban sus autores, pues las empresas tardaron en convencerse de su seguridad y el comercio electrónico no tenía la difusión actual.

También hubo reticencias iniciales por Ansgar Heuser, responsable de los servicios de seguridad alemanes, quien en los años ochenta desechó utilizar el sistema RSA para encriptar mensajes al saber la excelencia de los matemáticos rusos en teoría de números. A partir de los años noventa desaparecieron las dudas del valor del sistema RSA para proteger la vida de los espías y de nuestras transacciones comerciales.

[65] El método de factorización de Fermat se basa en la representación de un número natural impar como la diferencia de dos cuadrados, pues para un número impar $n = cd$ se tiene que $n = \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c-d}{2}\right)^2$, donde los numeradores son números pares.

La razonable dificultad en factorizar números RSA de más de 500 cifras permite confiar en el sistema de encriptado RSA, pues podemos generar números RSA grandes gracias al teorema de Euclides de la existencia de infinitos números primos y al método de Gary Miller y Michael Rabin que con $O((\ln n)^4)$ etapas nos puede decir si el número n es primo. Su validez para números grandes está condicionada a la validez de la Hipótesis de Riemann generalizada.

En agosto de 2002, Manindra Agraval, Neeraj Kayal y Nitin Saxena, tres matemáticos indios[66] de Kanpur, crearon otro test que permite confirmar si el número n es primo en $O((\ln n)^{15/2})$ etapas, por lo que es más lento que el de Miller-Rabin, pero es independiente de la validez de la Hipótesis de Riemann[67].

Parece razonable suponer que Riemann no pudo imaginar la influencia de los números primos y su hipótesis en la seguridad de nuestras transacciones comerciales. En el caso de Hardy sabemos que ni siquiera intuyó esta influencia, pues escribió que *las verdaderas matemáticas de los verdaderos matemáticos, las de Fermat, Euler, Gauss, Abel y Riemann, son casi totalmente inútiles*. Hardy se equivocó en este caso completamente, pues el mundo del comercio electrónico utiliza matemática creada por cuatro de los cinco nombres que citó: Fermat, Euler, Gauss y Riemann.

---

[66] En la India es muy visible la influencia de la vida y obra de Ramanujan.

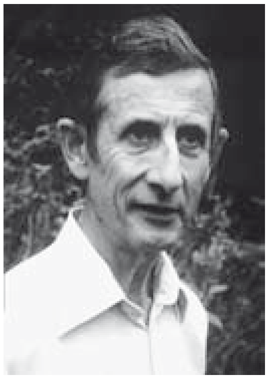
[67] Victor Miller, del Ramapo College de New Jersey, descubrió como codificar utilizando curvas elípticas, que como es bien conocido han sido fundamentales en la demostración del último teorema de Fermat por Andrew Wiles. Su seguridad se basa en la dificultad de hallar soluciones a ciertos problemas aritméticos relacionados con las curvas elípticas, que disminuirá si se resuelve la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer, sobre la que tanto Wiles como Zagier han hecho aportaciones relevantes.

Joseph Silverman anunció una aproximación computacional a la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer que podría orientarle sobre las soluciones de los problemas aritméticos que dan seguridad a los códigos construidos sobre curvas elípticas. Dos semanas después, Neal Koblitz, matemático de la Universidad del Estado de Washington, especialista en descifrar códigos basados en números primos probó que el proyecto de Silverman era irrealizable computacionalmente. Koblitz es un gran defensor del papel determinante de la Matemática Pura en la seguridad de los negocios electrónicos.

Los códigos basados en curvas elípticas son más complejos que los RSA, pero al no necesitar grandes códigos numéricos se adaptan mejor al comercio electrónico desde dispositivos de reducida memoria, como los teléfonos móviles o las agendas electrónicas.

13. MONTGOMERY, DYSON Y KEATING

Hugh Montgomery
(1944-)



Freeman Dyson
(1923-)

Jon Keating
(1960 aprox.-)

A finales de los setenta Alain Baker consiguió avances significativos en el problema de Gauss de la factorización de los números complejos. Poco después Erich Hecke demostró que si la Hipótesis de Riemann era cierta también lo sería la conjetura del número de clases de Gauss[68].

Estos resultados llevaron a Hugh Montgomery a intuir la importancia de conocer la distribución de los ceros no triviales de la función zeta de Riemann para resolver algunos problemas propuestos por Gauss, así como para completar el trabajo de Baker.

Como aún no habían sido calculadas las ordenadas de los ceros no triviales de la función zeta situados en zonas alejadas de la recta crítica, Montgomery realizó un estudio teórico de traducción de propiedades de los números primos en propiedades de los ceros no triviales de la función zeta, utilizando la ecuación funcional de Riemann.

Averiguó que en las regiones alejadas de la recta crítica la distribución de las diferencias de los ceros consecutivos no triviales se parecía mucho más a una distribución uniforme que a la distribución aleatoria esperada. Decidió ir a Princeton para comentar sus descubrimientos con Selberg, pero quien le ayudó en la interpretación de sus resultados fue el físico inglés Freeman Dyson, famoso por el apoyo que proporcionó a Richard Feynman al comienzo de su carrera.

[68] Este resultado fue mejorado por Max Deuring, Louis Mordell y Hans Heilbronn al probar que la validez de la conjetura del número de clases es independiente de la Hipótesis de Riemann.

Dyson le comentó que la distribución de las diferencias entre ceros no triviales consecutivos de la función zeta era similar a la de las diferencias entre valores propios consecutivos de las matrices aleatorias hermitianas, con las que estaba familiarizado por su reciente estudio de los niveles energéticos del átomo erbio al ser bombardeado por neutrones de baja energía[69]. Así nació *la conjetura de las matrices hermitianas aleatorias*, que postula que, cuando k tiende a infinito, la distribución de las diferencias entre los autovalores consecutivos de las matrices hermitianas aleatorias[70] de orden k converge a la distribución de las diferencias entre los ceros no triviales consecutivos de la función zeta.

Con la finalidad de chequear esta conjetura, Andrew Odlyzko, con el supercomputador Cray del laboratorio de AT&T, determinó los ceros situados hasta 10^{12} unidades de distancia en la recta crítica. Al no obtener la similitud esperada completó su trabajo de computación con la determinación de los ceros situados entre 10^{12} y 10^{22} unidades de distancia en dicha recta crítica, obteniendo un resultado más acorde con la conjetura de las matrices hermitianas aleatorias.

Peter Sarnak[71], prestigioso matemático de Princeton formado en Stanford con Paul Cohen[72], fue crítico con la conjetura de las matrices hermitianas aleatorias, indicando que solo merecería ser considerada si nos permitiese acceder a algo nuevo sobre los números primos o sobre la función zeta de Riemann. El físico Jon Keating, dedujo que el límite cuando T tiende a infinito de la expresión

$$I_k(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \zeta(\frac{1}{2}+it)^{2k}\,dt$$

da el momento k de la función zeta de Riemann, admitiendo la validez de la conjetura de las matrices hermitianas aleatorias. Esta fórmula de Keating da los

[69] Hilbert también se preguntó por la posible relación entre los ceros no triviales de la función zeta de Riemann y los niveles energéticos predichos por la teoría que Heisenberg y Born estaban elaborando en Gotinga. La conjetura de Hilbert-Polya establece que las partes imaginarias de los ceros en la línea crítica son los autovalores de algún operador no acotado.

[70] Matrices aleatorias significa aquí que las entradas son números aleatorios que siguen la distribución normal de probabilidad.

[71] Sarnak fue confidente de Andrew Wiles cuando estaba resolviendo el último teorema de Fermat.

[72] Ya hemos indicado que Cohen, después de resolver el primer problema de Hilbert, probando que es indecidible la existencia de un conjunto de cardinal comprendido entre los cardinales de los conjuntos de los números naturales y reales, centró su atención en el octavo problema de Hilbert, la Hipótesis de Riemann, contagiando a Sarnak su pasión por los números.

cuatro momentos obtenidos de la función zeta sin utilizar la conjetura de las matrices hermitianas[73].

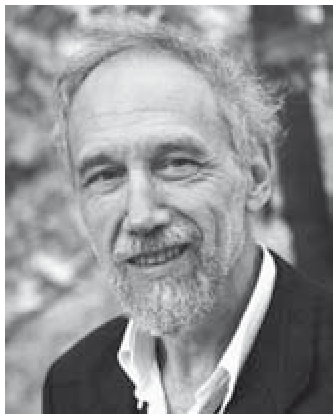
El éxito de la fórmula de Keating en la reunión de 1998 en el Schrödinger Institut de Viena le llevó a Gotinga a explicar sus ideas y su fórmula. En las notas inéditas de Riemann encontró en las mismas páginas referencias a la alineación de los ceros no triviales de la función zeta sobre la recta crítica y a un trabajo de hidrodinámica sobre la relación entre la estabilidad de un fluido en rotación con la alineación de ciertos números complejos.

Si a la buena intención de ordenar el despacho de Riemann no le hubiese acompañado la destrucción de muchos papeles inéditos y si se hubiese encontrado la libreta negra donde anotaba sus ideas es muy probable que hoy supiésemos mucho más de la ideas de Riemann sobre relaciones entre Matemática y Física.

14. WEIL, GROTHENDIECK Y CONNES

André Weil
(1906-1998)

Alexander Grothendieck
(1928-)



Alain Connes
(1947-)

El talento matemático de Weil se manifestó desde su infancia, pues al explicarle algo daba la impresión de saberlo. Weil recordaba a su maestro Monbeig,

[73] El cálculo de los momentos de la función zeta es difícil. Hardy y Littlewood solo consiguieron demostrar que el primer momento es 1. Albert Ingham, discípulo de Littlewood, obtuvo que el segundo momento es 2. Poco antes del encuentro en Seattle en 1996 por el centenario del Teorema de los Números Primos, Brian Conrey y Amit Ghosh determinaron que el tercer momento es 42. Después de la reunión en Seattle, Conrey y Steve Gonek obtuvieron que el cuarto momento era 24024.

por la utilización de notaciones algebraicas para explicar la sintaxis de las frases. Hadamard[74] le motivó a dedicarse a la matemática.

Las dos pasiones de Weil fueron el estudio de las obras originales de los genios matemáticos y la lectura de los poemas épicos griegos e hindúes en sus lenguas originales. Su vida estuvo marcada por la Hipótesis de Riemann y por el Bhagavad Gita, el Canto de Dios, incluido en el Mahabbarata.

Dedicó al sánscrito tanto tiempo como a la matemática. Estaba convencido de que las etapas en la formación de nuevas ideas matemáticas son similares a los pasos del desarrollo de formas lingüísticas elaboradas. Así justificaba que en la India la invención de la gramática precedió a la del sistema decimal y que después del desarrollo de la lengua árabe en la época medieval llegó su álgebra.

Su amor por la literatura sánscrita le llevó a trabajar en 1930 en la Universidad de Aligarh, cerca de Nueva Delhi. Gandhi y la lectura del Bhagavad Gita reforzaron sus convicciones pacifistas. Por eso, en verano de 1939 se trasladó a Finlandia con la intención de huir a Estados Unidos, para evitar su participación en la ya inminente Segunda Guerra Mundial.

El gobierno finlandés sabía que iba a ser invadido por Stalin y consideraba sospechoso todo lo que tuviera la menor relación con la Unión Soviética. Unas cartas con señas soviéticas llenas de ecuaciones llevaron a Weil a la cárcel acusado de espía.

La noche anterior a su ejecución, el jefe de policía encontró al matemático Rolf Nevanlinna en una recepción y le comentó que al día siguiente iban a ejecutar a un espía ruso que decía conocerle. Al saber que era Weil, Nevanlinna preguntó si era obligado ejecutarle y el jefe de policía le dijo que podía llevarlo a la frontera y expulsarlo.

Así es como se abortó la ejecución de uno de los mejores matemáticos del siglo XX, que en febrero de 1940 estaba de nuevo en Francia, prisionero en Rouen, esperando a ser juzgado por desertor.

En la soledad de la cárcel intentó demostrar la Hipótesis de Riemann. Al no encontrar el camino para demostrar que los ceros no triviales de la función

[74] Ya se expuso que Hadamard fue uno de los dos autores de la demostración del teorema de los números primos de Gauss.

zeta están alineados, centró su atención en un problema análogo, cambiando los números primos por los puntos de una curva elíptica[75] en el cuerpo $Z/(p)$, siendo p un número primo. Sustituyó los números primos por las soluciones de esta ecuación para construir la correspondiente función zeta, llamada *función zeta local*, y demostró que cumple lo análogo a la Hipótesis de Riemann, pues sus ceros están alineados[76]. Como consecuencia dedujo que el número de puntos de la curva elíptica es aproximadamente p, con error inferior a $\sqrt{p}$, resultado que recuerda el teorema de los números primos con el cambio indicado de números primos por puntos de la curva elíptica.

Tan importante como la demostración de la Hipótesis de Riemann para una curva elíptica fueron las ideas que Weil desarrolló en la cárcel, origen de la geometría algebraica. Su penosa situación determinó que redactase una nota con su resultado y que la enviase a Élie Cartan, director de la revista Comptes Rendues.

El 3 de mayo de 1940 se celebró el juicio contra Weil. Fue condenado a cinco años de prisión. La pena quedaría en suspenso si aceptaba prestar servicio militar en el frente. En contra de sus convicciones aceptó entrar en el ejército y así salvó su vida, pues un mes más tarde, los franceses fusilaron a todos los prisioneros de Rouen con la excusa de facilitar la retirada de las tropas ante el avance alemán.

En 1941, Weil fue autorizado a abandonar el ejército por pulmonía. Utilizó un certificado médico falso. Se trasladó a Princeton con la intención de extender sus ideas al espacio original de Riemann y demostrar la Hipótesis de Riemann.

Parte del trabajo de Weil en Princeton lo encontramos en su artículo de 1952, *Sur les formules explicites de la théorie des nombres premiers*. Considera la clase W de funciones con valores complejos $f(x)$, definidas en la semirrecta positiva $\mathbb{R}_+$, y que son de clase C^1 salvo en un número finito de puntos donde son discontinuas de primera clase y con valor la media aritmética de los lí-

[75] La curva elíptica estudiada por Weil fue $y^2 = x^3 - x$ en el cuerpo $Z/(p)$, siendo p un número primo. Para $p = 5$ sus soluciones son (0,0), (1,0), (2,1), (2,4), (3,2), (3,3) y (4,0). Gauss, en la última anotación de su diario matemático, había demostrado que el error en la estimación indicada del número de soluciones de esta ecuación no sería superior a $2\sqrt{p}$. La demostración de Gauss era *ad hoc* para esta ecuación. La estimación del error de Weil es mejor y aplicable a cualquier ecuación en las variables x e y. Consiguió su teorema utilizando un resultado reciente de Castelnuovo que había conocido en su viaje por Europa tras su licenciatura.

[76] Weil demostró lo equivalente a la Hipótesis de Riemann para la función zeta local.

mites a derecha e izquierda. Además, para cada $f \in \mathrm{W}$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) = O(x^{\delta})$, cuando $x \to 0^{+}$, y $f(x) = O(x^{-1-\delta})$, cuando $x \to +\infty$[77].

Weil demostró que la Hipótesis de Riemann es equivalente a una condición de negatividad ($g(x) := \int_0^{\infty} f(xy)\bar{f}(y)dy \leq 0$, cuando $f \in \mathrm{W}$ y satisface las condiciones adicionales $\int_0^{\infty} f(x)\frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} f(x)dx = 0$). Esta condición no le sirvió para demostrar la Hipótesis de Riemann, pero junto a ideas elaboradas en la cárcel, le fue útil para demostrar la Hipótesis de Riemann en el caso geométrico de curvas sobre un cuerpo finito, ya que entonces la correspondiente caracterización por negatividad es consecuencia del Teorema del Índice Algebraico, debido fundamentalmente a Severi.

Lo sucedido después del artículo de 1952, lo resume Weil con estas melancólicas frases: «*Después de 1959 me he dado cuenta de que aún estoy muy lejos de la solución de la Hipótesis de Riemann. Me he ido apartando de manera gradual, no sin pesar*».

---

[77] Weil obtuvo que la transformada de Mellin de una de estas funciones $\tilde{f}(z) = \int_0^{\infty} f(x)x^{z}\frac{dx}{x}$, es una función analítica cuando $-\delta < \operatorname{Re} z < 1 + \delta$ tal que

$$\tilde{f}(0) - \sum_{\rho} \tilde{f}(\rho) + \tilde{f}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\left\{ f(n) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\right\} + (\ln 4\pi + \gamma) f(1) +$$
$$+ \int_1^{\infty} \left\{ f(x) + \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} f(1)\right\} \frac{dx}{x - x^{-1}}$$

donde $\Lambda(n) = \ln p$ si n es una potencia del número primo p y es 0 en otro caso, el primer sumatorio está extendido sobre todos los ceros no triviales de la función zeta de Riemann, entendido como

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{\operatorname{Im}\rho < T} f(\rho)$$

y γ es la constante de Euler. En este artículo, Weil prueba que existe una fórmula correspondiente para funciones zeta de curvas C definidas sobre cuerpos finitos. En este caso la igualdad anterior se puede deducir de la fórmula del punto fijo de Lefschetz, aplicado al endomorfismo de Frobenius de la curva C; entonces los tres términos del primer miembro corresponden a la traza del automorfismo de Frobenius de la cohomología l-ádica de C, mientras que la parte de la derecha corresponde al número de puntos fijos del endomorfismo de Frobenius, que son los divisores primos de grado 1 de C.

En 1958, y gracias al apoyo de Léon Motchane, emigrante ruso, industrial y apasionado por la ciencia, se fundó al sur de París el Institut des Hautes Études Scientifiques, bajo la dirección académica de figuras clave del grupo Bourbaki, fundado en Francia alrededor de 1935. Este grupo reunió a Weil, Dieudonné y otros jóvenes valores franceses que examinaron el edificio matemático desde la perspectiva más general posible y reunieron sus resultados en su obra *Élements de Mathématique*, concebida como el equivalente moderno de Los Elementos de Euclides.

Uno de los primeros profesores permanentes del Instituto fue Alexander Grothendieck, cuya vida está marcada por la muerte de su padre en Auschwitz en 1942, entregado como judío a los nazis por el gobierno de Vichy. Entre 1945 y 1948 estudió matemáticas en la Universidad de Montpellier, luego asistió en París al seminario de Henri Cartan. Laurent Schwarz dirigió su tesis doctoral sobre análisis funcional en Nancy. Posteriormente Grothendieck entró a formar parte del grupo Bourbaki, donde, partiendo de las ideas de André Weil, trabajó en la renovación de la Geometría Algebraica, exponiendo sus aportaciones en el Seminario Bourbaki entre 1957 y 1962. En 1958, dentro de su teoría *K*, enunció y probó el teorema de Riemann-Roch-Grothendieck, que le dio fama mundial como matemático.

Al año siguiente, 1959, se le ofreció una plaza permanente de matemáticas en el Institut des Hautes Études Scientifiques, que se convirtió en la sede natural del proyecto Bourbaki. Allí realizó un intenso trabajo hasta 1970, continuando su renovación de la Geometría Algebraica[78]. Seguía la idea de Gödel de ampliar los fundamentos de la Matemática para poder demostrar la Hipótesis de Riemann, lo que le permitió demostrar gran parte de las conjeturas de André Weil, que luego completó Pierre Deligne, su alumno más brillante. La famosa Hipótesis de Riemann se le resistió. De este período son sus cuatro volúmenes de Elementos de Geometría Algebraica[79].

En 1966, en el Congreso Internacional de Matemáticas de Moscú se le concedió la Medalla Fields, pero no acudió en rechazo al militarismo de la Unión Soviética. En 1970 abandonó el Institut des Hautes Études Scientifiques, al enterarse de que recibía fondos de instituciones militares. Su salida del Instituto marcó el fin de su producción matemática y el comienzo de su dedicación total a cuestiones pacifistas y ecologistas.

---

[78] El nuevo lenguaje de la Geometría Algebraica no era fácil de aprender, pues el propio Weil quedó desconcertado ante el nuevo mundo abstracto de Grothendieck.

[79] La previsión inicial eran 12 volúmenes.

También John Forbes Nash intentó resolver la Hipótesis de Riemann. Expuso sus ideas a Paul Cohen, quien se mostró muy crítico y Nash entró en estado depresivo, manifestado en una reunión de la American Mathematical Society donde dio una conferencia desastrosa sobre sus ideas, carentes de sentido, para resolver la Hipótesis de Riemann, Nash se recuperó y, en 1994, obtuvo el Premio Nobel de Economía por sus contribuciones matemáticas a la Teoría de Juegos.

Alain Connes también ha dedicado esfuerzos a la Hipótesis de Riemann. Connes, profesor del Institut des Hautes Études Scientifiques y del Collège de France, tiene una reputación similar a la que tuvo Grothendieck y es el creador de la Geometría no conmutativa. En contraposición a Riemann, que ofreció a Einstein el lenguaje para describir la Física de lo muy grande, Connes aspiraba a ofrecer la Geometría adecuada para la descripción de lo extremadamente pequeño.

En primavera de 1997, Connes fue a Princeton y explicó sus ideas para atacar la demostración de la Hipótesis de Riemann a Bombieri, Selberg y Sarnack. A este grupo se unió Nick Katz, que detectó el error en la primera demostración de Wiles al último teorema de Fermat.

El grupo de Princeton reconoció que Connes había reunido muchas ideas que habían emergido de la Física Cuántica y de las intuiciones matemáticas de Weil y Grothendieck, pero que estaba lejos de la resolución de la Hipótesis de Riemann.

Sarnak reconoció que Connes había desarrollado con éxito ideas que había aprendido de Paul Cohen, con la ventaja de que Connes disponía de un nuevo lenguaje y nuevas técnicas que le ayudaban a precisar ideas de Cohen.

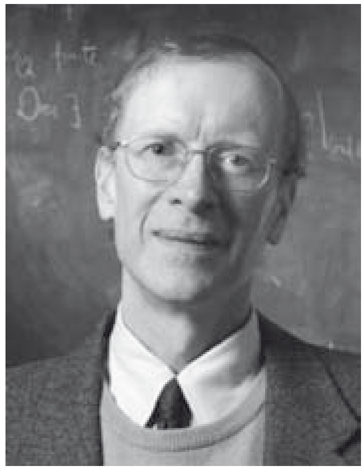
Bombieri, gran maestro en la Hipótesis de Riemann y medalla Fields por la demostración de la llamada «*Hipótesis de Riemann en promedio*»[80], opinó que falta alguna gran idea, como la que le permitió a Weil probar en la cárcel la Hipótesis de Riemann para cuerpos $Z/(p)$.

[80] Es el resultado más significativo sobre la proximidad entre la cantidad de números primos en un intervalo y la aproximación de Gauss mediante el logaritmo integral.

15. UNOS COMENTARIOS Y UN DESEO

Enrico Bombieri
(1940-)

Peter Sarnak
(1953-)



Andrew John Wiles
(1953-)

La Hipótesis de Riemann es uno de los problemas centrales en Matemáticas, pues, además de su importancia respecto a la distribución de los números primos, la función zeta de Riemann es prototipo de una clase muy general de funciones, las L-funciones generales, para las que se ha formulado por extensión natural la llamada Gran Hipótesis de Riemann. Las L-funciones de Dirichlet, antes consideradas, son L-funciones generales de grado 1. Antes se han indicado resultados en cuya demostración se utiliza la Hipótesis de Riemann generalizada a las L-funciones de Dirichlet. De igual forma hay resultados en teoría de números primos, ecuaciones diofánticas y caos cuántico que se han obtenido admitiendo la Gran Hipótesis de Riemann. De algunos de ellos se ha conseguido otra demostración sin utilizar esta hipótesis, como en el resultado publicado por Elon Lindenstrauss en Annals of Mathematics en 2006, sobre el problema de equidistribución utilizando métodos de teoría ergódica.

La prolongación analítica de cada L-función general y su ecuación funcional solo es conocida en casos particulares de L-funciones asociadas a variedades y, en general, la ecuación funcional no se sabe obtener por métodos analíticos. Por ejemplo, la ecuación funcional de la L-función correspondiente a una curva elíptica sobre Q, se deduce[81] de la existencia de una parametrización de la curva por funciones modulares. Es muy difícil establecer la parametrización, que en el

[81] No solo se deduce, sino que es equivalente.

caso semiestable[82] fue hecho en el célebre artículo de Wiles y en la corrección posterior del artículo de Wiles y Taylor, que llevó a la solución del Último Teorema de Fermat.

Enrico Bombieri defiende la evidencia de la Hipótesis de Riemann en tres de los cinco apartados de su artículo *Problems of the millennium: The Riemann Hypothesis*, Clay Mathematics Institute (2000)[83]. Los argumentos más simples a favor de la certeza de la Hipótesis de Riemann son la comprobación de que los primeros billones de ceros no triviales de la función zeta están situados sobre la recta crítica y la gran similitud de la distribución de longitudes de intervalos entre los ceros no triviales consecutivos de la función zeta de Riemann, obtenidos teóricamente por Montgomery admitiendo la Hipótesis de Riemann, con la distribución de las longitudes reales de dichos intervalos entre los ceros no triviales situados a menos de 10^{22} unidades en la recta crítica, obtenidas por Odlyzko.

Pero también hay indicios que pueden hacer dudar de la certeza de la Hipótesis de Riemann. Peter Sarnak en el artículo *Problems of the millennium: The Riemann Hypothesis* (2004), Clay Mathematics Institute (2004), expone que la diferencia $S(t)$ entre el número de ceros en la recta crítica de la función $\zeta(z)$ cuya parte imaginaria es menor que t y el número de ceros de $\zeta(z)$ en el rectángulo $\mathbf{R}$ de vértices $-1-it$, $2-it$, $2+it$, $-1+it$, obtenido por la integral de Cauchy $N(t)-1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}-\frac{\zeta'}{\zeta}ds$, suponiendo que t no es la parte imaginaria de un zero no trivial[84] y utilizando el cálculo aproximado de $\zeta(z)$ obtenido con la fórmula de Riemann-Siegel, verifica que $|S(t)| < 1$ cuando $t < 280$. Este resultado confirma que en este intervalo todos los ceros no triviales están en la recta crítica. Pero siembra dudas que el mayor valor computado de la diferencia $S(t)$ sea 3,2. Se podría pensar que la causa del 3,2 no es el fallo de la Hipótesis de Riemann, sino problemas numéricos que pueden dar errores absolutos grandes al trabajar con valores grandes de t.

Sarnak expone también el resultado de Selberg de que la varianza de $S(t)$ tiende asintóticamente a $\frac{1}{2\pi^2}$ ln ln t, lo que indica la existencia de valores de t

[82] El caso general se ha hecho en otro artículo posterior de Breuil, Conrad, Diamond y Taylor.

[83] En el apartado tercero expone tres razones, el cuarto apartado lo titula *Further Evidence: Varieties over Finite Fields,* y el título del quinto apartado es *Further Evidence: The Explicit Formula.*

[84] Ya se indicó en una nota anterior que el –1 de la fórmula se debe al polo simple de la función $\zeta(z)$ en el punto 1 con residuo 1.

de gran orden de magnitud a los que corresponderán valores grandes de $S(t)$. Este resultado exigirá cálculos de difícil computación por el gran orden de magnitud de t.

Si se hubiese considerado otro problema destacado se hubiesen detectado concordancias con lo expuesto alrededor de la Hipótesis de Riemann, pues como dice André Weil en su obra *Two Lectures on Number Theory: Past and Present*, *el análisis de la historia de la matemática recuerda al análisis de una sinfonía. Hay un cierto número de temas y puede verse más o menos cuando aparece por primera vez cada uno de ellos. A continuación, cada tema se sobrepone a los otros, y la habilidad artística del compositor está precisamente en su capacidad para gestionarlos todos simultáneamente. A veces, el violín sigue un tema particular y la flauta otro, después se invierten los papeles, y así sucesivamente. Con la historia de la Matemática ocurre exactamente lo mismo*.

Permítanme formular el deseo de que los 500 años citados por Hilbert, de los que ya faltan unos 400, no sean necesarios para la resolución de la Hipótesis de Riemann y que necesitemos menos de 50 años para obtener su demostración o su refutación, pues, como dice Andrew Wiles, «*un problema en Matemáticas nunca es una meta final, ya que alrededor de cada problema hay un mundo esperando que lo descubran*».

Muchas gracias por su atención*.

* Estoy muy agradecido al Académico Don Manuel Valdivia Ureña por sus comentarios y sugerencias y al Académico Don Alberto Galindo Tixaire y a los profesores de la Universidad Politécnica de Valencia Don José Mas Marí y Don Santiago E. Moll López por haber indicado algunas erratas.

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

1. E. BOMBIERI, *Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis – oficial problema description,* Clay Mathematics Institute (2000). Reprinted in P. Borwein, S. Choi, B. Rooney and A Weirathmueller, editors, *The Riemann Hypothesis: A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike,* Canadian Mathematical Society Books in Mathematics, Springer, New York, 2008.
2. E. BOMBIERI, «A variational approach to the explicit formula», *Communications on Pure and Applied Mathematics* 56 (8) (2003), 1151-1164.
3. P. BORWEIN, R. FERGUSON and M. J. MOSSINGHOFF (2008), «Sign changes in sums of the Liouville function», *Math. Comp.* 77 (2008), 1681-1694.
4. A. CONNES, «Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function», *Selecta Math. (NS)* 5 (1999), 29-106.
5. J. B. CONREY, «More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line», *J. Reine Angew. Math.* 399 (1989), 1-26.
6. J. B. CONREY, «The Riemann Hypothesis», *Notices Amer. Math. Soc.* March (2003), 341-353.
7. J. B. CONREY, D. W. FARMER, J. P. KEATING, M. O. RUBINSTEIN and N. C. SNAITH, «Integral moments of L-functions», *Proc. London Math. Soc.* 91 (2005) 33-104.
8. J. DERBYSHIRE, *Prime Obsession,* Joseph Henry Press, Washington, DC, 2003.
9. J. M. DESHOUILLERS, G. EFFINGER, H. TE RIELE and D. ZINOVIEV, «A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann Hypothesis», *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* 3 (1997), 99-104.
10. F. DYSON, «Birds and frogs», *Notices Amer. Math. Soc.* 56 (2009), 212-223.
11. I. FESENKO, «Analysis on arithmetic schemes. II», *J. K-Theory* 5 (2010) 437-557.
12. X. GOURDON, *The* 10^{13} *first zeros of the Riemann Zeta function, and zeros computation at very large height,* 2004 in http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf
13. J. HADAMARD, «Sur la distribution des zéros de la funcion $\zeta(z)$ et ses conséquences arithmétiques». *Bull. Soc. Math. France* 24 (1896), 199-220.
14. S. HARAN, «Index theory, potencial theory and the Riemann hipótesis», in *L-functions and Arithmetic,* Durham 1990, LMS Lecture Notes 153, LMS, London, 1991, 257-270.
15. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, «Contributions to the theorey of the Riemann zeta functions and the distributions of primes», *Acta Math.* 41 (1918), 119-196.
16. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, J. E. (1921), «The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line», *Math. Z.* 10 (1921), 283-317.

17. H. Iwaniec and P. Sarnak, «Perspectives on the analytic theory of L-functions», in *Geom. Funct. Anal. Special Volume,* Part II (2000), 705-741.

18. H. Iwaniec and E. Kowalski, «Analytic Number Theory», *Amer. Math. Soc. Colloquium Publications* 53, Providence R.I., 2004.

19. A. Ivič, *The Theory of the Riemann Zeta-Function with Applications,* John Wiley, New York, 1985.

20. N. Katz and P. Sarnak, «Zeros of zeta functions and symmetry», *Bull. Amer. Math. Soc.* 36 (1999), 1-26.

21. J. P. Keating and N. C. Snaith, «Random matrix theory and ζ(1/2 + it)», *Commun. Math. Sci. Physics* 214 (2000), 57-89.

22. A. Knauf, «Number theory, dynamical systems and statistical mechanics», *Reviews in Mathematical Physics* 11 (1999), 1027-1060.

23. M. L. Lapidus, *In search of the Riemann zeros,* American Mathematical Society, Providence, R.I., 2008.

24. E. Leichtnam, «An invitation to Deninger's work on arithmetic zeta functions», in *Geometry, spectral theory, groups, and dynamics,* Contemp. Math. Amer. Math. Soc. 387, Providence, R.I., 2005, pp. 201-236.

25. J. van de Lune, J. J. te Riele and D. T. Winter, «On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip IV», *Math. Comp.* 46 (1986), 667-681.

26. C. J. Mozzochi, «On the difference between consecutive primes», *J. Number Theory* 24 (1986), 181-187.

27. A. M. Odlyzko and J. J. te Riele, «Disproof of Mertens conjecture», *J. Reine Angew. Math.* 367 (1985), 138-160.

28. A. M. Odlyzko, «Supercomputers and the Riemann zeta function», in *Supercomputing 89: Supercomputing & Computations, Proc. 4-th Intern. Conf. on Supercomputing, International Supercomputing Institute,* St. Petersburg, FL, 1989, pp. 348-352.

29. A. M. Odlyzko, *The* 10^{21} *-st zero of the Riemann zeta function,* 1998 in http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/unpublished/zeta.10to21.pdf

30. P. Ribenboim, *The book of prime number records,* Springer Verlag, 1989.

31. B. Riemann, *Über die Anzahl der Prizahlen unte reine gegebenen Grösse,* Monat. Der Königl. Preuss. Akad. Der Wissen. Zu Berlin aus der Jahre 1859 (1860), 671-680.

32. Z. Rudnick and P. Sarnak, «Zeros of principal L-functions and random matrix theory», *Duke Math. J.* 82 (1996), 269-322.

33. P. Sarnak, «Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis», in P. Borwein, S. Choi, B. Rooney and A Weirathmueller, editors, *The Riemann Hypothesis: A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike,* Canadian Mathematical Society Books in Mathematics, Springer, New York, 2008, pp. 107-115.

34. M. du Sautoy, *The music of the primes,* Harper Collins Publishers, New York, 2003.

35. W. Stein and B. Mazur, *What is Riemann's Hypothesis?,* 2007 in http://modular.math.washington.edu/edu/2007/simuw07/notes/rh.pdf

36. M. Suzuki, «Positivity of certain functions associated with analysis on elliptic surfaces», *J. Number Theory* 131 (2011), 1770-1796.

37. E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function,* Oxford Univ. Press, Oxford, 1986.

38. T. Trudgian, «On the success and failure of Gram's Law and the Rosser Rule», *Acta Arith.* 125 (2011), 225-256.

39. A. Wiles, «Twenty years of number theory», in *Mathematics: frontiers and perspectives,* edited by V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax and B. Mazur, editors. International Mathematical Union, published by American Mathematical Society, Providence, R.I., 2000, pp. 329-342.