Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 106, Nº. 1-2, pp 115-121, 2013
XV Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

HOMENAJE A TURING: DE LAS MÁQUINAS DE TURING A PROBLEMAS CRIPTOGRÁFICOS

MANUEL LÓPEZ PELLICER *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Valverde 22, 28004 Madrid.

1. TURING EN LA SHERBORNE SCHOOL.

Alan Mathison Turing nació en Paddington, Londres, el 23 junio 1912. Este breve artículo de divulgación se escribió para el Programa de divulgación de la cultura científica y tecnológica de la Real Academia de Ciencias en el centenario de su nacimiento.

Su padre, Julius Mathison Turing, era miembro del servicio civil británico en la India, por lo que estaba con frecuencia en el extranjero. Su madre, Ethel Sara Stoney, era hermana del ingeniero jefe de los ferrocarriles de Madras, por lo que los padres de Turing se conocieron y se casaron en la India.

Cuando Turing tenía un año su madre se fue con su marido a la India y le dejó en Inglaterra con unos amigos de la familia, que le enviaron muy pronto a la escuela. Fue sacado de la escuela pocos meses después, tras comprobar que no progresaba nada.

Años más tarde se le envió a la Escuela Preparatoria de Hazlehurst, donde se le calificó como un buen alumno, haciendo notar que se obsesionaba con ideas propias. Se aficionó mucho por el ajedrez y se integró en un grupo interesado en el debate de problemas sociales.

En 1926 terminó sus estudios en dicha escuela y fue enviado a la Sherborne School. La gran huelga general de 1926 le obligó a recorrer en bicicleta las sesenta millas desde su casa a la escuela. Fortaleció sus músculos, se apasionó por el deporte y llegó a ser un buen atleta, con marcas casi olímpicas.

La original mente de Turing encontraba incomprensible la escolarización convencional y su genio le dirigía con más fuerza que las orientaciones de sus profesores. Su tutor escribió a su madre: "*If he is to stay at Public School, he must aim at becoming educated. If he is to be solely a Scientific Specialist, he is wasting his time at a Public School*".

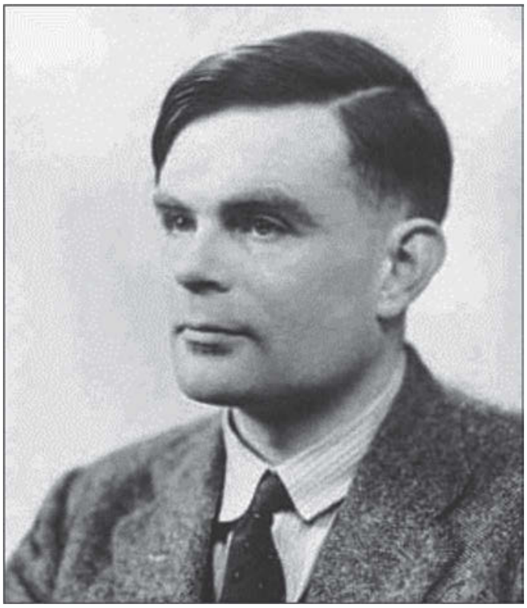

Figura 1. Alan Mathison Turing (1912-1954)

Su madre sabía que le resultaba muy difícil ajustarse al plan de una escuela pública, pero había tomado la determinación de que su hijo debía recibir educación en la escuela pública Sherborne School, donde fue criticado por su escritura, tuvo problemas en Inglés, Química, disgustando a su profesor por hacer los experimentos siguiendo esquemas propios, y también en Matemáticas por su obsesión en obtener las soluciones con ideas originales.

Aunque sus respuestas no solían ser convencionales ganó casi todas las competiciones matemáticas celebradas en Sherborne School, donde sus profesores no fueron conscientes de que el autodidacta Turing aprendía matemática profunda, leía artículos de Eisntein sobre relatividad y estudiaba mecánica cuántica en el libro de Eddington[1] "*The nature of the physical World*".

2. EL FALLECIMIENTO DE CHRISTOPHER MORCOM Y SU INGRESO EN EL KING'S COLLEGE DE CAMBRIDGE.

Turing estableció una estrecha amistad con Christopher Morcom, alumno de un curso superior y primera persona con la que pudo compartir ideas científicas. Morcom enfermó en 1928 y falleció en febrero de 1930. Turing quedó destrozado, lo que puede justificar su fracaso en 1929 para acceder a estudiar Matemáticas en el King's College de Cambridge, donde ingresó en 1931.

Cambridge era un lugar más adecuado que la Sherborne School para personas poco convencionales como Turing, pues tenía más facilidades para desarrollar sus propias ideas, enriquecidas por la lectura de *Los Fundamentos de la Mecánica Cuántica* de von Neumann en 1932 y de la *Introducción a la Filosofía Matemática* de Russell en 1933.

3. POSICIÓN DE TURING FRENTE AL BELICISMO Y AL LOGICISMO.

La obra de Russell supone el comienzo del interés de Turing por la lógica matemática, quien en diciembre de 1933 leyó el artículo *Mathematics and Logic* en el Club de Ciencia Moral de Cambridge, donde defendió que "*una visión puramente logicista de las Matemáticas no era adecuada, pues las proposiciones matemáticas tienen muchas interpretaciones de las que la logicista es sólo una de ellas*".

Ese año 1933 ascendió Hitler al poder en Alemania y surgió el movimiento antibélicista en las islas Británicas, con el que se alineó Turing, sin evolucionar hacia marxismo, a diferencia de otros muchos antibelicistas.

4. EL CURSO DE MAX NEWMAN DE 1935.

Turing se graduó en 1934. En 1935 fue elegido fellow del King's College de Cambridge por su artículo *On the Gaussian error function*. Turing demostró el Teorema Central del Límite, resultado fundamental en Teoría de Probabilidad del que Turing desconocía que había sido demostrado unos años unos años antes por el matemático filandés Jarl Waldemar Lindeberg (1876–1932). Ambas demostraciones son diferentes y este artículo demostró el potencial de Turing, quien obtuvo una plaza de profesor a los veintidós años

En la primavera de 1935 siguió un curso avanzado de Max Newman sobre fundamentos de las Matemáticas, estudiando los resultados de Gödel sobre incompletitud y el problema de Hilbert de decibilidad.

Max Newman se había sentido seducido por las ideas expuestas por Hilbert sobre la consistencia de los axiomas de la Aritmética[2] en el Congreso Interna-

[1] A Eddington se le debe la primera comprobación de que la trayectoria de la luz era curvada por el campo gravitatorio solar, que fue hecha el 29 de mayo de 1919 durante un eclipse solar en las islas Príncipe, avalando la teoría de la relatividad general de Einstein. Se han hecho varias comprobaciones posteriores más exactas del desplazamiento de la luz de las estrellas al pasar cerca del Sol.

[2] Hilbert llegó al problema de la consistencia con el estudio de las geometrías no euclidianas, consideradas por Gauss, quien nunca publicó sus resultados sobre dichas geometrías, siendo las primeras aportaciones escritas debidas a Nikolai Lobachevsky y a Janos Bolyai en 1830. Su impacto inicial fue muy reducido, pues se creía que una geometría sin el axioma del paralelismo de Euclides no sería consistente por con-

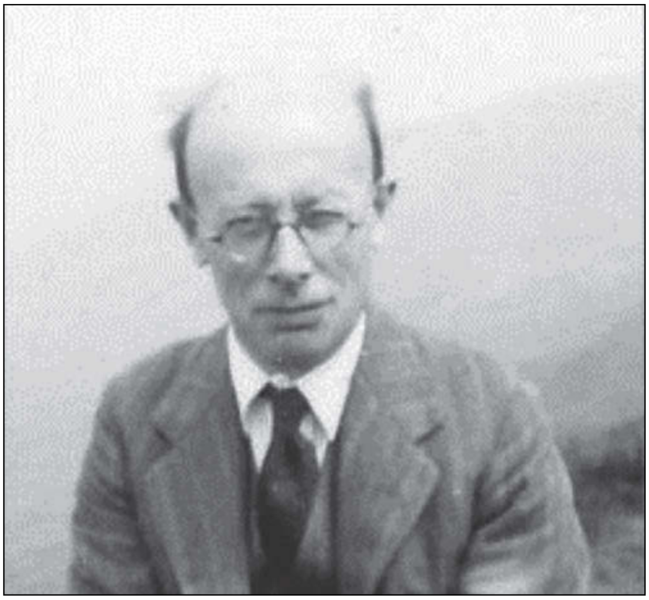

Figura 2. Max Newman (1897-1984)

cional de Matemáticos de Bolonia de 1928, que fue la primera ocasión en que se invitó a una delegación alemana después de la Primera Guerra Mundial. Hilbert fue recibido con una gran ovación a la que respondió diciendo que "*La matemática no conoce razas*" y que "*para los matemáticos el mundo entero de la cultura es una sola nación*".

Hilbert estaba convencido de la solución positiva del problema de la consistencia. Era el segundo problema de su célebre lista de 1900, potenciado por la paradoja de Bertrand Russell, resuelta en el *Principia Mathematica*[3].

Pero Kurt Gödel, joven austríaco de veinticinco años, desmoronó en su tesis doctoral de 1930 la opinión de Hilbert sobre el problema de la consistencia, pues demostró que desde unos axiomas no es posible demostrar su consistencia. Tres años antes, Heisenberg había señalado limitaciones a los físicos con su principio de incertidumbre. Ahora Gödel hacía lo propio con los matemáticos.

Otro resultado de la tesis doctoral de Gödel es su *Teorema de incompletitud*, que afirma que si unos axiomas son consistentes y pueden describir la Teoría de Números y la Aritmética, entonces habrá proposiciones indecidibles de las que no se puede demostrar ni su certeza ni su falsedad a partir de esos axiomas. Años más tarde Cohen probó en 1940 que la hipótesis del continuo[4] es indecidible partiendo de los axiomas de la teoría de conjuntos.

El Teorema de incompletitud hizo pensar a Hilbert en la posibilidad de un algoritmo o máquina capaz de indicar a los matemáticos si un enunciado podía deducirse o no de unos axiomas. Lo llamó problema de decibilidad y recuerda a su décimo problema de 1900 sobre la existencia de un método para deducir si una ecuación diofántica tiene o no solución entera.

Max Newman, al ver desmoronado el programa de su admirado Hilbert, se sintió atraído por las ideas de Gödel de su Tesis de 1930. En el curso de 1935 explicó el Teorema de incompletitud. La dificultad de las demostraciones de Gödel hicieron intuir a Turing la inexistencia de una máquina o algoritmo capaz de resolver el problema de decibilidad propuesto por Hilbert.

5. EL PROBLEMA DE DECIBILIDAD.

Turing recibió en 1936 el Smith's Prizeman por sus aportaciones en Teoría de Probabilidad. Entonces trabajaba sobre el problema de decidibilidad, inspirado por el curso de Newman. En el artículo *On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem,* Proc. London Math. Soc. **S2-42** no. 1, 230, introdujo una máquina abstracta, llamada hoy *máquina de Turing*, que pasa de un estado a otro siguiendo un conjunto finito y preciso de reglas, especificadas en instrucciones contenidas en una cinta.

tener alguna contradicción, lo que fue refutado por Hilbert al demostrar que la consistencia de la aritmética implica la consistencia de la geometría, euclidiana y no euclidiana. Entonces Hilbert observó que no se había probado que la aritmética careciese de contradicciones, lo que originó el comienzo de su investigación en verdades matemáticas fundamentales, siguiendo las ideas elaboradas por Emmanuel Kant en Königsberg, ciudad natalicia de Hilbert.

[3] Libro escrito por Bertrand Russell y Norbert Whitehead.

[4] La hipótesis del continuo afirma que no existen conjuntos con cardinalidades intermedias entre las de los conjuntos N y R de los números naturales y reales.

Turing llamó *número computable* a número real cuya parte decimal puede ser producida por una máquina de Turing. Probó que el número π es computable y que el cardinal de la familia de números computables es numerable. Así demostró la existencia de infinitos números no computables.

También utilizó una técnica original de Cantor[5] para probar que si una máquina de Turing **T** fuese capaz de decirnos si las proposiciones de un conjunto ***P*** son o no deducibles de un conjunto de axiomas **A**, se podía construir una nueva proposición **H** que la máquina **T** no sería capaz de decirnos si era o no deducible del conjunto de axiomas **A**[6].

Así resolvió en negativo el problema de decibilidad, y, además, aunque el nivel tecnológico en 1936 era insuficiente para construir un ordenador, Turing estaba describiendo con su máquina teórica un ordenador moderno, pues en su artículo se lee "*which can be made to do the work of any special-purpose machine, that is to say to carry out any piece of computing, if a tape bearing suitable instructions is inserted into it*".

6. TURING Y ALONZO CHURCH.

El referido artículo de Turing contiene ideas que han sido muy importantes en Matemáticas y en Ciencia de la Computación, pero su aceptación en los Proceedings of the London Mathematical Society no fue fácil, debido a que Alonzo Church se le adelantó con su artículo *An unsolvable problem in elementary number theory*, publicado en American Journal of Mathematics en 1936, donde también resolvió en negativo el problema de decibilidad en aritmética.

Aunque el enfoque de Turing es diferente al de Church, Newman tuvo que mediar para conseguir la publicación del artículo de Turing por la London Mathematical Society, obligándole a revisarlo y a incluir una referencia al artículo de Church. Turing terminó su artículo inicial en abril de 1936 y la versión revisada en agosto de 1936. Se publicó en 1937.

Este incidente con Church motivó la estancia de Turing en Princeton desde 1936 a 1938 como estudiante graduado. Allí escribió un artículo sobre grupos de Lie, otro sobre extensiones de grupos, simplificando y unificando resultados obtenidos por Reinhold Baer, y el artículo *Systems of Logic Based on Ordinals*, del que Maxwell H. A. Newman escribió que "*contenía muchas ideas y sugerencias interesantes, que daban luz de la visión de Turing sobre el papel de la intuición en la demostraciones matemáticas*".

Durante su estancia en Princeton, Turing acarició la idea de construir un ordenador para investigar la hipótesis de Riemann, uno de los principales problemas en Matemáticas, aún no resuelto. De regreso en Cambridge, comenzó a construir en 1938 un ordenador mecánico adaptando una máquina sofisticada, utilizada en la previsión de las mareas[7].

Influido por el pesimismo de Hardy[8], dirigió su atención a la obtención de ceros no triviales de la función zeta fuera de la recta crítica $x = 1/2$. Utilizó su máquina y el método de cálculo de Riemann redescubierto por Siegel. Todos los ceros que encontró están sobre la recta crítica.

Pero tuvo que abandonar este proyecto debido a que la Oficina de Codificación del Gobierno y la Escuela de Cifrado le pidieron ayuda para descifrar los códigos alemanes de la máquina Enigma en Bletchley Park[9].

---

5 Es la conocida técnica utilizada por Cantor para demostrar que si a cada número racional se le asocia un número irracional siempre existen números irracionales no asociados a ningún número racional.

6 Si se modificase la máquina para que nos pudiese decir si esa nueva proposición **H** era o no deducible del conjunto **A** de axiomas, se podría construir otra proposición diferente que la nueva máquina no sería capaz de decirnos si se deduce o no de ese conjunto de axiomas.

7 Turing sabía que el método de modificar máquinas lo había utilizado Ted Titchmarsh en Oxford.

8 Hardy llegó a creer en la falsedad de la Hipótesis de Riemann, tal vez por su fracaso en encontrar la demostración tras las muchas horas de trabajo empleadas en su búsqueda. La Hipótesis de Riemann postula que todos los ceros de la función zeta están en la recta crítica.

9 El éxito de Turing en el descifrado de códigos secretos alemanes fue consecuencia de su excelente preparación matemática e informática previa, dirigida a la obtención de valores de la función zeta.

7. LA MÁQUINA ENIGMA.

Cuando se declaró la Segunda Guerra Mundial en 1939, Turing se desplazó a trabajar a tiempo completo en la Oficina de Codificación del Gobierno y en la Escuela de Cifrado en Bletchley Park. Sus brillantes ideas descifrando códigos y desarrollando máquinas para ayudar a descifrar códigos salvaron muchas vidas durante la Segunda Guerra Mundial, tal vez acortada en un par de años por el descifrado de códigos alemanes de la máquina Enigma. Para Turing fue uno de los períodos más felices de su vida.

Junto con el matemático W Gordon Welchman, Turing desarrolló la Bombe, máquina basada en un trabajo del matemático polaco Marian Adam Rejewski[10], que, desde finales de 1940, permitió decodificar todos los mensajes enviados por las máquinas Enigma[11] de la aviación alemana, la temida Luftwaffe. Fue más difícil la descodificación de los mensajes enviados por las máquinas alemanas Enigma de la armada germana, la Kriegsmarine, lo que constituyó un desafío apasionante para Turing, quien, con métodos estadísticos y la ayuda de cierta información facilitada por el servicio secreto inglés, consiguió a

Figura 3. Enigma D (versión militar)

[10] El matemático polaco Marian Adam Rejewski (1905–1980) fue el primero que consiguió descifrar los mensajes de la máquina comercial alemana Enigma. Rejewski utilizaba en el descifrado varios métodos matemáticos, fundamentalmente elementos de Teoría de Probabilidad y Estadística. La aplicación de la Teoría de Sustituciones por los criptólogos polacos en los años 1932–33 permitió romper el cifrado de la máquina alemana Enigma, lo que ejerció una influencia decisiva en todos los escenarios de la Segunda Guerra Mundial entre 1939 y 1945, Europa, Africa y el lejano Este.
En septiembre de 1936 los alemanes cambiaron el procedimiento de codificación de la máquina Enigma, haciéndolo más seguro. De nuevo Rejewski, con la ayuda de Rozycki y Zygalski, hicieron progresos en el descifrado de mensajes y, a principio de 1938, eran capaces de descodificar tres cuartos de los mensajes de la máquina Enigma. Los alemanes volvieron a añadir nuevas complejidades a la máquina Enigma en diciembre de 1938, y de nuevo los polacos volvieron a trabajar en el descifrado de los nuevos códigos. Rejewski comunicó sus conocimientos de descodificación a británicos y franceses en una reunión en julio de 1939 en Pyry, al sur de Varsovia.
Información extraída de **http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Rejewski.html**, siguiendo una amable sugerencia del Profesor José Luis Varona.

[11] Al pulsar una letra del teclado de una máquina Enigma, por ejemplo la letra A, la corriente eléctrica procedente de la batería se dirigía hasta el contacto correspondiente a dicha letra en el primer rotor, atravesaba su cableado interno y se situaba en el contacto correspondiente a otra letra, cuyo contacto estaba conectado con el contacto de otra letra del segundo rotor. Cuando la corriente llegaba al segundo rotor, atravesaba su cableado interno y se situaba en el contacto correspondiente a otra letra, que sufría una nueva transformación al pasar por el tercer rotor. El mensaje de cifrado consistía en la sustitución de las letras del texto original por las proporcionadas por la máquina.
Además cada vez que se introducía en la máquina una letra del mensaje original variaba la transformación que efectuaban los rotores, de manera que a dos letras idénticas en el mensaje original, por ejemplo AA, les correspondían dos letras diferentes en el mensaje cifrado, por ejemplo QL. En la mayoría de las versiones de la máquina, el primer rotor avanzaba una posición con cada letra. Cuando se habían introducido 26 letras y el primer rotor había completado una vuelta, se avanzaba en una muesca la posición del segundo rotor, y cuando éste terminaba su vuelta, se variaba la posición del tercer rotor. El número de pasos que provocaba el avance de cada uno de los rotores, era un parámetro configurable por el operario.
Debido a que el cableado de cada rotor era diferente, la secuencia exacta de las sustituciones variaba en función de qué rotores estaban instalados en las ranuras, del orden de instalación y de la posición inicial de cada rotor. Estas condiciones particulares se las conocía como configuración inicial, que se distribuía mensualmente al principio de la guerra, aumentando la frecuencia de cambio a medida que avanzaba la guerra. Para hacer más complejo el descifrado de la codificación cada máquina disponía de cinco rotores diferentes.

Figura 4. Bletchley Park (Buckinghamshire, Inglaterra)

mediados de 1941 descodificar las señales de la armada germana en Bletchley.

Desde noviembre de 1942 hasta marzo de 1943, Turing estuvo en Estados Unidos colaborando en la descodificación de mensajes y en la elaboración de un sistema secreto de hablar. En este período los alemanes introdujeron cambios en la forma de codificar mensajes, con lo que Bletchley perdió su capacidad de decodificar mensajes. Esta vez Turing no estuvo directamente implicado en la descodificación de estos mensajes, pero siguiendo sus ideas se consiguió descodificar los nuevos mensajes cifrados alemanes. Turing fue premiado en 1945 con la Orden del Imperio Británico por su contribución vital en la victoria de la Segunda Guerra Mundial.

7. DESPUÉS DE LA SEGUNDA GUERRA MUNDIAL.

Al finalizar la Segunda Guerra Mundial, Turing fue invitado por el National Physical Laboratory de Londres para diseñar un ordenador. Presentó su proyecto Automatic Computing Engine (ACE) en marzo de 1946, que coincide con lo que entendemos por un ordenador moderno. Casi todos los que emitieron un informe sobre el proyecto lo consideraron demasiado ambicioso, sobre todo por la gran capacidad de almacenar datos que proponía, por lo que tardó mucho tiempo en ser aprobado.

Volvió a Cambridge en el curso académico 1947–48, donde, además de interesarse por las matemáticas y los ordenadores, se dedicó al estudio de la neurología, fisiología y a la práctica del atletismo, pues se hizo socio del Walton Athletic Club, obteniendo excelentes marcas en las carreras de tres y de diez millas. Participó en el maratón de 1947 y quedó en el puesto quinto.

En 1948, Max Newman era profesor de Matemáticas en la Universidad de Manchester y ofreció un puesto a Turing, quien lo aceptó y dejó su trabajo en el National Physical Laboratory. Entonces C. Williams y T. Kilburn estaban construyendo una máquina de computación, esperando que Turing haría los trabajos matemáticos relacionados con el nuevo ordenador, así como el diseño de subrutinas y programas, e investigación en problemas generales de Análisis Numérico, cuando la máquina estuviese construida.

Con esa máquina programable, Turing comprobó en 1950 que los 1104 primeros ceros no triviales de la función zeta están situados sobre la recta $x=1/2$. Superó los 1041 ceros de la función zeta calculados poco antes por Ted Titchmarsh, pero no consiguió su objetivo de probar la falsedad de la Hipótesis de Riemann.

De 1950 es también su artículo *Computing machinery and intelligence*, Mind **59** (1950) 433–460, fruto de su mente creativa, donde plantea cuestiones que surgirían posteriormente con el desarrollo de los ordenadores, así como preguntas que siguen siendo el núcleo de la Inteligencia Artificial. Propone un test, llamado Test de Turing, para calificar cuando un ordenador puede ser considerado inteligente. A los que afirmaban que existía un salto insalvable entre las máquinas y la mente humana, Turing, con gran fuerza y convicción, les pedía que especificasen dónde estaba ese salto.

Turing no olvidó las cuestiones de decibilidad que habían sido el punto de partida de sus brillantes publicaciones. Un problema interesante en la teoría combinatoria de grupos finitamente generados es el llamado *word problem*. Consiste en probar la existencia de un algoritmo que permita decidir cuando dos expresiones formadas con los generadores representan el mismo elemento. En 1947, Emil Leon Post (1897– 1954) demostró que el *word problem* para semigrupos es indecidible. Turing pensó que había resuelto el mismo problema para grupos, pero justamente antes de dar un seminario para explicar su demostración encontró un error. Desde su demostración errónea para grupos demostró que el *word problem* es también indecidible para semigrupos cancelativos, que son semigrupos en los que $xy = xy'$ o $yx = y'x$ implican $y = y'$, resultado recogido en el artículo *The word problem in semi-groups with cancellation*. Ann. of Math. (2) **52**, (1950). 491–505. En 1957, William Werner Boone (1920–1983) probó que *word problem* es un problema indecidible en grupos.

8. LOS ÚLTIMOS AÑOS DE TURING.

En 1951 fue elegido Fellow de la Royal Society of London, fundamentalmente por su trabajo sobre las máquinas de Turing de 1936. Ese año trabajó en la aplicación de las matemáticas a las formas biológicas y, en 1952, publicó la primera parte de su estudio teórico sobre la morfogénesis, dedicado al desarrollo de las formas en los organismos vivos. También pensó sobre teoría cuántica, partículas elementales y teoría de la relatividad.

En 1952 denunció a la policía que su casa había sido desvalijada. El ladrón resultó ser conocido de un amante de Turing. La policía se ocupó también del acto de indecencia grave, como estaba tipificada entonces la homosexualidad. Turing reconoció su homosexualidad, sabiendo que podía ser castigado con cárcel. El testimonio de Max Newman le libró de la cárcel, a condición de someterse a un tratamiento con estrógenos durante un año para controlar su comportamiento sexual.

El castigo impuesto a Turing le creo problemas en el trabajo secreto que seguía haciendo para el Government Communications Headquarters, que era totalmente desconocido por su colegas de Manchester. La descodificación de mensajes realizada en Bletchley Park se había convertido en la base de los trabajos de descodificación realizados por los británicos después de la Segunda Guerra Mundial, durante el período conocido como Guerra Fría. Empezó a no ser bien visto que un convicto como Turing trabajase en el Communications Headquarters.

Además, preocupaba mucho a los agentes de seguridad británicos que un conocedor de todos los trabajos realizados en Bletchley Park, como Turing, estuviese relacionado con muchos extranjeros, sin llegar a comprender que su relación era matemática. El viaje de vacaciones de Turing a Grecia en 1953 causó consternación entre los agentes de seguridad.

El 7 de junio de 1954, Turing fue encontrado muerto en Wilmslow, Cheshire, Inglaterra, envenenado por cianuro potásico mientras hacía unos experimentos de electrolisis. El cianuro se encontró en media manzana que estaba detrás de él. La investigación concluyó que había sido un suicidio, si bien su madre mantuvo siempre que fue un accidente.

BIBLIOGRAFÍA

1. M. H. A Newman and A. M. Turing. *A formal theorem in Church's theory of types*. J. Symbolic Logic **7**, (1942). 28–33.

2. A. M. Turing, *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*. Proc. London Math. Soc. **S2-42** no. 1 (1937) 230.

3. C. Torres Alcaraz, *Cien años de Turing*, Miscelánea Mat. No. **56** (2013)

4. A. M. Turing, *Finite approximations to Lie groups*. Ann. of Math. **(2) 39** (1938), no. 1, 105–111.

5. A. M. Turing, *The use of dots as brackets in Church's system*. J. Symbolic Logic **7**, (1942), 146–156.

6. A. M. Turing, *A method for the calculation of the zeta-function*. Proc. London Math. Soc. (2) **48**, (1943). 180–197.

7. A. M. Turing, *Practical forms of type theory*. J. Symbolic Logic **13**, (1948). 80–94.

8. A. M. Turing, *Computing machinery and intelligence*. Mind **59**, (1950). 433–460.

9. A. M. Turing, *The word problem in semi-groups with cancellation*. Ann. of Math. **(2) 52**, (1950). 491–505.

10. M. Vincenzi, *Alan Turing and the poisoned apple*. Imagine math. **2**, (2013) 255–262, Springer, Milan.

11. H. Whitemore, *Writing about Alan Turing*. Math. Intelligencer **13** (1991), no. 4, 26–30.