

ELEMENTOS FINITOS EN PROBLEMAS MECÁNICOS

MANUEL LÓPEZ PELLICER *; SALVADOR LÓPEZ ALFONSO**

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Valverde 22, 28004 Madrid.

** Universidades Politécnica de Valencia y C. Herrera-CEU

1. INTRODUCCIÓN

Vamos a complementar el artículo Elementos Finitos en Fenómenos de Transmisión, exponiendo elementalmente como se aplican los Elementos Finitos en problemas mecánicos.

Se estudiará con detalle una sencilla estructura de barras enlazadas que trabajan a compresión o a tracción, comparando los resultados obtenidos por cálculo manual con los resultados obtenidos con el programa Ansys.

Una estructura de barras enlazadas que trabajan a compresión o a tracción la tenemos en una torre de un tendido eléctrico o en la torre Eiffel. Se llaman *nodos* a los extremos de las barras, que se denominan *elementos*.

Completaremos este artículo con algunos problemas mecánicos resueltos con el programa Ansys.

2. DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO.

Supondremos que los elementos (barras) de la estructura sólo trabajan a tracción y compresión, siendo las deformaciones lo suficiente pequeñas para que podamos admitir la ley de Hooke, que nos dice que en cada nodo de cada elemento se verifica que:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$$

donde:

- F es la fuerza que actúa en ese nodo en la dirección de la barra, con sentido hacia el exterior de la barra, que en lo sucesivo se llamará elemento, siguiendo la denominación habitual en Elementos Finitos, según se ha indicado.
- S es la sección del elemento.
- E es el *módulo de elasticidad*, también llamado *módulo de Young*.
- Δl es el incremento de longitud del elemento por la acción de las fuerzas que actúan sobre la estructura.
- $Y l$ es la longitud del elemento. Por tanto:

$$F = \frac{E \times S}{l} \Delta l = k \Delta l$$

donde la constante $k = \frac{E \times S}{l}$ se llama *módulo de rigidez*.

3. ECUACIÓN MATRICIAL DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO.

Cuando una estructura de barras está sometida a diversas fuerzas se producen pequeños desplaza-

mientos en sus nodos hasta conseguir el equilibrio, que se produce cuando la suma de fuerzas que actúan en cada nodo es 0.

Vamos a analizar un elemento m de la estructura cuyos nodos son $i = (x_i, y_i, z_i)$ y $j = (x_j, y_j, z_j)$, que por efecto de las fuerzas externas experimentan los pequeños desplazamientos (U_{ix}, U_{iy}, U_{iz}) y (U_{jx}, U_{jy}, U_{jz}) .

Para obtener la relación entre la fuerza en cada uno de los nodos i y j en la dirección del elemento y los desplazamientos de los nodos se introduce un nuevo sistema de coordenadas, llamado *sistema local*, con origen en uno de los nodos, por ejemplo el nodo i , con un eje en la dirección del elemento y sentido desde el nodo elegido como origen al otro nodo del elemento. Si $(\cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z)$ son los cosenos directores de este eje se tiene que las proyecciones de las deformaciones de los nodos i y j sobre este eje son

$$(\cos\theta_x)U_{ix} + (\cos\theta_y)U_{iy} + (\cos\theta_z)U_{iz}$$

y

$$(\cos\theta_x)U_{jx} + (\cos\theta_y)U_{jy} + (\cos\theta_z)U_{jz}$$

por lo que el incremento de longitud del elemento m es

$$\Delta l = (\cos\theta_x)U_{jx} + (\cos\theta_y)U_{jy} + (\cos\theta_z)U_{jz} - [(\cos\theta_x)U_{ix} + (\cos\theta_y)U_{iy} + (\cos\theta_z)U_{iz}]$$

En consecuencia, el módulo de la fuerza $F_j(m)$ que actúa en el nodo j en la dirección del elemento m y sentido desde el nodo i al nodo j es

$$k \times \Delta l$$

por lo que las componentes de esa fuerza $F_j(m)$ en los ejes iniciales son las componentes del vector

$$(F_{jx}(m), F_{jy}(m), F_{jz}(m)) = k \times \Delta l \times (\cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z).$$

La ecuación resultante al sustituir Δl se escribe con la siguiente notación matricial:

$$\begin{pmatrix} F_{jx}(m) \\ F_{jy}(m) \\ F_{jz}(m) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -G_m & G_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \\ U_{iz} \\ U_{jx} \\ U_{jy} \\ U_{jz} \end{pmatrix}$$

siendo

$$G_m = \begin{pmatrix} \cos\theta_x \cos\theta_x & \cos\theta_y \cos\theta_x & \cos\theta_z \cos\theta_x \\ \cos\theta_x \cos\theta_y & \cos\theta_y \cos\theta_y & \cos\theta_z \cos\theta_y \\ \cos\theta_x \cos\theta_z & \cos\theta_y \cos\theta_z & \cos\theta_z \cos\theta_z \end{pmatrix}$$

Con un razonamiento análogo, o bien aplicando el principio de acción y reacción, se obtiene

$$\begin{pmatrix} F_{ix}(m) \\ F_{iy}(m) \\ F_{iz}(m) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} G_m & -G_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \\ U_{iz} \\ U_{jx} \\ U_{jy} \\ U_{jz} \end{pmatrix}$$

Estas dos ecuaciones matriciales se escriben conjuntamente y se obtiene la siguiente *ecuación matricial de rigidez* para el elemento m :

$$\begin{pmatrix} F_{ix}(m) \\ F_{iy}(m) \\ F_{iz}(m) \\ F_{jx}(m) \\ F_{jy}(m) \\ F_{jz}(m) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} G_m & -G_m \\ -G_m & G_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \\ U_{iz} \\ U_{jx} \\ U_{jy} \\ U_{jz} \end{pmatrix}$$

que relaciona las fuerzas que actúan en los nodos i y j en la dirección del elemento m y los desplazamientos de dichos nodos en el sistema inicial de coordenadas. La matriz

$$k \begin{pmatrix} G_m & -G_m \\ -G_m & G_m \end{pmatrix}$$

se llama *matriz de rigidez del elemento m* .

Del análisis de la deducción de la ecuación matricial de rigidez se deduce que se trata de una ecuación aproximada, que sólo se debe aplicar si los desplazamientos de los nodos son muy pequeños, para que tenga validez de la ley de Hooke y para que la longitud de cada elemento así como los ángulos de cada elemento con los ejes de coordenadas permanezcan prácticamente constantes durante la deformación, pues

estas hipótesis se han supuesto en la deducción de la ecuación matricial de rigidez, que, por tanto, sólo aplicaremos en estructuras rígidas que sufran pequeñas deformaciones por las cargas.

3. ENSAMBLADO.

La ecuación matricial de rigidez de cada elemento y las restricciones de sus nodos nos proporcionan la fuerza que actúan en cada nodo sobre cada elemento concurrente en dicho nodo. La suma de las fuerzas en cada nodo sobre todos los elementos que concurren en dicho nodo nos da la fuerza que actúa en ese nodo. Este proceso de sumar fuerzas en cada nodo se llama *ensamblado*.

En estado de equilibrio, la fuerza obtenida en cada nodo debe ser igual a la suma de las fuerzas externas más las fuerzas de reacción que actúan en cada nodo.

Así se obtiene un sistema de ecuaciones que permite obtener los desplazamientos de cada nodo y las reacciones en los nodos sometidos a restricciones.

La introducción de los desplazamientos de cada nodo en la ecuación matricial de rigidez de cada elemento suministra las fuerzas que actúan en cada nodo sobre cada elemento, como se expone en el sencillo ejemplo del apartado siguiente.

4. EJEMPLO: RESOLUCIÓN MANUAL.

Una estructura de barras está formada por 3 elementos de 1cm^2 de sección y con módulo de elasticidad igual a 10^8Kp/cm^2 . La estructura tiene cuatro nodos, cuyas coordenadas se dan en la tabla 1

Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4
(0,0,0)	(0,1,0)	(2,0,0)	(1,1,-2)

Tabla 1

Sobre el nodo 4 actúa una fuerza de $-1000 \vec{\mathbf{k}}$ Kp, que produce el desplazamiento (U_{4X}, U_{4Y}, U_{4Z}) . Los tres primeros nodos están fijos, por lo que aparecen las tres reacciones (tabla 2):

Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3
(R_{1X}, R_{1Y}, R_{1Z})	(R_{2X}, R_{2Y}, R_{2Z})	(R_{3X}, R_{3Y}, R_{3Z})

Tabla 2

Los tres elementos concurren en el nodo 4. La tabla 3 indica los nodos que pertenecen a cada elemento:

Elemento 1	Elemento 2	Elemento 3
Nodos 1 y 4	Nodos 2 y 4	Nodos 3 y 4

Tabla 3

4.1 Elemento 1: Ecuación matricial de rigidez.

- Los cosenos directores del vector de origen el nodo 1 y extremo el nodo 4 son las componentes del vector

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

- Al multiplicar el vector $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ por cada una de sus componentes se obtienen las filas de la matriz G_1 correspondiente al elemento 1. Por tanto:

$$G_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- El módulo de rigidez del elemento 1 es

$$k_1 = \frac{E_1 \times S_1}{l_1} = \frac{10^8 \times 1}{\sqrt{6}}$$

- La ecuación matricial de rigidez del elemento 1 es:

$$\begin{pmatrix} F_{1X}(1) \\ F_{1Y}(1) \\ F_{1Z}(1) \\ F_{4X}(1) \\ F_{4Z}(1) \end{pmatrix} = \frac{10^8 \times 1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} G_1 & -G_1 \\ -G_1 & G_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1X} = 0 \\ U_{1Y} = 0 \\ U_{1Z} = 0 \\ U_{4X} \\ U_{4Y} \\ U_{4Z} \end{pmatrix}$$

donde ya se han introducido las restricciones del nodo 1. Por tanto:

$$F_{1X}(1) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-U_{4X} - U_{4Y} + 2U_{4Z})$$

$$F_{1Y}(1) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-U_{4X} - U_{4Y} + 2U_{4Z})$$

$$F_{1Z}(1) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(2U_{4X} + 2U_{4Y} - 4U_{4Z})$$

$$F_{4X}(1) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(U_{4X} + U_{4Y} - 2U_{4Z})$$

$$F_{4Y}(1) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(U_{4X} + U_{4Y} - 2U_{4Z})$$

$$F_{4Z}(1) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-2U_{4X} - 2U_{4Y} + 4U_{4Z})$$

De esta ecuación se deduce que:

$$F_{2X}(2) = \frac{10^8}{5\sqrt{5}}(-U_{4X} + 2U_{4Z})$$

$$F_{2Y}(2) = 0$$

$$F_{2Z}(2) = \frac{10^8}{5\sqrt{5}}(2U_{4X} - 4U_{4Z})$$

$$F_{4X}(2) = \frac{10^8}{5\sqrt{5}}(U_{4X} - 2U_{4Z})$$

$$F_{4Y}(2) = 0$$

$$F_{4Z}(2) = \frac{10^8}{5\sqrt{5}}(-2U_{4X} + 4U_{4Z})$$

4.2. Elemento 2: Ecuación matricial de rigidez.

- El vector de origen el nodo 2 y extremo el nodo 4 es $(1, 0, -2)$. Por tanto, sus cosenos directores son las componentes del vector

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2).$$

- Al multiplicar el vector $\sqrt{5}^{-1}(1, 0, -2)$ por cada una de sus componentes se obtienen las filas de la matriz G_2 del elemento 2, luego:

$$G_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- El módulo de rigidez del elemento 2 es

$$k_2 = \frac{E_2 \times S_2}{l_2} = \frac{10^8 \times 1}{\sqrt{5}}$$

- La ecuación matricial de rigidez del elemento 2 con las restricciones del nodo 2 es:

$$\begin{pmatrix} F_{2X}(2) \\ F_{2Y}(2) \\ F_{2Z}(2) \\ F_{4X}(2) \\ F_{4Y}(2) \\ F_{4Z}(2) \end{pmatrix} = \frac{10^8 \times 1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2X} = 0 \\ U_{2Y} = 0 \\ U_{2Z} = 0 \\ U_{4X} \\ U_{4Y} \\ U_{4Z} \end{pmatrix}$$

4.3. Elemento 3: Ecuación matricial de rigidez.

- Los cosenos directores del vector de origen el nodo 3 y extremo el nodo 4 son las componentes del vector

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, -2).$$

- Al multiplicar el vector $\sqrt{6}^{-1}(-1, 1, -2)$ por cada una de sus componentes se obtienen las filas de la matriz G_3 correspondiente al elemento 3. Por tanto:

$$G_3 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- El módulo de rigidez del elemento 3 es

$$k_3 = \frac{E_3 \times S_3}{l_3} = \frac{10^8 \times 1}{\sqrt{6}}$$

- Por tanto la ecuación matricial de rigidez del elemento 3 es:

$$\begin{pmatrix} F_{3X}(3) \\ F_{3Y}(3) \\ F_{3Z}(3) \\ F_{4X}(3) \\ F_{4Y}(3) \\ F_{4Z}(3) \end{pmatrix} = \frac{10^8 \times 1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{3X} = 0 \\ U_{3Y} = 0 \\ U_{3Z} = 0 \\ U_{4X} \\ U_{4Y} \\ U_{4Z} \end{pmatrix}$$

Se han introducido las restricciones y al hacer el producto se obtiene:

$$F_{3X}(3) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-U_{4X} + U_{4Y} - 2U_{4Z})$$

$$F_{3Y}(3) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(U_{4X} - U_{4Y} + 2U_{4Z})$$

$$F_{3Z}(3) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-2U_{4X} + 2U_{4Y} - 4U_{4Z})$$

$$F_{4X}(3) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(U_{4X} - U_{4Y} + 2U_{4Z})$$

$$F_{4Y}(3) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-U_{4X} + U_{4Y} - 2U_{4Z})$$

$$F_{4Z}(3) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(2U_{4X} - 2U_{4Y} + 4U_{4Z}).$$

4.4. Ensamblado: Fuerzas que actúan en cada nodo.

Se ha indicado que en estado de equilibrio la suma de las fuerzas que actúan sobre cada elemento concurrente en un nodo debe ser igual a la suma de las reacciones y de las fuerzas externas que actúan en ese nodo. Este proceso de sumar e igualar, llamado ensamblado, produce las siguientes ecuaciones:

- Nodo 1:

$$R_{1X} = F_{1X}(1) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-U_{4X} - U_{4Y} + 2U_{4Z})$$

$$R_{1Y} = F_{1Y}(1) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-U_{4X} - U_{4Y} + 2U_{4Z})$$

$$R_{1Z} = F_{1Z}(1) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(2U_{4X} + 2U_{4Y} - 4U_{4Z})$$

- Nodo 2:

$$R_{2X} = F_{2X}(2) = \frac{10^8}{5\sqrt{5}}(-U_{4X} + 2U_{4Z})$$

$$R_{2Y} = F_{2Y}(2) = 0$$

$$R_{2Z} = F_{2Z}(2) = \frac{10^8}{5\sqrt{5}}(2U_{4X} - 4U_{4Z})$$

- Nodo 3:

$$R_{3X} = F_{3X}(3) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-U_{4X} + U_{4Y} - 2U_{4Z})$$

$$R_{3Y} = F_{3Y}(3) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(U_{4X} - U_{4Y} + 2U_{4Z})$$

$$R_{3Z} = F_{3Z}(3) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-2U_{4X} + 2U_{4Y} - 4U_{4Z})$$

- En el nodo 4 concurren tres elementos y sólo actúa la fuerza externa (0,0,-1000). Por tanto:

$$\sum_{i=1}^{i=3} (F_{4X}(i), F_{4Y}(i), F_{4Z}(i)) = (0, 0, -1000),$$

y al igualar componentes se obtiene el sistema:

$$F_{4X}(1) + F_{4X}(2) + F_{4X}(3) = 0$$

$$F_{4Y}(1) + F_{4Y}(2) + F_{4Y}(3) = 0$$

$$F_{4Z}(1) + F_{4Z}(2) + F_{4Z}(3) = -1000$$

que por sustitución de las fuerzas obtenidas en los apartados 4.1, 4.2 y 4.3 se transforma en el sistema:

$$\frac{10^8}{6\sqrt{6}}(U_{4X} + U_{4Y} - 2U_{4Z}) + \frac{10^8}{5\sqrt{5}}(U_{4X} - 2U_{4Z}) + \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(U_{4X} - U_{4Y} + 2U_{4Z}) = 0$$

$$\frac{10^8}{6\sqrt{6}}(U_{4X} + U_{4Y} - 2U_{4Z}) + \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-U_{4X} + U_{4Y} - 2U_{4Z}) = 0$$

$$\frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-2U_{4X} - 2U_{4Y} + 4U_{4Z}) + \frac{10^8}{5\sqrt{5}}(-2U_{4X} + 4U_{4Z}) + \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(2U_{4X} - 2U_{4Y} + 4U_{4Z}) = -1000$$

4.5. Obtención de los desplazamientos y de las reacciones.

Las doce ecuaciones del apartado 4.4 nos permiten obtener los desplazamientos del nodo 4 y las reacciones de los nodos 1, 2 y 3. De las tres ecuaciones correspondientes al nodo 4 se deduce que

$$\begin{aligned} U_{4X} &= -3.674234614 \times 10^{-5} \\ U_{4Y} &= -9.264404558 \times 10^{-5} \\ U_{4Z} &= -4.632202279 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

y al sustituir estos valores de los desplazamientos en las ecuaciones correspondientes a los tres primeros nodos se obtienen las reacciones. En concreto, al sustituir los desplazamientos obtenidos en las ecuaciones del nodo 1 se tiene:

$$\begin{aligned} R_{1X} &= F_{1X}(1) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-U_{4X} - U_{4Y} + 2U_{4Z}) = 250 \\ R_{1Y} &= F_{1Y}(1) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-U_{4X} - U_{4Y} + 2U_{4Z}) = 250 \\ R_{1Z} &= F_{1Z}(1) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(2U_{4X} + 2U_{4Y} - 4U_{4Z}) = -500 \end{aligned}$$

y al sustituir en las ecuaciones de los nodos 2 y 3 resulta:

$$\begin{aligned} R_{2X} &= F_{2X}(2) = \frac{10^8}{5\sqrt{5}}(-U_{4X} + 2U_{4Z}) = -500 \\ R_{2Y} &= F_{2Y}(2) = 0 \\ R_{2Z} &= F_{2Z}(2) = \frac{10^8}{5\sqrt{5}}(2U_{4X} - 4U_{4Z}) = 1000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{3X} &= F_{3X}(3) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-U_{4X} + U_{4Y} - 2U_{4Z}) = 250 \\ R_{3Y} &= F_{3Y}(3) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(U_{4X} - U_{4Y} + 2U_{4Z}) = -250 \\ R_{3Z} &= F_{3Z}(3) = \frac{10^8}{6\sqrt{6}}(-2U_{4X} + 2U_{4Y} - 4U_{4Z}) = 500 \end{aligned}$$

4.6. Cálculo de las fuerzas que actúan sobre cada elemento.

Sustituyendo las soluciones obtenidas de los desplazamientos (que en este ejemplo son U_{4X} , U_{4Y} y U_{4Z}) en las ecuaciones matriciales de rigidez de cada elemento se obtiene:

Elemento 1:

$$\begin{vmatrix} F_{1X}(1) \\ F_{1Y}(1) \\ F_{1Z}(1) \\ F_{4X}(1) \\ F_{4Y}(1) \\ F_{4Z}(1) \end{vmatrix} = \frac{10^8}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} G_1 & -G_1 \\ -G_1 & G_1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} U_{1X} = 0 \\ U_{1Y} = 0 \\ U_{1Z} = 0 \\ -3.674234614 \times 10^{-5} \\ -9.264404558 \times 10^{-5} \\ -4.632202279 \times 10^{-5} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 250 \\ -500 \\ -250 \\ -250 \\ 500 \end{pmatrix}$$

por lo que el elemento 1 está sometido a una fuerza de **compresión**, pues la fuerza que actúa en el nodo 1 tiene su sentido hacia el nodo 4 y viceversa. Su módulo es:

$$\sqrt{250^2 + 250^2 + (-500)^2} = 612,37$$

Elemento 2:

$$\begin{vmatrix} F_{2X}(2) \\ F_{2Y}(2) \\ F_{2Z}(2) \\ F_{4X}(2) \\ F_{4Y}(2) \\ F_{4Z}(2) \end{vmatrix} = \frac{10^8}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} U_{2X} = 0 \\ U_{2Y} = 0 \\ U_{2Z} = 0 \\ -3.674234614 \times 10^{-5} \\ -9.264404558 \times 10^{-5} \\ -4.632202279 \times 10^{-5} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -500 \\ 0 \\ 1000 \\ 500 \\ 0 \\ -1000 \end{pmatrix}$$

de lo que deducimos que el elemento 2 está sometido a una fuerza de **tracción**, pues el sentido de la fuerza en cada nodo se aleja del otro nodo. El módulo de esta fuerza es:

$$\sqrt{(-500)^2 + 1000^2} = 1118,03$$

Elemento 3:

$$\begin{vmatrix} F_{3X}(3) \\ F_{3Y}(3) \\ F_{3Z}(3) \\ F_{4X}(3) \\ F_{4Y}(3) \\ F_{4Z}(3) \end{vmatrix} = \frac{10^8}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} U_{3X} = 0 \\ U_{3Y} = 0 \\ U_{3Z} = 0 \\ -3.674234614 \times 10^{-5} \\ -9.264404558 \times 10^{-5} \\ -4.632202279 \times 10^{-5} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ -250 \\ 500 \\ -250 \\ 250 \\ -500 \end{pmatrix}$$

por lo que el elemento 3 está sometido a una fuerza de **tracción** por la razón indicada en el elemento 2, siendo el módulo de esta fuerza de tracción:

$$\sqrt{250^2 + (-250)^2 + 500^2} = 612,37$$

5. RESOLUCIÓN CON ANSYS.

Vamos a comprobar los resultados obtenidos en el ejemplo anterior con el programa Ansys de Elementos Finitos. Se presentará en doce subapartados para facilitar la exposición.

5.1. Selección de la clase problema a estudiar.

En preferencias se selecciona Structural (figura 1).



Figura 1.

5.2. Selección del tipo de elementos.

En preprocessor, seleccionar Element Type, Add/Edit/Delete, Add y elegir Structural Link 3D finit stn 180 (figura 2).



Figura 2.

5.3. Introducción de la sección de los elementos.

En Preprocessor, Real Constants, Add/Edit/Delete, Add (no hace falta seleccionar, pues sólo hay un tipo de elemento). Al validar aparece un cuadro de diálogo que permite introducir la sección en Cross-sectional AREA, donde se introduce el valor de la sección, que es 1 en este caso (Figura 3).

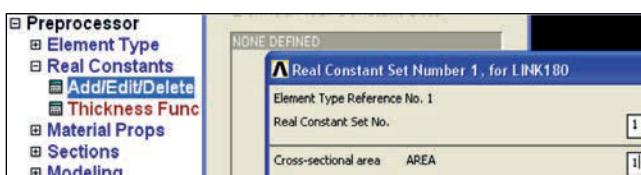


Figura 3.

5.4. Introducción del módulo de elasticidad.

En Preprocessor seleccionar Material Props y Material Models. Aparece un cuadro de diálogo donde se selecciona Structural, Linear, Elastic, Isotropic y se introduce el módulo de Young $10^8 = 1e8$ en EX (Figura 4).

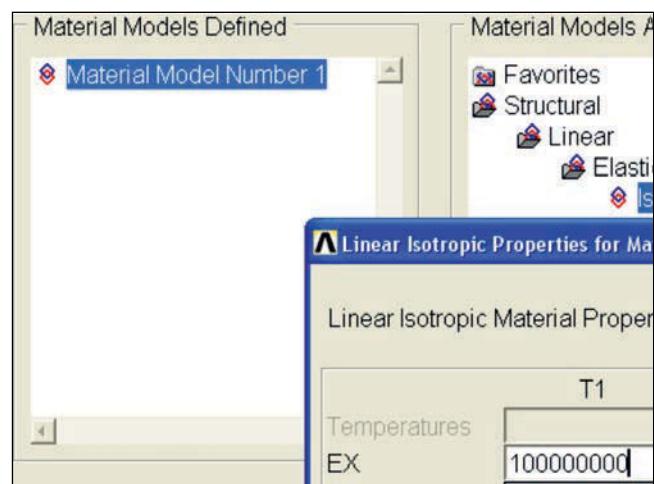


Figura 4.

5.5. Creación de los nodos.

Hay varias formas de crear los nodos. Una posibilidad es seleccionar en Preprocessor los apartados Modeling, Create, Nodes, In Active CS y aparece el cuadro de diálogo Create Nodes in Active Coordinate System con 1 en node number, que permite la introducción de las coordenadas del nodo 1 en X,Y,Z Location in active CS (figura 5). Al validar con Apply vuelve a aparecer el referido cuadro de diálogo, se introduce 2 en Node number y las coordenadas del nodo 2 en X,Y,Z Location in active CS y así sucesivamente hasta completar la introducción de los nodos.



Figura 5.

La figura reproduce como aparecen los nodos en la pantalla (figura 6).

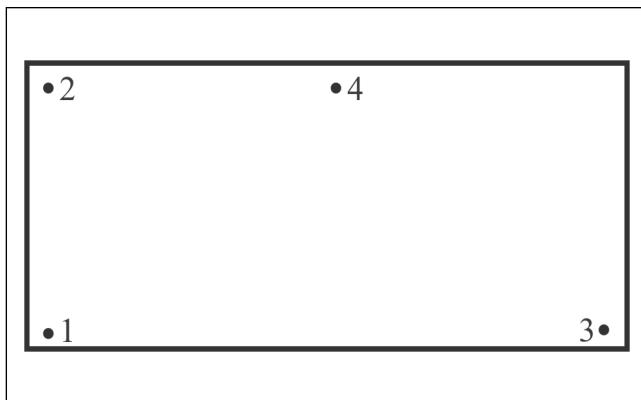


Figura 6.

5.6. Dibujo de los elementos.

En Preprocessor se selecciona Modeling, Create, Elements, (no hace falta hacer ninguna selección en Elem Attributes por haber definido sólo un tipo de elementos y una sola sección, que son las únicas opciones). El programa ofrece varias posibilidades de crear los elementos; si se selecciona Auto Numbered, Thru Nodes (figura 7) se crea cada elemento tras validar la elección de dos nodos.

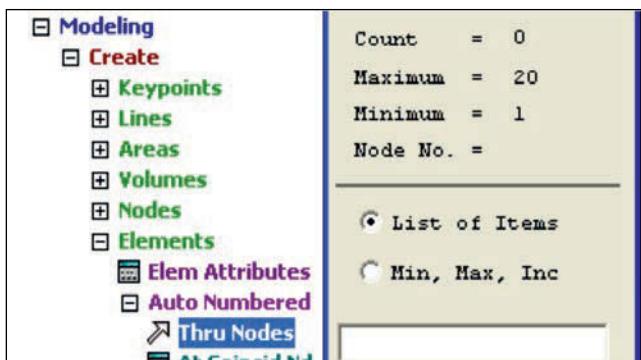


Figura 7.

Los elementos aparecen en la pantalla y para mejorar la perspectiva se cambia a perspectiva isométrica, eligiendo en PlotCtrls el cuadro de diálogo Pan Zoom Rotate y marcando Iso. Por defecto los ejes OX y OY están situados en el plano de la pantalla, por lo que el eje OZ es perpendicular al plano de la pantalla. Si se desea obtener la representación habitual de los ejes se puede utilizar el mismo cuadro de diálogo Pan Zoom Rotate y girar -120° alrededor del eje OZ, con lo que se obtiene la disposición de la figura 8.

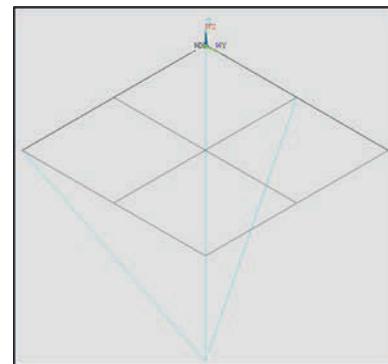


Figura 8.

5.7. Introducción de restricciones.

Se introduce la información de que los nodos 1, 2 y 3 están fijos desde Preprocessor seleccionando Loads, Define Loads, Structural, Displacement, On Nodes. Después de validar la selección de los nodos 1, 2 y 3 aparece un cuadro de diálogo que permite introducir las restricciones. En este ejemplo se selecciona All DOF y se introduce 0 en el valor del desplazamiento (figura 9).

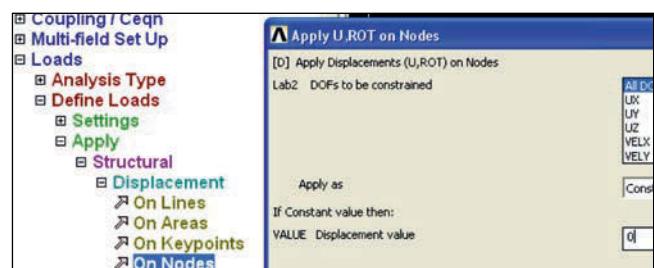


Figura 9.

Al validar aparecen las restricciones introducidas (figura 10).

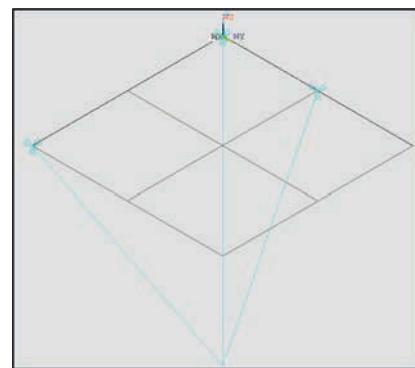


Figura 10.

5.8. Introducción de la fuerza externa.

Se procede como en 5.7, pero en vez de seleccionar Structural se elige Force/Moment, On nodes. Al validar la selección del nodo 4 aparece un cuadro de diálogo que permite introducir la fuerza externa de -1000 en el eje OZ (figura 11).

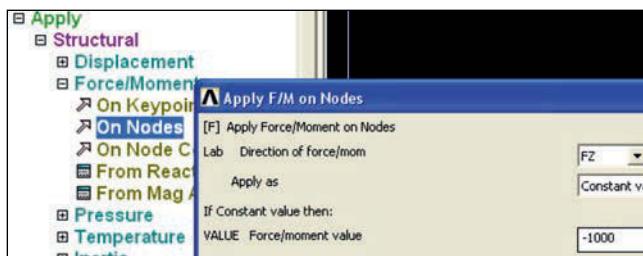


Figura 11.

Después de validar aparece la fuerza externa en el nodo 4 (figura 12).

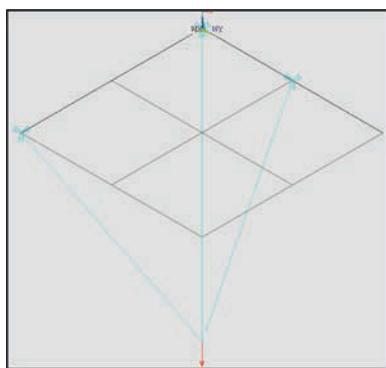


Figura 12.

5.9. Obtención de la solución.

En Solution se selecciona Solve, Current LS y se valida (figura 13).

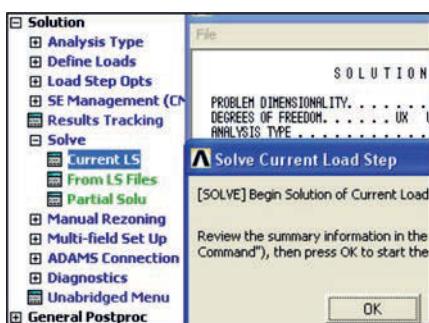


Figura 13.

Después de unos segundos aparece Solution is done. Para ver todo lo calculado, desplazamientos y reacciones en los nodos, así como fuerzas y tensiones que actúan sobre cada elemento, hay que hacer las adecuadas elecciones en General Postprocessor.

5.10. Desplazamientos de los nodos.

Se obtienen los desplazamientos de los nodos desde General Postproc, haciendo las elecciones List Results y Nodal Solution. Aparece el cuadro de diálogo List Nodal Solution donde al seleccionar Nodal Solution, DOF Solution y Displacement vector sum (figura 14) se obtiene el listado de los desplazamientos de los nodos. En ese caso sólo tiene desplazamientos no nulos el nodo 4, y el resultado del programa Ansys coincide con el obtenido manualmente (figura 15).

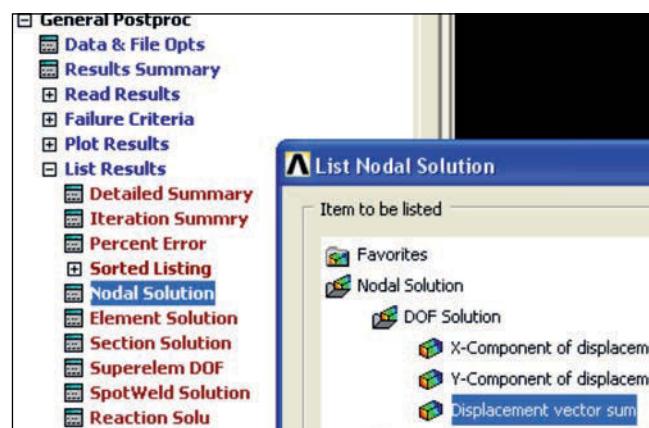


Figura 14.

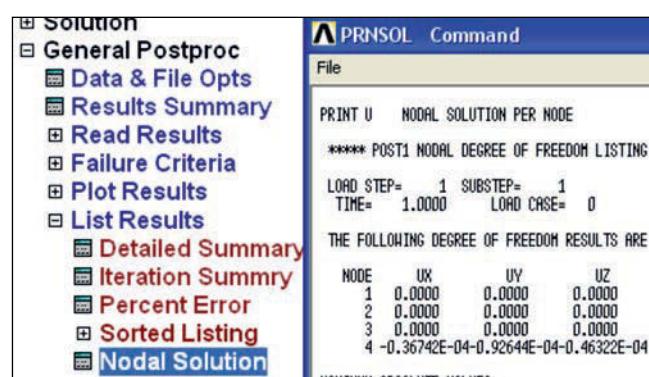


Figura 15.

5.11. Reacciones en los nodos.

Si en General Postroc se selecciona List Results y Reaction Solution, aparece un cuadro de diálogo que al seleccionar y validar All Items (figura 16) produce el listado con las reacciones en los nodos que tienen alguna restricción (figura 17).

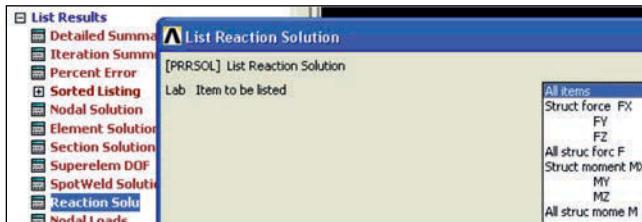


Figura 16.

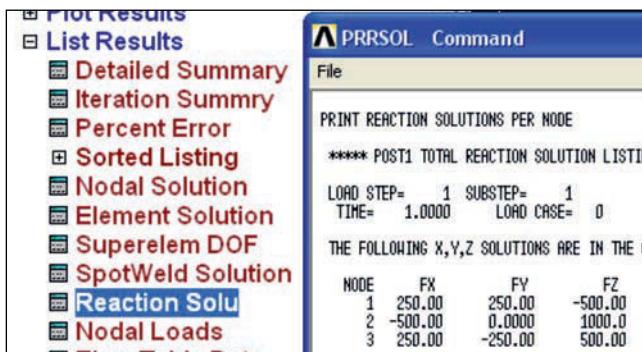


Figura 17.

5.12. Fuerzas y tensiones en cada elemento.

La obtención de las fuerzas y tensiones en cada elemento exige la definición de una tabla que contenga los ítems que deseamos obtener. A este efecto, en General Postproc se selecciona Element Table y se valida Add en Element Table Data con lo que aparece un cuadro de diálogo donde se hacen dos selecciones dobles: La primera exige seleccionar By sequence run y SMISC, siendo obligado añadir 1 en la venta inferior donde aparece en solitario SMISC y es optativo introducir Fuerza en User label for item (figura 18).



Figura 18.

Después de validar se hace la segunda elección: By sequence run y LS, además se debe añadir 1 en la venta inferior donde aparece en solitario LS, siendo optativo introducir Tensión en User label for item. Al validar se obtiene la tabla de la figura 19.

Currently Defined Data and Status:		
Label	Item	Comp
FUERZA	SMIS	1
TENSION	LS	1

Figura 19.

El listado de fuerzas y tensiones en cada elemento se obtiene desde General Postproc, seleccionando Element Table y List Element Table; al seleccionar y validar FUERZA y TENSION (figura 20) se obtiene el listado de fuerzas y tensiones en cada elemento.

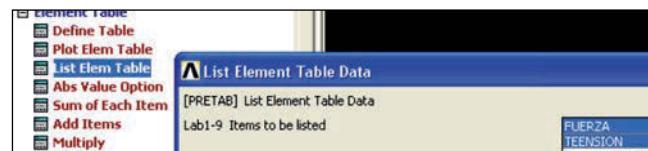


Figura 20.

Las dos columnas de fuerza y tensión de cada elemento son coincidentes en este caso al ser la sección 1 cm² (figura 21).

PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT		
STAT	CURRENT	CURRENT
ELEM	FUERZA	TENSION
1	-612.37	-612.37
2	1118.0	1118.0
3	612.37	612.37

Figura 21.

El signo menos representa compresión y el signo más indica tracción.

6. EJEMPLO BIDIMENSIONAL.

6.1. Descripción del problema.

Con el programa Ansys vamos a obtener las deformaciones de la llave de la figura 22 cuando se la somete a un esfuerzo.

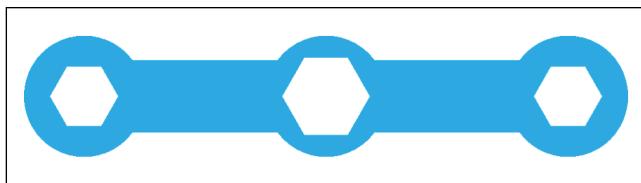


Figura 22.

El módulo de elasticidad de la llave es 20×10^6 Kp/cm², la razón de Poisson es 0.32 y el grosor es 0,3 cm. Cada lado de los hexágonos de los extremos mide 0.7 cm, siendo (1.25, 1.25) y (11.25, 1.25) las coordenadas en cm de sus centros. El hexágono de la izquierda está fijo. Cada lado del hexágono central mide 0.9 cm y las coordenadas de su centro son (6.25, 1.25).

El radio de las tres partes circulares es 1.25 cm y sus centros coinciden con los centros de los respectivos hexágonos que contienen. El enlace de las partes circulares se hace con dos rectángulos de anchura 3 y de altura 1.5. Los vértices inferiores izquierdos de cada uno de esos rectángulos son los puntos (2.25, 0.5) y (7.25, 0.5).

Sobre el lado de extremos (7.25, 2) y (10.25, 2) actúan una presión de 80 Kp/cm².

6.2 Introducción de datos y mallado.

Todas las operaciones de este apartado se hacen con el Preprocessor. La selección del tipo de elementos se hace con una de las opciones de Structural Solid, por ejemplo Quad 8node 82. Después de validar se debe entrar en Options y aparece un cuadro de diálogo de cuyo primer desplegable se elige Plane strs w/thk (figura 23), lo que posibilita la introducción del espesor 0.3 en la opción Real Constants (figura 24).

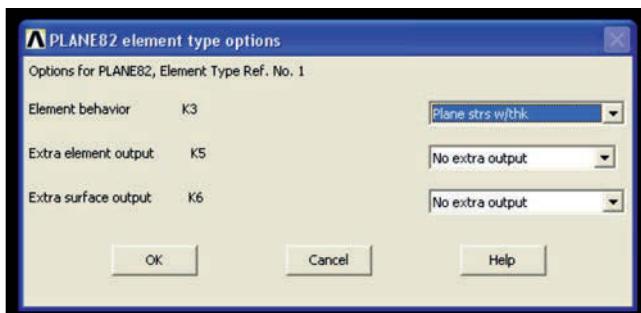


Figura 23.



Figura 24.

La introducción del módulo de elasticidad y de la razón de Poisson se hace en Material Models, según se ve en la figura 25.

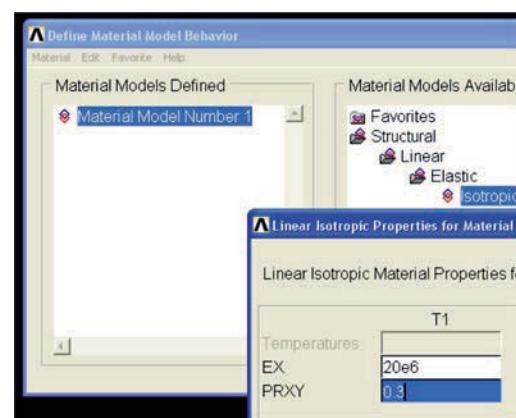


Figura 25.

El dibujo de la figura se hace desde Modeling, Create, Areas, que ofrece ofrece distintas opciones para crear rectángulos, círculos y hexágonos. Se completa el dibujo de la figura con las posibilidades que ofrece el programa en Modeling, Operate, Boolean, que permite pegar, sumar y restar áreas.

Los elementos se crean en el proceso de mallado, que exige fijar el tamaño de los elementos. En este ejemplo se ha elegido 0.1 cm (figura 26).

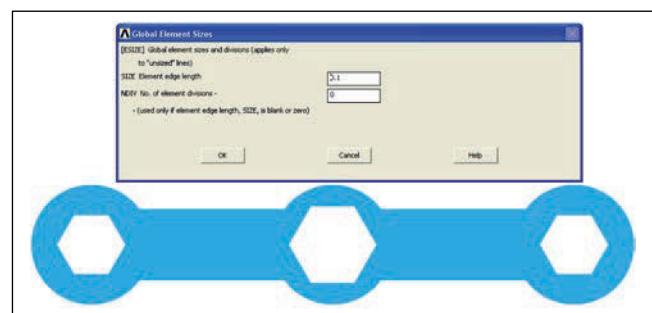


Figura 26.

Al mallar con 0.1 cm se obtienen los 1801 elementos de la figura 27 que tienen 5833 nodos.

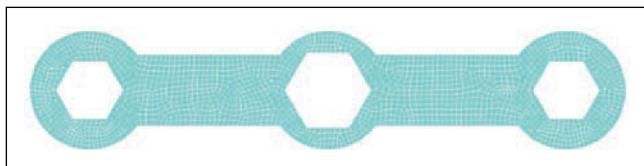


Figura 27.

Finalmente hay que introducir la restricción de que el primer hexágono está fijo y que el lado superior de la derecha está sometido a una presión de 80 Kp/cm².

6.3 Solución del problema.

Con los datos introducidos y el mallado generado el programa ha generado un sistema de 5833 ecuaciones, cuyas 5833 incógnitas son desplazamientos de nodos y reacciones en los nodos sometidos a restricciones. Se resuelve el sistema desde Solution seleccionando Solve Current LS.

6.4 Listado y visualización de deformaciones. Tensor de tensiones en cada nodo.

Desde Postprocessor se pueden listar las deformaciones de los 5833 nodos. En la tabla 4 se han copiado las coordenadas y deformaciones de los últimos dos nodos.

Nodo	5832	5833
Coordenadas	(3.627, 1.192)	(3.518, 1.181)
Deformaciones	(-0.34E-4, -0.62E-3)	(-0.39E-4, -0.56E-3)

Tabla 4

También se puede visualizar la deformación (figura 28) así como obtener una representación aproximada de las deformaciones (figura 29)

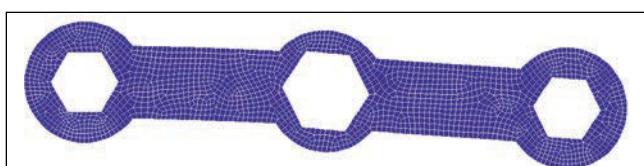


Figura 28.

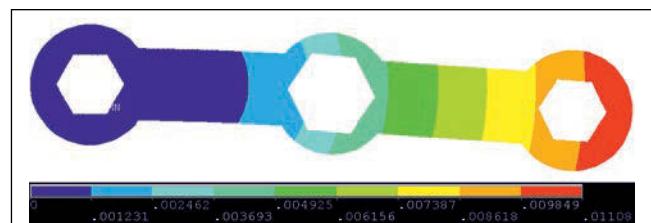


Figura 29.

Con las deformaciones de cada nodo el programa calcula el tensor de tensiones en cada nodo. Los tensores correspondientes a los nodos 1 y 5833 son, respectivamente

$$\begin{pmatrix} 15.53 & -6.77 & 0 \\ -6.77 & 4.80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -310.26 & -238.43 & 0 \\ -238.43 & 1.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. EJEMPLO TRIDIMENSIONAL.

7.1. Enunciado.

El soporte de la figura 29 está formado por tres bloques unidos. Las dimensiones del bloque rectangular vertical son 1cm de ancho, 2 cm de alto y 0,2 cm de profundidad. El bloque rectangular horizontal de la parte superior tiene una altura de 0,2 cm, siendo su base un cuadrado de lado 1 cm. Las dimensiones del bloque prismático lateral están inducidas por los otros dos bloques y su profundidad hacia el exterior es de 0.2 cm.

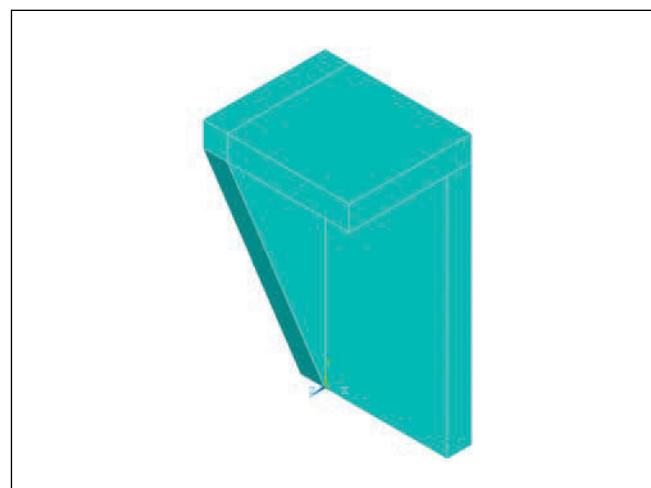


Figura 30.

El soporte está fijado a la pared por los cuatro vértices de la parte posterior del bloque rectangular vertical. Su módulo de elasticidad es 29×10^6 Kp/cm² y la razón de Poisson es 0,3. Sobre la superficie superior se coloca una carga uniforme que ejerce una presión de 500 Kp/cm².

7.2. Introducción de datos y mallado.

Las operaciones de este apartado se realizan desde Preprocessor. La selección del tipo de elementos se hace eligiendo una opción de Structural Solid, por ejemplo Tet 10 node 187, que fija que los elementos van a ser tetraedros con cuatro nodos en los vértices y seis nodos situados en los puntos medios de los lados de cada tetraedro (figura 31). Al dibujar la figura en tres dimensiones no es necesario introducir el espesor, pues va a ser dibujado.

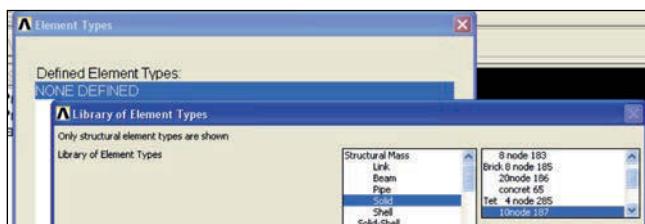


Figura 31.

La introducción del módulo de elasticidad (29e6) y de la razón de Poisson (0.3) se efectúa en Material Models.

El dibujo de la figura se hace con ayuda de Modeling, Create, Volumes, que ofrece dos posibilidades: Block, para el dibujo de los paralelepípedos rectos, y Prism, By Vertices, para dibujar la pared prismática lateral. Como es habitual, se completa el dibujo de la figura con las posibilidades que ofrece el programa en Modeling, Operate, Booleans, pues hay que unir los tres bloques dibujados para formar el soporte.

Al mallar se genera la descomposición del soporte en elementos. El tamaño fijado de los elementos es



Figura 32.

0.08 y al mallar se obtienen 10394 elementos tetraédricos de la figura 31, con 16907 nodos (figura 32).

Para terminar la introducción de datos hay que fijar los cuatro vértices de la cara posterior e introducir la presión de 500 Kp/cm² en la cara superior.

7.3 Solución del problema.

Con los datos introducidos y el mallado generado, el programa produce un sistema de 16907 ecuaciones, cuyas 16907 incógnitas son desplazamientos de nodos y reacciones en los nodos sometidos a restricciones, que en este caso corresponden a los vértices de la cara posterior sujetos a la pared. Se resuelve el sistema desde Solution seleccionando Solve Current LS.

7.4 Listado y visualización de deformaciones. Tensor de tensiones en cada nodo.

Desde Postprocessor se pueden listar las deformaciones de los 16907 nodos. En la tabla 5 se han copiado las coordenadas y deformaciones de los últimos dos nodos.

Nodo	16906	16907
Coordinadas	(-0.066, 1.394, 0.2797)	(-0.149, 0.906, 0.315)
Deformaciones	(-0.82E-4, -0.83E-3, -0.25E-3)	(-0.93E-4, -0.78E-3, -0.35E-3)

Tabla 5

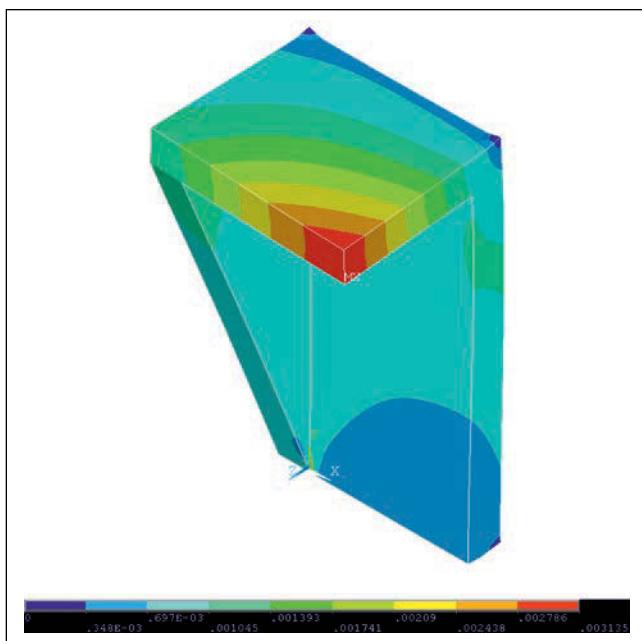


Figura 33.

En la figura 33 se da una representación aproximada de las deformaciones

A partir de las deformaciones el programa obtiene el tensor de tensiones en cada nodo. Los tensores correspondientes a los nodos 1 y 16907 son, respectivamente

$$\begin{pmatrix} 111.1 & 349.9 & -80.9 \\ 349.9 & 2687.3 & -38.4 \\ -80.9 & -38.4 & -66.5 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 11.4 & -5.4 & -24.6 \\ -5.4 & -4006.3 & -1167.8 \\ -24.6 & -1167.8 & 678.4 \end{pmatrix}$$

Con esta exposición elemental sólo se han presentado algunas de las muchas posibilidades que ofrece el análisis con Elementos Finitos, para los que

hay desarrollados excelentes programas informáticos, cuya evolución hace suponer que aún serán mejores en los próximos años.

BIBLIOGRAFÍA

1. I.Babuska, T.Strouboulis, *The Finite Element Method and its Reliability*. Oxford University Press, USA, 2001.
2. K.J. Bathe, K.J. *Finite Element Procedures*. Cambridge, MA, editor Klaus-Jürgen Bathe, 2006
3. Eric B. Becker, Graham F. Carey y J. Tinsley Oden, *Finite Elements*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1981.
4. Susanne Cc. Brenner, L. Ridgway Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, New York, USA, 2002.
5. Carlos A. Felippa, *A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts*. Computers and Structures 79 (14) (2001) 1313–1324.
6. P. Ladevèze, J. Pelle, *Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics*, Springer, New York, USA, 2005.
7. Saeed Moaveni, *Finite Element Analysis. Theory and Application with Ansys*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1999.
8. J.C.Simo, T.J.R.Hughes, *Computational Inelasticity*, Springer, New York, USA, 1998.
9. P. Solin, K. Segeth y I. Dolezel, *Higher-Order Finite Element Methods*, Chapman & Hall/CRC Press, London, 2003
10. R.Szilard, *Theories and Applications of Plate Analysis*. Wiley, New Jersey, USA, 2004.
11. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.Z. Zhu, (2005). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals* (sexta edición). Butterworth-Heinemann, Oxford, UK and Waltham, Massachusetts, USA, 2005.