

ELEMENTOS FINITOS EN FENÓMENOS DE TRANSMISIÓN

MANUEL LÓPEZ PELLICER *; SALVADOR LÓPEZ ALFONSO**

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Valverde 22, 28004 Madrid.

** Universidad Politécnica de Valencia y C. Herrera-CEU

1. INTRODUCCIÓN

Galileo dijo que *la Matemática es el lenguaje del Universo*, frase que marca el comienzo de la ciencia moderna. El paso del tiempo ha confirmado que los sistemas físicos, mecánicos, térmicos o electrodinámicos, se describen con elementos matemáticos, que a veces son tan complejos que sólo sabemos obtener su solución aproximada.

Vamos a dar una exposición elemental del Método de Elementos Finitos, cuyo nacimiento se sitúa entre 1943, cuando Courant obtuvo soluciones aproximadas

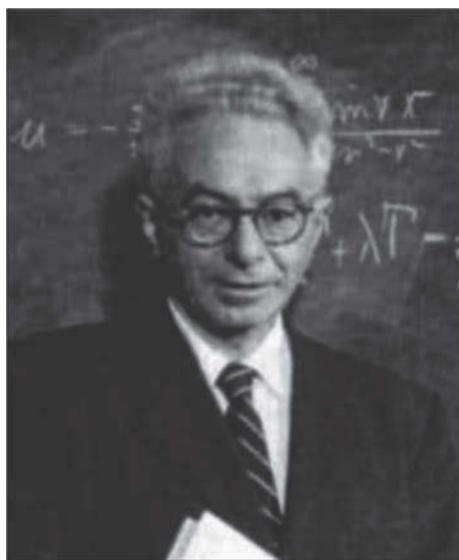


Figura 1. Richard Courant 1888-1972



Figura 2. Torre Eiffel

de un sistema vibratorio, y 1956, cuando M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, y L. J. Topp publicaron un artículo sobre la rigidez y deformación de estructuras articuladas, que fue el inicio del cálculo matricial de estructuras articuladas; la aplicación de condiciones de equilibrio en sus extremos, permite determinar *deformaciones*, de las que deducen las tensiones. Las barras de la estructura se llaman *elementos* y sus extremos *nodos*.

Las ideas del artículo de Turner, Clough, Martin y Topp se encuentran en obras anteriores de Navier,



Figura 3. Boeing 747

Lagrange y Cauchy, que no las aplicaron a problemas reales por la dificultad en resolver de forma rápida y segura sistemas lineales de muchísimas ecuaciones. Por ello se desarrollaron métodos iterativos, que comportaban muchas horas de trabajo tedioso.

Hoy día los ordenadores y el desarrollo de métodos potentes de Cálculo Numérico, nos permiten resolver grandes sistemas lineales en muy poco tiempo, lo que ha permitido la popularización del Método de Elementos Finitos, aplicable en la resolución de casi todos los problemas de Física e Ingeniería. Por ejemplo, con Elementos Finitos podemos determinar con rapidez las tensiones que soporta cada elemento de la Torre Eiffel (**Figura 2**).

El Boeing 747, presentado en 1968, se diseñó aplicando Elementos Finitos a estructuras con geometría compleja, lo que estimuló el desarrollo de nuevas aplicaciones de Elementos Finitos a problemas térmicos, electromagnéticos y de mecánica de fluidos (**Figura 3**).

A partir de la década de los 80 se elaboraron distintos programas de Elementos Finitos (ANSYS, CAELinux, COSMOSXpress, ...), que tienen tres partes fundamentales:

- *Preproceso:* Fase de preparación en la que se dibuja la figura, se asignan las propiedades de los materiales y se genera el mallado, que es la descomposición de la figura en elementos pequeños, cuyos vértices se llaman nodos.
- *Cálculo:* Proporciona la solución aproximada del problema en los vértices de la malla mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales cuyo número de incógnitas está deter-

minado por los vértices de la malla. La aproximación mejora si se refina el mallado mediante subdivisión de los elementos en otros elementos más pequeños, lo que produce aumento en el número de número de ecuaciones del sistema a resolver, debido al aumento de nodos producido por el incremento del número de elementos. En los problemas tridimensionales el aumento del número de elementos al refinar el mallado crece según una potencia de exponente tres, lo que implica tener que resolver sistemas lineales con millones de ecuaciones.

- *Postproceso:* Los programas están preparados para mostrar tanto los resultados aproximados obtenidos en los nodos como otros resultados deducidos de los obtenidos en los nodos. Además del formato numérico, ofrecen interesantes representaciones gráficas, que permiten visualizar las deformaciones de una estructura, la evolución del proceso de solidificación de una colada o la circulación del aire acondicionado en una red de tuberías, entre otros muchos ejemplos.

Se han publicado recientemente estudios sobre el calentamiento de la Tierra utilizando Elementos Finitos. También podemos encontrar los Elementos Finitos en artículos de investigación en Economía. Todas las aplicaciones de los Elementos Finitos tienen en común el descomponer cada problema complejo en muchos problemas sencillos mediante el mallado, necesitando la ayuda de ordenadores y superordenadores para resolver los grandes sistemas de ecuaciones lineales generados para la resolución aproximada del problema.

Esta forma de proceder de la teoría de Elementos Finitos recuerda la aplicación del Cálculo Diferencial en la resolución de problemas físicos, cuyo origen se sitúa en el siglo XVII, por lo que podemos suponer que, como sucedió con el Cálculo Diferencial, los distintos problemas estudiados con elementos Finitos motiven el desarrollo de mucho trabajo matemático para analizar la dependencia de la solución de los parámetros iniciales, acotar el error de la solución aproximada obtenida y mejorar el ajuste, sobre todo cuando la geometría del problema es compleja. Es indudable que se han logrado grandes avances en los

últimos treinta años en la teoría de Elementos Finitos, pero el examen de las numerosas buenas revistas especializadas en esta teoría permite intuir que nos encontramos ante un nuevo desafío intelectual para las próximas décadas.

En el resto de este artículo vamos a desarrollar la aplicación del método de los Elementos Finitos en la resolución aproximada de la ecuación del calor en un sencillo problema bidimensional. Su utilización en problemas mecánicos se expondrá en un segundo artículo, evitando así un excesivo número de páginas que dificultaría la rápida visión de este artículo de iniciación.

2. FENÓMENOS DE TRANSMISIÓN: CASO BIDIMENSIONAL.

Los fenómenos físicos bidimensionales de transmisión se describen con ecuaciones diferenciales del tipo

$$C_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} + C_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} + C_3 \theta + C_4 = 0,$$

donde se supone que la profundidad del objeto es constante, que se describe con la coordenada z , y que se tiene comportamiento idéntico en cada sección $z=k$. Encontramos ecuaciones de la forma

$$C_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} + C_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} + C_3 \theta + C_4 = 0 :$$

- En problemas de torsión que se describen por la ecuación

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} + 2G\theta = 0$$

donde G es el módulo de elasticidad de torsión, ϕ es la tensión y θ es el ángulo de giro.

- En el estudio de la teoría de fluidos no viscosos, que utiliza la ecuación

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} = 0$$

El campo de velocidades del fluido no viscoso es el gradiente de la función ϕ .

- En el análisis de la difusión de un fluido en un medio poroso, que se rige por la ecuación de Darcy

$$k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} + k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} = 0$$

estando el campo de velocidades del fluido dado por

$$(v_x, v_y) = \left(-k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}, -k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

- Y en el estudio de problemas de transmisión del calor, puesto que la distribución de temperaturas cuando se llega al estado estacionario es descrita por la ecuación diferencial

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x}, k_y \frac{\partial T}{\partial y} + q = 0$$

junto a las condiciones iniciales y a las condiciones de la frontera del sistema estudiado; las condiciones iniciales hacen referencia a generación de calor o temperatura inicial en algún puntos, en tanto que las condiciones de frontera se dan por condiciones de aislamiento, convección o radiación.

Esta ecuación diferencial con las condiciones iniciales y de frontera se llama *ecuación del calor*. T es la temperatura en un punto (x, y) , k_x es la conductividad en la dirección OX , k_y es la conductividad en la dirección OY , y q es la cantidad de calor generada por unidad de superficie y de tiempo.

El principio de conservación de la energía nos dice que en el estado estacionario el calor generado es igual al calor perdido, bien por convección, por radiación o por transmisión a otro medio. De este principio y de la ley de Fourier de transmisión del calor por conducción se deduce fácilmente la ecuación del calor.

3. RESOLUCIÓN APROXIMADA DE LA ECUACIÓN DEL CALOR EN UN RECTÁNGULO.

Supondremos que A es un rectángulo de vértices $P_i(0,0)$, $P_j(l,0)$, $P_m(l,w)$ y $P_n(0,w)$. Supondremos que A

es suficientemente pequeño para poder admitir la *hipótesis de variación lineal*, que nos dice que la variación de temperatura en A es (muy aproximadamente) lineal cuando nos movemos en línea recta paralela a uno de los ejes de coordenadas.

3.1 Expresión de la temperatura aproximada con las funciones de Galerkin.

Es muy sencillo expresar la temperatura aproximada T_{ap} en un punto $(x, y) \in A$ en función de las temperaturas T_i, T_j, T_m y T_n de los vértices si se supone que la variación de T_{ap} es lineal al movernos paralelamente a cualquiera de los dos ejes de ordenadas, pues con sencillas interpolaciones se deduce que:

- La temperatura aproximada en el punto $(x, 0) \in A$ es

$$T_{ap}(x, 0) = T_i + \frac{x}{l} (T_j - T_i)$$

- La temperatura aproximada en el punto $(x, w) \in A$ es

$$T_{ap}(x, w) = T_n + \frac{x}{l} (T_m - T_n)$$

- Por tanto, de los dos resultados anteriores se deduce también por interpolación que la temperatura aproximada en el punto $(x, y) \in A$ es

$$T_{ap}(x, y) = T_i + \frac{x}{l} (T_j - T_i) + \frac{y}{w} \left(\left[T_n + \frac{x}{l} (T_m - T_n) \right] - \left[T_i + \frac{x}{l} (T_j - T_i) \right] \right)$$

Al sacar factor común a las incógnitas T_i, T_j, T_m y T_n , se obtiene la expresión

$$T_{ap} = T_i S_i + T_j S_j + T_m S_m + T_n S_n$$

donde S_i, S_j, S_m y S_n son las funciones

$$\begin{aligned} S_i(x, y) &= (1 - x/l)(1 - y/w) \\ S_j(x, y) &= (x/l)(1 - y/w) \\ S_m(x, y) &= (x/l)(y/w) \\ S_n(x, y) &= (1 - x/l)(y/w) \end{aligned}$$

que se llaman funciones de Galerkin y están caracterizadas por:

- Ser 1 su valor en el vértice correspondiente al subíndice.
- Ser 0 su valor en los demás vértices.
- Variar linealmente al movernos paralelamente a uno de los ejes.

3.2 Ecuaciones para un elemento rectangular.

El método de Galerkin para obtener los valores T_i, T_j, T_m y T_n de la temperatura aproximada T_{ap} consiste en:

- Exigir que se verifiquen las condiciones en la frontera.
- Y que el residuo obtenido al sustituir T_{ap} en la ecuación diferencial, que es

$$\begin{aligned} k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q - 0 &= \\ k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q & \end{aligned}$$

verifique las siguientes cuatro condiciones de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy &= 0 \\ \iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_j dx dy &= 0 \\ \iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_m dx dy &= 0 \\ \iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_n dx dy &= 0 \end{aligned}$$

El antecedente del método de Galerkin es la conocida propiedad de que en un espacio euclídeo la condición de que sea mínimo el módulo de la diferencia $\vec{y} = \vec{a} - (\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \lambda_3 \vec{x}_3 + \lambda_4 \vec{x}_4)$ entre un vector \vec{a} y su aproximación por una combinación lineal de los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ y \vec{x}_4 es equivalente a que sean nulos los cuatro productos escalares

$$\vec{y} \cdot \vec{x}_i = 0, \text{ para } i=1,2,3,4.$$

3.3. Condiciones de frontera.

Supondremos que la condición de frontera es convección en los cuatro lados del rectángulo A . En el estado estacionario sucede que el calor que llega a cada uno de los lados es igual al calor que sale de ese lado por convección. En el caso del lado limitado por los nodos $P_i = (0,0)$ y $P_n = (0,w)$ la condición de estado estacionario se describe mediante la igualdad

$$\left(k_x \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \right)_{x=0} = h(T_{ap} - T_f)$$

que nos dice que el calor que llega por conducción al lado $P_i P_n$ es el mismo calor que sale de ese lado por convección, siendo h es el coeficiente de convección y T_f es la temperatura del aire. En los demás lados tendríamos:

$$\begin{aligned} -\left(k_x \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \right)_{x=l} &= h(T_{ap} - T_f) \\ \left(k_y \frac{\partial T_{ap}}{\partial y} \right)_{y=0} &= h(T_{ap} - T_f) \\ -\left(k_y \frac{\partial T_{ap}}{\partial y} \right)_{y=w} &= h(T_{ap} - T_f). \end{aligned}$$

3.4. Introducción de las condiciones de frontera y cálculo de integrales.

La introducción de la convección en

$$\iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0$$

supone sustituir

$$k_x \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \text{ y } k_y \frac{\partial T_{ap}}{\partial y} \text{ por } \pm h(T_{ap} - T_f),$$

lo que exige la transformación del integrando para que aparezcan las derivadas primeras, que se consigue con las identidades siguientes deducidas de la regla de derivación de un producto:

$$\frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} S_i = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i \right) - \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \frac{\partial S_i}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} S_i = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} S_i \right) - \frac{\partial T_{ap}}{\partial y} \frac{\partial S_i}{\partial y}.$$

Con estas igualdades se transforma la parte de la integral

$$\iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0$$

correspondiente a dos primeros sumandos del integrando en:

$$\begin{aligned} \iint_A k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} S_i dx dy &= \iint_A k_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i \right) dx dy - \iint_A k_x \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \frac{\partial S_i}{\partial x} dx dy \\ \iint_A k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} S_i dx dy &= \iint_A k_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} S_i \right) dx dy - \iint_A k_y \frac{\partial T_{ap}}{\partial y} \frac{\partial S_i}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

Al resolver

$$\iint_A k_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i \right) dx dy$$

y aplicar la condición de equilibrio

$$\left(k_x \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \right)_{x=0} = h(T_{ap} - T_f)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \iint_A k_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i \right) dx dy &= \int_{y=0}^{y=w} k_x \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i \right)_{x=l} dy - \int_{y=0}^{y=w} k_x \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i \right)_{x=0} dy = \\ &= \int_{y=0}^{y=w} -S_i k_x \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \Big|_{x=0} dy = \\ &= -\int_{y=0}^{y=w} \left(S_i h(T_{ap} - T_f) \right)_{x=0} dy = \\ &= -h \int_{y=0}^{y=w} \left(S_i (T_{ap} - T_f) \right)_{x=0} dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -h \int_{y=0}^{y=w} \left(1 - \frac{y}{w} \right) \left(T_i + \frac{y}{w} (T_n - T_i) - T_f \right) dy = \\
 &= -\frac{hw}{6} (2T_i + T_n) + \frac{hwT_f}{2}
 \end{aligned}$$

La resolución de

$$\iint_A k_x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} S_i \right) dxdy$$

es análoga a la anterior, pues:

$$\begin{aligned}
 &\iint_A k_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} S_i \right) dxdy = \\
 &= \int_{x=0}^{x=l} k_y \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} S_i \right)_{y=w} dx - \int_{x=0}^{x=l} k_y \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} S_i \right)_{y=0} dx = \\
 &= \int_{x=0}^{x=l} \left(-S_i k_y \frac{\partial T_{ap}}{\partial y} \right)_{y=0} dx = \\
 &= - \int_{x=0}^{x=l} \left(S_i h (T_{ap} - T_f) \right)_{y=0} dx = \\
 &= -h \int_{x=0}^{x=l} \left(S_i (T_{ap} - T_f) \right)_{y=0} dx = \\
 &= -h \int_{x=0}^{x=l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(T_i + \frac{x}{l} (T_j - T_i) - T_f \right) dx = \\
 &= -\frac{hl}{6} (2T_i + T_j) + \frac{hlT_f}{2}
 \end{aligned}$$

El cálculo de la segunda integral de la expresión

$$\begin{aligned}
 &\iint_A k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} S_i dxdy = \\
 &\iint_A k_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i \right) dxdy - \iint_A k_x \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \frac{\partial S_i}{\partial x} dxdy
 \end{aligned}$$

se obtiene con sencillez al descomponer

$$-\iint_A k_x \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \frac{\partial S_i}{\partial x} dxdy$$

en las cuatro integrales obtenidas al sustituir

$$T_{ap} = T_i S_i + T_j S_j + T_m S_m + T_n S_n.$$

Cálculos elementales nos dan los resultados de las cuatro integrales:

$$\begin{aligned}
 &-\iint_A k_x T_i \frac{\partial S_i}{\partial x} \frac{\partial S_i}{\partial x} dxdy = \\
 &= -\frac{1}{l^2} \iint_A k_x T_i \left(1 - \frac{y}{w} \right)^2 dxdy = -\frac{k_x w}{3l} T_i \\
 &-\iint_A k_x T_j \frac{\partial S_j}{\partial x} \frac{\partial S_i}{\partial x} dxdy = \\
 &= \frac{1}{l^2} \iint_A k_x T_j \left(1 - \frac{y}{w} \right)^2 dxdy = \frac{k_x w}{3l} T_j \\
 &-\iint_A k_x T_m \frac{\partial S_m}{\partial x} \frac{\partial S_i}{\partial x} dxdy = \\
 &= \frac{1}{l^2} \iint_A k_x T_m \left(\frac{y}{w} \right) \left(1 - \frac{y}{w} \right) dxdy = \frac{k_x w}{6l} T_m \\
 &-\iint_A k_x T_n \frac{\partial S_n}{\partial x} \frac{\partial S_i}{\partial x} dxdy = \\
 &= -\frac{1}{l^2} \iint_A k_x T_n \left(1 - \frac{y}{w} \right)^2 dxdy = -\frac{k_x w}{6l} T_n.
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$-\iint_A k_x \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \frac{\partial S_i}{\partial x} dxdy = -\frac{k_x w}{6l} (2T_i - 2T_j - T_m + T_n)$$

La integración del sustraendo de

$$\begin{aligned}
 &\iint_A k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} S_i dxdy = \\
 &\iint_A k_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} S_i \right) dxdy - \iint_A k_y \frac{\partial T_{ap}}{\partial y} \frac{\partial S_i}{\partial y} dxdy
 \end{aligned}$$

también se obtiene con sencillez al descomponer

$$-\iint_A k_y \frac{\partial T_{ap}}{\partial y} \frac{\partial S_i}{\partial y} dxdy$$

en cuatro integrales, obtenidas al sustituir

$$T_{ap} = T_i S_i + T_j S_j + T_m S_m + T_n S_n.$$

Como en el caso anterior, cálculos elementales nos dan estos cuatro resultados:

$$\begin{aligned}
 &-\iint_A k_y T_i \frac{\partial S_i}{\partial y} \frac{\partial S_i}{\partial y} dxdy = \\
 &= -\frac{1}{w^2} \iint_A k_y T_i \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 dxdy = -\frac{k_y l}{3w} T_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\iint_A k_y T_j \frac{\partial S_j}{\partial y} \frac{\partial S_i}{\partial y} dx dy = \\
& = -\frac{1}{w^2} \iint_A k_y T_j \left(\frac{x}{l} \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx dy = -\frac{k_y l}{6w} T_j \\
& -\iint_A k_y T_m \frac{\partial S_m}{\partial y} \frac{\partial S_i}{\partial y} dx dy = \\
& = \frac{1}{w^2} \iint_A k_y T_m \left(\frac{x}{l} \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx dy = \frac{k_y l}{6w} T_m \\
& -\iint_A k_y T_n \frac{\partial S_n}{\partial y} \frac{\partial S_i}{\partial y} dx dy = \\
& = \frac{1}{w^2} \iint_A k_y T_n \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 dx dy = \frac{k_y l}{3w} T_n.
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$-\iint_A k_y \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \frac{\partial S_i}{\partial x} dx dy = -\frac{k_y l}{6w} (2T_i + T_j - T_m - 2T_n)$$

Finalmente, sólo nos queda evaluar la integral correspondiente al tercer sumando del integrando de la ecuación

$$\iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0,$$

que nos da:

$$\iint_A q S_i dx dy = \iint_A q \frac{x}{l w} dx dy = q \int_0^l \frac{x}{l} dx \int_0^w \frac{y}{w} dy = \frac{qlw}{4}.$$

Reuniendo todos los resultados obtenidos resulta que la ecuación

$$\iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0$$

se transforma en

$$\begin{aligned}
& -\frac{hw}{6} (2T_i + T_n) + \frac{hwT_f}{2} - \frac{hl}{6} (2T_i + T_j) + \\
& + \frac{hlT_f}{2} - \frac{k_x w}{6l} (2T_i - 2T_j - T_m + T_n) + \\
& - \frac{k_y l}{6w} (+2T_i + T_j - T_m - 2T_n) + \frac{qlw}{4} = 0
\end{aligned}$$

3.5. Ecuación matricial de las temperaturas en los nodos de un rectángulo.

De forma análoga a lo hecho en el apartado 3.4 se calculan las integrales correspondientes a los otros tres nodos del rectángulo A sustituyendo S_i por S_j , S_m y S_n . Las cuatro ecuaciones que nos darán las temperaturas aproximadas en los nodos del rectángulo A son pues:

$$\begin{aligned}
& \iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0 \\
& \iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_j dx dy = 0 \\
& \iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_m dx dy = 0 \\
& \iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_n dx dy = 0
\end{aligned}$$

y el resultado obtenido al calcular las integrales se resume en la ecuación matricial:

$$\begin{aligned}
& - \left(B_x + B_y + C_1 + D_1 + E_1 + F_1 \right) \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \\ T_n \end{pmatrix} + \\
& + \frac{qlw}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{hT_f}{2} (C_2 + D_2 + E_2 + F_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

que permite obtener las temperaturas aproximadas en los nodos siendo:

$$\begin{aligned}
B_x &= \frac{k_x w}{6l} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\
B_y &= \frac{k_y l}{6w} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{hl}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \frac{l}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \frac{hw}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \frac{w}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \frac{hl}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \frac{l}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \frac{hw}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \frac{w}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices C_1 y C_2 serían matrices nulas si en el lado que une los nodos P_i y P_j no hubiese convección, sucediendo lo análogo cuando alguno de los otros lados estuviese aislado y no tuviese convección, por lo que:

- Las matrices D_1 y D_2 serían matrices nulas si en el lado que une los nodos P_j y P_m no hubiese convección.
- Las matrices E_1 y E_2 serían matrices nulas si en el lado que une los nodos P_m y P_n no hubiese convección.
- Y las matrices F_1 y F_2 serían matrices nulas si en el lado que une los nodos P_n y P_i no hay convección.

4. APLICACIÓN EN UN EJEMPLO SENCILLO.

Supondremos que tenemos un cubo de altura 1 metro en que los vértices de su base A son los nodos $P_i = (0,0)$, $P_j = (0.6,0)$, $P_m = (0,0.6)$ y $P_n = (0.6,0.6)$. El cubo es un foco de calor isótropo que genera 1000 watios por metro cúbico ($q = 1000W/(m^3 \times \text{min})$), siendo su conductividad $k_x = k_y = 1.2W/(m \times {}^\circ\text{C} \times \text{min})$. Sus cuatro caras laterales están en contacto con el aire,

cuyo coeficiente de convección toma el valor $h = 20W/(m^2 \times {}^\circ\text{C} \times \text{min})$ y su temperatura es de 30°C . Las otras dos caras están aisladas.

Para obtener la temperatura aproximada de los cuatro nodos de A al alcanzar el estado estacionario, utilizando un único elemento que coincide con el cuadrado A , deberemos resolver el sistema

$$-\left(B_x + B_y + C_1 + D_1 + E_1 + F_1 \right) \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \\ T_n \end{pmatrix} + \frac{qlw}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{hT_f}{2} (C_2 + D_2 + E_2 + F_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde:

$$B_x + B_y = \frac{1.2}{6} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C_1 + D_1 + E_1 + F_1 = \frac{20 \times 0.6}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{qlw}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1000 \times 0.6 \times 0.6}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{hT_f}{2} (C_2 + D_2 + E_2 + F_2) = \frac{20 \times 30}{2} \times 0.6 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, al sustituir estas matrices se obtiene la ecuación matricial

$$-\begin{pmatrix} 8.8 & 1.8 & -0.4 & 1.8 \\ 1.8 & 8.8 & 1.8 & -0.4 \\ -0.4 & 1.8 & 8.8 & 1.8 \\ 1.8 & -0.4 & 1.8 & 8.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \\ T_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 450 \\ 450 \\ 450 \\ 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución

$$T_i = T_j = T_m = T_n = 37.5$$

da la temperatura aproximada en los nodos.

Este resultado se deduce de la simetría del problema, que implica que $T_i = T_j = T_m = T_n$, y de que en estado de equilibrio el calor generado es igual al calor perdido por convección, que nos da la ecuación

$$1000 \times 0.6 \times 0.6 \times 1 = 4(20 \times 0.6 \times 1 \times (T_i - 30))$$

cuya solución es $T_i = 37.5$.

5. RESOLUCIÓN DEL EJEMPLO ANTERIOR CON EL PROGRAMA ANSYS.

5.1. Preferencias.

Si se le indica al programa que se va a resolver un problema térmico se reducen las opciones que nos presentará el programa en cada apartado, minimizando además la cantidad de memoria utilizada por el programa. Para ello se debe seleccionar Thermal en el apartado de preferencias (**Figura 4**).

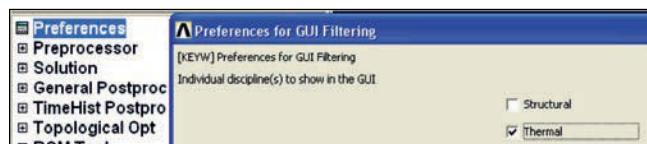


Figura 4.

5.2. Introducción de datos del problema.

Se hace en varios pasos desde el apartado Preprocessor del programa Ansys. En este ejemplo seguiríamos la secuencia siguiente:

5.2.1. Definir el problema que vamos a estudiar.

En este ejemplo seleccionaríamos Thermal Solid, utilizando elementos rectangulares de cuatro nodos (**Figura 5**).

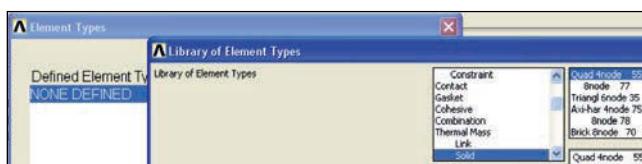


Figura 5.

5.2.2. Introducción del valor de la conductividad.

Se elige conductividad térmica isótropa en el apartado de Modelos de material (**Figura 6**).

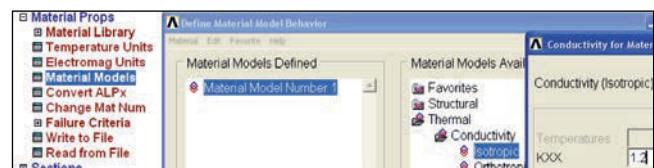


Figura 6.

5.2.3. Parte geométrica: Dibujo de la figura.

Se hará en este caso indicando las dos abscisas y las dos ordenadas que definen rectas que contienen los lados del rectángulo (**Figura 7**).

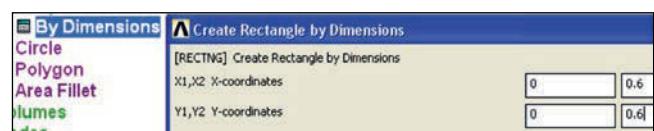


Figura 7.

5.2.4. Definición del tamaño de los elementos

Dentro del apartado destinado a generar el malla se indica el tamaño de los lados de la malla. En este caso basta con indicar que los lados miden 0.6 m (**Figura 8**).

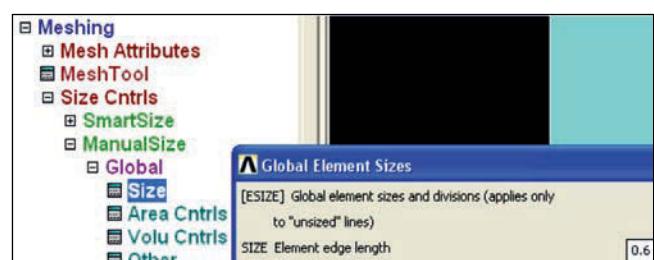


Figura 8.

5.2.5. Generación del malla.

Hay que indicar que partes de la figura se deben mallar. En este caso se malla el único cuadrado que compone la figura, para lo que seleccionaremos Pick All (**Figura 9**).



Figura 9.

5.2.6. Introducción de las condiciones en los límites (convección) e iniciales (generación de calor).

El programa tiene un apartado para introducir las condiciones en los límites, que en este caso es convección térmica en los lados (**Figura 10**).



Figura 10.

También tiene otro apartado para definir el calor generado por el rectángulo A (**Figura 11**).

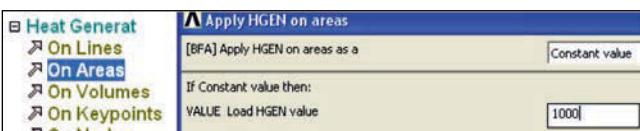


Figura 11.

5.3. Resolución de la ecuación.

El programa ya tiene los datos que le permiten obtener la ecuación matricial. En el apartado

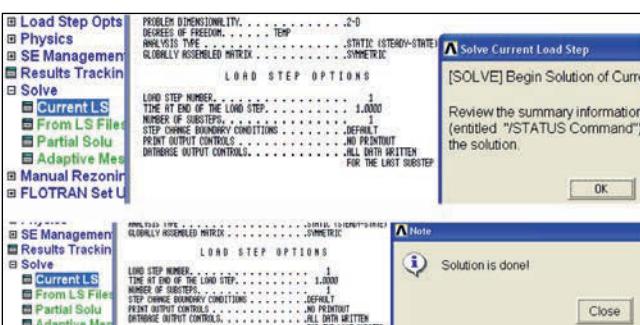


Figura 12.

“Solución” resuelve la ecuación matricial, si la matriz que multiplica al vector de incógnitas es regular. En caso contrario indica que no ha sido posible obtener la solución, y da indicaciones relacionadas con la falta de regularidad de dicha matriz, lo que ayuda a corregir el error (**Figura 12**).

5.4. Lectura y dibujo de resultados.

La lectura numérica y el dibujo de resultados exige ir a la parte post-proceso del programa para extraer los resultados que ha generado el programa, así como para obtener diferentes representaciones gráficas.

El listado de las temperaturas en los nodos se obtiene en el subapartado List Results (**Figura 13**).



Figura 13.

Se puede comprobar que la solución dada por el programa es la obtenida en el apartado 4.

6. REFINAMIENTO DEL MALLADO.

La hipótesis de linealidad sólo es razonable si el rectángulo A es pequeño. Por tanto, para mejorar la resolución aproximada de la ecuación del calor en un recinto plano Ω vamos a dividirlo en pequeños rectángulos.

Esta división recibe el nombre de *refinamiento del mallado* de Ω y cada rectángulo determinado por el nuevo mallado es un *elemento*. En esta sencilla exposición los elementos serán rectángulos. En general, los elementos pueden tener distintas formas geométricas, siendo rectángulos y triángulos las formas más frecuentes.

En el método de Galerkin la expresión de la temperatura aproximada en cada nuevo elemento rectangular es la obtenida anteriormente

$$T_{ap} = T_i S_i + T_j S_j + T_m S_m + T_n S_n$$

donde T_i , T_j , T_m y T_n son las temperaturas aproximadas en los vértices de ese nuevo rectángulo. Por tanto, la expresión de la temperatura aproximada en un punto cualquiera del recinto Ω se obtiene reuniendo las expresiones en cada elemento, que nos da la fórmula:

$$T_{ap} = \sum_{i \in I} T_i S_i$$

donde I es el conjunto de nodos, T_i es la temperatura en el nodo i y S_i es la función de Galerkin correspondiente al nodo P_i en Ω . La función S_i es nula en todos los elementos que no contienen al nodo P_i y la restricción de S_i a un elemento que contenga al nodo P_i es la función de Galerkin correspondiente al nodo P_i en ese elemento.

Para obtener los valores T_i , $i \in I$, el método de Galerkin exige:

- Que $T_{ap} = \sum_{i \in I} T_i S_i$ verifique las condiciones en la frontera.
- Que el residuo

$$\begin{aligned} k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q - 0 = \\ k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q, \end{aligned}$$

obtenido al sustituir T_{ap} en la ecuación diferencial, verifique las condiciones de ortogonalidad:

$$\iint_{\Omega} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0,$$

para cada $i \in I$.

6.1. Descomposición de las integrales y ensamblado.

Para cada índice i la integral

$$\iint_{\Omega} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy$$

es la suma de las integrales correspondientes a los elementos que tienen el vértice P_i . Si, por ejemplo, A_I , A_H y A_{III} son los elementos que tienen el vértice P_i se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = \\ \sum_{m=I}^{m=III} \iint_{A_m} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy \end{aligned}$$

y para obtener la ecuación

$$\iint_{\Omega} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0$$

se procede así en el nodo P_i , y análogamente en cualquier otro nodo:

- Se calculan las tres integrales

$$\iint_{A_m} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy, \quad m = I, II, III$$

- Se suman las tres integrales, lo que se llama *ensamblado*, y se iguala la suma obtenida a 0, lo que suministra la ecuación correspondiente al nodo P_i :

$$\iint_{\Omega} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy =$$

$$\sum_{m=I}^{m=III} \iint_{A_m} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0$$

Exactamente igual a como se hizo en el apartado 3, la introducción de la convección en cada una de las integrales

$$\iint_{A_m} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0$$

exige la transformación del integrando para que aparezcan las derivadas primeras, lo que se consigue con las identidades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} S_i &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i \right) - \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \frac{\partial S_i}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} S_i &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} S_i \right) - \frac{\partial T_{ap}}{\partial y} \frac{\partial S_i}{\partial y}. \end{aligned}$$

En el subapartado 3.4 se obtuvo para el rectángulo A indicado en dicho subapartado que

$$\iint_A k_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i \right) dx dy = \int_{y=0}^{y=w} \left(-S_i k_x \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \right)_{x=0} dy,$$

donde la integral corresponde al lado que une los nodos P_i y P_n . Cuando en ese lado existe convección se utiliza que en el estado estacionario

$$\left(k_x \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \right)_{x=0} = h (T_{ap} - T_f)$$

y se calcula la integral, según se hizo en **3.4**.

6.2. Lados pertenecientes a dos elementos.

Si el lado que une los nodos P_i y P_n tuviese otro elemento contiguo a la izquierda, no es necesario evaluar la

$$\int_{y=0}^{y=w} \left(-S_i k_x \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \right)_{x=0} dy,$$

puesto que al calcular la correspondiente integral en el elemento contiguo se obtiene

$$\int_{y=0}^{y=w} \left(S_i k_x \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \right)_{x=0} dy,$$

resultando al ensamblar que:

$$\int_{y=0}^{y=w} \left(-S_i k_x \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \right)_{x=0} dy + \int_{y=0}^{y=w} \left(S_i k_x \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \right)_{x=0} dy = 0$$

7. EJEMPLO SENCILLO DE REFINAMIENTO DEL MALLADO.

Vamos a repetir el cálculo manual del apartado **4** dividiendo el rectángulo A en cuatro rectángulos igua-

les, con lo que obtendremos los cuatro elementos A_I , A_{II} , A_{III} y A_{IV} .

Eligiendo el origen de coordenadas en el centro del rectángulo A de manera que los ejes de coordenadas sean paralelos a los lados perpendiculares de A , se tiene que los nodos de los cuatro elementos obtenidos son los puntos:

$$\begin{aligned} N_0 &= (0,0); & N_1 &= (0.3,0); & N_2 &= (0.3,0.3); \\ N_3 &= (0,0.3); & N_4 &= (-0.3,0.3); & N_5 &= (-0.3,0); \\ N_6 &= (-0.3,-0.3); & N_7 &= (0,-0.3); & N_8 &= (0.3,-0.3) \end{aligned}$$

Los nodos de los cuatro elementos y los lados con convección vienen indicados en la **tabla 1**.

Se han numerado los nodos en el orden en que se han deducido las fórmulas, para facilitar el seguimiento de los cuatro subapartados siguientes.

La expresión aproximada de la temperatura en estado estacionario tiene la forma

$$\begin{aligned} T_{ap} = & T_0 S_0 + T_1 S_1 + T_2 S_2 + T_3 S_3 + T_4 S_4 + \\ & T_5 S_5 + T_6 S_6 + T_7 S_7 + T_8 S_8 \end{aligned}$$

Vamos a calcular las nueve temperaturas de manera que

$$\iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 8.$$

donde S_i es la función que en cada uno de los rectángulos que contienen al vértice i coincide con la función de Galerkin de ese vértice en cada rectángulo, según la definición dada en el subapartado **3.1**.

Cada una de las nueve integrales anteriores es la suma de las cuatro integrales siguientes:

Elementos	Nodos	Lados con convección
A_I	N_0, N_1, N_2, N_3	$N_1 N_2$ y $N_2 N_3$
A_{II}	N_5, N_0, N_3, N_4	$N_3 N_4$ y $N_4 N_5$
A_{III}	N_6, N_7, N_0, N_5	$N_5 N_6$ y $N_6 N_7$
A_{IV}	N_7, N_8, N_1, N_0	$N_7 N_8$ y $N_8 N_1$

Tabla 1

$$\iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = \\ \sum_{j=I}^{j=IV} \iint_{A_j} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy$$

Obsérvese que para cada elemento A_j sólo hay que calcular las cuatro integrales

$$\iint_{A_j} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy$$

correspondientes a los cuatro índices i para las que el nodo $P_i \in A_j$, ya que si $P_i \notin A_j$ se tiene que

$$\iint_{A_j} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0.$$

De esta observación, de los resultados obtenidos en el subapartado **3.4** y de la observación sobre lados que pertenecen a dos elementos contiguos del subaparato **6.2** se deduce que:

7.1. Contribución del elemento A_I .

La contribución del elemento A_I está formada por las integrales

$$\iint_{A_I} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy, \\ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Sólo hay que calcular las correspondientes a los valores de i que son subíndices de los nodos de A_I , que en este caso son $i=0, 1, 2$ y 3 . Los valores de estas cuatro integrales son las componentes del vector

$$-(A + B + C_1 + D_1 + E_1 + F_1) \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{qlw}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{hT_f}{2} (C_2 + D_2 + E_2 + F_2)$$

$$A = \frac{k_x w}{6l} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1.2}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{k_y l}{6w} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1.2}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Las matrices C_1 y C_2 son matrices nulas, ya que no hay convección en el lado que une los nodos P_0 y P_1 . También son nulas las matrices F_1 y F_2 , pues tampoco hay convección en el lado $P_3 P_0$.

Al haber convección en el lado $P_1 P_2$ se tiene que las matrices D_1 y D_2 son:

$$D_1 = \frac{hw}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{20 \times 0.3}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \frac{w}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{0.3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por la convección en el lado $P_2 P_3$ se deduce que:

$$E_1 = \frac{hl}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{20 \times 0.3}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \frac{l}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{0.3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Al sustituir las matrices obtenidas se obtiene la siguiente contribución:

$$- \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 2.8 & 0.8 & -0.4 \\ -0.4 & 0.8 & 4.8 & 0.8 \\ -0.2 & -0.4 & 0.8 & 2.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22.5 \\ 112.5 \\ 202.5 \\ 112.5 \end{pmatrix} =$$

donde:

$$= \begin{cases} -0.8T_0 + 0.2T_1 + 0.4T_2 + 0.2T_3 + 22.5 \\ +0.2T_0 - 2.8T_1 - 0.8T_2 + 0.4T_3 + 112.5 \\ +0.4T_0 - 0.8T_1 - 4.8T_2 - 0.8T_3 + 202.5 \\ +0.2T_0 + 0.4T_1 - 0.8T_2 - 2.8T_3 + 112.5 \end{cases}$$

cuyo significado es que:

$$\iint_{A_I} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_0 dx dy = \\ = -0.8T_0 + 0.2T_1 + 0.4T_2 + 0.2T_3 + 22.5$$

$$\iint_{A_I} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_1 dx dy = \\ = 0.2T_0 - 2.8T_1 - 0.8T_2 + 0.4T_3 + 112.5$$

$$\iint_{A_I} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_2 dx dy = \\ = 0.4T_0 - 0.8T_1 - 4.8T_2 - 0.8T_3 + 202.5$$

$$\iint_{A_I} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_3 dx dy = \\ = 0.2T_0 + 0.4T_1 - 0.8T_2 - 2.8T_3 + 112.5$$

7.2. Contribución del elemento A_{II} .

La contribución del elemento A_{II} está formada por las integrales

$$\iint_{A_{II}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy, \quad i = 5, 0, 3 \text{ y } 4,$$

pues $i = 5, 0, 3$ y 4 son los subíndices de los nodos del elemento A_{II} . Con un cálculo análogo al precedente, considerando que los lados con convección son P_3P_4 y P_4P_5 , se obtiene que los resultados de estas cuatro integrales son:

$$\iint_{A_{II}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_5 dx dy = \\ = 2.8T_5 + 0.2T_0 + 0.4T_3 - 0.8T_4 + 112.5$$

$$\iint_{A_{II}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_0 dx dy = \\ = 0.2T_5 - 0.8T_0 + 0.2T_3 + 0.4T_4 + 22.5$$

$$\iint_{A_{II}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_3 dx dy = \\ = 0.4 \cdot 8T_5 + 0.2T_0 - 2.8T_3 - 0.8T_4 + 112.5$$

$$\iint_{A_{II}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_4 dx dy = \\ = 0.8T_5 + 0.4T_0 - 0.8T_3 - 4.8T_4 + 202.5$$

7.3. Contribución del elemento A_{III} .

Está formada por las integrales

$$\iint_{A_{III}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy$$

para los subíndices $i = 6, 7, 0$ y 5 , que corresponden a los nodos del elemento A_{III} . Los resultados de estas integrales son:

$$\iint_{A_{III}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_6 dx dy = \\ = -4.8T_6 - 0.8T_7 + 0.4T_0 - 0.8T_5 + 202.5$$

$$\iint_{A_{III}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_7 dx dy = \\ = -0.8T_6 - 2.8T_7 + 0.2T_0 + 0.4T_5 + 112.5$$

$$\iint_{A_{III}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_5 dx dy = \\ = 0.4T_6 + 0.2T_7 - 0.8T_0 + 0.2T_5 + 22.5$$

$$\iint_{A_{III}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_6 dx dy = \\ = -0.8T_6 + 0.4T_7 + 0.2T_0 - 2.8T_5 + 112.5$$

7.4. Contribución del elemento A_{IV} .

Se obtiene con las integrales

$$\iint_{A_{IV}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy$$

para los subíndices $i=7, 8, 1$ y 0 , que corresponden a los nodos del elemento A_{IV} . Los resultados de estas integrales son:

$$\iint_{A_{IV}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_7 dx dy =$$

$$= -2.8T_7 - 0.8T_8 + 0.4T_1 + 0.2T_0 + 112.5$$

$$\iint_{A_{IV}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_8 dx dy =$$

$$= -0.8T_7 - 4.8T_8 - 0.8T_1 + 0.4T_0 + 202.5$$

$$\iint_{A_{IV}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_1 dx dy =$$

$$= 0.4T_7 - 0.8T_8 - 2.8T_1 + 0.2T_0 + 112.5$$

$$\iint_{A_{IV}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_0 dx dy =$$

$$= 0.2T_7 + 0.4T_8 + 0.2T_1 - 0.8T_0 + 22.5$$

El *ensamblado* consiste en la realización de estas sumas, que en el ejemplo nos proporciona el sistema:

$$-3.2T_0 + 0.4T_1 + 0.4T_2 + 0.4T_3 + 0.4T_4 + 0.4T_5 + 0.4T_6 + \\ + 0.4T_7 + 0.4T_8 + 90 = 0$$

$$0.4T_0 - 5.6T_1 - 0.8T_2 + 0.4T_3 + 0.4T_7 - 0.8T_8 + 225 = 0$$

$$0.4T_0 - 0.8T_1 - 4.8T_2 - 0.8T_3 + 202.5 = 0$$

$$0.4T_0 + 0.4T_1 - 0.8T_2 - 5.6T_3 - 0.8T_4 + 0.4T_5 + 225 = 0$$

$$0.4T_0 - 0.8T_3 - 4.8T_4 - 0.8T_5 + 202.5 = 0$$

$$0.4T_0 + 0.4T_3 - 0.8T_4 - 5.6T_5 - 0.8T_6 + 0.4T_7 + 225 = 0$$

$$0.4T_0 - 0.8T_5 - 4.8T_6 - 0.8T_7 + 202.5 = 0$$

$$0.4T_0 + 0.4T_1 + 0.4T_5 - 0.8T_6 - 5.6T_7 - 0.8T_6 + 225 = 0$$

$$0.4T_0 - 0.8T_1 - 0.8T_7 - 4.8T_8 + 202.5 = 0$$

cuya solución es:

$$T_0 = 65.625$$

$$T_1 = T_3 = T_5 = T_7 = 41.016$$

$$T_2 = T_4 = T_6 = T_8 = 33.984$$

7.6. Utilización de la simetría para simplificar la resolución del problema.

El objetivo del sencillo ejercicio desarrollado en los subapartados anteriores es explicar el ensamblado. Por esta razón no se utilizó la simetría del problema, que permite reducirlo al estudio del elemento A_I con convección en los lados P_1P_2 y P_2P_3 . En este elemento la expresión aproximada de la temperatura en estado estacionario es

$$T_{ap} = T_0S_0 + T_1S_1 + T_2S_2 + T_3S_3$$

por lo que debe suceder que

$$\iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0, \\ i = 0, 1, 2 \text{ y } 3.$$

La resolución de estas cuatro integrales, hecha en el subapartado 7.1, proporciona el sistema:

$$\iint_{A_I} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_0 dx dy =$$

7.5 Ensamblado.

Los resultados anteriores nos permiten deducir las nueve ecuaciones

$$\iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 8.$$

cuya solución son las nueve temperaturas del estado estacionario, ya que al ser

$$\iint_A \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = \\ = \sum_{j=I}^{j=IV} \iint_{A_j} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy$$

se tiene que las nueve ecuaciones anteriores son:

$$\sum_{j=I}^{j=IV} \iint_{A_j} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0, \\ i = 0, 1, \dots, 8.$$

$$= -0.8T_0 + 0.2T_1 + 0.4T_2 + 0.2T_3 + 22.5 = 0$$

$$\iint_{A_1} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_1 dx dy = \\ = 0.2T_0 - 2.8T_1 - 0.8T_2 + 0.4T_3 + 112.5 = 0$$

$$\iint_{A_1} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_2 dx dy = \\ = 0.4T_0 - 0.8T_1 - 4.8T_2 - 0.8T_3 + 202.5 = 0$$

$$\iint_{A_1} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_3 dx dy = \\ = 0.2T_0 + 0.4T_1 - 0.8T_2 - 2.8T_3 + 112.5 = 0$$

cuya solución es:

$$T_0 = 65.625$$

$$T_1 = T_3 = 41.016$$

$$T_2 = 33.984$$

La simetría nos proporciona las temperaturas en los demás nodos de los elementos rectangulares A_{II} , A_{III} y A_{IV} .

8. AUMENTO DEL REFINAMIENTO DEL MALLADO.

La aproximación aumenta si las dimensiones de los elementos son pequeñas, lo que provoca un gran aumento del número de nodos, proporcionando un sistema de muchas ecuaciones, que exige la utilización del ordenador.

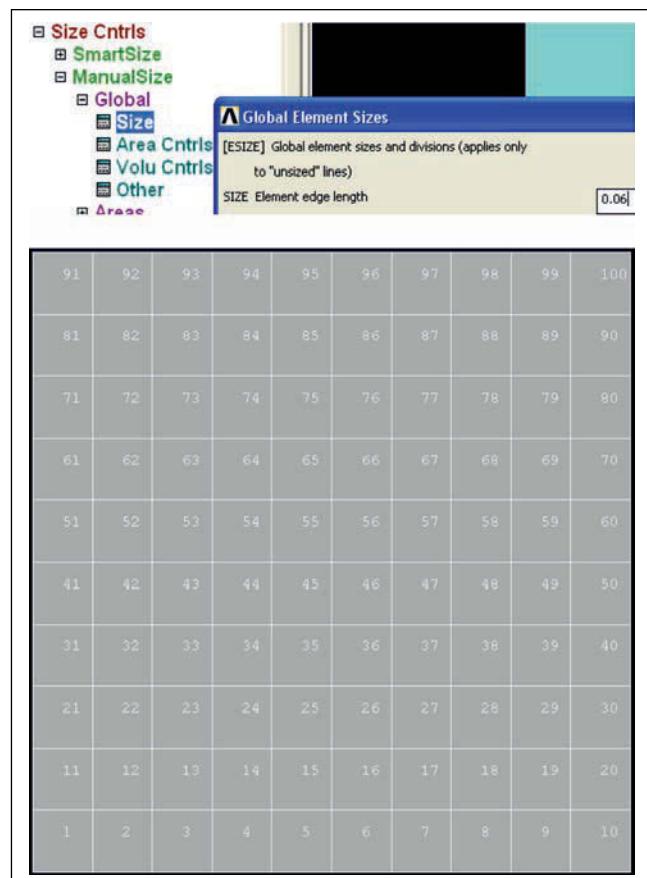


Figura 14.

Si se malla con tamaño 0.06m se producirán 100 elementos, que tienen 121 nodos, con lo que se generará un sistema lineal de 121 incógnitas (**Figura 14**).

El programa permite listar las temperaturas de los 121 nodos cuando se llega al estado de equilibrio. A continuación, en la **tabla 2**, se da una parte del listado con las temperaturas de 14 nodos, indicando las coordenadas de esos nodos para localizarlos.

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8
Coordenadas	(0,0)	(0.6,0)	(0.06,0)	(0.12,0)	(0.18,0)	(0.24,0)	(0.30,0)	(0.36,0)
Temperatura	33.736	33.736	35.770	37.453	38.550	39.172	39.374	39.172

Nodo	116	117	118	119	120	121
Coordenadas	(0.54,0.24)	(0.54,0.3)	(0.54,0.36)	(0.54,0.42)	(0.54,0.48)	(0.54,0.54)
Temperatura	47.185	47.574	47.185	45.984	43.868	40.659

Tabla 2

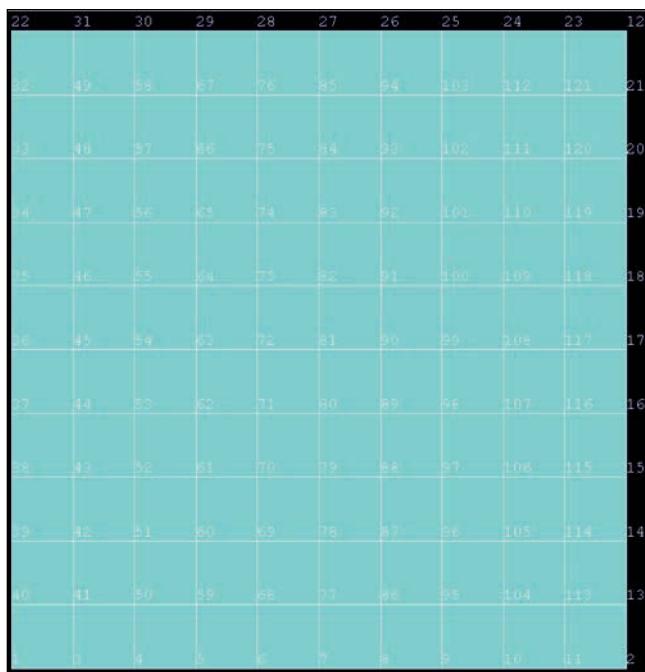


Figura 15.

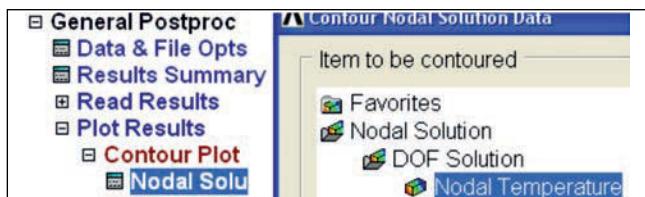


Figura 16.

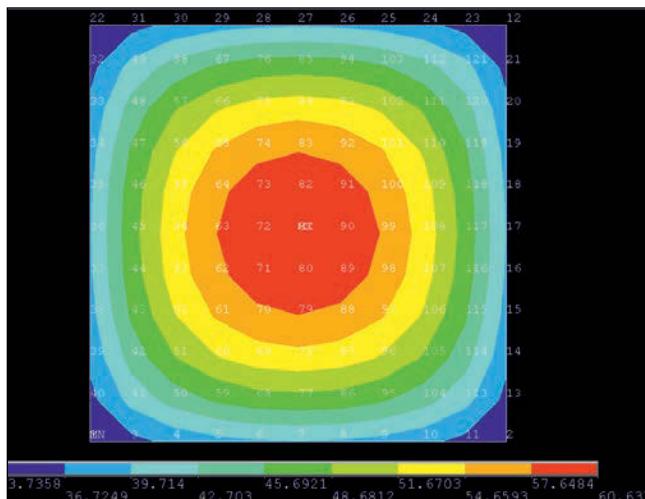


Figura 17.

El programa utilizado también permite numerar los nodos, facilitando su ubicación (**Figura 15**).

Además se puede visualizar gráficamente la distribución de temperaturas en estado estacionario desde Plot Results (**Figura 16**).

Se obtiene un gráfico que nos muestra la distribución de temperaturas en el estado estacionario (**Figura 17**).

9. RESOLUCIÓN APROXIMADA DE LA ECUACIÓN DEL CALOR EN UN TRIÁNGULO

Al mallar un área se utilizan diversos tipos de polígonos y dentro de cada tipo de polígonos se utilizan diferentes números de nodos. Por ejemplo se puede mallar con rectángulos de cuatro nodos, como se ha visto en el ejemplo anterior, pero también se malla con rectángulos de ocho nodos, situados en los vértices y en los puntos medios de los lados. En el caso tridimensional, los volúmenes se mallan con poliedros, caso que no vamos a considerar en esta exposición elemental, que vamos a completar describiendo cómo se resuelve aproximadamente la ecuación del calor en un triángulo, que tal vez sea el polígono más utilizado para mallar áreas, por su fácil adaptación para recubrir áreas. En elementos finitos se utilizan triángulos con 3 nodos, situados en los vértices, y con 6 nodos, situados en los vértices y en los puntos medios de los lados.

Supondremos pues que B es un triángulo de vértices $P_i = (x_i, y_i)$, $P_j = (x_j, y_j)$ y $P_k = (x_k, y_k)$. Además consideraremos que B es suficientemente pequeño para poder admitir la *hipótesis de variación lineal*, que nos dice que la variación de la temperatura T es (muy aproximadamente) lineal cuando nos movemos en una línea recta dentro de B .

9.1. Expresión de la temperatura aproximada con las funciones de Galerkin.

Es muy sencillo expresar la temperatura aproximada T_{ap} en un punto $P = (x, y) \in B$ en función de las temperaturas T_i , T_j y T_k de los vértices si se supone la

hipótesis de variación lineal para la temperatura aproximada T_{ap} , pues con sencillas interpolaciones, o más directamente por convexidad, se deduce que:

- Las coordenadas del punto $P=(x, y)$ se expresan en función de las coordenadas de los vértices mediante la combinación convexa

$$(x, y) = \gamma_i(x_i, y_i) + \gamma_j(x_j, y_j) + \gamma_k(x_k, y_k)$$

donde los coeficientes son tres números no negativos tales que

$$1 = \gamma_i + \gamma_j + \gamma_k$$

y al despejar mediante la regla de Sarrus se obtiene:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_j & x_k \\ y & y_j & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{2 \text{Area } PP_j P_k}{2 \text{Area } P_i P_j P_k} = \frac{1}{2A} (\alpha_i + \beta_i x + \delta_i y) \end{aligned}$$

siendo $\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j$; $\beta_i = y_j - y_k$; $\delta_i = x_k - x_j$

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x & x_k \\ y_i & y & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{2 \text{Area } P_i P_j P_k}{2 \text{Area } P_i P_j P_k} = \frac{1}{2A} (\alpha_j + \beta_j x + \delta_j y) \end{aligned}$$

con $\alpha_j = x_k y_i - x_i y_k$; $\beta_j = y_k - y_i$; $\delta_j = x_i - x_k$

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x \\ y_i & y_j & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{\text{Area } P P_j P}{\text{Area } P_i P_j P_k} = \frac{1}{2A} (\alpha_k + \beta_k x + \delta_k y) \end{aligned}$$

siendo $\alpha_k = x_i y_j - x_j y_i$; $\beta_k = y_i - y_j$; $\delta_k = x_j - x_i$

donde A es el área del triángulo B de vértices $P_i = (x_i, y_i)$, $P_j = (x_j, y_j)$ y $P_k = (x_k, y_k)$.

La condición $1 = \gamma_i + \gamma_j + \gamma_k$ es equivalente a la igualdad trivial

$$\text{Area } P_i P_j P_k = \text{Area } P P_j P_k + \text{Area } P_i P P_k + \text{Area } P_i P_j P,$$

siendo los tres sumandos positivos cuando P es un punto interior al triángulo B .

- Recordando la hipótesis de variación lineal se deduce que la temperatura aproximada en el punto $P = (x, y)$ del triángulo B , siendo

$$\begin{aligned} (x, y) &= \gamma_i(x_i, y_i) + \gamma_j(x_j, y_j) + \gamma_k(x_k, y_k) = \\ &= (x_i, y_i) + \gamma_j \{(x_j, y_j) - (x_i, y_i)\} + \gamma_k \{(x_k, y_k) - (x_i, y_i)\} \end{aligned}$$

es

$$\begin{aligned} T_{ap}(x, y) &= T_i + \gamma_j \{T_j - T_i\} + \gamma_k \{T_k - T_i\} = \\ &= \gamma_i T_i + \gamma_j T_j + \gamma_k T_k \end{aligned}$$

- Antes se ha obtenido la expresión de los coeficientes γ_i , γ_j y γ_k , que son funciones que dependen de las coordenadas x e y del punto P . Se les llama funciones de Galerkin y las representaremos por S_i , S_j y S_k , que se suelen definir de la siguiente forma:

- S_i es una función que vale 1 en P_i y toma el valor 0 en los otros dos vértices. La ecuación de la recta que pasa por P_j y P_k es $(x - x_j)(y_j - y_k) + (y - y_j)(x_k - x_j) = 0$. Por tanto desarrollando el primer miembro de esta ecuación y dividiendo por su valor en el punto P_i se obtiene:

$$S_i(x, y) = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2A} + \frac{y_j - y_k}{2A} x + \frac{x_k - x_j}{2A} y$$

que coincide con la expresión obtenida antes para γ_i .

- Análogamente se definen S_j y S_k y se comprueba que $S_j = \gamma_j$ y que $S_k = \gamma_k$.

- Por tanto, en lo sucesivo utilizaremos como expresión de la temperatura aproximada en el punto P la expresión de Galerkin

$$T_{ap} = T_i S_i + T_j S_j + T_k S_k$$

9.2. Ecuaciones para un elemento triangular.

El método de Galerkin para obtener los valores T_i , T_j y T_k de la temperatura aproximada T_{ap} consiste en:

- Exigir que se verifiquen las condiciones en la frontera.

- Y que el residuo obtenido al sustituir T_{ap} en la ecuación diferencial, que es

$$\begin{aligned} k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q - 0 = \\ = k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \end{aligned}$$

verifique las tres condiciones siguientes de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \iint_B \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0 \\ \iint_B \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_j dx dy = 0 \\ \iint_B \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_k dx dy = 0 \end{aligned}$$

Para simplificar vamos a suponer isotropía en la conductividad, es decir $k_x = k_y$.

9.3. Condiciones de frontera.

Supondremos que la condición de frontera es convección en los tres lados del triángulo B . En el estado estacionario sucede que el calor generado en el elemento triangular es igual al calor emitido por los tres lados por convección.

9.4. Introducción de las condiciones de frontera y cálculo de integrales.

9.4.1. Primeras transformaciones para introducción de la convección.

La introducción de la convección en

$$\iint_B \left(k \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0$$

exige la transformación del integrando que ya se hizo en el caso del rectángulo y, además, alguna transformación adicional para obtener derivadas de la temperatura aproximada en dirección perpendicular a cada lado (lo cual era muy sencillo en el caso del rectángulo). Por tanto utilizaremos las identidades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} S_i &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i \right) - \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \frac{\partial S_i}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} S_i &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} S_i \right) - \frac{\partial T_{ap}}{\partial y} \frac{\partial S_i}{\partial y}, \end{aligned}$$

con las que la parte de la integral

$$\iint_B \left(k \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0$$

correspondiente a cada uno de los dos primeros sumandos del integrando se descompone en:

$$\begin{aligned} \iint_B k \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} S_i dx dy &= \\ &= \iint_B k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i \right) dx dy - \iint_B k \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \frac{\partial S_i}{\partial x} dx dy \\ \iint_B k \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} S_i dx dy &= \\ &= \iint_B k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} S_i \right) dx dy - \iint_B k \frac{\partial T_{ap}}{\partial y} \frac{\partial S_i}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

La suma de las dos primeras integrales

$$\iint_B k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i \right) dx dy + \iint_B k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} S_i \right) dx dy$$

es, por el teorema de Stokes, igual a la integral

$$\oint_{\Gamma} \left(-\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} S_i \vec{i} + \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i \vec{j} \right) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j})$$

puesto que el rotacional de

$$-\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} S_i \vec{i} + \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i \vec{j}$$

es

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} S_i \right) \right] \vec{k}.$$

En la integral anterior Γ es el contorno del triángulo B recorrido en sentido positivo. Al hacer el producto escalar en la última integral se obtiene:

$$\oint_{\Gamma} k \left(-\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} dx + \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} dy \right) S_i.$$

A este resultado se llega directamente aplicando el Teorema de Green a la suma antes considerada de las dos primeras integrales.

9.4.2. Transformación del integrando.

Supongamos que dl es el módulo del vector de origen (x, y) y extremo $(x+dx, y+dy)$, siendo el sentido de este vector el inducido por el sentido positivo de recorrido de Γ . Si α es el ángulo del eje OX con el vector \vec{v} se tiene que

$$dl \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = dl \sin(-\alpha) = -dl \sin \alpha = -dy$$

$$dl \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = dl \cos(-\alpha) = dl \cos \alpha = dx$$

y al sustituir en la integral

$$k \oint_{\Gamma} -\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} S_i dx + \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} S_i dy$$

queda:

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} k \left(-\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} dx + \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} dy \right) S_i = \\ &= - \oint_{\Gamma} k \left(\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \right) S_i dl \end{aligned}$$

Dado que el perímetro del triángulo se recorre en sentido positivo se tiene que $\alpha + \frac{\pi}{2}$ es el ángulo que forma OX con el vector n_{int} , que es el vector unitario normal en el punto (x, y) al lado del triángulo y con sentido hacia el interior del triángulo B. Por el teorema del gradiente

$$\frac{\partial T_{ap}}{\partial n_{int}} = \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial T_{ap}}{\partial y} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

y, finalmente, la integral anterior se transforma en

$$\oint_{\Gamma} k \left(-\frac{\partial T_{ap}}{\partial y} dx + \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} dy \right) S_i = - \oint_{\Gamma} k \frac{\partial T_{ap}}{\partial n_{int}} S_i dl$$

9.4.3. Cálculo de las integrales en cada lado.

La integral anterior exige hacer tres integrales, una por cada lado. Si el lado de nodos P_i y P_j tiene convección, la condición de equilibrio en el estado estacionario nos dice que el calor que llega por unidad de tiempo al segmento de origen (x, y) y extremo $(x+dx, y+dy)$ es igual al calor que sale por convección por ese segmento en unidad de tiempo, por lo que

$$k \times dl \times \frac{\partial T_{ap}}{\partial n_{int}} = h \times dl \times (T_{ap} - T_f).$$

Sustituyendo esta igualdad en la última integral se obtiene:

$$\begin{aligned} - \int_{P_i}^{P_j} k \frac{\partial T_{ap}}{\partial n_{int}} S_i dl &= - \int_{P_i}^{P_j} h (T_{ap} - T_f) S_i dl = \\ &= h T_f \int_{P_i}^{P_j} S_i dl - h \int_{P_i}^{P_j} T_{ap} S_i dl \end{aligned}$$

y cálculos elementales nos proporcionan que:

$$\begin{aligned} h T_f \int_{P_i}^{P_j} S_i dl &= h T_f \frac{l_{ij}}{2} \\ - h \int_{P_i}^{P_j} T_{ap} S_i dl &= - h \int_{P_i}^{P_j} (T_i S_i + T_j S_j + T_k S_k) S_i dl = \\ &= - h T_i \int_{P_i}^{P_j} S_i S_i dl - h T_j \int_{P_i}^{P_j} S_j S_i dl - h T_k \int_{P_i}^{P_j} S_k S_i dl \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \int_{P_i}^{P_j} S_i S_i dl &= \int_{l=0}^{l=l_{ij}} \left(1 - \frac{l}{l_{ij}} \right)^2 dl = \frac{l_{ij}}{3} \\ \int_{P_i}^{P_j} S_i S_j dl &= \int_{l=0}^{l=l_{ij}} \left(1 - \frac{l}{l_{ij}} \right) \frac{l}{l_{ij}} dl = \frac{l_{ij}}{6} \end{aligned}$$

y la tercera integral es 0, pues S_k es una función nula en ese lado.

9.4.4. Contribuciones de la convección:

Las integrales anteriores nos dicen que la contribución de convección del lado $P_i P_j$ a la primera ecuación (pues se multiplicó escalarmente por S_i) es:

$$-\frac{hl_{ij}}{6} (2T_i + T_j) + \frac{hT_f l_{ij}}{2}$$

Análogamente se obtienen las contribuciones de convección del lado $P_i P_j$ a las ecuaciones segunda y tercera. Estos cálculos se deben repetir para cada uno de los restantes lados, siendo previsibles los resultados por permutación circular. Se obtiene que:

- Las contribuciones de convección del lado $P_i P_j$ en los primeros miembros de las tres ecuaciones

$$\iint_B \left(k \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dxdy = 0$$

$$\iint_B \left(k \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_j dxdy = 0$$

$$\iint_B \left(k \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_k dx dy = 0$$

son las tres componentes de:

$$-\frac{hl_{ij}}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{pmatrix} + \frac{hT_f l_{ij}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Las contribuciones de convección del lado $P_j P_k$ son las tres componentes de:

$$-\frac{hl_{jk}}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{pmatrix} + \frac{hT_f l_{jk}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Y las contribuciones de convección del lado $P_k P_i$ son las tres componentes de:

$$-\frac{hl_{ki}}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{pmatrix} + \frac{hT_f l_{ki}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{k}{4A} \begin{pmatrix} \beta_i^2 & \beta_i \beta_j & \beta_i \beta_k \\ \beta_j \beta_i & \beta_j^2 & \beta_j \beta_k \\ \beta_k \beta_i & \beta_k \beta_j & \beta_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i^2 & \delta_i \delta_j & \delta_i \delta_k \\ \delta_j \delta_i & \delta_j^2 & \delta_j \delta_k \\ \delta_k \delta_i & \delta_k \delta_j & \delta_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{pmatrix}$$

Los coeficientes beta y delta se obtuvieron en 9.1.

9.4.6. Cálculo de las integrales correspondientes a la generación de calor:

De las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} \iint_B \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy &= 0 \\ \iint_B \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_j dx dy &= 0 \\ \iint_B \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_k dx dy &= 0 \end{aligned}$$

Sólo nos quedan por calcular tres integrales $q \iint_B S_i dx dy$, $q \iint_B S_j dx dy$ y $q \iint_B S_k dx dy$. Los tres resultados de las integrales son el volumen de un tetraedro de base B y altura 1. Como este volumen es $A/3$, deducimos que la contribución de estas tres integrales son las componentes de la matriz:

$$\frac{qA}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.5. Ecuación matricial de las temperaturas en los nodos de un triángulo.

- Resumiendo todos los resultados anteriores se tiene que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \iint_B \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy &= 0 \\ i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

es la ecuación matricial

$$-\left(B_x + B_y + C_{ij} + C_{jk} + C_{ki} \right) \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{pmatrix} + \frac{qlw}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Además al multiplicar por S_i y por S_k obtendremos que hay que calcular:

$$\begin{aligned} -\iint_B k \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \frac{\partial S_i}{\partial x} dx dy - \iint_B k \frac{\partial T_{ap}}{\partial y} \frac{\partial S_i}{\partial y} dx dy \\ -\iint_B k \frac{\partial T_{ap}}{\partial x} \frac{\partial S_k}{\partial x} dx dy - \iint_B k \frac{\partial T_{ap}}{\partial y} \frac{\partial S_k}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

Todas las integrales anteriores son muy sencillas, pues las derivadas parciales se reducen a constantes y $\iint_B dx dy = A$, siendo A el área del triángulo. Por tanto, la contribución de estas integrales son las tres componentes de

$$+\frac{hT_f}{2}(D_{ij}+D_{jk}+D_{ki})=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde:

$$B_x = \frac{k}{4A} \begin{pmatrix} \beta_i^2 & \beta_i\beta_j & \beta_i\beta_k \\ \beta_j\beta_i & \beta_j^2 & \beta_j\beta_k \\ \beta_k\beta_i & \beta_k\beta_j & \beta_k^2 \end{pmatrix} \quad B_y = \frac{k}{4A} \begin{pmatrix} \delta_i^2 & \delta_i\delta_j & \delta_i\delta_k \\ \delta_j\delta_i & \delta_j^2 & \delta_j\delta_k \\ \delta_k\delta_i & \delta_k\delta_j & \delta_k^2 \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = \frac{hl_{ij}}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D_{ij} = \frac{hT_f l_{ij}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{jk} = \frac{hl_{jk}}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D_{jk} = \frac{hT_f l_{jk}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{ki} = \frac{hl_{ki}}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D_{ki} = \frac{hT_f l_{ki}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Las matrices C_{ij} y D_{ij} serían matrices nulas si en el lado que une los nodos P_i y P_j no hubiese convección, sucediendo la condición de nulidad análoga cuando alguno de los otros lados estuviese aislado y no tuviese convección.

10. APLICACIÓN A UN ELEMENTO TRIÁNGULAR.

Vamos a aplicar la ecuación matricial a un triángulo isótropo con $k=7,2 \text{ W}/(\text{m}\times{}^\circ\text{C}\times\text{min})$ y vértices dados en la **tabla 3** donde las coordenadas están en metros. Los lados con convección son $l_{ij}=OA$ y $l_{ki}=BO$, la temperatura ambiente es $T_f=10^\circ\text{C}$ y el coeficiente de convección es $h=20 \text{ W}/(\text{m}^2\times{}^\circ\text{C}\times\text{min})$. Además, el triángulo genera calor, a razón de $q=2000 \text{ W}/(\text{m}^3\times\text{min})$.

Mallamos el triángulo con un solo elemento, formado por el propio triángulo. De las coordenadas de los vértices deducimos que

$\beta_i = 0 - 12$	$\delta_i = 0 - 12$
$\beta_j = 12 - 0$	$\delta_j = 0 - 0$
$\beta_k = 0 - 0$	$\delta_k = 12 - 0$

y al sustituir en la ecuación matricial obtenida en 9.5 se obtiene:

$$\begin{aligned} & -\left[\frac{7,2}{4(72)} \left[\begin{pmatrix} 144 & -144 & 0 \\ -144 & 144 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 144 & 0 & -144 \\ 0 & 0 & 0 \\ -144 & 0 & 144 \end{pmatrix} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{20 \times 12}{6} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \right] \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{pmatrix} + \\ & \quad + \frac{2000 \times 72}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{20 \times 10 \times 12}{6} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cuya solución, $T_i=55,763^\circ\text{C}$ y $T_j=T_k=564,24^\circ\text{C}$, da las temperaturas aproximadas en los nodos en estado estacionario.

Por tanto, la temperatura aproximada en un punto (x,y) del triángulo es

$$\begin{aligned} T_{apr} &= T_i S_i + T_j S_j + T_k S_k = \\ &= 55,763 \left(1 - \frac{x}{12} - \frac{y}{12} \right) + 564,24 \left(\frac{x}{12} + \frac{y}{12} \right) \end{aligned}$$

que al sacar factor común a $x+y$ se transforma en

$$T_{apr} = 55,763 + 42,373(x+y).$$

Nos indica que, en el estado de equilibrio, las isotermas son las rectas paralelas $x+y=c$, aumentando la temperatura desde los $55,763^\circ\text{C}$, cuando $c=0$, hasta $564,24$, cuando $c=12$.

Vértice 1	Vértice 2	Vértice 3
$O=(x_i, y_i)=(0, 0)$	$A=(x_j, y_j)=(12, 0)$	$B=(x_k, y_k)=(0, 12)$

Tabla 3

11. REFINAMIENTO DEL MALLADO.

La solución obtenida en el apartado anterior estará afectada de un gran error, pues el único elemento triangular considerado es muy grande. Para mejorar el resultado mallamos el triángulo B con cuatro triángulos, cuyos nodos son:

Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3
$O = (x_1, y_1) = (0, 0)$	$A = (x_2, y_2) = (12, 0)$	$B = (x_3, y_3) = (0, 12)$
Nodo 4	Nodo 5	Nodo 6
$C = (x_4, y_4) = (6, 0)$	$D = (x_5, y_5) = (6, 6)$	$E = (x_6, y_6) = (0, 6)$

Los vértices de los triángulos I, II, III y IV son EDB, CAD, ODE y OCD, respectivamente.

11.1. Ecuación matricial del calor en el Triángulo I.

Para facilitar la aplicación de la ecuación matricial obtenida en 9.5, escribiremos los vértices en el siguiente formato:

Nodo 6	Nodo 5	Nodo 3
$E = (x_i, y_i) = (0, 6)$	$D = (x_j, y_j) = (6, 6)$	$B = (x_k, y_k) = (0, 12)$

y deducimos que

$\beta_i = 6 - 12$	$\delta_i = 0 - 6$
$\beta_j = 12 - 6$	$\delta_j = 0 - 0$
$\beta_k = 6 - 6$	$\delta_k = 6 - 0$

Además el lado $l_{ki} = BE$ es el único lado con convección. Por tanto, según lo obtenido en 9.5, los resultados de las integrales

$$\iint_{\text{Triáng } I} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_6 dx dy$$

$$\iint_{\text{Triáng } I} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_5 dx dy$$

$$\iint_{\text{Triáng } I} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_3 dx dy$$

son las tres componentes del vector columna:

$$-\left[\frac{7,2}{4(18)} \begin{pmatrix} 36 & -36 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 36 \end{pmatrix} \right] + \\ + \frac{20 \times 6}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_6 \\ T_5 \\ T_3 \end{pmatrix} + \frac{2000 \times 18}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ + \frac{20 \times 10 \times 6}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16.4T_6 - 43.6T_3 + 12600 \\ 3.6T_6 - 3.6T_5 + 12600 \\ -47.2T_6 + 3.6T_5 - 16.4T_3 + 12600 \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$\iint_{\text{Triáng } I} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_6 dx dy = \\ = -16.4T_6 + 43.6T_3 + 12600$$

$$\iint_{\text{Triáng } I} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_5 dx dy = \\ = 3.6T_6 - 3.6T_5 + 12600$$

$$\iint_{\text{Triáng } I} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_3 dx dy = \\ = -47.2T_6 + 3.6T_5 - 16.4T_3 + 12600$$

11.2 Ecuación matricial del calor en el Triángulo II.

Las coordenadas de sus nodos son:

Nodo 4	Nodo 2	Nodo 5
$C = (x_i, y_i) = (6, 0)$	$A = (x_j, y_j) = (12, 0)$	$D = (x_k, y_k) = (6, 6)$

por lo que

$\beta_i = 0 - 6$	$\delta_i = 6 - 12$
$\beta_j = 6 - 0$	$\delta_j = 6 - 6$
$\beta_k = 0 - 0$	$\delta_k = 12 - 6$

De esta información y de que el lado $l_{ij}=CA$ es el único lado con convección, se deduce que los resultados de las integrales

$$\iint_{\text{Triángulo } II} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_4 dx dy$$

$$\iint_{\text{Triángulo } II} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_2 dx dy$$

$$\iint_{\text{Triángulo } II} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_5 dx dy$$

son las tres componentes del vector columna resultante de hacer las operaciones:

$$\begin{aligned} & - \left\{ \frac{7,2}{4(18)} \left[\begin{pmatrix} 36 & -36 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 36 \end{pmatrix} \right] + \right. \\ & + \frac{20 \times 6}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_4 \\ T_2 \\ T_5 \end{pmatrix} + \frac{2000 \times 18}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ & \left. + \frac{20 \times 10 \times 6}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16.4T_4 - 43.6T_2 + 12600 \\ -47.2T_4 - 16.6T_2 + 3.6T_5 + 12600 \\ 3.6T_4 - 3.6T_5 + 12600 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Por tanto deducimos que:

$$\begin{aligned} & \iint_{\text{Triángulo } II} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_4 dx dy = \\ & = -16.4T_4 - 43.6T_2 + 12600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\text{Triángulo } II} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_2 dx dy = \\ & = -47.2T_4 - 16.6T_2 + 3.6T_5 + 12600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\text{Triángulo } II} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_5 dx dy = \\ & = 3.6T_4 - 3.6T_5 + 12600 \end{aligned}$$

escribiremos las coordenadas de sus nodos O, D y E así:

Nodo 1	Nodo 5	Nodo 6
$O = (x_i, y_i) = (0, 0)$	$D = (x_j, y_j) = (6, 6)$	$E = (x_k, y_k) = (0, 6)$

por lo que

$\beta_i = 6 - 6$	$\delta_i = 0 - 6$
$\beta_j = 6 - 0$	$\delta_j = 0 - 0$
$\beta_k = 0 - 6$	$\delta_k = 6 - 0$

Observamos que $l_{ki}=EO$ es el único lado con convección. Por tanto, los resultados de las integrales

$$\iint_{\text{Triángulo } III} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_1 dx dy$$

$$\iint_{\text{Triángulo } III} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_5 dx dy$$

$$\iint_{\text{Triángulo } III} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_6 dx dy$$

son las tres componentes del vector columna resultante de hacer las operaciones:

$$\begin{aligned} & - \left\{ \frac{7,2}{4(18)} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -36 \\ 0 & -36 & 36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 36 \end{pmatrix} \right] + \right. \\ & + \frac{20 \times 6}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} + \frac{2000 \times 18}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ & \left. + \frac{20 \times 10 \times 6}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43.6T_1 - 16.4T_6 + 12600 \\ -3.6T_5 + 3.6T_6 + 12600 \\ -16.4T_1 + 3.6T_5 - 47.2T_6 + 12600 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

lo que significa que:

$$\begin{aligned} & \iint_{\text{Triángulo } III} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_1 dx dy = \\ & = -43.6T_1 - 16.4T_6 + 12600 \end{aligned}$$

11.3 Ecuación matricial del calor en el Triángulo III.

Continuando con el formato adecuado para facilitar la aplicación de la ecuación matricial obtenida en 9.5,

$$\iint_{\text{Triángulo III}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_5 dx dy = \\ = -3.6T_5 + 3.6T_6 + 12600$$

$$\iint_{\text{Triángulo III}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_6 dx dy = \\ = -16.4T_1 + 3.6T_5 - 47.2T_6 + 12600$$

11.4 Ecuación matricial del calor en el Triángulo IV.

Las coordenadas de sus nodos son O, C y D son:

Vértice 1	Vértice 4	Vértice 5
$O = (x_i, y_i) = (0, 0)$	$C = (x_j, y_j) = (6, 0)$	$D = (x_k, y_k) = (6, 6)$

por lo que

$\beta_i = 0 - 6$	$\delta_i = 6 - 6$
$\beta_j = 6 - 0$	$\delta_j = 0 - 6$
$\beta_k = 0 - 0$	$\delta_k = 6 - 0$

En este triángulo el único lado con convección es el lado $l_{ij} = OC$. Por tanto, utilizando la ecuación matricial obtenida en 9.5, los resultados de las integrales

$$\iint_{\text{Triángulo IV}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_1 dx dy$$

$$\iint_{\text{Triángulo IV}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_4 dx dy$$

$$\iint_{\text{Triángulo IV}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_5 dx dy$$

son las tres componentes del vector columna:

$$-\left\{ \frac{7,2}{4(18)} \begin{bmatrix} 36 & -36 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -36 \\ 0 & -36 & 36 \end{bmatrix} \right\} + \\ + \frac{20 \times 6}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} + \frac{2000 \times 18}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{20 \times 10 \times 6}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43.6T_1 - 16.4T_4 + 12600 \\ -16.4T_1 + 47.2T_4 + 3.6T_5 + 12600 \\ 3.6T_4 - 3.6T_5 + 12600 \end{pmatrix}$$

Lo que nos permite deducir que:

$$\iint_{\text{Triángulo IV}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_1 dx dy = \\ = -43.6T_1 - 16.4T_4 + 12600$$

$$\iint_{\text{Triángulo IV}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_4 dx dy = \\ = -16.4T_1 + 47.2T_4 + 3.6T_5 + 12600$$

$$\iint_{\text{Triángulo IV}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_5 dx dy = \\ = 3.6T_4 - 3.6T_5 + 12600$$

11.5. Ensamblado.

Las temperaturas aproximadas en estado estacionario son las soluciones del sistema de seis ecuaciones:

$$\iint_{\text{Triángulo B}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_i dx dy = 0$$

para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 . El resultado de cada integral se deduce de los resultados obtenidos en los cuatro triángulos considerados en los cuatro apartados anteriores, pues, por ejemplo, dado que S_1 es 0 en los triángulos I y II se tiene que:

$$\iint_{\text{Triángulo B}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_1 dx dy = \\ = \iint_{\text{Triángulo III}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_1 dx dy + \\ + \iint_{\text{Triángulo IV}} \left(k_x \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_{ap}}{\partial y^2} + q \right) S_1 dx dy,$$

Las seis integrales anteriores igualadas a 0 nos proporcionan el siguiente sistema:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 87.2 & 0 & 0 & 16.4 & 0 & 16.4 \\ 0 & 43.6 & 0 & 16.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 43.6 & 0 & 0 & 16.4 \\ 16.4 & 16.4 & 0 & 94.4 & -7.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7.2 & 14.4 & -7.2 \\ 16.4 & 0 & 16.4 & 0 & -7.2 & 94.4 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 25200 \\ 12600 \\ 12600 \\ 25200 \\ 48000 \\ 25200 \end{array} \right|$$

cuya solución es:

Nodo	$O = (0,0); A = (12,0); B = (0,12)$
Temp_{apr}	$T_1 = T_2 = T_3 = 89,412$
Nodo	$C = (6,0); E = (0,6)$
Temp_{apr}	$T_4 = T_6 = 530,59$
Nodo	$D = (6,6)$
Temp_{apr}	$T_5 = 3863,9$

Si se desea una solución más exacta se debe mallar con elementos más pequeños. La figura 18, obtenida con el programa Ansys, es un mallado del triángulo con 1057 elementos, que tienen 2220 nodos.

Este mallado genera un sistema de 2220 ecuaciones lineales que nos da las temperaturas aproximadas en los 2220 nodos. En la Tabla 4 se han copiado las temperaturas de los últimos 5 nodos.

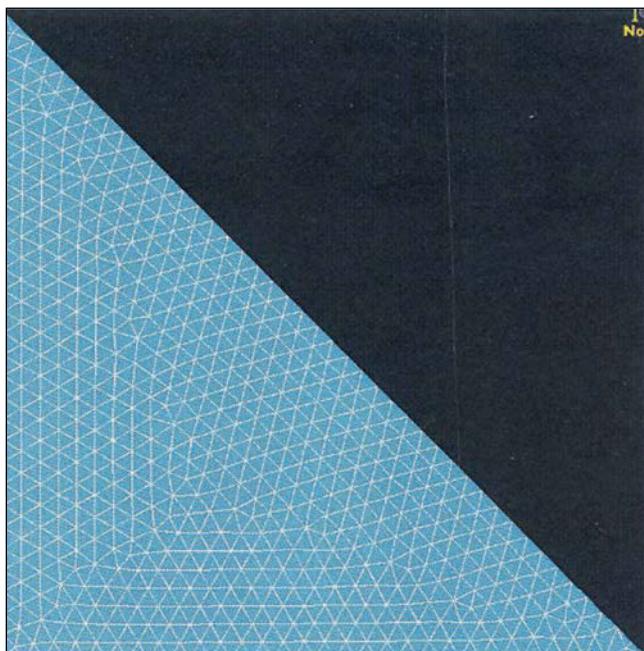


Figura 18.

Nodo	Coordenadas	Temp. aprox.
2216	(3.4098, 3.2826)	2427.4
2217	(3.4475, 3.6357)	2546.8
2218	(3.7393, 3.3831)	2557.2
2219	(11.6003, 0.1655)	203.53
2220	(0.1674, 11.5925)	200.48

Tabla 4

La figura 19 representa la distribución de temperaturas en el triángulo en estado estacionario.

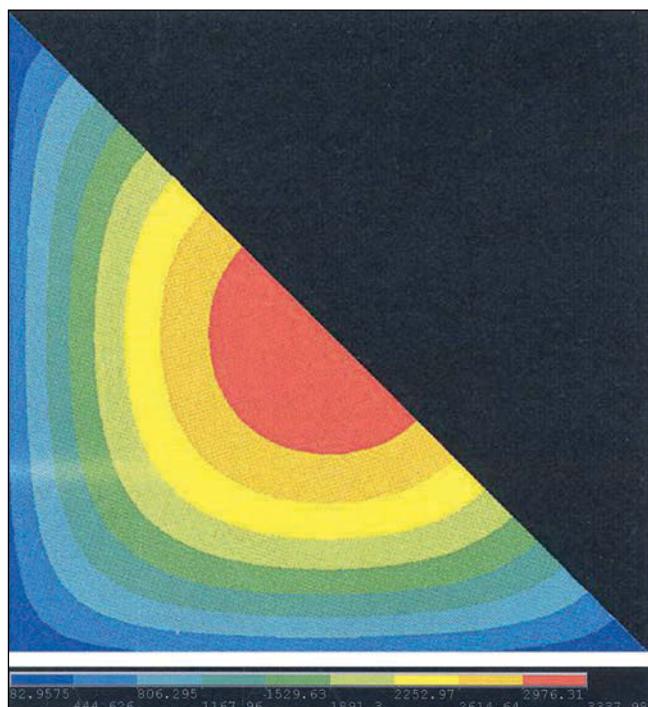


Figura 19.

12. OTRAS APLICACIONES DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

Los Elementos Finitos, además de soluciones estacionarias como las obtenidas en los ejemplos anteriores, permiten describir la evolución desde un estado inicial hasta el estado estacionario. El tiempo de transición se divide en un número finito de intervalos; el resultado al final de cada intervalo nos da las condiciones iniciales para estudiar la evolución del problema en el intervalo siguiente. Esta técnica permite calcular y visualizar la evolución de un problema térmico,

como puede ser la solidificación de una colada fundida.

Un proceso similar se aplica en el estudio de problemas de Mecánica de Fluidos con Elementos Finitos. Permite visualizar la dinámica del fluido y obtener su campo de velocidades, siendo mayor la precisión en régimen laminar que en régimen turbulento, donde también se visualizan los remolinos.

Los Elementos Finitos tienen poco más de medio siglo. Se ha indicado que sus primeras aplicaciones estuvieron concentradas en problemas de Mecánica y se desarrollaron entre 1943 y 1956. En la actualidad las aplicaciones de los Elementos Finitos están presentes en todas las partes de la Física e Ingeniería, incluida la Ingeniería del Diseño. Además se han desarrollado aplicaciones de los Elementos Finitos en otras ramas de la ciencia, como la Economía.

Parece probable que los Elementos Finitos van a estar presentes en muchos descubrimientos y aplicaciones que nacerán en el aún joven siglo XXI. Tal vez los *elementos* de los Elementos Finitos le hubiesen recordado a Leibniz (1646–1716) su libro *Monadología* de 1715, escrito hacia el final de su vida para sustentar una metafísica de las sustancias simples, las *mónadas*, consideradas como átomos formales de naturaleza metafísica que participan del todo. Lo equivalente a las móndadas en Elementos Finitos son los

elementos, de naturaleza física, cuya unión, realizada por el ensamblado, permite analizar el todo, con tanta mayor precisión cuanto menores son las dimensiones de los elementos.

BIBLIOGRAFÍA

1. I.Babuska, T.Strouboulis, *The Finite Element Method and its Reliability*. Oxford University Press, USA, 2001.
2. Eric B. Becker, Graham F. Carey y J. Tinsley Oden, *Finite Elements*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1981.
3. Susanne Cc. Brenner, L. Ridgway Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, New York, USA, 2002.
4. Carlos A. Felippa, *A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts*. Computers and Structures 79 (14) (2001) 1313–1324.
5. P. Ladevèze, J. Pelle, *Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics*, Springer, New York, USA, 2005.
6. Saeed Moaveni, *Finite Element Analysis. Theory and Application with Ansys*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1999.
7. J.C.Simo, T.J.R.Hughes, *Computational Inelasticity*, Springer, New York, USA, 1998.
8. R.Szilard, *Theories and Applications of Plate Analysis*. Wiley, New Jersey, USA, 2004.