

CRISTALOGRAFÍA Y ARTE

JOSÉ MARÍA MONTESINOS AMILIBIA *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense. Plaza de las Ciencias, 3. 28040 Madrid. montesin@mat.ucm.es

ABSTRACT

Se presentan frente a frente dos métodos de obtención de grupos cristalográficos, uno clásico y otro topológico

1. INTRODUCCIÓN

La Figura 1 muestra un cristal *idiomorfo* (con caras bien formadas) de granate (espesartina). La forma externa del cristal es un trapezoedro (24 caras trapecoidales). Obsérvense, en el cristal central, las estrías compatibles con rotaciones de órdenes cuatro y tres, y el distinto desarrollo de las caras del ejemplar de la derecha de la figura. La forma externa revela la exis-



Figura 1. Espesartina.

tencia de una estructura interna que, en este caso es una distribución ordenada de átomos de silicio, oxígeno, aluminio y manganeso.

En la Figura 2 vemos un agregado de cristales de espesartina. Aunque la forma externa es algo diferente a la del cristal anterior, la estructura interna es esencialmente idéntica, aunque ésta sólo es visible tras ser atravesada por un haz de rayos X que imprime una a modo de radiografía de la estructura interna en una placa fotográfica.

La cristalografía es la ciencia que estudia los cristales, sus formas externas, su estructura interna y sus simetrías. Estudia pues las leyes que gobiernan el estado cristalino de la materia sólida. Los átomos, en este estado, están dispuestos de un modo ordenado y esta ordenación determina muchas de las propiedades físicas y químicas de la materia cristalina.

La cristalografía geométrica estudia únicamente las leyes que explican la distribución ordenada de los átomos de un cristal. Y siendo una parte de las matemáticas estudia el problema con la máxima generalidad posible. No se limita así a la cristalografía tridimensional. Estudia como hemos dicho más arriba la cristalografía plana euclidiana: diseños planos simétricos tales como teselaciones, mosaicos, alicatados etcétera. Y también, la cristalografía euclidiana en dimensión superior a tres. Pasa a otros espacios más generales que el plano euclidiano en los que también hay distribuciones simétricas de puntos, tales como las esferas y los espacios hiperbólicos (de todas las dimensiones) y muchos otros más. La crista-



Figura 2. Espesartina.

lografía en una esfera de dimensión 2 no es otra cosa que el estudio cristalográfico de los cristales idiomorfos tales como los que aparecen en las Figuras 1 y 3. En substancia, la disposición simétrica de las caras de un cristal idiomorfo obedece a unas reglas cristalográficas precisas propias de la esfera.

Históricamente, y como es lógico, primeramente se estudiaron estas estructuras externas de los cristales idiomorfos. Durante muchos años la cristalografía



Figura 3. Diamante.

práctica se estancó en el estudio minucioso de las diferentes formas y hábitos de cristalización de los distintos minerales. Pero más tarde se buscó entender con precisión la estructura interna de los cristales concretos que ofrece la naturaleza (cristalografía euclidiana espacial).

Los átomos de carbono que forman un cristal de diamante (como la asombrosa macla de la Figura 3) se piensan como puntos del espacio euclidiano E^3 . Las leyes que gobiernan la distribución del carbono en el espacio se expresan mediante el llamado *grupo de simetría de la distribución*. Este grupo está formado por todas las isometrías euclidianas que al actuar en E^3 mandan átomos de carbono a átomos de carbono.

Comenzaremos este estudio de la cristalografía comenzando con el análogo problema más fácil de la cristalografía euclidiana plana. Lo ilustraremos con diseños procedentes del arte de Escher y de la Alhambra de Granada.

2. PRELIMINARES

Un grupo cristalográfico es un subgrupo especial del grupo de isometrías euclidianas que a su vez es un subgrupo del grupo de afinidades.

Una **afinidad** $(P|A): E^n \rightarrow E^n$ es una biyección definida como sigue:

$$(P|A)Q := P + A(Q), \text{ para todo } Q \in E^n.$$

donde la **parte traslacional** P es un vector del espacio vectorial \mathbb{R}^n (desde ahora llamado **espacio euclidiano** y denotado E^n) y la **holonomía** A es un automorfismo de E^n . Las afinidades forman un grupo (grupo **afín n-dimensional**, denotado por \mathcal{A}_n) bajo la operación de composición de aplicaciones. Se comprueba que

$$(P|A)(Q|B) = ((P|A)Q|AB) = (P + A(Q)|AB)$$

y

$$(P|A)^{-1} = (-A^{-1}(P)|A^{-1}).$$

Las afinidades de la forma $(P|I)$, donde I es la identidad, se llaman traslaciones. Nosotros identificaremos la traslación $(P|I)$ con el punto (vector) P : es decir $(P|I) \equiv P$.

El origen de E^n lo representaremos por O .

El **grupo de isometrías (euclidianas)** de E^n , $\text{Iso}(E^n)$, es por definición el subgrupo de afinidades con parte lineal ortogonal.

Una **red** es un subgrupo R de traslaciones de E^n cuyos miembros (identificados a vectores) son las combinaciones lineales con coeficientes enteros de n vectores linealmente independientes.

Un grupo G de isometrías de E^n es un **grupo cristalográfico** si su subgrupo de traslaciones es una red.

La colección de holonomías de los elementos del grupo cristalográfico G forman un subgrupo (**grupo de holonomía** de G), que denotaremos G_∞ , del grupo ortogonal $O(n)$ (isometrías que fijan el origen O de E^n).

Por ejemplo, el grupo de isometrías que fijan globalmente una red R es un grupo cristalográfico (de red R). El grupo de holonomía de este grupo cristalográfico es por tanto el subgrupo de $O(n)$ que fija globalmente R . Lo denotaré mediante R_∞ y lo llamaré **grupo de holonomía de la red R** .

El grupo G_∞ actúa en (E^n, R, O) . Es decir, G_∞ es un **subgrupo de R_∞** . En efecto, sea P un punto de R . Entonces, por definición, la traslación $(P|I)$ pertenece a G . Sea A un miembro de G_∞ ; es decir, existe cierto miembro $(Q|A)$ de G . Ahora bien

$$(Q|A)(P|I)(Q|A)^{-1} = (Q + A(P) - AA^{-1}(Q)|I) = (A(P)|I)$$

pertenece a G . Como $(A(P)|I)$ es una traslación, $A(P)$ pertenece a R . Esto significa que A deja invariante globalmente a R fijando O como queríamos demostrar.

Entonces G_∞ actúa en cada bola B centrada en O fijando globalmente el conjunto finito $B \cap R$. Si B se elige lo suficientemente grande como para contener en su interior una base de R , entonces G_∞ se representa como un subgrupo del grupo de permutaciones del conjunto finito $B \cap R$. Entonces G_∞ es un **subgrupo finito del grupo ortogonal $O(n)$** . Por tanto también todo R_∞ es finito.

La acción de la red R de traslaciones de G en E^n define un espacio cociente que es un toro T_G euclidiano. Sus elementos $P+R$ los denotaremos por $[P]$.

El grupo G_∞ actúa en el toro T_G como sigue. Si $A \in G_\infty$ la acción de A en $[Q] \in T_G$ viene dada por $A \circ ([Q]) = [AQ]$. Está bien definida porque $A(R) = R$. Esta es la **acción sinmórfica de G_∞ en el toro T_G** . Esta acción fija el origen $[O]$ del toro T_G .

Pero el grupo G_∞ actúa en el toro T_G de otro modo como sigue. Si $A \in G_\infty$ existe cierto $(P|A) \in G$. Entonces la acción de A en $[Q] \in T_G$ viene dada por $A([Q]) = [P + AQ]$. Está bien definida porque si $(P|A) \in G$ entonces $P - P' \in R$. Esta es la **acción natural de G_∞ en el toro T_G** . Esta acción no fija necesariamente el origen $[O]$ del toro T_G .

Un grupo G para el que ambas acciones (sinmórfica y natural) coinciden se llama **sinmórfico**.

Dos grupos cristalográficos G y G' son **aritméticamente equivalentes** si G y un conjugado de G' dentro del grupo afín, poseen la misma acción natural.

Dos grupos cristalográficos conjugados dentro del grupo afín (resp. de homeomorfismos de E^n) se dicen **afinmente** (resp. **topológicamente**) **equivalentes**.

El problema básico de la cristalografía geométrica es, para cada dimensión $n \geq 1$, hallar representantes de esta clasificación afín.

3. LA CRISTALOGRAFÍA GEOMÉTRICA: EL ENFOQUE CLÁSICO FRENTE AL TOPOLÓGICO

El diseño de la Figura 4 de Escher puede interpretarse como una disposición ordenada plana susceptible de ser extendida en todas direcciones hasta el infinito. Y así lo supondremos siempre en esta conferencia. Imaginemos que sobre este diseño colocamos una transparencia en la que hemos dibujado con tinta los bordes de las golondrinas. Podemos mover la transparencia de muchas maneras de modo que se mantenga la superposición. Por ejemplo, podemos **trasladar** la transparencia enviando una golondrina a la que está



Figura 4. Golondrinas y avispas.

dos pasos más arriba. Al hacerlo así, la superposición se mantiene. La colección de todos los posibles movimientos de la transparencia que mantienen la superposición es lo que se llama **grupo de simetría** del diseño. Este grupo, como hemos visto, contiene **traslaciones**. También podemos (y esto es más difícil de creer) dar la vuelta a la transparencia y superponerla al diseño. Al hacerlo así, las golondrinas que vuelan a derecha pasan a ser golondrinas que vuelan a izquierda. Este movimiento de la transparencia decimos que es **inverso** porque lo podemos interpretar como la combinación de la reflexión en una recta (vertical) y una traslación (o **reflexión sesgada**). Se dice también que es un elemento del grupo de simetría del diseño que **invierte su orientación**. Las traslaciones del diseño preservan su orientación y por eso las llamamos **directas**.

En este diseño el grupo de simetría G sólo contiene traslaciones y reflexiones sesgadas. Las traslaciones del grupo forman lo que llamamos el **subgrupo de traslaciones**, denotado G_o . Este subgrupo lo podemos visualizar fácilmente señalando los ojos de todas las avispas que vuelan a derecha. Porque si fijamos un par de estos ojos hay exactamente dos traslaciones que los superponen, ambas mutuamente **inversas** una de la otra (en un grupo, todo elemento x posee un inverso y ; este elemento y , combinado con x produce la así llamada superposición **identidad 1**, es decir la super-

posición que consiste en no mover la transparencia). La colección R de todos estos ojos de avispas a derecha es lo que denominamos una **red**. Ella describe exactamente cuáles son las traslaciones del diseño; es decir, ella **define** el subgrupo G_o . Decimos que R es la **red del diseño**.

La red del diseño es muy importante, porque si cortamos del diseño un paralelogramo cuyos vértices están en R , cuidando que tenga **área** mínima, entre todos los posibles paralelogramos de este tipo, habremos construido lo que los cristalógrafos llaman una celda unidad. Nosotros podemos reconstituir todo el diseño infinito sin más que colocar lado a lado infinitas réplicas de la celda unidad. En el diseño de la Figura 4 el lector puede hallar por sí mismo distintas celdas unidad (todas de igual área). Una de ellas, muy sencilla, es un rectángulo cuya área es la suma del área de dos golondrinas y de dos avispas (Figura 5).

Fijémonos ahora en la Figura 5. Pensemos en ella como una baldosa que denotaré C . Y ahora observamos que si bien las golondrinas que están en la baldosa pueden superponerse mediante una reflexión sesgada del diseño, ellas **no** pueden superponerse mediante un elemento de simetría de la baldosa. En efecto, el grupo de simetría de la baldosa C (con su diseño) consta únicamente del elemento identidad 1; es decir, el único movimiento de la baldosa que superpone su diseño es el que no mueve nada. En otras palabras, la simetría del diseño global **no** proviene de la simetría del diseño inducido en esta baldosa. El lector puede comprobar que lo mismo ocurre para



Figura 5. Celda unidad.

cualquier baldosa que se pueda considerar. Más adelante daremos un criterio que asegura esto de modo sencillo.

Debemos distinguir cuidadosamente la **simetría de la baldosa** de la **simetría del diseño inducido en la baldosa**. Por ejemplo, las dos baldosas siguientes (sin ningún dibujo, Figuras 6 y 7) poseen la simetría de un cuadrado: este grupo, llamado grupo diédrico de orden 8, y denotado D_4 , consta de ocho elementos: la identidad 1; cuatro reflexiones (en las diagonales y alturas del cuadrado); y giros de 90° , 180° y 270° .

Pero si ponemos diseños, como en las figuras, la simetría en general se rebaja: si el diseño lo representamos por d y la baldosa por C , la simetría del par (C, d) es un subgrupo de la simetría de la baldosa. Por ejemplo si d es la letra R (letra totalmente asimétrica) la simetría del par (C, d) es el grupo trivial (formado del elemento identidad 1). Para el diseño d_1 de la primera baldosa (Figura 6) el grupo de (C, d_1) es el subgrupo D_2 de D_4 , generado por las reflexiones en las diagonales de C . Pero para el diseño d_2 de la segunda baldosa (Figura 7) el grupo de (C, d_2) es el subgrupo C_4 de D_4 , generado por la rotación de 90° en el centro de C .

Tomemos ahora un segundo diseño escheriano (Figura 8). El grupo G de simetría del diseño, además

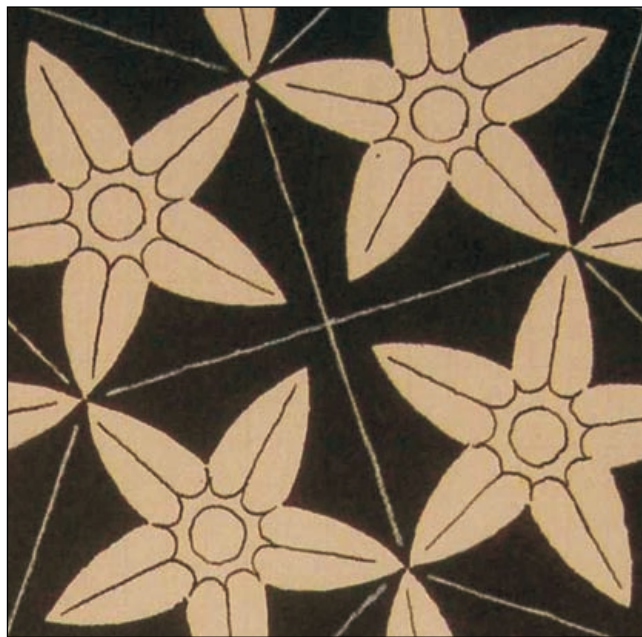


Figura 7. Flores.

de traslaciones y reflexiones sesgadas como antes, contiene reflexiones y giros de 180° . Estos giros son interesantes porque los hay de tres tipos: con centros verdes, amarillos y rojos. Esto quiere decir que dados dos centros de igual color hay un elemento del grupo de simetría que manda uno al otro; pero no hay tal elemento si ellos tienen distinto color. Observamos también que por los centros amarillos y rojos pasan ejes de reflexión, pero eso no ocurre para los verdes.

Una celda unidad C aparece en la Figura 9 junto con el diseño (C, d) inducido por Figura 8. Pero en este

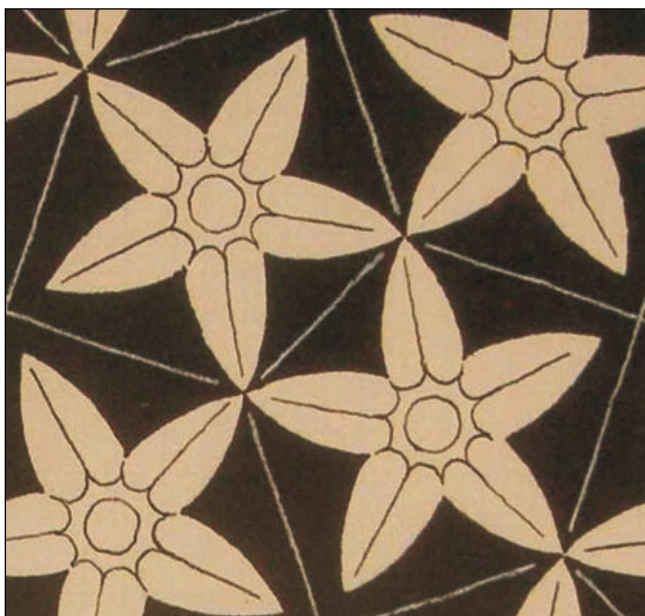


Figura 6. Flores.

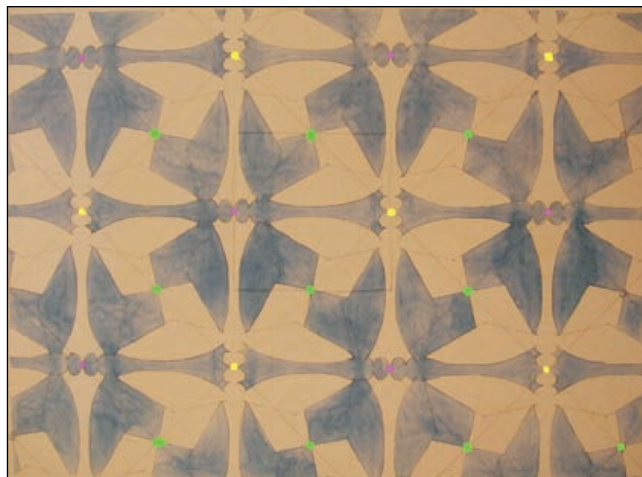


Figura 8. Mariposas.

diseño, en contraste con el diseño de la Figura 4, la simetría sí proviene de la simetría de (C, d) : el “diseño inducido en *esta* baldosa”.

El grupo de simetría de la baldosa (sin diseño) C , que denotaremos desde ahora $St(C)$, es el grupo D_4 de simetría de un cuadrado. El grupo de simetría del diseño (C, d) inducido en la baldosa (grupo que denotaremos desde ahora por $G|_C$) es el subgrupo D_2 de $St(C) = D_4$, generado por dos reflexiones en ejes mutuamente ortogonales que pasan por los vértices de la baldosa. **Este grupo $G|_C$ junto con las traslaciones del diseño genera todo el grupo de simetría G del diseño.** Un grupo de simetría G de un diseño que tenga esta propiedad se llama **sinmórfico**, porque la simetría inducida en la baldosa se transmite por las traslaciones del grupo a todos los puntos de la red R definida por el centro de la baldosa, y así el diseño es el mismo en torno a los puntos de esta red (“sinmórfico”, es decir “con forma común”). Esto no ocurre con el diseño de la Figura 4, cuyo grupo de simetría se dice **asimórfico**. Esta dicotomía sinmórfico-asimórfico es lo que hace difícil (e interesante) el estudio de los grupos de simetría de los diseños.

Veamos todavía un tercer ejemplo que servirá para remachar estas ideas. En la Figura 10 vemos las dos baldosas, una verde V y otra amarilla A , estudiadas más arriba. Sabemos que $G|_V = D_2$ y que $G|_A = C_4$. El grupo $G|_V = D_2$ no puede, junto con las traslaciones del diseño, generar todo el grupo de simetría del diseño, porque éste posee una simetría rotacional de orden

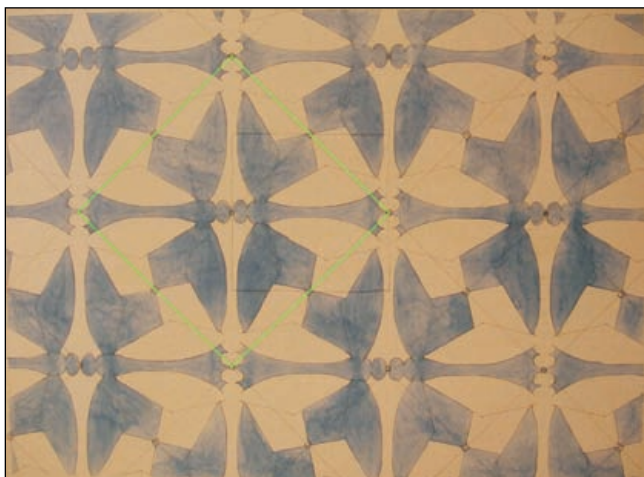


Figura 9. Celda unidad.

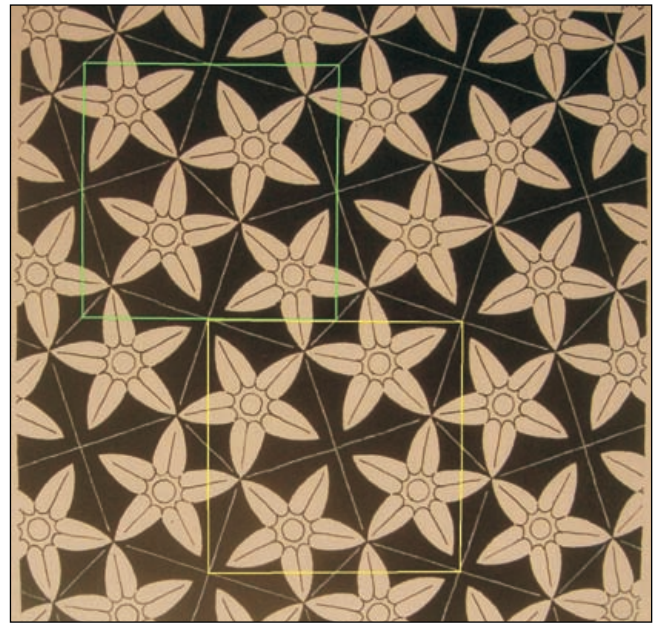


Figura 10. Un grupo asinmórfico: flores y cruces.

cuatro en torno a los centros de las cruces negras. Si tratamos de remediar esto, eligiendo la baldosa amarilla, nos encontramos con que $G|_A$ es cíclico C_4 de orden cuatro generado por la rotación de 90° en torno al centro de la baldosa. Esta rotación genera junto con las traslaciones del diseño un grupo **directo** que no puede coincidir con todo el grupo de simetría del diseño porque este es un grupo **inverso**, pues contiene reflexiones. Pero ¿no habrá una baldosa que posea las propiedades de la amarilla y de la verde combinadas? Para entender que de hecho tal baldosa no existe, necesitamos analizar en profundidad la naturaleza de los elementos de simetría del plano euclidiano: las llamadas isometrías planas.

Toda isometría plana h envía la circunferencia unidad S (que pensamos como un círculo de radio 1 centrado en un punto O , fijado para siempre desde ahora y que llamamos **origen** del plano euclidiano) a otra circunferencia S' de radio 1 y centrada en algún punto, sea O' . Si ahora trasladamos el plano sobre sí mismo enviando O' a O , la circunferencia S' se superpondrá a la circunferencia S y esta combinación de nuestra isometría con esa única traslación moverá S sobre sí misma. Este movimiento de S se llama la **holonomía** de h y se denota h_∞ . Este h_∞ sólo puede ser un giro de cierto ángulo o una reflexión en algún diámetro de S . Desde luego se aprecia que la isometría h es directa si h_∞ es giro; e inversa, si es reflexión.

Empleando la notación de la Sección 2, $h=(P|A)$ entonces $h_x=(O|A)$.

Por eso la **holonomía de una traslación** $(P|I)$ es la **identidad** I .

La colección de holonomías de los elementos del grupo de isometrías G de un diseño forman un grupo de movimientos de S que denotaremos G_∞ .

Si G es simmórfico, G_∞ es un subgrupo de G .

En efecto, por ser G simmórfico, hay una celda unidad C tal que $G|_C$ junto con el grupo T de todas las traslaciones del diseño genera todo el grupo de simetría G de éste. Como la holonomía de una traslación es la identidad, necesariamente la holonomía G_∞ de G coincide con la holonomía del subgrupo $G|_C$ de G . Pero la holonomía de $G|_C$ coincide con todo $G|_C$ porque este subgrupo fija el centro O de C . (Esto resuelve nuestro problema del diseño de la Figura 10. El grupo G de simetría de este diseño no es simmórfico porque G_∞ es el grupo diédrico D_4 de orden ocho, generado por rotación de S de 90° y una reflexión, y es fácil ver que este G_∞ no es subgrupo de G . Tampoco es simmórfico el grupo G de simetría de la Figura 4 porque G_∞ es el grupo diédrico D_2 de orden dos, generado por una reflexión, y es fácil ver que este G_∞ no es subgrupo de G .)

Recíprocamente, **si G_∞ es un subgrupo de G entonces G es simmórfico**. En efecto, si G_∞ es un subgrupo de G es que hay un punto, sea O , de E^2 que es dejado fijo por G_∞ . Sea $h=(P|A)$ un miembro cualquiera de G . Como la holonomía $h_x=(O|A)$ de $h=(P|A)$ pertenece por hipótesis a G_∞ , entonces $h \circ h_x^{-1}$ pertenece a G . Pero $h \circ h_x^{-1}=(P|A)(O|A^{-1})=(P|I)$ es una traslación (de G). Esto implica que G está generado por G_∞ y por su subgrupo T de traslaciones. Más concretamente $G=TG_\infty$. Si ahora construimos una celda unidad C centrada en O tal que $G|_C=G_\infty$ entonces G es simmórfico.

Construyamos esa celda unidad o baldosa. Nos fijamos en la red R generada por T actuando en O ; es decir, esta red es el resultado de mover O mediante todas las traslaciones de G (escribimos que $R=TO$). También es cierto que $R=GO$ porque $G=TG_\infty$ y como G_∞ no mueve O , es $R=TO=TG_\infty O=GO$. Esto implica

que todo elemento h de G fija globalmente R , $h(R)=R$, porque $hGO=GO$. (Se dice que la órbita de O mediante G es R). Tomamos, para cada P en R el semiplano que contiene a O y limitado por la mediatriz del segmento OP . La intersección de todos estos semiplanos cuando P recorre todo R es la deseada celda unidad C . En efecto, ella es invariante bajo la acción de G_∞ (porque G_∞ fija el par (R,O)). Además ella y sus réplicas TC cubren E^2 sin solapamientos. La celda unidad C así construida se suele llamar **celda de Voronoi de G con respecto a O** .

Notamos que $St(C)$ contiene como sugrupo a G_∞ .

Veamos ejemplos.

El diseño de la Figura 11 tiene holonomía $G_\infty=D_3$. Buscamos un punto O que es dejado fijo por $G_\infty=D_3$. Tal punto existe: el centro del hexágono amarillo de la Figura 11. Por tanto este grupo es simmórfico. La celda de Voronoi de G con respecto a O es la celda unidad amarilla de la Figura 11. (Por el contrario, la celda unidad (hexagonal) verde de la Figura 12 tiene como grupo de simetría C_3 , el subgrupo cíclico de isometrías directas de D_3).

El método clásico de obtener todos los posibles grupos de simetrías de diseños (planos) o grupos cristalográficos planos consiste en hallar todas las



Figura 11. Abejas.



Figura 12. Abejas.

posibles celdas de Voronoi (o todas las posibles redes) y clasificarlas según sus grupos de simetría. A partir de aquí obtener todos los grupos simórficos. Finalmente el problema se reduce a inventar un método que permita obtener los esquivos grupos asimórficos. Esto se encuentra en todos los libros clásicos de cristalografía (ver, por ejemplo, [3], [2]).

El método topológico comienza con la observación clave siguiente (Figura 5). Es verdad que el diseño inducido en la celda unidad C tiene grupo de simetría el grupo trivial formado del único elemento identidad, pero si imaginamos el lado izquierdo (resp. inferior) de la celda unidad identificado con el derecho (resp. superior) mediante una traslación, como en algunos videojuegos, entonces el paso de una golondrina verde a la otra es un verdadero movimiento de este nuevo espacio con identificaciones.

Este nuevo espacio T_C es lo que los topólogos llaman **toro euclidiano**. Puede visualizarse como sigue. Pensamos en la celda unidad C de la Figura 5 hecha de fina goma elástica. La doblamos por la mitad y pegamos el lado derecho con el izquierdo. Doblamos esto por la mitad para pegar la base con la tapa. El resultado T_C es una superficie sin borde, orientable, de género 1: un toro. Además localmente no se distingue del plano euclidiano: un toro euclidiano. En este toro vemos el diseño de golondrinas y avispas: dos golon-

drinas y dos avispas. El grupo de simetría de este diseño es isomorfo al grupo $G_\infty = D_1$. El elemento no trivial es involutivo (repetido dos veces es la identidad) y consiste en una reflexión sesgada sobre el toro. No decimos pues que el grupo de simetría del diseño de T_C tenga que fijar un punto, como hace G_∞ en E^2 , solo decimos que un grupo isomorfo a G_∞ es el grupo de simetría del diseño en T_C .

Se tiene el sorprendente resultado general siguiente. No importa cuál sea la celda unidad C elegida en un diseño gobernado por un grupo cristalográfico G , tanto si $G|_C$ es igual o diferente a G_∞ , el grupo de simetría del diseño en el toro T_C (definido por C) es isomorfo a G_∞ .

Por eso el estudio de los grupos cristalográficos euclidianos coincide con el estudio de los grupos finitos (sin traslaciones) de simetría de los toros euclidianos.

Que el grupo es “sin traslaciones” significa lo siguiente. Si tomamos como celda C para el diseño de Figura 4 una de área no mínima (ver Figura 13), entonces la simetría que el diseño induce en el toro T_C contiene traslaciones del toro. Pero si la celda es unidad, no hay traslaciones.

4. LAS CELDAS DE VORONOI

El método más rápido para obtener las posibles celdas de Voronoi en el plano (y espacio) es el ideado por Delaunay.



Figura 13. Doble celda.

Si R es la red de un diseño, y O, P son puntos de R entonces tanto la traslación OP como la PO pertenecen a la red R de traslaciones del diseño. Por eso R es centrosimétrica con respecto a O (y a P , claro). Y como consecuencia la celda de Voronoi $C(O)$ de R con respecto a O es centrosimétrica. Puede demostrarse además que el segmento que une el centro de $C(O)$ con el centro de un lado es perpendicular al lado. Luego las mediatrices de los lados del polígono pasan por el centro O de $C(O)$. Luego el polígono $C(O)$ es inscrito a un círculo. Veremos que **un dominio de Voronoi plano es un cuadrilátero o un hexágono inscrito en un círculo cuyo centro es también centro del polígono** (Figure 14).

Tomemos dos lados paralelos de $V=C(O)$. Los centros de esos lados son $\pm P/2, P \in R$. Los trasladados V_i de V mediante los múltiplos enteros mP de P son polígonos inscritos en círculos C_i que se disponen en una hilera o estrato $E_0 = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} V_i$ en donde V_i es adyacente a V_{i+1} a lo largo de un lado. Estos lados de adyacencia son cuerdas D_i de los círculos C_i ; son perpendiculares a la línea recta r generada por OP ; son simétricos con respecto a r ; y están igualmente espaciados sobre r . Así que sus intersecciones con la recta r teselan r (la teselación, digamos, “verde”). Entonces E^2 queda teselado por estratos $E_n, n \in \mathbb{Z}$, trasladados del E_0 por los múltiplos nS de un vector $S \in R$. El estrato adyacente al E_0 es el $E_1 = S + E_0$. En él las cuerdas $S + D_i$ teselan $S + r$. Estas cuerdas prolongadas cortan a r en una teselación “roja” que viene de la verde por traslación de vector la proyección xP de S sobre r , para algún número real x . Se comprende ahora inmediatamente que una de dos:

- la teselación roja coincide con la verde: la celda de Voronoi V_0 es un rectángulo inscrito en C_0 .
- la teselación roja no coincide con la verde. Las cuerdas $S + D_i$ tocan cada una a un sólo círculo C_i en un punto. Este punto, su antípoda y dos cuerdas de $D_i \subset C_i$ definen un hexágono centrosimétrico inscrito en C_i . Esta es la celda de Voronoi.

Si $V=C(O)$ es una celda de Voronoi de una red R con respecto a un punto O de R , denotaremos mediante $St(V)$ o $St(R, O)$ al grupo de simetría de la celda V . Puede demostrarse que este grupo coincide con el grupo de isometrías que dejan globalmente invariante

a R y fijan O (de ahí la notación $St(V)=St(R, O)$). (Leeremos $St(V)$ como “estabilizador de V ”).

5. LAS POSIBLES REDES Y HOLONOMÍAS PLANAS

No es difícil clasificar las celdas de Voronoi planas V a menos de afinidad que preserva $St(V)$. Hay los cinco tipos P, C, O, H, S de la Figura 14. Dos de tales celdas V_1, V_2 están en la misma clase si y sólo si hay una afinidad ϕ que envía una a la otra, $\phi(V_1)=V_2$, y manda el grupo de simetría de una al de la otra,

$$St(V_2) = \phi St(V_1) \phi^{-1}.$$

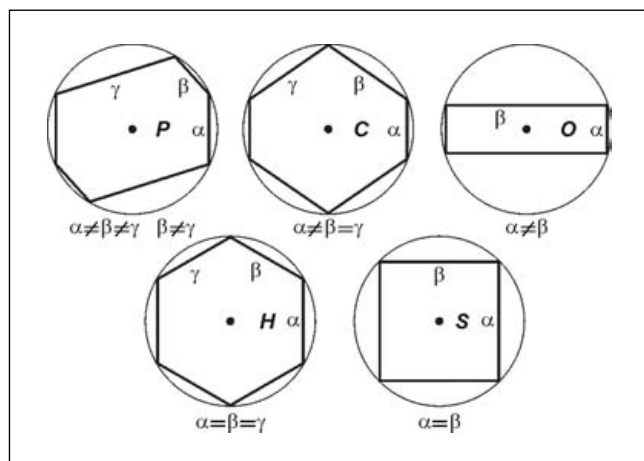


Figura 14. Celdas de Voronoi en el plano.

Estos cinco tipos corresponden a los cinco tipos de redes P, C, O, H, S que vemos en la Figura 15.

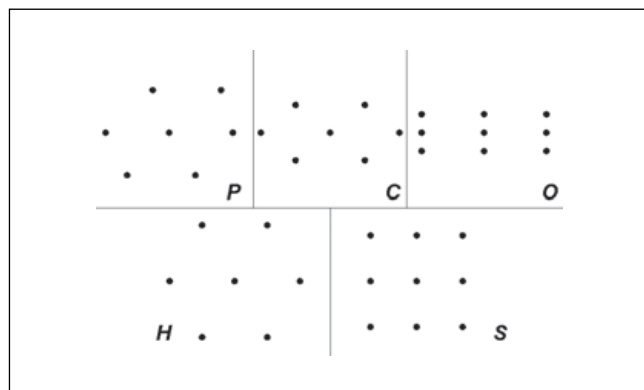


Figura 15. Clases de redes planas.

Los estabilizadores $St(R,O)$ de las redes **P**, **C**, **O**, **S**, **H** (que coinciden con los grupos de simetría de los dominios de Voronoi P , C , O , S , H correspondientes) con sus correspondientes subgrupos aparecen en la siguiente tabla:

<u>Redes R</u>	<u>Grupo $St(R,O)$</u>	<u>Subgrupos</u>
P	C_2	C_1
C	D_2	C_2, D_1, C_1
O	D_2	C_2, D_1, C_1
S	D_4	C_4, D_2, C_2, D_1, C_1
D	D_6	$C_6, D_3, C_3, D_2, C_2, D_1, C_1$

Si G es un grupo cristalográfico y R es la red de G que contiene al origen O , entonces G_∞ es un subgrupo de $St(V)=St(R,O)$.

No decimos que G_∞ sea un subgrupo de G , esto sólo ocurre para los G simmórficos. Pero sí decimos que G_∞ (que por definición actúa fijando la circunferencia S centrada en O) es tal que también fija globalmente a R .

En efecto, sea P un punto de R . Entonces, por definición, la traslación $(P|I)$ pertenece a G . Sea h_∞ un miembro de G_∞ ; es decir, $h_\infty=(Q|A)$ es la holonomía de cierto miembro $h=(Q|A)$ de G . Ahora bien $(Q|A)(P|I)(Q|A)^{-1}=(Q+A(P)-AA^{-1}(Q)|I)=(A(P)|I)$ pertenece a G . Como $(A(P)|I)$ es una traslación, $A(P)$ pertenece a R . Esto significa que A deja invariante globalmente a R fijando O . Es decir G_∞ es un subgrupo de $St(V)$ como queríamos demostrar.

Deducimos de aquí que las posibles redes R y las posibles holonomías G_∞ de los grupos cristalográficos planos están determinadas por las posibles celdas de Voronoi.

Hemos pues demostrado el siguiente **Teorema**:

Las posibles holonomías G_∞ de los grupos cristalográficos planos son los subgrupos de $O(2)$ que dejan invariante un hexágono regular o un cuadrado, inscritos en el círculo de radio 1. Estos son cinco cíclicos: C_6, C_4, C_3, C_2, C_1 ; y cinco diédricos D_6, D_4, D_3, D_2, D_1 .

Una importante consecuencia de este teorema es la celebrada “restricción cristalográfica”: **los órdenes posibles de los elementos de un grupo de holonomía de un grupo plano son 1, 2, 3, 4, 6.**

A estos grupos de holonomía se les llama clásicamente **grupos puntuales**. Entonces se suele decir que dos grupos cristalográficos pertenecen a la misma **clase geométrica** si y sólo si sus holonomías coinciden (salvo conjugación). **Hay pues 10 clases geométricas planas.**

6. DETERMINACIÓN DE LOS GRUPOS SINMÓRFICOS PLANOS

También podemos hallar ahora todos los grupos sinmórficos planos. En efecto si G es sinmórfico hay un punto (origen) O estabilizado por G_∞ . Sea R la red TO donde T es el subgrupo de traslaciones de G . Entonces como $G=TG_\infty$, los miembros de G son todas las parejas $(P|A)$ donde P es un punto de R y $(O|A)$ es un miembro de G_∞ . En efecto $(P|A)=(P|I)(O|A)$.

Por tanto para cada celda de Voronoi R (o para cada red **R** de la Tabla anterior) y cada clase de conjugación H de subgrupos de $St(R)=St(R,O)$ de la Tabla anterior podemos construir el grupo sinmórfico **RH** y estos son todos los grupos sinmórficos. Hay un número finito de posibilidades.

Pero vemos enseguida que varios de estos grupos están repetidos (salvo afinidad). Por ejemplo todos los grupos **RC₁** son afinmente equivalentes. Así por ejemplo, **PC₁**, construido con la red **P**, es el grupo de un diseño obtenido colocando en la celda de Voronoi P un motivo asimétrico y dibujando todas sus réplicas bajo la acción de las traslaciones de la red **P**. El grupo del diseño así obtenido sólo contiene traslaciones y puede identificarse con la red **R**.

Las repeticiones pueden detectarse laboriosamente, llegando a deducir que **hay exactamente trece grupos sinmórficos**. En dimensión tres es más laboriosa todavía esta detección de repeticiones. Por eso, en lugar de acoplar a cada red los posibles subgrupos compatibles con ella, es más práctico tomar el punto de vista dual. Es decir asociar a cada grupo las redes compatibles con él. Definamos pues que una red R es

compatible con un grupo puntual H si algún conjugado de H en el grupo ortogonal $O(2)$ es subgrupo de $St(R, O)$. A la colección de redes compatibles con un cierto H la denotaré $\mathcal{L}(H)$ y entonces diré que **dos grupos puntuales H y H' son retimorfos si y sólo si ellos poseen las mismas redes compatibles**, esto es: $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(H')$. Naturalmente que si H y H' son conjugados en $O(2)$ ellos son retimorfos.

Contemplando la tabla anterior podemos clasificar los grupos puntuales planos en precisamente cuatro clases de grupos mutuamente retimorfos, cuyos nombres (“clásicos”, ver Nota más abajo) están indicados. Observamos que cada clase \mathcal{S} posee exactamente un grupo maximal $G(\mathcal{S})$ que denominaremos **grupo maximal de \mathcal{S}** . En la tabla aparecen las redes $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ compatibles con todos los grupos de una misma clase.

<u>Grupos de \mathcal{S}</u>	<u>$G(\mathcal{S})$</u>	<u>$\mathcal{L}(\mathcal{S})$</u>	<u>Clase \mathcal{S}</u>
C_1, C_2	C_2	P, C, O, S, H	Oblicua
D_1, D_2	D_2	C, O, S, H	Rectangular
C_4, D_4	D_4	S	Cuadrada
C_3, D_3, C_6, D_6	D_6	H	Hexagonal

Nota. La definición de grupos retimorfos es nueva. Ella conduce a la clasificación en las clases \mathcal{S} . Estas clases, en el plano, coinciden con los cuatro sistemas (del mismo nombre) que emplean los cristalógrafos. En dimensión tres el número de clases de grupos retimorfos es siete, y puede verse (comparar [2]) que estas clases coinciden con los siete sistemas que emplean casi todos (pero no todos) los cristalógrafos. El nuevo concepto de grupos retimorfos parece pues dar una alternativa a las definiciones de sistema propuestas hasta ahora. Sin embargo, yo no he analizado en profundidad este asunto.

La estrategia a seguir para encontrar todas los grupos sinmórficos consiste en lo siguiente. Para cada grupo puntual H de la primera columna, representante de una clase cristalina geométrica, clasificaremos frente a afinidades el conjunto

$$\{RH : R \in \mathcal{L}(H)\}.$$

El proceso de clasificación se reduce mucho si primeramente clasificamos frente a afinidades el conjunto

$$\{RG(\mathcal{S}) : R \in \mathcal{L}(\mathcal{S})\},$$

para cada grupo maximal $G(\mathcal{S})$ de las diferentes clases \mathcal{S} , y obtendremos así lo que llamamos **los grupos sinmórficos maximales**.

Consideremos primero la clase oblicua con grupo maximal C_2 . Hay que clasificar frente a afinidades el conjunto $\{RC_2 : R \in \mathcal{L}(C_2)\}$. Es evidente que aquí sólo hay una clase de grupos sinmórficos pues cualquier afinidad que envíe $R_1 \in \mathcal{L}(C_2)$ a $R_2 \in \mathcal{L}(C_2)$ preserva la acción de C_2 en las redes. Tomamos a \mathbf{PC}_2 como representante, donde \mathbf{P} es la concreta red de la Fig.15.

Argumentando como antes para la **clase rectangular** con grupo maximal D_2 , vemos que el conjunto $\{RD_2 : R \in \mathcal{L}(D_2)\}$ posee a lo más dos grupos sinmórficos representados por \mathbf{CD}_2 y \mathbf{OD}_2 . Estos grupos sinmórficos no son afinmente equivalentes, porque en el grupo \mathbf{CD}_2 hay centros de orden dos por los que no pasan ejes de simetría, lo que no sucede en el grupo \mathbf{OD}_2 (ver Fig.15). En efecto, es obvio que en una red son centros de orden dos todos los puntos equidistantes de dos puntos arbitrarios de la red. Pues bien los centros yacentes entre puntos adyacentes diagonales de \mathbf{C} no contienen ejes de simetría.

Las demás clases dan, cada una, un único sinmórfico maximal. Los representamos por \mathbf{SD}_4 y \mathbf{HD}_6 .

Concluimos que para $n=2$ hay exactamente cinco grupos sinmórficos maximales \mathbf{PC}_2 (clase oblicua $\mathcal{S} = C_2$), \mathbf{CD}_2 y \mathbf{OD}_2 (clase rectangular $\mathcal{S} = D_2$), \mathbf{SD}_4 (clase cuadrada $\mathcal{S} = D_4$) y \mathbf{HD}_6 (clase hexagonal $\mathcal{S} = D_6$). Tabulamos esto:

<u>$G(\mathcal{S})$</u>	<u>Sinmórficos maximales</u>	<u>\mathcal{S}</u>
C_2	\mathbf{PC}_2	Oblicua
D_2	$\mathbf{CD}_2, \mathbf{OD}_2$	Rectangular
D_4	\mathbf{SD}_4	Cuadrada
D_6	\mathbf{HD}_6	Hexagonal

Queda ahora por clasificar frente a afinidades el conjunto

$$\{RH: R \in \mathcal{L}(S)\},$$

para cada grupo H de la clase S y esto para toda clase.

Por ejemplo, para la clase rectangular, H es D_1 , subgrupo del maximal D_2 . Entonces RD_1 es subgrupo de RD_2 pues siendo D_1 subgrupo de D_2 y ambos, retimorfos, D_1 y D_2 actúan en la red R . Los sinmórficos maximales de esta clase son dos, CD_2 y OD_2 . La afinidad que envía RD_2 a, sea, CD_2 envía RD_1 a cierto CD_1' donde D_1' es un subgrupo de D_2 isomorfo a D_2 .

Esto quiere decir que para la clase rectangular basta clasificar bajo afinidades los grupos de la forma CD_1' ; OD_1' , donde D_1' recorre todos los subgrupos de D_2 isomorfos a D_1' .

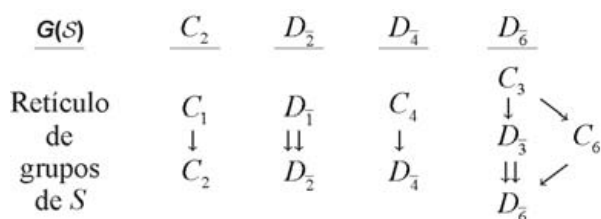
Una reducción más de este problema se consigue al observar que si H_1 y H_2 pertenecen a la clase S y son **conjugados en su grupo maximal** $G(S)$ entonces RH_1 es afinmente equivalente a RH_2 para toda red $R \in \mathcal{L}(S)$. En efecto, sea C el miembro de $G(S)$ que conjugue H_1 a H_2 : $CH_1C^{-1} = H_2$. El elemento C es compatible con todas las redes de $\mathcal{L}(S)$ y por eso $CR = R$. Esto implica que RH_1 es afinmente equivalente a RH_2 .

Ahora ya podemos de modo sistemático clasificar frente a afinidades el conjunto

$$\{RH: R \in \mathcal{L}(S)\},$$

para cada grupo H de la clase S .

Empezamos hallando el retículo de los grupos de cada sistema. Seguiremos un convenio. Un grupo del esquema es subgrupo de uno ligado a él en un nivel inferior. Una ligadura mediante n flechas paralelas indica que el subgrupo posee n copias (no conjugadas dos a dos) en el supergrupo de abajo.



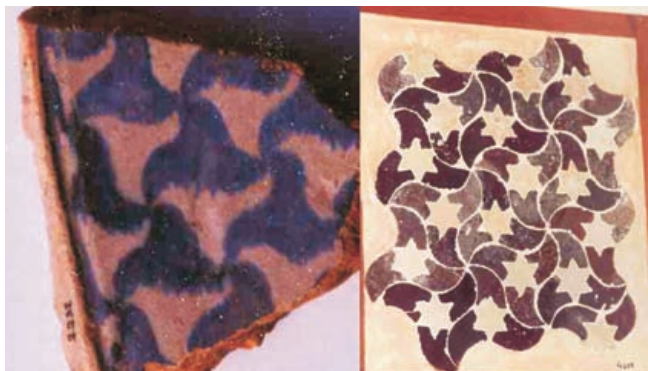
En efecto, el número de copias de D_1 en D_2 y de D_3 en D_6 (no conjugadas) es dos en ambos casos que distinguimos entre sí poniendo una tilde en una de ellas. Así D_3 es el grupo diédrico generado por reflexión en las diagonales de un hexágono regular y D_3' es el grupo diédrico generado por reflexión en las alturas de un hexágono regular. Son dos subgrupos de D_6 isomorfos pero no conjugados. Los grupos sinmórficos OD_1 , OD_1' son afinmente equivalentes. Los grupos sinmórficos CD_1 , CD_1' son también afinmente equivalentes. En ambos casos la afinidad que envía uno a otro es la composición de una rotación de 180° con una homotecia. Por tanto hay un solo grupo sinmórfico no maximal con red O , a saber OD_1' y un solo grupo sinmórfico no maximal con red C , a saber CD_1' . Los sinmórficos HD_3 y HD_3' no son afinmente equivalentes. En efecto, por todos los centros de orden tres del primero pasan ejes de simetría, lo que no ocurre en el segundo. Por tanto sólo existen los siguientes 13 grupos sinmórficos planos:

$G(S)$	Sinmórficos maximales	Sinmórficos no maximales	S
C_2	PC_2	PC_1	Oblicua
D_2	CD_2	CD_1	Rectangular
D_2	OD_2	OD_1	Rectangular
D_4	SD_4	SC_4	Cuadrada
D_6	HD_6	HC_3, HC_6, HD_3, HD_3'	Hexagonal

Se suele decir clásicamente que dos grupos cristalográficos pertenecen a la misma **clase aritmética** si y sólo si sus redes y holonomías son afinmente equivalentes. **Hay pues trece clases aritméticas.**

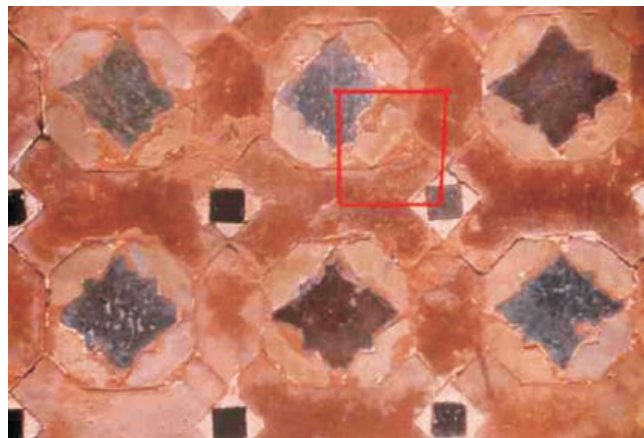
Diseños gobernados por estos grupos son los siguientes (procedentes del arte de Escher y de la Alhambra):



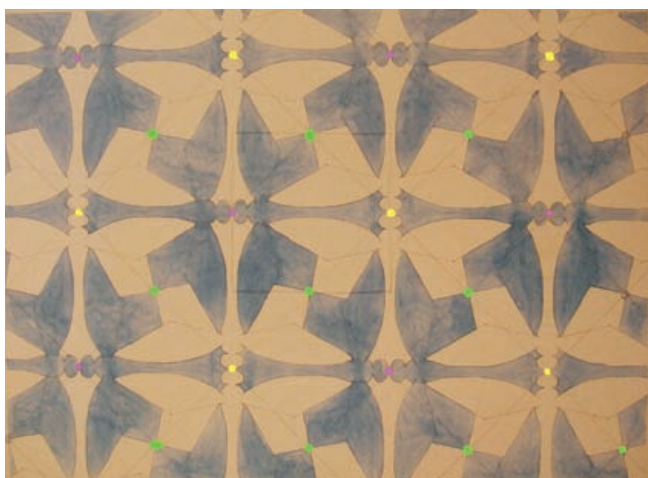


$HC_3 = S333$

$HC_6 = S236$



$OD_2 = D2222$



$CD_2 = D222$



$SD_4 = D244$



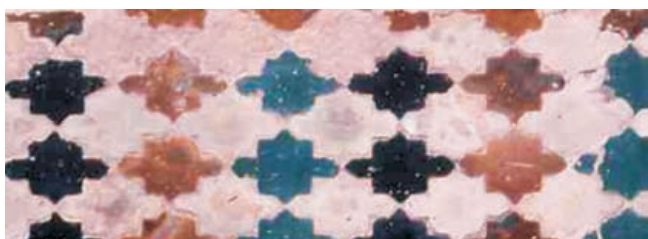
$CD_1 = M$



$HD_6 = D236$

$HD_3 = D333$

$HD'_3 = D33$



$OD_1 = A$

7. LOS GRUPOS ASINMÓRFICOS PLANOS

Conocemos experimentalmente dos con holonomías D_1 y D_4 (Figuras 16 y 17).



Figura 16. K Golondrinas y avispas.

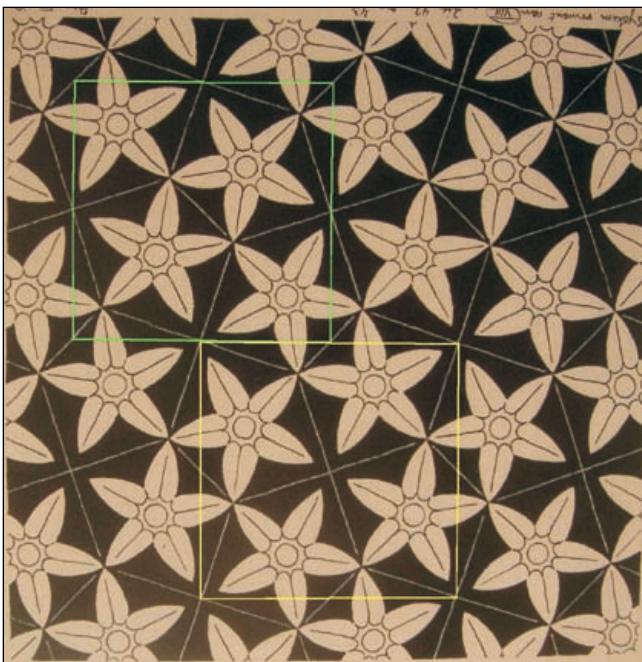


Figura 17. D42 Flores y cruces.

Otros dos (con holonomías D_2) aparecen en las Figuras 18 y 19. Este último procedente de la Puerta del Vino en la Alhambra.

Pero no intentaremos ver el método algebraico que emplean los cristalógrafos para demostrarlo por ser demasiado complicado. Sólo indicaré que sólo pueden

ser asimétricos (en el plano) grupos inversos. Pues la holonomía G_∞ de un grupo directo sólo puede ser cíclica $C_n, n=1, 2, 3, 4, 6$ y esto implica que G contiene un elemento de la forma $(P|A)$ con A una rotación de orden n de centro O . Como $(P|A)Q = P + A(Q)$ es una rotación de orden n de centro cierto P' , vemos que G contiene a G_∞ como subgrupo y por tanto G es simétrico.

8. EL MÉTODO TOPOLÓGICO

Este método se basa en que G actúa en el toro T_G cociente de E^2 bajo la acción de la red R de traslaciones de G . La acción coincide con la del grupo cociente G/R que es isomorfo a G_∞ . El problema se reduce a hallar los grupos cristalográficos de los toros euclidianos carentes de traslaciones, como dijimos más arriba.

La acción de G en E^2 define un espacio topológico cociente E^2/G que es una superficie con borde. Ella es también el cociente del toro E^2/R bajo la acción de G_∞ . Como el toro es compacto se deduce que E^2/G es compacta y que G_∞ es finito. En otras palabras, la proyección $p: E^2 \rightarrow E^2/G$ factoriza a través de $q: E^2 \rightarrow E^2/R$. O sea $p: E^2 \rightarrow E^2/R \rightarrow E^2/G$. La



Figura 18. D22 Cangrejos.



Figura 19. P22 Espina de pez: Alhambra.

segunda aplicación es el cociente del toro $T_G = E^2/R$ bajo cierta acción de G_∞ .

Decoramos la superficie $S := E^2/G$ como sigue. Asignamos el número entero $n > 1$ a cada punto x de S que es imagen de un punto de E^2 que es fijado por un subgrupo de G , cíclico de orden n . Asimismo asignamos el símbolo \bar{n} a cada punto x del (borde de) S que es imagen de un punto de E^2 que es fijado por un subgrupo de G , diédrico de orden $2n$.

Simbolizamos esta superficie decorada mediante

$$(\pm, g, f | c_1, \dots, c_m; \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$$

donde \pm indica si es o no orientable; g es su género; y f es el número de componentes del borde de S .

Como existe la aplicación de grado finito h siguiente:

$$r: T_g \rightarrow S$$

vale la siguiente fórmula:

$$\xi(T_G) = h\xi((\pm, g, f | c_1, \dots, c_m; \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n))$$

donde ξ es la característica de Euler, adecuadamente definida para una superficie decorada:

$$\begin{aligned} \xi(\pm, g, f | c_1, \dots, c_m; \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) &= \\ &= 2 - f - A + \sum \left(\frac{1}{c_i} - 1 \right) + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{1}{e_i} - 1 \right); \end{aligned}$$

donde A es $2g$ si S es orientable y g en caso contrario.

Siendo T_G un toro es $\xi(T_G) = 0$.

Por tanto una **condición necesaria para que** $(\pm, g, f | c_1, \dots, c_m; \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ **sea el cociente de E^2 bajo la acción de un grupo cristalográfico es que**

$$2 - f - A + \sum \left(\frac{1}{c_i} - 1 \right) + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{1}{e_i} - 1 \right) = 0$$

Caso 1 S es orientable.

Caso 1.1 Si $g > 1$ no hay solución.

Caso 1.2 Si $g = 1$ entonces $f = m = n = 0$. $S = (+, 1, 0)$ es un toro T .

Caso 1.3 Si $g = 0$ entonces $f \leq 2$

Caso 1.3.1 Si $f = 2$ entonces $m = n = 0$. $S = (+, 0, 2)$ es un anillo A .

Caso 1.3.2 Si $f = 1$ entonces S es un disco D :

Caso 1.3.2.1 Si $m = 0$ entonces S sólo puede ser

$$\begin{aligned} (+, 0, 1 | -; \bar{2}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{2}) &:= D\bar{2}\bar{2}\bar{2}\bar{2} \\ (+, 0, 1 | -; \bar{2}, \bar{3}, \bar{6}) &:= D\bar{2}\bar{3}\bar{6} \\ (+, 0, 1 | -; \bar{2}, \bar{4}, \bar{4}) &:= D\bar{2}\bar{4}\bar{4} \\ (+, 0, 1 | -; \bar{3}, \bar{3}, \bar{3}) &:= D\bar{3}\bar{3}\bar{3} \end{aligned}$$

Caso 1.3.2.2 Si $m > 0$ entonces S sólo puede ser

$$\begin{aligned} (+, 0, 1 | 2, 2) &:= D22 \\ (+, 0, 1 | 2; \bar{2}, \bar{2}) &:= D2\bar{2}\bar{2} \\ (+, 0, 1 | 3; \bar{3}) &:= D3\bar{3} \\ (+, 0, 1 | 4; \bar{2}) &:= D4\bar{2} \end{aligned}$$

Caso 1.3.3 Si $f = 0$ entonces $n = 0$ y se tiene que S es una esfera

$$(+, 0, 0|2, 2, 2, 2) := S2222$$

$$(+, 0, 0|2, 3, 6) := S236$$

$$(+, 0, 0|2, 4, 4) := S244$$

$$(+, 0, 0|3, 3, 3) := S333$$

Caso 2 S no es orientable.

Caso 2.1 Si $g > 2$ no hay solución.

Caso 2.2 Si $g = 2$ entonces $f = m = n = 0$. $S = (-, 2, 0)$ es la botella de Klein K .

Caso 2.3 Si $g = 1$ entonces

Caso 2.3.1 Si $f = n = 0$ entonces $S = (-, 1, 0|2, 2) := P22$ donde P es el plano proyectivo.

Caso 2.3.2 Si $f = 1$ entonces $S = (-, 1, 1) := M$ banda de Möbius.

Resumiendo, sólo pueden ser cocientes de grupos cristalográficos planos:

$$\begin{aligned} &T, K, M, A \\ &\overline{S2222}, \overline{D2222}, \overline{D222}, \overline{D22}, \overline{P22} \\ &\overline{S333}, \overline{D33}, \overline{D333} \\ &\overline{S244}, \overline{D42}, \overline{D244} \\ &\overline{S236}, \overline{D236} \end{aligned}$$

La efectiva existencia de estos grupos está en las figuras.

9. CONCLUSIÓN

El método topológico descubre rapidísimamente que a lo más hay 17 espacios topológicos decorados ("orbificies") cocientes de grupos cristalográficos planos. Por inspección de las Figuras anteriores descubrimos que hay exactamente 17. Esto resuelve la clasificación topológica de los grupos cristalográficos planos. Dos subgrupos cristalográficos planos son topológicamente equivalentes si son conjugados por un homeomorfismo del plano E^2 : hay 17 de estos grupos.

El problema restante, más fácil, es demostrar que esta clasificación topológica coincide con la afín. (Decimos que dos subgrupos cristalográficos planos son **afinmente equivalentes** si son conjugados por una afinidad del plano E^2).

Falta pues por demostrar que si dos grupos tienen la misma orbificie cociente, ellos son afinmente equivalentes. Esto se hace caso a caso con facilidad.

Vemos pues que el método topológico (debido a [5]) ha troceado el problema en dos partes. Primera parte: clasificación topológica. Segunda parte: separación afín en cada clase topológica.

Esta división del problema lo hace más tratable. El método clásico trata ambos problemas a la vez; de ahí su premiosidad.

En dimensión tres puede realizarse un programa similar (ver [1]).

10. REFERENCIAS

REFERENCIAS

1. Bonahon, F. y Siebenmann, L. C., Seifert 3-orbifolds and their role as natural crystalline parts of arbitrary compact irreducible 3-orbifolds, Notas multicopiadas, 1983, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay.
2. Buerger, M. J. Elementary Crystallography, Wiley, New York, 1956
3. Burckhardt, J. J. Die Bewegungsgruppen der Kristallographie, 2nd ed. Birkhauser, Basel 1966
4. Montesinos Amilibia, J. M. La Cristalografía Geométrica. En Horizontes Culturales, las fronteras de la Ciencia. Espasa 1999. pp. 97-112
5. Thurston, W. P. The geometry and Topology of 3-manifolds, Lecture Notes, Princeton University (1976-79).