

ARMONÍAS EN LOS CIELOS

ALBERTO GALINDO TIXAIRE *

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Departamento de Física Teórica. Facultad de Ciencias Físicas. Universidad Complutense. 28040 MADRID. agt@fis.ucm.es.

I. INTRODUCCIÓN

El año 2009 ha sido declarado Año Internacional de la Astronomía. Se cumplirán cuatro siglos desde que Galileo perfeccionase el telescopio con el que a finales de 1609 y principios de 1610 apuntó a la Luna y a Júpiter y se percató así de las montañas de aquella y de los satélites que giran en torno al último. En ese momento la astronomía dejaba de ser un mero catálogo de estrellas lejanas y de efemérides planetarias. Lo distante y lo próximo parecían comportarse de igual

modo, por lo que podíamos soñar con explicar científicamente el universo; el sistema geocéntrico debía dejar paso al heliocéntrico.

Vamos a recorrer juntos 25 siglos de exploración cósmica. Veremos cómo concebían los griegos el orden en las cosas. Nos legaron, a través de la *Sintaxis Matemática* de Ptolomeo (más conocida como el *Almagesto*), una imagen del mundo celeste que perviviría casi mil quinientos años. Era una descripción compleja, aunque bastante eficaz. Al Rey Sabio de las Cantigas no le gustaba. Por lo que respecta al mundo estelar, yacía este sobre una esfera, fuera de la cual solo estaba el Motor Primero, que insuflaba movimiento a los interiores de las esferas estelar, planetarias, solar y lunar. Cuando por fin sobrevino el modelo copernicano, cediendo la Tierra su protagonismo al Sol, se ganó en sencillez, pero no en eficacia. Hizo falta romper con el misticismo pitagórico de los círculos y permitir la entrada en escena de las viejas cóncavas de Apolonio de Parga; Kepler nos mostró el camino, tras veinte años de infructuosos intentos por encajar el Sistema Solar en una macla armoniosa de esferas y sólidos platónicos.

Con las tres leyes de Kepler teníamos ya con nosotros la cinemática de los planetas. Nos faltaba el motor dinámico. Llegó con Newton: la ley de la gravitación universal. El sistema newtoniano del mundo empezó siendo finito, pero la inestabilidad gravitatoria de este llevó a Newton a proponer un universo infinito



Figura 1. Logo del Año Internacional de la Astronomía 2009.

* Este texto fue esencialmente escrito en el segundo semestre de 2008. Lo hemos mantenido, con alguna nota de actualización.



Figura 2. Efecto sobre nuestra visión de una zona de la Vía Láctea, de la presencia de un agujero negro (AN) de masa $10 M_{\text{Sol}}$, situado a una distancia $d \approx 600 \text{ km}$ de nosotros (exactamente, a $d = 10R_S$, siendo R_S el radio Schwarzschild de ese AN). A esta distancia, su tirón gravitacional sobre nosotros equivaldría a una aceleración de $\approx 4 \times 10^8 g$. (U. Kraus, www.spacetime.travel.org/expeditions1/expeditions1.html)

y estático. Este modelo de universo sobrevivió 200 años, a pesar de nubarrones como la paradoja de Olbers.

Y llega por fin el siglo XX. El siglo de los quanta y de la relatividad. Aquellos nos abrirán la microfísica, y con ello la posibilidad de conocer los componentes últimos de la materia. La relatividad proporcionará el marco para describir las altas energías, los campos gravitatorios intensos, y las grandes deformaciones que estos producen en el espacio-tiempo, llegando incluso a “pincharlo” en forma de agujeros negros (Fig. 2).

Einstein propone en 1917 un modelo de universo finito, y estático. Para evitar el colapso que tanto espantó a Newton, tiene que introducir una repulsión cósmica. Cuando Hubble descubre la expansión del universo en 1929, Einstein abjura de esa repulsión. Empezaba la cosmología moderna. En 1964 se detecta, por casualidad, la radiación cósmica de fondo, los fotones fósiles de la Gran Explosión que diera origen al universo actual hace 13 700 millones de años. Hoy

esos fotones son la fuente de información más valiosa con que contamos. La sonda espacial COBE empezó a recoger datos de la misma a finales de 1989, y la WMAP, a millón y medio de kilómetros de la Tierra, continúa la misión.

A finales del siglo XX se descubre que la expansión del universo está acelerada. Como mecanismo responsable de su aceleración, se recurre a la repulsión cósmica desechada por Einstein, propiciada en esta ocasión por un fondo uniforme de “energía oscura”. Hoy tenemos datos fiables sobre el contenido energético del universo, compatibles con una geometría espacial plana a gran escala.

Pero tenemos grandes zonas de ignorancia, pues desconocemos cuáles son los ingredientes que integran la materia y energía oscuras.

En esta conferencia analizaremos cómo ha ido cambiando en el tiempo nuestra percepción de las armonías del mundo, nuestra imagen del cosmos, hasta llegar al siglo XX. Del espectacular desarrollo de la cosmología en los últimos cien años versará mi contribución al próximo ciclo de conferencias de este programa.

II. EL UNIVERSO DE LOS GRIEGOS

El firmamento fue un libro en que leían los antiguos en búsqueda de causas para los sucesos de sus vidas particulares y colectivas. Mientras el hombre moderno tan apenas mira las estrellas cegado por las luces de la ciudad,¹ nuestros antepasados gozaron a tope de las noches estrelladas, y los astros y sus constelaciones afloraban hasta en la poesía épica. Homero (siglo VIII a.C.), en el Canto XVIII de la *Ilíada*, hace una pausa en su narración de las batallas para describir literariamente el escudo de Aquiles, salido de la forja de Hefesto (Hephaistós), a petición de la nereida Tetis:

“(478) Hizo lo primero de todo un escudo grande y fuerte, de variada labor, con triple cenefa brillante y reluciente, provisto de una abrazadera de plata. Cinco capas tenía el escudo, y en la superior grabó el dios muchas artísticas figuras, con sabia inteligencia.

¹ Se estima que alrededor de un quinto de la población mundial no puede contemplar la Vía Láctea. (M. Rees, alocución con motivo del Año Internacional de la Astronomía.)

(483) Allí puso la tierra, el cielo, el mar, el sol infatigable y la luna llena; allí las estrellas que el cielo coronan, las Pléyades, las Híades, el robusto Orión y la Osa, llamada por sobrenombre el Carro, la cual gira siempre en el mismo sitio, mira a Orión y es la única que deja de bañarse en el Océano.

(490) Allí representó también dos ciudades de hombres dotados de palabra....”

Del siglo VII a.C. es el poema *Los Trabajos y los Días*, de Hesíodo, conectando las labores agrícolas con el calendario astronómico (fases de la Luna, ciclo anual de salidas y puestas de las estrellas, ciclo anual del Sol). Los filósofos griegos incorporan la astronomía a su análisis (naturaleza de los cuerpos celestes, forma de la Tierra y su posición en el cosmos, movimiento de los astros y sus causas). Aristóteles (siglo IV a.C.) será la figura dominante por su gran y duradera influencia. Para este filósofo:

1. La Tierra está en reposo en el centro del Universo.
2. El Universo es finito e inmutable.
3. Los cuerpos celestes giran en torno a la Tierra con movimientos circulares y uniformes.

Los astrónomos griegos, sin embargo, no se sintieron obligados a aceptar estas bases, a las que incluso sometieron a escrutinio observacional.

En el siglo IV a.C. asoma la aproximación científica a la astronomía, con la geometrización de esta: Eudoxio (Εὐδοξος) de Cnido (ca. 408-347 a.C.), alumno de Platón, propone para explicar los movimientos de la Luna, del Sol, de los cinco planetas clásicos (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno), y de las estrellas, un sistema de 27 esferas: 3 para el Sol, 3 para la Luna, 4 para cada planeta, y una para las estrellas. Estas esferas están centradas en la Tierra, y giran, cada una uniformemente, en torno a un eje propio. Cada astro se encuentra sobre su esfera más interior, sobre el ecuador (círculo máximo ortogonal a su eje de giro). Cada eje de giro está anclado a la esfera siguiente, y es arrastrado por el giro de esta. Con la composición de movimientos asociados a estas esferas, describía cualitativamente Eudoxio el movimiento observa-

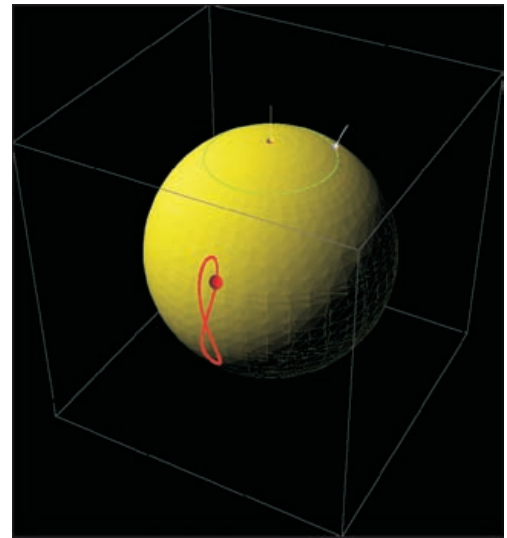


Figura 3. Formación de la lemniscata esférica por un móvil sobre una superficie esférica sometido a dos movimientos uniformes de giro adecuados.

do por el astro en cuestión. Se trata del primer intento de explicación geométrica de los movimientos astrales, de “la danza” de los planetas, como decía Platón en su *Timeo*. Como ilustración, la Fig. 3 muestra la formación de la *hipopede*,² o lemniscata esférica, por un punto de una esfera sometido a la composición de dos movimientos de giro, de igual frecuencia y sentidos opuestos: giro en torno a un diámetro que a su vez gira en torno a otro.

Eratóstenes (Ἐρατοσθένης) de Cirene (276-194 a.C.), bibliotecario de la famosa biblioteca de Alejandría, el mismo personaje de la criba de primos, inventa la esfera armilar, con la que consigue medir la inclinación de la eclíptica. Pero Eratóstenes es famoso, sobre todo, por haber estimado el radio de la Tierra. El procedimiento, basado en las observaciones de que la luz del Sol a mediodía en el solsticio de verano se reflejaba en el agua de los pozos de Siena (actual Asuán) mientras que a esa hora la sombra de un obelisco en Alejandría (que Eratóstenes tomó incorrectamente en el mismo meridiano que Siena) correspondía a un ángulo de $1/50$ de circunferencia entre el eje del obelisco y los rayos del Sol, y en el hecho de que la distancia entre Alejandría y Siena era de unos 5000 estadios, le llevó a asignar a la Tierra un radio de $50 \times 5000 / 2\pi$ estadios. Había en la época dos clases de

² Hipopede significa “maniota de caballo”, cadena o cuerda con que se atan las manos de este animal para que no se mueva.

estadios, el griego, y el egipcio.³ Si se tratara de este último (1 estadio egipcio=300 codos de 0.524 m), la estimación de Eratóstenes para el radio de la Tierra hubiera sido de 6305 km, frente a los 6371 km considerados en la actualidad, es decir, un error <1%.

Casi de la misma época fue Aristarco (Ἀρίσταρχος) de Samos (ca. 310-230 a.C.). De la observación del ángulo entre las visuales al Sol y a la Luna cuando la iluminación de esta es del 50%, infirió geoméricamente la razón entre las distancias al Sol y a la Luna; razón que trasladó a los tamaños de ambos astros, pues estos subtienden aproximadamente el mismo ángulo desde la Tierra. También, observando la duración de los eclipses lunares, consiguió Aristarco estimar el cociente entre la distancia a la Luna y el radio de la Tierra. Total, disponíamos ya de los radios de la Tierra, Sol y Luna, y de las distancias de la Tierra al Sol y a la Luna. Aristarco, con sus estimaciones, midió las primeras longitudes en el Universo. Pero Aristarco es conocido principalmente por su propuesta heliocéntrica, que conocemos a través de Arquímedes. Según escribe este al rey Gelón, Aristarco sitúa el Sol en el centro del cosmos, y alrededor de él gira la Tierra y las estrellas. Estas están a distancia tan grande, que hacen imperceptible su paralaje por el movimiento de la Tierra. Uno de sus contemporáneos tachó a Aristarco de “impío” por haber puesto en movimiento el “hogar” (la Tierra) del Universo. La cosmología de Aristarco no fue bien recibida.⁴

Los avances en la geometría griega a manos de Euclides (siglo IV/III a.C.), Arquímedes (siglo III a.C.) y Apolonio (siglo III/II a.C.) favorecieron el desarrollo de la astronomía griega. Apolonio de Perga fue el primero en ensayar con la composición de movimientos circulares (deferentes, epiciclos) para ajustar las órbitas del Sol, de la Luna y de los planetas. La historia de la astronomía retendría su gloria máxima durante 18 siglos, cuando, de la mano de Kepler, las elipses de Apolonio vendrían a reemplazar a los círculos pitagóricos y platónicos como órbitas de los planetas.

Finalmente, Hiparco (ca. 190-120 a.C.) perfeccionó la descripción de los movimientos del Sol y de la Luna y por tanto la predicción de eclipses. Fue el primero en dar una explicación matemática a la anomalía solar o variación de la velocidad orbital del Sol en su movimiento alrededor de la Tierra, origen de las diferencias existentes entre las duraciones de las cuatro estaciones. Para ello Hiparco debe renunciar a situar el centro de la órbita del Sol (supuesta circular, como era lo canónico) en la Tierra. E introdujo una órbita solar, circular pero *excéntrica*, esto es, con centro fuera de la Tierra, manteniendo el movimiento uniforme en torno a ese centro. Este modelo de Hiparco es matemáticamente equivalente a otro modelo basado en un círculo *deferente* y un *epiciclo*, como muestra la Fig. 4: sobre el círculo deferente (grande, de igual radio R que la excéntrica, y centrado en T) se mueve el centro Q del epiciclo con igual frecuencia que lo hace P en torno al centro C de la excéntrica, y asimismo lo hace, aunque en sentido opuesto, el punto P sobre el epiciclo, de radio este igual a la excentricidad $e_0 R$. La igualdad de ambos resultados estriba en la obvia igualdad vectorial $\mathbf{TC} + \mathbf{CP} = \mathbf{TQ} + \mathbf{QP}$.⁵

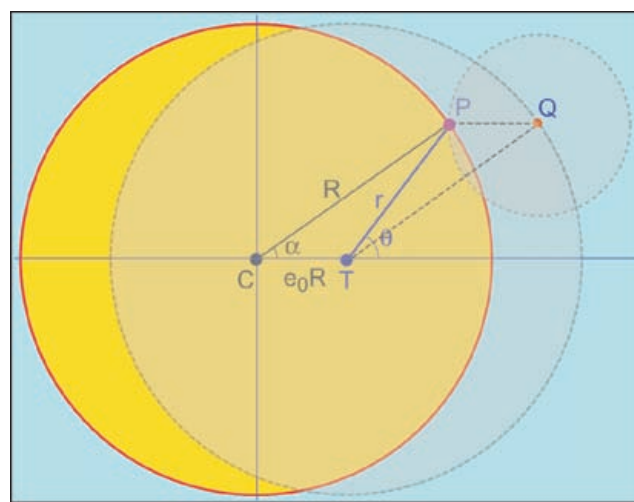


Figura 4. Equivalencia de la excéntrica y el par deferente-epiciclo.

³ El estadio griego es un 13% más largo que el egipcio: 177.6 m versus 157.2 m.

⁴ Aristarco asignó una distancia infinita a las estrellas. Esencialmente, vino a afirmar que $a_T/a_U = "0"$, siendo a_T , a_U las distancias del Sol (centro del Universo) a la Tierra, y a las estrellas fijas, respectivamente, y denotando por "0" el cociente "centro de la Tierra/distancia del Sol a la Tierra". Arquímedes le corrigió, sustituyendo el centro de la Tierra por el radio de la esfera terrestre, esto es, reemplazando la relación anterior por $a_T/a_U = R_T/a_T$, con R_T el radio de la Tierra. De creernos esta relación arquimediana, obtendríamos para el Universo un radio del orden de 23500 UA, unos 136 al (años luz). Muy grande, pero no lo suficiente, como bien sabemos.

⁵ Se atribuye a Apolonio de Perga la demostración de esta equivalencia (Ptolomeo, *Almagest* IX).

El modelo de Hiparco para el movimiento del Sol, con parámetros ajustados a los datos extraídos de las observaciones de los equinoccios y solsticios, es excelente.⁶ Tomando como elementos keplerianos los de Standish que luego mencionaremos ($a_T=1.00000261$, $e_T=0.01671123$, $\varpi_T=102.93768193^\circ$, $L_T=100.46457166^\circ$), la excéntrica, con excentricidad $e_0=2e_T$, conduce a unos valores para las longitudes eclípticas del Sol en el año de referencia J2000 que ajustan las verdaderas longitudes eclípticas con error rms $\epsilon_2=0.51'$, y error en norma del supremo $\epsilon_\infty=0,74'$. Estos errores, para un Sol en movimiento uniforme, pasan a ser $\epsilon_2=1.35^\circ$, y $\epsilon_\infty=1.92^\circ$, inadmisibles incluso para la precisión de aquella época. Si como aproximación tomamos todos los términos de orden ≤ 1 en la excentricidad e de la elipse, es decir, reemplazamos la elipse de la Tierra

$$r(t) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta(t)},$$

por la órbita

$$\zeta_1(t) = a \left[e^{i\omega t} + e(-3 + e^{2i\omega t})/2 \right],$$

donde ω es la frecuencia angular media de la Tierra en torno al Sol, $\zeta := x + iy$, los errores antedichos en las longitudes pasan a ser, respectivamente, $\epsilon_2=0.85'$, y $\epsilon_\infty=1.2'$; es decir, ligeramente superiores a los de la aproximación excéntrica. Yendo al siguiente orden en la excentricidad,

$$\zeta_2(t) = \zeta_1(t) + ae^2(e^{-i\omega t} - 4e^{i\omega t} + 3e^{3i\omega t})/8,$$

mejora apreciablemente la bondad de la aproximación a las longitudes eclípticas del Sol: $\epsilon_2=0.76''$, $\epsilon_\infty=1.3''$.

Con estas notaciones, la aproximación excéntrica de Hiparco se escribiría como

$$\zeta_{\text{ex}}(t) = a[e^{i\omega t} - 2e],$$

que difiere de $\zeta(t)$ ya en primer orden de la excentricidad; sin embargo, sus argumentos (esto es, las longitudes eclípticas), coinciden en primer orden.

A. Un legado babilónico

Los babilonios antecedieron a los griegos en estudiar los astros a lo largo de muchos años y en formular

modelos que les permitieran predecir sus movimientos. Gran parte de este saber pasó a Grecia y era bien conocido por los filósofos y astrónomos griegos.

Por ejemplo, los astrónomos de Babilonia habían observado que los planetas presentan dos períodos: el periodo trópico, o tiempo medio que tarda el planeta en volver al mismo lugar en el zodiaco, y el periodo sinódico, o tiempo medio entre dos retrogradaciones sucesivas del planeta.

Para los planetas superiores (Marte, Júpiter, Saturno), las retrogradaciones ocurren cuando están en oposición (la visual, desde la Tierra al planeta, forma un ángulo de 180° con la visual de la Tierra al Sol). Por tanto, para estos planetas, el período sinódico es también el tiempo medio entre dos oposiciones sucesivas del planeta. Las frecuencias angulares respectivas satisfacen, junto con la frecuencia angular del Sol (es decir, de la Tierra), la relación $\omega_T = \omega_{\text{sin}} + \omega_{\text{tr}}$. Existen unos ciclos para cada planeta superior que contienen números enteros de periodos trópicos, sinódicos y años terrestres. Así, por ejemplo, en 15 años hay 8 periodos trópicos de Marte y 7 sinódicos (en símbolos, “15 a=8 t=7 s”). La cuenta no es exacta, pero le falta poco. Mejora la relación con ciclos más largos: “32 a=17 t=15 s”. Y mejor aún: “47 a=25 t=22 s”, “79 a=42 t=37 s”, “363 a=193 t=170 s”, etc. Los convergentes de la fracción continua de $T_{\text{Tierra}}/T_{\text{Marte}}$ suministran la longitud (en años) del ciclo (denominador del convergente), y el número de periodos trópicos (numerador). El número de periodos sinódicos es la diferencia. Por ejemplo, para Júpiter tenemos “83 a=7 t=76 s”, “95 a=8 t=87 s”, ..., y para Saturno “59 a=2 t=57 s”, “265 a=9 t=256 s”, Tras cada ciclo de estos las posiciones del planeta se repiten aproximadamente, tanto mejor cuanto más largo es el ciclo elegido.

En el caso de los planetas inferiores (Mercurio, Venus), los periodos trópicos coinciden con los años terrestres, y son independientes de los periodos sinódicos. Para estos planetas, no hay oposiciones; los movimientos retrógrados ocurren en la mitad de las conjunciones (cuando el planeta está más próximo a la Tierra), mientras en la otra mitad de las conjunciones el movimiento del planeta es progrado o directo. Ahora

⁶ J. Evans, *The History and Practice of Ancient Astronomy*, Oxford University Press 1998.

la relación entre frecuencias es $\omega_p = \omega_{\sin} + \omega_{tr}$, donde aparece la frecuencia ω_p del planeta en torno al Sol, algo que para los babilonios no tenía sentido. Para Mercurio, se tiene aproximadamente “7 a=22 s”, “13 a=41 s”, “33 a=104 s”, “46 a=145 s”, ..., y para Venus, “8 a=5 s”, “243 a=152 s”, Luego cada 7 años la órbita de Mercurio, vista desde la Tierra, se repite aproximadamente, tanto en su lugar sobre el Zodíaco, como en la secuencia de los movimientos retrógrados sobre la eclíptica. Para Venus, la ciclicidad aproximada es de 8 años. Ciclos más largos (13 años para Mercurio, 243 para Venus), son más precisos.

B. Ptolomeo, figura histórica

Claudio Ptolomeo (Κλαύδιος Πτολεμαῖος) nació ca. 83 d. C., tal vez en alguna parte del Alto Egipto, y murió en Alejandría el año 168. Sabio de amplios y variados conocimientos (Astronomía, Geografía, Matemáticas), nos legó como una de sus más importantes obras la llamada *Sintaxis Matemática* (Μαθηματικὴ Σύνταξις), escrita ca. el año 150, y transmitida por los árabes como *Almagesto* (literalmente “El más grande”) o *El Gran Tratado*, (Ἡ Μεγάλη Σύνταξις). Es un texto fundamental, y polémico también, sobre el saber astronómico, que dominó esta ciencia durante 1400 años, hasta la revolución copernicana (1543). Dentro de los textos científicos, solo los *Elementos* de Euclides le han sobrepasado en influencia y duración de la misma.

C. El Almagesto

Se trata de un ambicioso libro de texto, que pretende nada menos que extraer de las observaciones astronómicas un modelo matemático sencillo del sistema solar que permita predecir con precisión las posiciones celestes de los planetas entonces conocidos (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno), del Sol y de la Luna, en cualquier instante. Nunca antes se había logrado reducir la complejidad de los movimientos celestes aparentes a algo matemática y mecánicamente tan simple como lo conseguido por Ptolomeo.

Consta el Almagesto de 13 Libros. En el Libro I arguye en favor de la hipótesis geocéntrica⁷ (basándose en la existencia de los equinoccios, en los eclipses lunares, y otras razones), y luego presenta los fundamentos geométricos y trigonométricos que le harán falta para los siguientes Libros de la obra. Es curioso que de trigonometría esférica solo usará Ptolomeo el famoso teorema de Menelao, en el que intervienen seis ángulos, debiéndoselas ingeniar siempre el autor para conocer observacionalmente cinco de ellos con el fin de calcular el otro. De hecho, las relaciones básicas de la trigonometría esférica son deducibles del mencionado teorema.⁸ El Libro II trata de los ortos y ocasos de los astros, del cálculo de latitudes, y de la duración de los días y las noches, entre otras cosas.

En el Libro III discute la duración del año, el movimiento del Sol alrededor de la Tierra, la precesión de los equinoccios, y las bases de la teoría de los epiciclos: todas las apariencias de los planetas deben explicarse mediante el movimiento circular uniforme del planeta sobre un círculo (epiciclo) cuyo centro a su vez se mueve uniformemente sobre otro círculo, llamado deferente de aquél, y así sucesivamente, mientras sea necesario. (De hecho, solo será así para el Sol, pues en los Libros dedicados a la Luna y a los planetas Ptolomeo levantará la restricción de uniformidad del movimiento del centro del epiciclo con respecto al centro del deferente.) Los Libros IV, V y VI tratan del movimiento lunar. Los Libros VII y VIII discuten la precesión de los equinoccios, y por fin, los Libros IX-XII contienen su análisis de los movimientos de los planetas. El último libro XIII trata de las latitudes o desviaciones de los planetas respecto de la eclíptica.

D. Ptolomeo, y los epiciclos

Los epiciclos no han gozado de buena prensa. Han sido denostados, desde nuestra perspectiva heliocéntrica y kepleriana, como epítome de ignorancia y de innecesaria complicación en la descripción del sistema solar. Mas tal opinión es infundada, como vamos a ver.

Tendemos a creer que el movimiento elíptico de Kepler es muy simple. Así es mientras no tengamos

⁷ Cap. 5: “Que la Tierra está en el centro del cielo” (Οτι μέση τοῦ οὐρανοῦ ἐστὶν ἡ γῆ).

⁸ O. Neugebauer, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, Part One, Springer-Verlag 1975.

que calcular su ley horaria. Tomemos la elipse del planeta P en el plano Oxy , con semieje a , excentricidad e , el Sol S como foco en el origen de coordenadas, y el perihelio P_0 del planeta situado en el eje $+Ox$; y recordemos la ecuación polar

$$r(t) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta(t)},$$

entre la distancia $r(t)$ del planeta al Sol, en el instante t , y el ángulo $\theta(t)$ que nos lleva de la línea de ápsides al vector de posición $\overrightarrow{SP}$. Este ángulo polar se conoce como anomalía verdadera.

Existen otras dos anomalías auxiliares, conocidas como anomalía excéntrica y anomalía media (ver Figura adjunta). La anomalía excéntrica es el ángulo polar del punto Q , sobre la circunferencia circunscrita a la elipse, con igual abscisa que P y mismo signo de ordenada, mientras que la anomalía media M es el ángulo polar del punto R , sobre esa circunferencia, tal que el área del sector circular RCP_0 coincide con la del sector QSP_0 , esto es, con la del sector elíptico PSP_0 multiplicada por a/b , siendo b la longitud del semieje menor de la elipse.

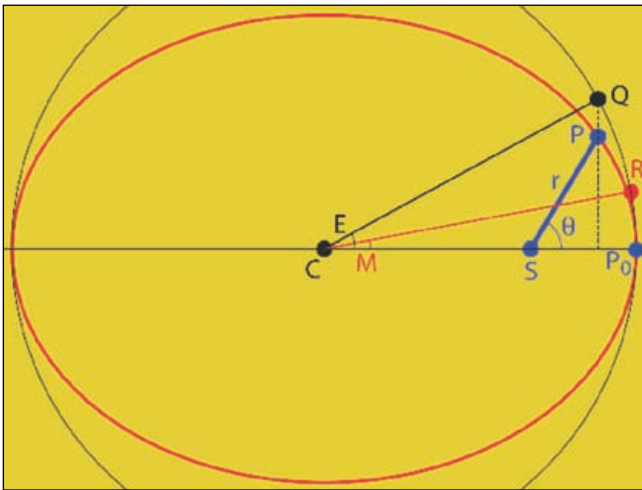


Figura 5. Elipse kepleriana de un planeta P , con foco en el Sol S . Se marcan los ángulos relevantes: anomalías verdadera θ , excéntrica E y media M .

Por tanto, por la ley de las áreas que comentaremos más adelante, (segunda ley de Kepler), el punto R se mueve uniformemente a lo largo de la circunferencia circunscrita a la elipse, con período igual al periodo T del planeta. Por tanto

$$M = 2\pi \frac{t}{T}.$$

Las tres anomalías citadas están relacionadas entre sí de la siguiente manera:

$$M = E - e \sin E, \quad (\text{ecuación de Kepler})$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}.$$

Para la ecuación de Kepler entre las anomalías media M y excéntrica E

$$M = E - e \sin E,$$

una fórmula numéricamente interesante que permite calcular E como función de M viene dada por el límite

$$E(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(M)$$

de la recurrencia

$$E_0(M) := 0, \quad E_n(M) = M + E_{n-1}(M).$$

Esta sucesión recurrente converge para todo $M \geq 0$, $e \in [0,1]$, y suministra la solución formal

$$E(M) = M + e \sin \left(M + \left(M + e \sin \left(M + \left(M + e \sin \left(M + \dots \right) \right) \right) \right) \right)$$

a

$$E(M) = M + e \sin(E(M)).$$

La periodicidad de $E(M) - M$ como función de M es patente también en esta otra expresión equivalente

$$E(M) = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(ne) \sin(nM),$$

en términos de las funciones de Bessel de primera especie J_n ; esta serie converge para $e \in [0,1]$.⁹

⁹ Desarrollando en serie de potencias de la excentricidad e , se obtiene otro desarrollo $E(M) = M + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^n$, con

$$\alpha_n := (2^{n-1} n!)^{-1} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (n-2k)^{n-1} \sin([n-2k]M).$$

Esta serie converge solo para $e < 0.6627434193...$

Con estos pertrechos, ya es simple rutina obtener los siguientes desarrollos, que limito hasta $O(e^4)$ inclusive, para las leyes horarias del movimiento kepleriano de un planeta P sobre una elipse con foco atractivo F situado en el origen de coordenadas O , perihelio en el semieje $+Oxy$, excentricidad e y semi-eje mayor a :

$$\begin{aligned} \zeta(M)/a = & -\frac{3e}{2} + \\ & \left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{64} + \dots\right)e^{iM} + \left(\frac{e}{2} - \frac{3e^3}{8} + \dots\right)e^{2iM} + \\ & \left(\frac{3e^2}{8} - \frac{3e^4}{8} + \dots\right)e^{3iM} + \left(\frac{e^3}{2} + \dots\right)e^{4iM} + \\ & \left(\frac{125e^4}{384} + \dots\right)e^{5iM} + \dots + \left(\frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{24} + \dots\right)e^{-iM} + \\ & \left(\frac{e^3}{24} + \dots\right)e^{-2iM} + \left(\frac{3e^4}{128} + \dots\right)e^{-3iM} + \dots, \end{aligned}$$

indicando por

$$\zeta(M) := r(M)e^{i\theta(M)} = x(M) + iy(M),$$

y por M la anomalía media

$$M := \omega t,$$

donde t indica el tiempo contado desde el perihelio, y $\omega := 2\pi/T$ la frecuencia angular media del movimiento del planeta con periodo T .

Del desarrollo anterior, que no es sino la descomposición armónica de la función periódica $\zeta(M)$, brotan los epiciclos, ya de Ptolomeo, ya de Copérnico.

Las bajas excentricidades de los planetas clásicos (Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno) hacen que sea ya muy buena aproximación quedarse con los términos de primer orden en e en unos, de primero y segundo en otros.

E. El punto ecuate y su equivalencia

Considérese el movimiento circular de un planeta alrededor de un punto excéntrico C , con radio a , con respecto al cual el Sol se halla desplazado en ea , siendo e la excentricidad de la elipse de Kepler asociada al planeta. Tomemos un punto ecuate (*punctus equans*) E_{ec} , simétrico de S en relación con el centro C , y sean los ángulos y distancias mostradas en la Fig. 6.

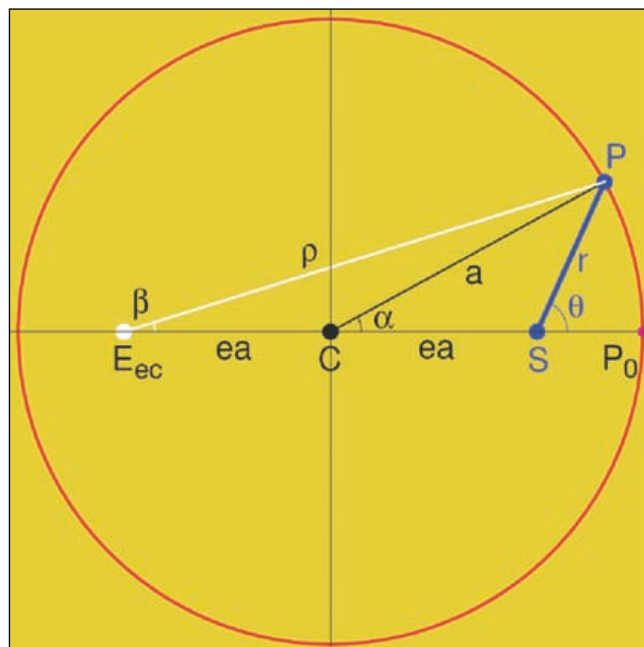


Figura 6. Movimiento circular uniforme en torno al punto ecuate E_{ec} , simétrico del Sol S (la Tierra para Ptolomeo) respecto del punto excéntrico C , centro del círculo de radio $a=1$ UA. La distancia del centro a cada uno de esos puntos es ea .

Las relaciones entre los ángulos α , β , θ y las distancias a , ρ , r son:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta + \arcsin(e \sin \beta) \\ \theta &= \alpha + \arctan \frac{e \sin \alpha}{1 - e \cos \alpha} \\ r \sin \theta &= a \sin \alpha = \rho \sin \beta \end{aligned}$$

Asimismo, es claro que

$$\begin{aligned} r \cos \theta &= a (\cos \alpha - e) \\ r \sin \theta &= a \sin \alpha. \end{aligned}$$

El número complejo $\zeta_{eq}(M) := r(t)e^{i\theta(M)}$, como función del ángulo $M := \beta = \omega t$, tiene el siguiente desarrollo en serie de potencias en la excentricidad:

$$\begin{aligned} \zeta_{eq}(M)/a = & -\frac{3e}{2} + \left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} + \dots\right)e^{iM} + \frac{e}{2}e^{2iM} + \\ & \left(\frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{32} + \dots\right)(e^{3iM} + e^{-iM}) + \\ & \left(-\frac{e^4}{128} + \dots\right)(e^{5iM} + e^{-3iM}) + \dots \end{aligned}$$

Podemos observar que los desarrollos de $\zeta(M)$ y $\zeta_{eq}(M)$ coinciden salvo términos $O(e^2)$. Otro tanto ocurre con los desarrollos de los argumentos de los complejos $\zeta(M)$ y $\zeta_{eq}(M)$, esto es, de las longitudes heliostáticas para la elipse kepleriana y el modelo ecuate. Luego hasta este orden la hipótesis ptolemaica del ecuate es correcta:

$$\zeta(M)/a = (1 + e \cos M) e^{iM} - 2e + O(e^2) = \zeta_{eq}(M)/a.$$

La aproximación ecuate de Ptolomeo mejora en un factor 1/3 el ajuste de las longitudes eclípticas del Sol: $\epsilon_2 = 0.17'$, $\epsilon_\infty = 0.25'$.

F. La hipótesis “vicaria” de Kepler

Antes de proponer las elipses como órbitas planetarias, Kepler mejoró el modelo de Copérnico mediante la llamada hipótesis “vicaria” o substitutiva: desplazar rígidamente sobre el eje central la posición del Sol y el punto ecuate, hasta conseguir una mejor reproducción de la longitud heliocéntrica de un planeta en función de la anomalía media.

Considérese el movimiento circular de un planeta alrededor del punto excéntrico C, con radio a , con

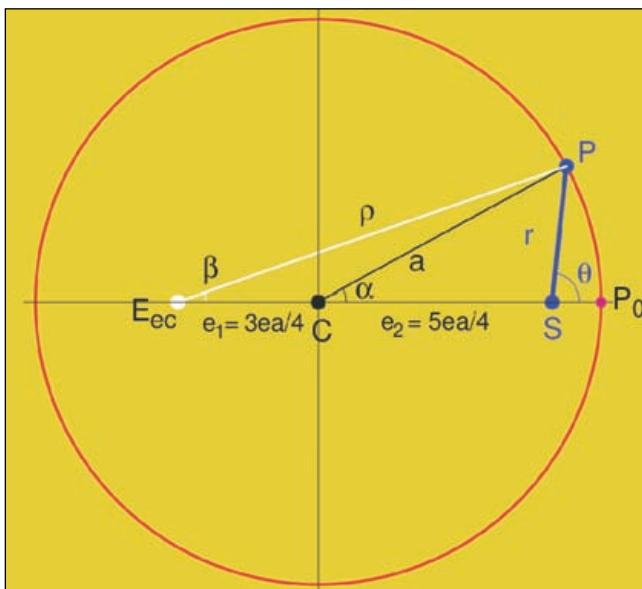


Figura 7. Movimiento circular uniforme en torno al punto ecuate E_{ec} , a distancia $3ea/4$ del centro de la deferente, y el Sol S situado al otro lado del centro, y a distancia $5ea/4$ de este.

respecto al cual el Sol se halla desplazado a la derecha en e_2a . Tomemos un punto ecuate E_{ec} , a la izquierda del centro C y distancia e_1a de este, y sean los ángulos y distancias mostradas en la Fig. 7.

Las relaciones entre los ángulos α , β , θ y las distancias a , ρ , r son ahora:

$$\alpha = \beta + \arcsin(e_1 \sin \beta)$$

$$\theta = \alpha + \arctan \frac{e_2 \sin \alpha}{1 - e_2 \cos \alpha}$$

$$r \sin \theta = a \sin \alpha = \rho \sin \beta.$$

El argumento θ_{vic} del número complejo $\zeta_{vic}(\beta) := r(\beta) e^{i\theta(\beta)}$, como función del ángulo β (o anomalía media M), tiene el siguiente desarrollo en serie de potencias de las excentricidades e_1 , e_2 :

$$\theta_{vic}(M) =$$

$$M + (e_1 + e_2) [1 + e_2 \cos M] \sin M + O(e_1^3, e_1^2 e_2, e_1 e_2^2, e_2^3).$$

Para la elipse planetaria de excentricidad e , el argumento θ del número complejo $\zeta(M) := r(M) e^{i\theta(M)}$, como función del ángulo β (o anomalía media M), tiene el siguiente desarrollo en serie de potencias de la excentricidad e de la elipse:

$$\theta(M) =$$

$$M + 2e \left[1 + \frac{5}{4} e \cos M \right] \sin M + O(e^3).$$

Comparando con el desarrollo anterior, vemos que coinciden salvo términos de orden $O(e^3)$ si tomamos $e_1 = 3e/4$, y $e_2 = 5e/4$. Esta es la elección vicaria de Kepler, que supondremos tácitamente a partir de ahora cuando usemos el subíndice “vic”.

La hipótesis de Kepler mejora por tanto la bondad de la aproximación ptolemaica para el cálculo de longitudes heliocéntricas. Por ejemplo, para el caso Sol-Tierra, el error de la aproximación vicaria a la longitud heliocéntrica de la Tierra es $\epsilon_2 = 0.40''$, $\epsilon_\infty = 0.74''$. Sin embargo, la aproximación vicaria no lleva a una mejor predicción de distancias, sino todo lo contrario, pues ahora

$$(\zeta(M) - \zeta_{vic}(M))/a = (1 + e^{2iM})e/8 + O(e^2).$$

G. Análisis de errores

1. Sistema heliocéntrico

Vamos a considerar varias aproximaciones al movimiento de los planetas en torno al Sol. Como referencia adoptaremos las órbitas keplerianas, con los elementos numéricos dados por la NASA para la época J2000. Con estas órbitas y sus aproximaciones formaremos en el siguiente apartado las órbitas relativas y sus aproximaciones en el sistema geocéntrico.

Denotemos por $\zeta_n(M)$ la suma de los términos del desarrollo en serie de $\zeta(M)$ en potencias de e , hasta $O(e^n)$ inclusive. Esto es:

$$\begin{aligned}\zeta_0(M)/a &= e^{iM}, \\ \zeta_1(M)/a &= \zeta_0(M)/a + e\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{2iM}\right), \\ \zeta_2(M)/a &= \zeta_1(M)/a + e^2\left(\frac{1}{8}e^{-iM} - \frac{1}{2}e^{iM} + \frac{3}{8}e^{3iM}\right), \\ \zeta_3(M)/a &= \zeta_2(M)/a + e^3\left(\frac{1}{24}e^{-2iM} - \frac{3}{8}e^{2iM} + \frac{1}{2}e^{4iM}\right), \\ &\dots\end{aligned}$$

La aproximación ζ_0 de orden 0 consiste en reemplazar el movimiento elíptico por uno circular de radio igual al semieje mayor a , recorrido uniformemente con el mismo periodo T del planeta. La aproximación ζ_1 de orden 1 es superposición de dos movimientos circulares uniformes en sentido positivo: uno, deferente, de radio a con centro desplazado en $-3ea/2$ sobre la línea de ápsides (punto $(-3ea/2, 0)$) y periodo T , y otro, epiciclo, de radio $ea/2$ y periodo $T/2$. En la aproximación ζ_2 de orden 2 intervienen cuatro movimientos circulares uniformes: con igual centro desplazado, el círculo deferente tiene un radio $a(1-e^2/2)$, y además de los dos movimientos circulares de ζ_1 , tiene otro de radio $e^2a/8$, periodo T y sentido negativo, y otro de radio $3e^2a/8$, periodo $T/3$ y sentido positivo. Y así sucesivamente. Cada orden nuevo de aproximación modifica los radios de los círculos anteriores y añade dos epiciclos nuevos.

En cuanto a su bondad como aproximaciones al movimiento elíptico, en el cuadro I se incluyen las normas $\|\zeta - \zeta_n\|_\infty$ de los errores posicionales para los distintos planetas clásicos, así como las normas $\|\theta - \theta_n\|_\infty$

de los errores en sus direcciones; todo ello en el sistema heliocéntrico.

Nótese que, salvo para Venus y la Tierra, la aproximación de orden 1 es insuficiente para los otros planetas, pues conduce a errores $\gtrsim 2.4'$ en sus posiciones angulares. Para Marte, por ejemplo, el error en su dirección angular puede alcanzar los $10'$ (apreciable incluso a simple vista), mientras que en segundo orden el error máximo sería de $1.8'$, casi admisible para las precisiones alcanzadas por Tycho Brahe en aquella época. Por eso ni los modelos ptolemaicos ni los modelos copernicanos en sus versiones más simples, basadas esencialmente en la aproximación de primer orden, pudieron sobrevivir.

Incluimos, por completitud, y también en sistema heliocéntrico, los errores cometidos por el modelo ecuantado y el vicario, en el cuadro II.

Máximos errores heliocéntricos, 1		
	Error en posición	Error en dirección
Mercurio	4.2×10^{-2}	$69'$
	6.6×10^{-3}	$18'$
	1.2×10^{-3}	$4.2'$
Venus	4.6×10^{-5}	$0.040'$
	2.1×10^{-7}	$0.00071'$
	1.4×10^{-9}	$0.0000046'$
Tierra	2.8×10^{-4}	$0.25'$
	3.2×10^{-6}	$0.011'$
	5.2×10^{-8}	$0.00017'$
Marte	8.7×10^{-3}	$10'$
	5.8×10^{-4}	$1.8'$
	5.1×10^{-5}	$0.17'$
Júpiter	2.3×10^{-3}	$2.4'$
	7.9×10^{-5}	$0.26'$
	3.7×10^{-6}	$0.012'$
Saturno	2.9×10^{-3}	$3.0'$
	1.1×10^{-4}	$0.36'$
	5.6×10^{-6}	$0.019'$

Cuadro I. Errores relativos en posición, y errores en dirección (en minutos de arco), para los planetas clásicos y la Tierra, en las aproximaciones de órdenes 1, 2 y 3, sucesivamente.

Máximos errores heliocéntricos, 2		
	Error en posición	Error en dirección
Mercurio	2.3×10^{-2}	54'
	6.5×10^{-2}	23'
Venus	2.3×10^{-5}	0.040'
	1.7×10^{-3}	0.00082'
Tierra	1.4×10^{-4}	0.25'
	4.2×10^{-3}	0.012'
Marte	4.4×10^{-3}	9.0'
	2.6×10^{-2}	2.2'
Júpiter	1.2×10^{-3}	2.2'
	1.3×10^{-2}	0.30'
Saturno	1.5×10^{-3}	2.8'
	1.4×10^{-2}	0.41'

Cuadro II. Errores relativos en posición, y errores en dirección (en minutos de arco), para diversos planetas, en las aproximaciones ecuante y vicario, sucesivamente.

2. Sistema geocéntrico

Si $\mathbf{r}_p(t)$, $\mathbf{r}_T(t)$ indican los vectores de posición del planeta P y de la Tierra T en sus elipses orbitales reales del sistema heliocéntrico, y $\mathbf{r}'_p(t)$, $\mathbf{r}'_T(t)$ sendas aproximaciones a las mismas (ecuantas, de primer orden en las excentricidades, de segundo, etc., pero manteniendo las oblicuidades de las órbitas, los periodos orbitales,...), vamos a dar en el cuadro III los errores $\|\cdot\|_\infty$ cometidos al aproximar el vector de posición geocéntrico relativo $\mathbf{r}_{TP}(t) := \mathbf{r}_p(t) - \mathbf{r}_T(t)$ por $\mathbf{r}'_{TP}(t) := \mathbf{r}'_p(t) - \mathbf{r}'_T(t)$.

Si quisiéramos conseguir una desviación máxima de 1' en la dirección del planeta, visto desde la Tierra, nos bastaría tomar las siguientes aproximaciones:

Tierra-Mercurio:	Tierra ₂ -Mercurio ₄
Tierra-Venus:	Tierra ₂ -Venus ₁
Tierra-Marte:	Tierra ₂ -Marte ₃
Tierra-Júpiter:	Tierra ₁ -Júpiter ₂
Tierra-Saturno:	Tierra ₁ -Saturno ₂

Por tanto su implementación requeriría $(6+3+5+3+3) \times 2 = 40$ círculos.

De conformarnos con una precisión de 5', bastaría:

Tierra-Mercurio:	Tierra ₁ -Mercurio ₃
Tierra-Venus:	Tierra ₁ -Venus ₁
Tierra-Marte:	Tierra ₁ -Marte ₃
Tierra-Júpiter:	Tierra ₁ -Júpiter ₁
Tierra-Saturno:	Tierra ₁ -Saturno ₁

y en su implementación intervendrían $(4+2+4+2+2) \times 2 = 28$ círculos.

Finalmente, con un esquema simple, consistente en la aproximación ecuante tanto para la Tierra como para los planetas, los errores angulares se mantienen por debajo de 3.3', salvo para Mercurio y Marte, casos en los que puede acercarse a 40' y 36', respectivamente. En esta aproximación, serían tan solo 9 los círculos a considerar (pues los deferentes para Mercurio y Venus coincidirían).

Máximos errores geocéntricos		
	Error en posición	Error en dirección
Mercurio	1.3×10^{-2}	40'
	2.7×10^{-2}	75'
	3.8×10^{-3}	12'
	7.5×10^{-4}	2.5'
Venus	4.6×10^{-4}	1.0'
	9.2×10^{-4}	1.6'
	1.1×10^{-5}	0.038'
	1.9×10^{-7}	0.00062'
Marte	1.4×10^{-2}	36'
	2.6×10^{-2}	53'
	1.9×10^{-3}	5.4'
	1.7×10^{-4}	0.56'
Júpiter	1.5×10^{-3}	2.9'
	2.9×10^{-3}	3.5'
	9.8×10^{-5}	0.32'
	4.5×10^{-6}	0.015'
Saturno	1.6×10^{-3}	3.2'
	3.2×10^{-3}	3.8'
	1.2×10^{-4}	0.40'
	6.3×10^{-6}	0.021'

Cuadro III. Errores relativos en posición, y errores en dirección (en minutos de arco), para diversos planetas, en el sistema geocéntrico, de las aproximaciones ecuante y de orden 1, 2 y 3 en las excentricidades.

H. Ptolomeo y los planetas

En el modelo geocéntrico de Ptolomeo, el movimiento de los planetas se describe mediante la superposición de un movimiento circular uniforme del planeta sobre un epiciclo, cuyo centro a su vez se mueve sobre un círculo deferente, en movimiento uniforme ahora respecto de un punto ecuanter, imagen simétrica de la Tierra con respecto al centro de ese círculo. Las velocidades angulares son, sobre la circunferencia deferente y vista desde el ecuanter, la media del Sol en torno a la Tierra, y sobre el epiciclo, la angular media del planeta (para los planetas interiores, Mercurio y Venus), y viceversa para los planetas exteriores (Marte, Júpiter, Saturno).

Ptolomeo propone los valores del cuadro IV, obtenidos tras ajuste de datos observacionales.¹⁰ Representamos el modelo ptolemaico en la forma

$$\zeta_{\text{Pt}}(M) = r_{R,d}(\Omega t) e^{i\theta(\Omega t)} + r_e e^{i\omega t}$$

donde R , r_e son los radios de los círculos deferente y epiciclo, respectivamente, Ω, ω las frecuencias de los movimientos uniformes sobre los mismos, $r_{R,d}(\beta)$ denota el módulo del complejo de la figura 6 cuando $a=R$ y $\beta=\Omega t$, y $\theta(\beta)$ es su argumento. Adoptamos en esta sección la norma de Ptolomeo de tomar para todos los planetas el valor $R=60$. Ptolomeo solo pretendía predecir posiciones angulares y no distancias, por lo que la unidad de longitud podía ser arbitraria para cada planeta. Finalmente, hemos escogido como origen de tiempos un instante de apogeo, y hemos supuesto, por simplicidad, que ambos círculos son coplanarios.

Es natural preguntarse sobre la bondad de este modelo con los parámetros elegidos. Lo haremos con relación a Marte, planeta que jugaría papel central en la astronomía posicional hasta Kepler inclusive, como hemos de ver.

Parámetros del Almagesto para los planetas

	r	eR	$\Omega(^{\circ}/\text{día})$	$\omega(^{\circ}/\text{día})$
Mercurio	22.50	9.00	0.985635278	3.10669904
Venus	43.17	1.25	0.985635278	0.616508734
Marte	39.50	6.00	0.524059711	0.461575567
Júpiter	11.50	2.75	0.0831224364	0.902512842
Saturno	6.50	3.42	0.0334885402	0.952146738

Cuadro IV. Radio de los epiciclos, excentricidad eR del deferente, y frecuencias angulares para las longitudes y las anomalías, según Ptolomeo.

1. Marte y el modelo ptolemaico: 2D

Tomaremos como datos “exactos” con los que comparar, los provenientes de suponer que la Tierra y Marte giran en elipses en torno al Sol, que ambas trayectorias son coplanarias, y que los parámetros de estas son los correspondientes al pasado año 2000.¹¹

$$a_T = 1.00000261, e_T = 0.01671123, \varpi_T = 102.93768193^{\circ}$$

$$a_M = 1.52371034, e_M = 0.09339410, \varpi_M = -23.94362959^{\circ},$$

donde ϖ denota la longitud del perihelio (en relación con la dirección al punto vernal).

En la actualidad, lo razonable sería tomar como parámetros del modelo de Ptolomeo los provenientes de estas elipses. Como deferente, un círculo de radio a_M , una excentricidad $e=e_M$, y una velocidad angular uniforme en torno al ecuanter igual a la velocidad angular media de Marte en su elipse, o si se prefiere, un periodo orbital dado por la tercera ley de Kepler: $a_M^{3/2}$ años. Como epiciclo, un círculo de radio a_T , recorrido uniformemente con periodo $a_T^{3/2}$ años. Con estas elecciones, el error máximo cometido satisface

$$\left\| (\mathbf{r}_{\text{TM,Pt}} - \mathbf{r}_{\text{TM}})(\cdot, \cdot) \right\| / \left\| \mathbf{r}_{\text{TM}}(\cdot, \cdot) \right\|_{\infty} \leq 0.014,$$

¹⁰ El análisis minucioso del Almagesto indica que unos cuantos datos de los usados por Ptolomeo debieron ser “retocados” por este, hasta tal punto, que se ha hablado del “fraude ptolemaico” (Robert R. Newton, *The Crime of Claudius Ptolemy*, Baltimore 1977). Pero no hay que olvidar que Ptolomeo pretendía presentar un libro de texto, síntesis de los conocimientos de la época, y es por ello disculpable que en aras de su consistencia relajase en cierto modo la práctica científica. Es, como señala el ardiente defensor de Ptolomeo, el ilustre historiador y astrónomo Owen Gingerich (“Ptolemy and the Geocentric Universe”, en *The Eye of Heaven. Ptolemy, Copernicus, Kepler.*, p. 71, American Institute of Physics, 1993), la supremacía de la teoría sobre la observación, que grandes científicos como Newton y Einstein no han dudado en proclamar.

¹¹ Ver E. M. Standish, “Keplerian Elements for Approximate Positions of the Major Planets”, JPL, Caltech.

donde $\mathbf{r}_{TM}(M_1, M_2)$ es el vector relativo entre Marte con anomalía M_1 sobre su elipse y la Tierra con anomalía M_2 sobre la suya, y $\mathbf{r}_{TMp}(M_1, M_2)$ lo mismo pero con Marte sobre el deferente y la Tierra sobre el epiciclo. En cuanto a las longitudes geocéntricas,

$$\|\text{ángulo}(\mathbf{r}_{TM, P}, \mathbf{r}_{TM})(\dots)\|_{\infty} \leq 36',$$

que es un error considerable.

Si intentamos hacer la comparación conservando los datos de Ptolomeo, muy pronto hallamos desviaciones intolerables, debido a la diferencia entre los periodos para Marte del valor actual kepleriano y del propuesto por Ptolomeo. Sin embargo, cambiando este último por el observado, la comparación vuelve a dar resultados muy similares a los antes obtenidos con los parámetros keplerianos.

2. Marte y el modelo ptolemaico: 3D

Ptolomeo también prestó atención a la latitud de los planetas, magnitud esta con errores más pequeños debido a la poca inclinación de las órbitas de los planetas con respecto a la eclíptica.

En la Fig. 8 se muestra un esquema de la disposición espacial relativa Tierra-Marte a comienzos del año 2000, con excentricidades e inclinación exageradas para que puedan apreciarse.

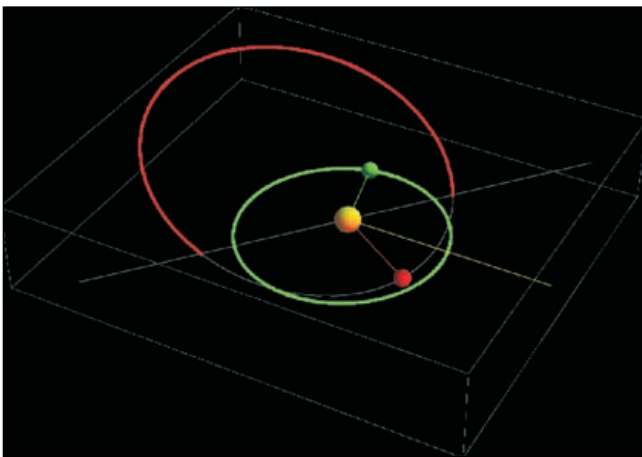


Figura 8. Gráfico esquemático de las órbitas de la Tierra y Marte alrededor del Sol.

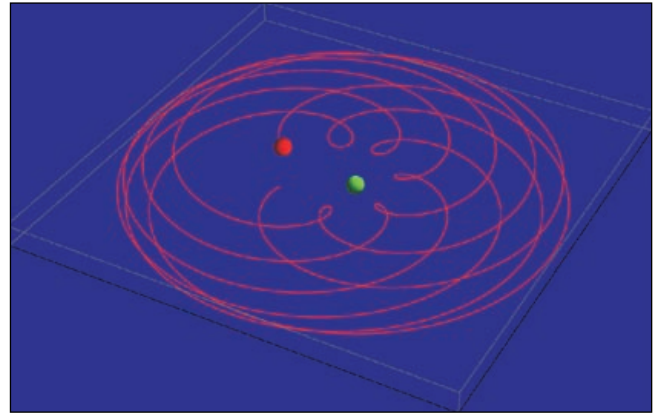


Figura 9. Gráfico real de la órbita de Marte en el periodo de julio 1999 a diciembre 2011, ambos inclusive, vista desde la Tierra. Los tamaños de los planetas están exagerados. Marte está en la posición que tuvo al final de ese periodo.

Esta disposición orbital, con el Sol como referente fijo, es sencilla y contrasta enormemente con lo que es el movimiento aparente de Marte en visión geocéntrica, contemplable en la Fig. 9.

La comparación de las efemérides diarias vectoriales para Marte desde el Sol desde el 1 de enero de 2000, 00:00 UT, al 1 de enero de 2002, 00:00 UT, y las posiciones dadas por la órbita kepleriana con los datos de Standish antes referenciados, conduce a los siguientes resultados: 1/ los errores rms y en norma del supremo para las posiciones son 0.000376 y 0.000728, respectivamente, en UA. 2/ los errores rms para las distancias, longitudes y latitudes eclípticas son (0.000118 UA, 0.870', 0.0173'), y en norma del supremo, (0.000232 UA, 1.81', 0.0483'). De haber hecho la comparación con las direcciones observadas, los resultados, aunque similares, hubieran variado ligeramente: por ejemplo, para las longitudes y latitudes los errores rms hubieran sido 0.75' y 0.016', y los errores en norma del supremo 1.54' y 0.041', respectivamente.

Podemos, por tanto, concluir que las elipses keplerianas, aunque muy bien ajustadas, presentan errores rms en su comparación con las posiciones verdaderas, errores que son estimables, para Marte, en 4×10^{-4} UA (y el doble aproximadamente en norma del supremo), y atendiendo a sus distancias, longitudes y latitudes, los errores rms son del orden de 1×10^{-4} UA, 2.5×10^{-4} rad, y 5×10^{-6} rad, doblándose más o menos al pasar a la norma del supremo en las diferencias.

Es de esperar que para el modelo ptolemaico aplicado a la situación real en tres dimensiones los errores sean bastante mayores. Nos limitaremos a discutir el caso Tierra-Marte, desde el punto de vista geocéntrico. Empezando por la descripción kepleriana, los errores que dan las elipses para la Tierra y para Marte se combinan al alza, y así, de la comparación de las distancias Tierra-Marte, y de las longitudes y latitudes geocéntricas de Marte, para el periodo antes considerado (1/1/2000 al 1/1/2002) se obtienen estos errores al comparar, por ejemplo, con los datos suministrados por IMCEE: errores rms (0.000219, 0.0244, 0.000873), y errores en norma del supremo (0.000521, 0.06631, 0.00315), respectivamente, en UA y grados de arco en cada caso.

Con el modelo de Ptolomeo, para radios y excentricidades actuales, resultan: errores rms (0.0207, 0.685, 0.0598), y errores en norma del supremo (0.0358, 1.72, 0.145), respectivamente, en UA y grados de arco en cada caso.

Y finalmente, con los parámetros de Ptolomeo, pero periodos actuales: errores rms (0.0158, 0.576, 0.0744), y errores en norma del supremo (0.0258, 1.02, 0.186), respectivamente, en UA y grados de arco en cada caso.

I. Las distancias a los planetas en la astronomía griega

Ya hemos dicho antes que los griegos supieron estimar las distancias a la Luna y al Sol; sin embargo, no pudieron con las distancias a los planetas, pues su

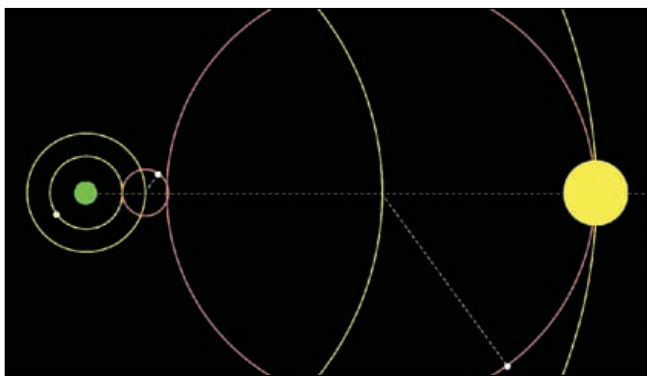


Figura 10. Órbita lunar, deferentes/epiciclos de Mercurio y Venus, y deferente del Sol.

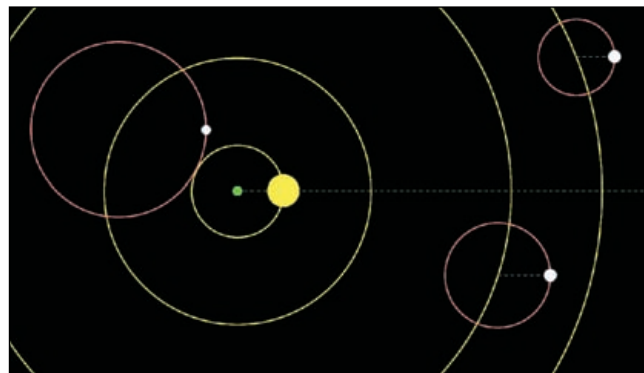


Figura 11. Deferente del Sol, deferentes/epiciclos de Marte, Júpiter y Saturno.

paralaje horizontal es muy pequeño para las posibilidades de la observación astronómica en aquella época. Sí sabían, sin embargo, que la Luna es la más cercana de los astros, por los eclipses solares y por las ocultaciones planetarias a que da origen.

Por eso los tamaños relativos de los distintos deferentes quedaban sin fijar, y su ordenación, básica para saber cómo estaban dispuestos los distintos planetas entre sí, quedaba fuera del alcance de su astronomía. Pero no de la cosmología, la visión global del universo, en la que se aceptaban, a falta de buenas observaciones, las posturas filosóficas.

Para los aristotélicos, parecía natural suponer que cuanto mayor fuera su periodo trópico, más alejado estaría el planeta, más cercano a la esfera de las estrellas fijas, por lo que su movimiento se parecería más al de estas. Así Saturno sería el más alejado, seguido de Júpiter y Marte. En cuanto a los planetas interiores y al Sol, como para todos ellos el periodo trópico es idéntico, la regla anterior no permitía su ordenación. Había quienes los ordenaban, de más a menos lejanos, como Mercurio, Venus, Sol; otros como Venus, Mercurio, Sol; y finalmente, los pitagóricos se inclinaban por este orden: Sol, Venus, Mercurio. De este modo, el Sol quedaba justo en medio entre la Luna, Mercurio, Venus, por un lado, y Marte, Júpiter y Saturno por otro. Como si fuera el corazón del cosmos. Fue el orden adoptado por Ptolomeo, y seguido prácticamente por todos hasta Copérnico; el Sol, según Ptolomeo, debía separar aquellos planetas exteriores, cuyas elongaciones (distancias angulares con el Sol) pueden tener cualquier valor, de aquellos otros, interiores, que se mueven siempre cerca del Sol. Cuanto más interiores,

más próximos están del elemento “aire” y más complicado (“turbulento”) es su movimiento, argumentaba Ptolomeo.¹²

Una idea gráfica de este cosmos griego está en las figuras 10 y 11, preservando la escala relativa de cada epiciclo con su deferente. Se ha utilizado la hipótesis cosmológica ptolemaica de que no quede espacio desaprovechado, de modo que el epiciclo de un planeta debe rozar tangencialmente, en su movimiento, al del siguiente. Tampoco se han tenido en cuenta las excentricidades.

Nótese que los centros de los epiciclos de los planetas interiores yacen siempre en la línea Tierra-Sol. Por contra, para los planetas superiores, las líneas que van del centro de cada epiciclo a su planeta correspondiente son en todo momento paralelas a la línea Tierra-Sol.

Las dimensiones de esta ingenua disposición planetaria, forzadas del modo dicho en este sistema cosmológico, no se alejan demasiado de las correctas. Por ejemplo, sitúa la mayor distancia de la Tierra a Saturno en unas 8.8 UA, a comparar con la verdadera, que es de 10.5 UA.

Una de las virtudes esenciales del sistema copernicano, al identificar con la órbita terrestre los epiciclos de los planetas superiores y los deferentes de los inferiores, fijará una escala universal (el radio de la órbita terrestre) para dimensionar correctamente el sistema solar.

III. EL UNIVERSO DEL RENACIMIENTO

En los catorce siglos que separan a Ptolomeo de la plenitud renacentista la astronomía no experimentó

ningún avance esencial; los astrónomos árabes se centraron en problemas puntuales como la medida de la inclinación de la eclíptica o la determinación de los parámetros de la órbita solar, sin aprovechar los nuevos datos para revisar la teoría planetaria dominante. La acumulación de resultados inconsistentes con el esquema ptolemaico llevaría por fin al convencimiento de que éste era insostenible.¹³

A. Copérnico, el revolucionario

En 1473 nació Mikolaj Kopernik (Nicolaus Copernicus, en latín) en la ciudad polaca de Toruń. Estudió en la Universidad de Cracovia, abrazando allí la astronomía y familiarizándose con los trabajos de Euclides, Ptolomeo, Sacrobosco y Regiomontano. En su paso por varias universidades italianas, Copérnico estudió medicina y leyes, doctorándose en derecho canónico por la Universidad de Ferrara. A sus 30 años regresó a Polonia, donde disfrutó de una canonjía de la catedral de Frombork, obtenida gracias a la ayuda de su tío el Obispo Lucas Watzenrode. Desde este puesto vitalicio pudo dedicarse a su gran afición, la astronomía.

Nuestro personaje es nada más, y nada menos, que el responsable de la revolución (copernicana, por supuesto) que desplazó la Tierra del centro del Universo, para colocar en él a nuestra estrella, el Sol. Su obra cumbre *De Revolutionibus Orbium Caelestium Libri Sex* (Seis libros sobre las revoluciones de las esferas celestes),¹⁴ aunque terminada en 1531, no apareció publicada hasta 1543, estando ya Copérnico en su lecho de muerte.

En el primer borrador¹⁵ sobre sus nuevas ideas astronómicas Copérnico resume en siete axiomas (*Petitiones*) las bases de su sistema universal:¹⁶

¹² J. Evans, *loc. cit.*

¹³ O. Neugebauer, *loc. cit.*

¹⁴ N. Copérnico, *De Revolutionibus Orbium Caelestium Libri Sex*, Norimbergae, J. Petreium, 1543.

¹⁵ N. Copérnico, *De hypothesibus motuum caelestium a se constitutis commentariolus*, c. 1514. (Pequeño comentario acerca de las hipótesis de las esferas celestes). Manuscrito, sin firma, de unas seis páginas, que no fue publicado, pero del que circularon unas pocas copias del mismo entre amigos y lectores de confianza.

¹⁶ 1/ No hay un único centro para todos los círculos o esferas celestes. 2/ El centro de la Tierra no es el centro del universo, sino solo de la gravedad y de la esfera lunar. 3/ Todas las esferas giran en torno a puntos próximos al Sol y por tanto el centro del universo está próximo al Sol. 4/ La razón entre la distancia de la Tierra al Sol y la altura del firmamento, es tan pequeña en relación con la razón entre el radio de la Tierra y su distancia al Sol, que la distancia de la Tierra al Sol es imperceptible comparada con la altura del firmamento. 5/ Cualquier

1. **Prima petitio** *Omnium orbium caelestium sive sphaerarum unum centrum non esse.*
2. **Secunda petitio** *Centrum terrae non esse centrum mundi, sed tantum gravitatis et orbis Lunaris.*
3. **Tertia petitio** *Omnes orbis ambire Solem, tanquam in medio omnium existentem, ideoque circa Solem esse centrum mundi.*
4. **Quarta petitio** *Minorem esse comparisonem distantiarum Solis et terrae ad altitudinem firmamenti, quam semidimetientis terrae ad distantiam Solis, adeo ut sit ad summitatem firmamenti insensibilis.*
5. **Quinta petitio** *Quicquid ex motu apparet in firmamento, non esse ex parte ipsius, sed terrae. Terra igitur cum proximis elementis motu diurno tota convertitur in polis suis invariabilibus firmamento immobili permanente ac ultimo caelo.*
6. **Sexta petitio** *Quicquid nobis ex motibus circa Solem apparet, non esse occasione ipsius, sed telluris et nostri orbis, cum quo circa Solem vivimus ceu aliquo alio sidere, sicque terram pluribus motibus ferri.*
7. **Septima petitio** *Quod apparet in erraticis retrocessio ac progressus, non esse ex parte ipsarum sed telluris. Huius igitur solius motus tot apparentibus in caelo diversitatibus sufficit.*

Los detalles matemáticos, los argumentos, y el desarrollo del programa copernicano quedaron para su gran tratado, el *De Revolutionibus*. Consta este de seis libros: en el primero expone las bases generales de su teoría; en el segundo presenta los resultados de trigonometría y astronomía esféricas que va a necesitar; el tercero lo dedica al Sol; el cuarto a la Luna; y en el quinto y sexto se ocupa de los planetas. Para eludir problemas con la Iglesia se aclara en el prólogo (que no escribió Copérnico, sino el luterano Andreas Osiander) que en el resto del libro no se presupone nada sobre la física de la realidad, sino que era solo

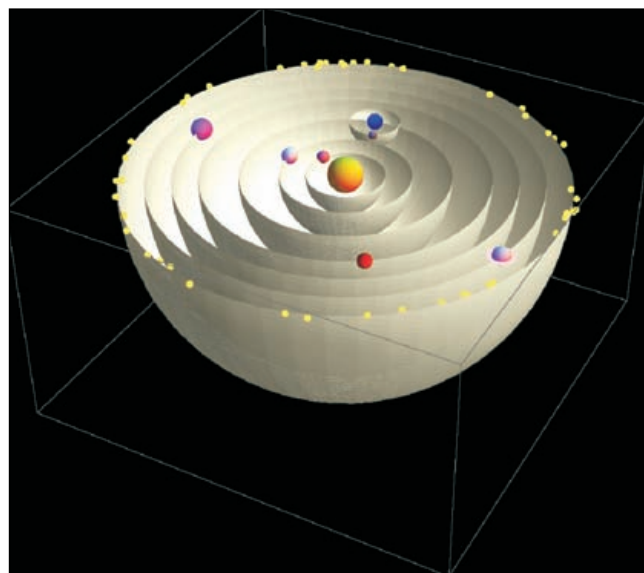


Figura 12. Cosmos copernicano.

una forma matemática más simple para describir el movimiento de los planetas.

1. El sistema planetario de Copérnico

La enorme simplificación cualitativa que logró Copérnico al referir los movimientos al Sol no se vio correspondida con una mejora cuantitativa en la precisión de sus predicciones para las órbitas. Su insistencia en mantener los movimientos circulares uniformes como elementos irrenunciables le obligó a reintroducir los epiciclos, en número que, por su rechazo de los ecuantos, necesitaba superar a los de Ptolomeo.

En la Fig. 12 ilustramos la visión copernicana del Universo, todo girando en torno al Sol, salvo la Luna, que lo hace alrededor de la Tierra.

B. Brahe, el astrónomo

Tyge Ottesen Brahe, conocido como Tycho Brahe, fue un cuidadoso astrónomo danés, el último y mejor

movimiento aparente en el firmamento no proviene del movimiento de este, sino del movimiento de la Tierra. La Tierra con sus elementos circundantes realiza diariamente una rotación completa sobre sus polos fijos, mientras que el firmamento y los cielos superiores permanecen sin cambio. 6/ Los movimientos aparentes del Sol no proceden de su movimiento sino del movimiento de la Tierra y de nuestra esfera, con las que giramos en torno al Sol como cualquier otro planeta. La Tierra tiene, por tanto, más de un movimiento. 7/ El movimiento retrógrado aparente de los planetas no se debe a su propio movimiento, sino al de la Tierra. Por tanto, el movimiento de esta basta, por sí solo, para explicar tantas desigualdades aparentes en los cielos.

de los astrómetras antes del telescopio, al que se deben las medidas más precisas de los astros en su época. Durante más de veinte años, desde 1576 a 1597, oteó los cielos desde su mansión y observatorio Uraniborg (“castillo celeste” o castillo de Urania), levantado por él mismo en el centro de la isla Hven, de unos 10 o 12 km², con el respaldo económico de la corona danesa, cuyo rey Frederick II le cedió para uso exclusivo del astrónomo. Dejó esta isla en 1601, por discrepancias con el sucesor del anterior monarca, y Uraniborg y resto de instalaciones quedaron abandonados, y muy pronto derruidos. En los dos últimos años de su vida (1600-1601) tuvo como ayudante a Kepler en Praga, al que legó el tesoro de los datos de sus archivos para que tras su muerte erigiera sobre ellos una nueva teoría del universo (sin olvidarse, por supuesto, del modelo geoheliocéntrico que Tycho había propuesto).

Tycho determinó las posiciones angulares con precisión mejor que 1' de arco (mejorando así en un orden de magnitud la precisión usual desde tiempos de Ptolomeo).¹⁷ Estos datos, que a su muerte pasaron a su ayudante Kepler, fueron decisivos para que este último eligiera la elipse como órbita tipo de los planetas.

Tuvo la suerte Tycho de poder observar y tomar medidas de una explosión supernova en 1572, la SN1572, conocida también como la Nova de Tycho, visible durante dos años; logró situar este suceso fuera de los confines del sistema solar, en el imperio de las estrellas, con lo que tuvo argumentos para combatir la creencia aristotélica de la inmutabilidad de los cielos. Abundaría en esta idea con su observación y seguimiento de un cometa en 1577, con órbita supralunar, no circular sino ovalada.

Enfrentado ante el dilema geocentrismo versus heliocentrismo, se inclina Brahe por una solución mixta, en la que la Tierra vuelve al centro del Universo, girando en torno a ella la Luna y el Sol, mientras que los planetas lo hacen alrededor del Sol. La ausencia de paralaje perceptible le llevó a detener el movimiento de la Tierra, en lugar de aceptar la inmensa lejanía de las estrellas. Las órbitas de Mercurio, Venus y Marte intersectarían a la del Sol, algo incompatible con las

esferas cristalinas soporte, según Aristóteles, de los movimientos de los astros. Esto abría la necesidad de buscar otras causas a estos movimientos.

El modelo ticomónico fue bien considerado durante bastantes años como único que podía rivalizar con el modelo copernicano.

Se puede afirmar que las medidas de precisión llevadas a cabo por Tycho y sus ayudantes contribuyeron de modo esencial a cambiar el rumbo de la astronomía.

C. Kepler, el soñador

Compleja personalidad la de este brillante astrónomo (1571-1630), de fértil imaginación, que se hizo notable en su juventud por sus aciertos como astrólogo, disciplina esta a la que tenía, sin embargo, en muy baja estima (“si los astrólogos aciertan de vez en cuando, es por pura casualidad”). Confeccionó horóscopos y calendarios para completar su bajo salario como profesor de matemáticas. Copernicano, y firme creyente en la armonía del cosmos, había varias cuestiones a las que buscaba respuesta: el número, las dimensiones, y el movimiento de los orbes.¹⁸ Publicó en 1596 su *Mysterium cosmographicum*, donde propone una respuesta basada en los cinco sólidos platónicos. Escribe:

La órbita de la Tierra es la medida de todas las cosas; circunscribir alrededor de ella un dodecaedro, y el círculo que lo contiene será Marte; circunscribir en torno a Marte un tetraedro, y el círculo que lo contiene será Júpiter; circunscribir alrededor de Júpiter un cubo, y el círculo que lo contiene será Saturno. Luego inscribir dentro de la Tierra un icosaedro, y el círculo en él contenido será Venus; inscribir en Venus un octaedro, y el círculo contenido en él será Mercurio. Ahora tienes la razón para el número de planetas.

Los radios de las esferas en esta macla kepleriana, en unidades astronómicas, son: 0.458794, 0.794654, 1., 1.25841, 3.77523, 6.53888, a comparar con los semiejes mayores de las elipses reales 0.387099, 0.723336, 1., 1.52371, 5.20289, 9.53668. Si se tienen

¹⁷ Gracias a los numerosos ayudantes con los que contaba conseguía realizar varias medidas simultáneas del mismo ángulo, de las que Brahe tomaba su media; esto, junto con su mejor instrumentación, hizo posible su conocida ganancia en precisión.

¹⁸ Orbe indica círculo o esfera.

en cuenta las excentricidades de las órbitas (0.205636, 0.006777, 0.016711, 0.093394, 0.048386, 0.053862, desde Mercurio a Júpiter), lo que obliga a dotar de espesor a las esferas, los radios exteriores de las capas esféricas serían 0.437739, 0.768532, 1., 1.51768, 5.01605, 9.67724, que pasan mejor la comparación con las dimensiones reales.

Kepler, en esta obra, busca también un nexo entre los períodos orbitales y las distancias al Sol. Sabían todos los astrónomos, desde Copérnico, que cuando más lejos está un planeta, mayor es su periodo. Kepler ensaya y propone entonces esta relación: $d_2/d_1 = (T_2/T_1)^{1/2}$. No va demasiado mal.¹⁹ La correcta, veremos luego, es $d_2/d_1 = (T_2/T_1)^{2/3}$.

1. Las elipses de Kepler

En 1600 Kepler se incorpora al equipo de Tycho Brahe en Praga. Centra su investigación en el planeta Marte, del que Tycho disponía de las medidas más precisas jamás alcanzadas hasta entonces. Marte era el planeta idóneo para estudiar, pues es exterior (con lo cual casi nunca se le ve cerca del Sol), y el más excéntrico y cercano a la Tierra y al Sol de los planetas externos. Tras la muerte inesperada de Tycho en 1601, pasa a ocupar el puesto de este, y lo que fue mucho más importante para él, tuvo acceso a todos los datos que el astrónomo danés había ido recogiendo a lo largo de 30 años. Este ansiado tesoro fue clave para que Kepler culminara su investigación fundamental sobre la forma de las órbitas de los planetas.

Convencido de que el Sol era el motor principal del sistema planetario, lo toma como origen de referencia. Las medidas disponibles le muestran que las órbitas son planas, en un plano que pasa por el Sol, y simétricas respecto de la línea de ápsides.

Sustituyó el método del ecuate para la hipótesis vicaria, lo que supuso una indudable mejora en la predicción de las longitudes heliocéntricas, con notable detrimento en la predicción de latitudes y dis-

tancias. Vióse por ello obligado a retomar el primero; el método ecuate para Marte, con los datos modernos ($R=1.52371034$, $e=0.09339410$), presenta un error máximo de 8.96' en longitud (alcanzado en la zona del primer octante contando desde el perihelio), 0.275' en latitud y 0.00438725R en distancia.²⁰ El error en la longitud no puede ocultarse en una mala precisión de las medidas, pues ya hemos dicho que las de Brahe eran fiables dentro de medio a un minuto de arco. De ahí que Kepler escribiera:

La Divina Providencia nos donó con Tycho Brahe un observador tan diligente, que estas observaciones hacían el cálculo ptolemaico convicto de un error de 8'; por ello es justo que aceptemos este regalo de Dios con mente agradecida.... Puesto que estos 8' no podían ser ignorados, ellos solos han llevado a una reforma total de la astronomía.

Dispuesto ya a todo, Kepler vuelve su mirada a la órbita terrestre (que supone circular), y usando tres medidas de Tycho a Marte y al Sol, efectuadas cada una cuando Marte se encuentra en la misma posición respecto a las estrellas (esto es, dejando pasar un tiempo T_{Marte} entre una y otra), concluye que también los datos observados apoyan que el círculo terrestre es ligeramente excéntrico. Y evalúa esta excentricidad, necesaria para aplicarle también el método ecuate.

En estos modelos ecuates, tanto para la Tierra como para el Sol, la uniformidad en torno al punto ecuate hace que las velocidades en los ápsides sean inversamente proporcionales a sus distancias al Sol. No así exactamente en los otros puntos, aunque sí de forma bastante aproximada. Pero Kepler, que anda buscando una razón física que explique el movimiento de los orbes, supone esta "ley de distancias" válida en todo punto, como si del Sol emanasen unos rayos de fuerza que solo existirían sobre el plano de la órbita, de modo que se debilitarían con la distancia como $1/r$ (en lugar de como lo hace la intensidad luminosa, que se extiende en tres dimensiones como $1/r^2$). Y como Kepler seguía a Aristóteles en la creencia de que las fuerzas son origen de las velocidades, ahí tendríamos la explicación física de que las velocidades de los planetas decrecen con la distancia como $1/r$. Por primera vez en la historia de la física se proponía una ley física

¹⁹ Tal ley sugeriría una ley de fuerzas inversamente proporcionales a los cubos de las distancias.

²⁰ El método vicario, por contra, lleva a estos errores: 2.15' en longitud, 0.0662' en latitud y 0.02335R en distancia.

como causa de un movimiento. La fuerza solar, para Kepler, sería responsable del movimiento transversal del planeta; para explicar el movimiento radial, responsable de la variación de las distancias del planeta al Sol, Kepler, conocedor de la obra de Gilbert sobre el magnetismo terrestre, propone una fuerza de tipo magnético.

A Kepler no le resultó fácil aplicar esta ley de distancias, pues no se había inventado aún el cálculo infinitesimal. Por ello, decide reemplazarla a efectos computacionales (no de física) por la ley de áreas, que no es equivalente, pero poco diferente cuando las excentricidades son bajas.²¹ La anomalía verdadera $\theta_{\text{área}}(\tau_{\text{área}})$ correspondiente a una anomalía media $\tau_{\text{área}}$ basada en el área barrida (normalizada a 2π), resulta distinta a la anomalía verdadera θ_{vic} que el método vicario asignaría a una anomalía media $\tau_{\text{vic}} := \beta$ de valor $\tau_{\text{área}}$, dándose de nuevo las diferencias $\Delta\theta := \theta_{\text{área}} - \theta_{\text{vic}}$ más ostensibles en las proximidades de los octantes: así, para $\alpha = \pi/4$ resulta $\Delta\theta = +8.1'$, y para $\alpha = 3\pi/4$ resulta $\Delta\theta = -6.9'$. (Cuando en lugar de la aproximación vicaria usada por Kepler, usamos ya la elipse conocida, los números no cambian de forma esencial: $+7.5'$ y $-7.5'$, respectivamente.)

Estos resultados indican que, desde el punto de vista de la ley de áreas, Marte se mueve sobre el círculo demasiado deprisa en los ápsides y demasiado lento en las cuadraturas; para acercarse al cumplimiento de dicha ley, quizás bastaría con aplastar un poco el círculo en dirección ortogonal al eje apsidal.

Y esta tentativa la ensayó Kepler con montones de cálculos. Uno de sus logros fue dar con el llamado “huevo” de Kepler, de ecuación polar, referida al punto ecuante E_{ec} , dada por²²

$$r = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-2e\cos\theta + e^2}}.$$

Tiene forma de huevo, más estrecha cerca del perihelio que del afelio. A bajas excentricidades, como la de Marte, no resulta fácil discernir este carácter ovoidal ni del dibujo ni del cálculo aproximado. Por la dificultad que presenta el cálculo del área barrida con

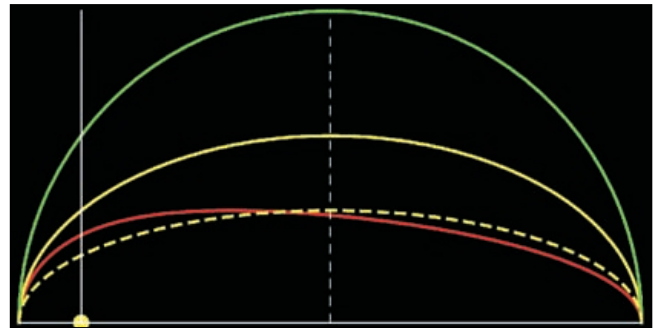


Figura 13. Ovoide de Kepler (en rojo), elipse aproximante (amarillo discontinuo), órbita elíptica correcta (amarillo continuo), y círculo (verde). Para realzar las diferencias en el dibujo, hemos tomado como excentricidad $e=0.6$; la excentricidad de la elipse aproximante es 0.7684.

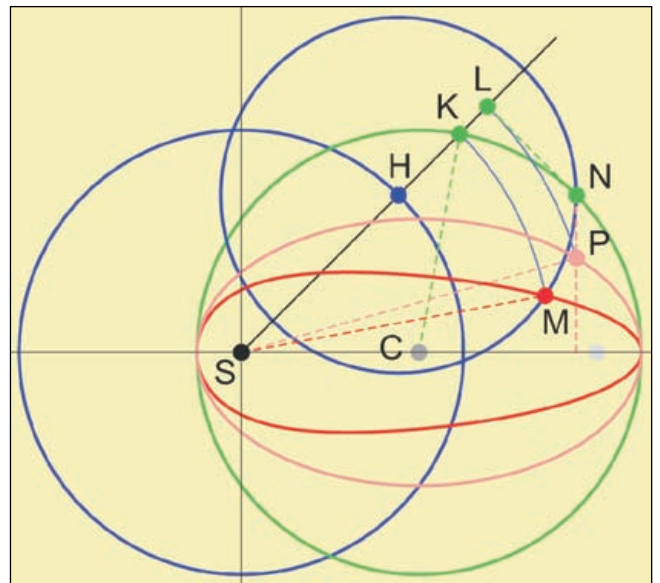


Figura 14. Generación geométrica del huevo de Kepler y de la elipse.

²¹ Para movimiento sobre el círculo excéntrico, la ley de distancia equivale a $dt/d\alpha \propto r$, esto es, $t \propto \int_0^\alpha d\alpha' \sqrt{1-2e\cos\alpha' + e^2}$, siendo α la anomalía excéntrica (ver Fig. 7). Por otro lado, la ley de áreas exige que $t \propto \alpha - e\sin\alpha$. Los factores de proporcionalidad se eligen de modo $t=2\pi$ cuando $\alpha=2\pi$. Sea $\tau_{\text{dist}}(e, \alpha)$ el tiempo así normalizado, conocido como anomalía media, correspondiente a la ley de distancia; es expresable mediante una integral elíptica de segunda especie. Sea $\tau_{\text{área}}(e, \alpha) = \alpha - e\sin(\alpha)$ el tiempo, o anomalía media, medido por el área del triángulo PSP_0 con un lado PP_0 circular. Para la excentricidad de Marte, la diferencia $\tau_{\text{área}} - \tau_{\text{dist}}$ entre los dos tiempos para un misma anomalía α oscila entre -0.0013 y $+0.0013$, esto es, entre $-4.4'$ y $+4.4'$, en términos de ángulos.

²² La ecuación de este ovoide no se conoció hasta 1962: K. Fladt, *Das Keplerscher Ei*, Elemente der Mathematik, XVII, 73-78 (1962).

esta órbita, Kepler decide aproximarla con una elipse de igual anchura pero con un semieje menor calculado de forma que la elipse encierre igual área que el ovoide (Fig. 13).²³ La elipse que aproxima el ovoide, para el caso del planeta Marte considerado por Kepler, tiene una excentricidad aproximada $\sqrt{2}e_M$, siendo e_M la excentricidad de Marte.²⁴

Una forma geométrica de generarlo está representado en la Fig. 14. Se trazan los círculos deferente y excéntrico, de centros S y C , con radio $a=1$. Se traza el epiciclo de centro H y radio e sobre el deferente. La recta SH corta a la excéntrica, de excentricidad e , en K . Con centro S y radio SK se traza un círculo, y se toma su punto M de corte con la excéntrica. El lugar geométrico de los puntos M así obtenibles forman el “huevo” de Kepler antes dado.

Cuando el procedimiento anterior se realiza sustituyendo el punto K por el punto L , intersección con la recta SH de la tangente a la excéntrica en el punto N en que la corta el epiciclo, esto es, de la normal a SH desde ese punto N , y el círculo de centro S y radio SL con la vertical desde N , se obtiene un punto P cuyo lugar geométrico es la correcta elipse de excentricidad e .

Volvamos a Kepler; al pretender que la ley de áreas midiese, salvo constante de proporcionalidad, el tiempo correcto, se encuentra Kepler diferencias con el tiempo dado por la hipótesis vicaria; diferencias similares a las halladas en el caso de la órbita circular (y que ya comentamos), pero de signos opuestos. Para el primer octante ($\alpha = \pi/4$) resulta $-6.4'$, y para el tercer octante ($\alpha = 3\pi/4$) sale $+7.8'$. Luego la solución hay que buscarla en la parte media entre el círculo y esta elipse auxiliar. Pero la mente de Kepler prefería llegar a la curva orbital tan afanosamente buscada mediante razones físico-geométricas.

Se dió cuenta Kepler de que la distancia Sol-Marte cuando la anomalía excéntrica $\alpha = \pi/2$ coincide con el

radio del círculo excéntrico (ver Fig. 15), y pensó que tal vez la distancia $r(\alpha)$ del Sol S al planeta P con anomalía excéntrica arbitraria podría ser en general igual a la proyección $RQ = a(1 + e \cos \alpha)$ de SQ sobre el diámetro correspondiente. Esta hipótesis le condujo a una órbita llamada *via buccosa* u órbita “mofletuda”,²⁵ para la cual, curiosamente, la integral

$$\int_0^\alpha r(\alpha') d\alpha' = a(\alpha + e \sin \alpha)$$

coincide con el área del sector circular ASQ , y por tanto podríamos decir que los tiempos medidos con el movimiento circular basado en la ley de área, o con el movimiento sobre la *via buccosa* y la ley de distancia, son equivalentes. Esta nueva órbita hallada por Kepler era compatible con los datos disponibles entonces sobre las distancias Sol-Marte, pero según Kepler predecía longitudes angulares erróneas en unos $5'$, con gran fortuna para Kepler, que se equivocó en la comparación, por no aplicar correctamente las oportunas leyes de área.²⁶ Porque es un hecho que con las preci-

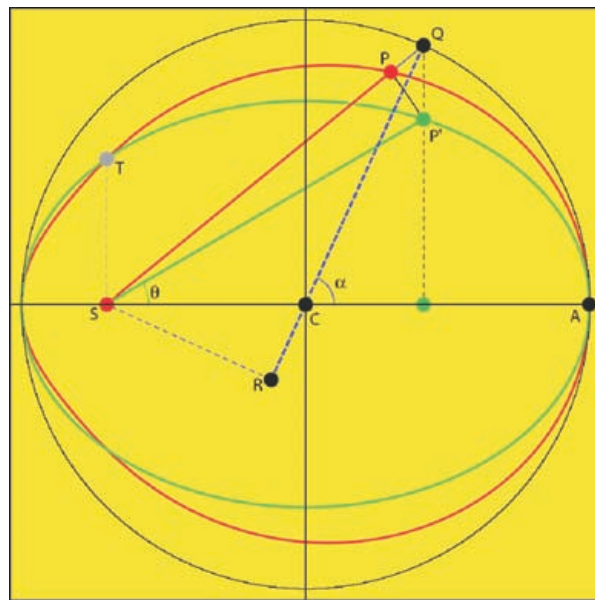


Figura 15. Generación geométrica de la *via buccosa* y de la elipse kepleriana.

²³ Para pequeñas excentricidades, como es el caso de Marte, el semieje menor de dicha elipse es, en excelente aproximación, la semianchura del ovoide en su abscisa media.

²⁴ Para $e_M = 0.0933941$, la excentricidad de la elipse que aproxima al ovoide es $1.41113e_M$.

²⁵ Su ecuación en polares, referidas al Sol y como eje polar la dirección del Sol al afelio, es

$$r(\theta) = 1 + e \cos[\theta + \arcsin(e \sin \theta)].$$

²⁶ Haciendo bien las estimaciones, resulta una discrepancia máxima de $0.94'$.

siones de aquella época son indistinguibles la verdadera elipse y la via buccosa.

Pero en fin, Kepler opta por llevar el planeta P no al diámetro CQ , sino a la perpendicular por Q a la línea de ápsides, manteniendo la misma distancia que antes, a saber, al punto P' tal que $SP' = RQ$. De este modo, se logra la curva esperada: la elipse de Kepler, con movimiento sobre ella dictado por la ley de área.

2. Ley de armonías

El astrónomo de Weil der Stadt publica en 1619 su apasionado libro *Harmonices Mundi*, donde su vena soñadora y creativa teje un hermoso tapiz en el que la astronomía, la música, la filosofía, la poesía y la teología conviven bajo el soplo inspirador de Kepler.²⁷

En su Libro V, Cap. 3, pág. 189-190, enuncia su tercera ley, que sugerirá algunas décadas más tarde la ley $1/r^2$ de la gravitación a Hooke, Halley y Newton. “Mas es cosa certísima y en todo exacta que la proporción que existe entre los tiempos periódicos de dos planetas cualesquiera sea precisamente la proporción sesquiáltera entre las distancias medias, esto es, entre los orbes mismos.”²⁸

En lenguaje moderno, los períodos de los planetas son proporcionales a la potencia $3/2$ de sus semiejes mayores. O bien

$$T^2/a^3 = \text{const.}$$

Tan exultante y satisfecho estaba Kepler con su obra, que en el Proemium de dicho Libro V (p. 179), tras confesar que ha robado los vasos de oro de los egipcios para construir un tabernáculo para su Dios lejos de los límites de Egipto, escribe: *Si ignoscitis, gaudebo; si succensetis, feram: jacio in aleam, librumque scribo, seu praesentibus seu posteris legendum, nihil interest: expectet ille suum lectorem per annos centum; si Deus ipse per annorum sena millia contemplatorem praestolatus est.*²⁹

²⁷ M. Caspar: Kepler, Dover, New York 1993.

²⁸ *Sed res est certissima exactissimaque, quòd proportio quae est inter binorum quorumque Planetarum tempora periodica, sit praecisè sesquialtera proportionis mediarum distantiarum, id est Orbium ipsorum.*

²⁹ Si me perdonáis, me alegraré; si os irritáis, me aguantaré. La suerte está echada, y escribo el libro, sin importarme que lo lean los presentes o los venideros. Que espere cien años a un lector, si Dios mismo ha estado esperando seis mil años a su observador.

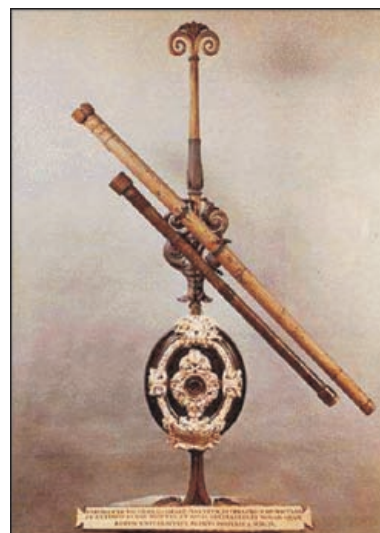


Figura 16. Telescopios originales de Galileo.

D. Galileo Galilei, el físico rebelde

Célebre pisano (1564-1642) considerado como el primer físico en sentido moderno, valedor de la evidencia experimental como fuente garante del conocimiento científico. Buen conocedor y simpatizante del sistema copernicano, fue defensor del mismo por razones más físicas que astronómicas, a saber, porque el doble movimiento de la Tierra le permitía proponer una causa para las mareas. La supernova de 1604 origina una disputa contra la idea aristotélica de la incorruptibilidad de los cielos, y Galileo se alinea con los críticos.

El año 1609 fue singular para Galileo. En un viaje a Venecia en julio de este año, se entera Galileo de que un óptico holandés, pulidor de lentes, llamado Hans Lipperhey, había patentado un instrumento para acercar visualmente los objetos lejanos, y que un extranjero había llevado a Padua uno de esos artilugios. Galileo vuelve presuroso a Padua en busca de este extranjero, pero cuando llega, éste se había marchado para Venecia. Galileo se encierra en su taller para construir él mismo un instrumento similar. No solo lo consigue, sino que mejora en un factor tres sus aumentos,

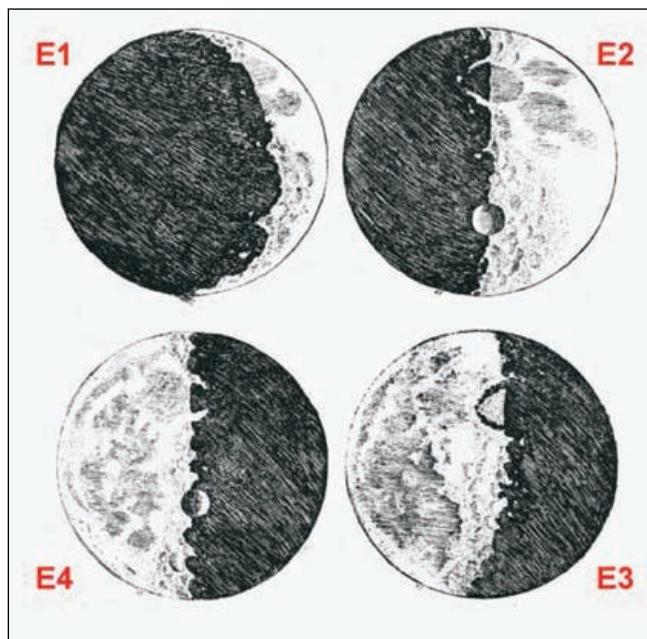


Figura 17. Grabados de la Luna, originales de Galileo, en *EL MENSAJERO DE LAS ESTRELLAS* (1610).

llegando a fabricar uno de nueve aumentos, que lleva a Venecia en agosto de 1609. La importancia naval de este logro para una potencia marítima como la veneciana le proporciona a Galilei un puesto permanente en la Universidad de Venecia.

En diciembre de ese mismo año Galilei dispone ya de un tubo óptico (más tarde³⁰ llamado telescopio, o más propiamente, telescopio refractor) de treinta aumentos, casi el límite práctico de las posibilidades del tipo escogido (objetivo plano-convexo, ocular plano-cóncavo), y una noche de enero de 1610 lo dirige al cielo y ve, emocionado, los cráteres, los mares y las montañas de la Luna y sus sombras, las estrellas de las Vía Láctea, y cuatro satélites de Júpiter (que Galileo bautizó como “estrellas mediceas”, y que son conocidas desde mediados del siglo XIX como Ganimedes, Calixto, Io y Europa, nombres estos que habían sido sugeridos por el propio Kepler). Galileo es el primer ser humano en gozar de este espectáculo, al tiempo que infiere de estas visiones que: 1/ los astros

son imperfectos (la Luna no es perfectamente esférica), 2/ la Vía Láctea no es un continuo, sino un conglomerado de estrellas, y 3/ el modelo copernicano se repite a escala planetaria, con satélites girando en torno a Júpiter. Los dos primeros hechos contradicen también los principios aristotélicos, y el tercero es un definitivo espaldarazo a la doctrina de Copérnico. Desde una perspectiva actual, podemos añadir que las observaciones lunares son la primera manifestación conocida de la universalidad de las leyes físicas (en este caso de la óptica), pues las sombras de las montañas se producen allí, igual que en la Tierra, por la propagación rectilínea de la luz en medios homogéneos, y su absorción por los cuerpos opacos.

Tras las observaciones realizadas a lo largo de varias semanas, Galileo recoge sus hallazgos en su famoso libro *SIDEREUS NUNCIUS* de marzo de 1610. En los meses siguientes observó Saturno (sin poder discernir la naturaleza de sus anillos) y distinguió claramente por vez primera todas las fases de Venus, incluida la llena, eliminando así la disposición planetaria del sistema ptolemaico en favor de modelos como el de Copérnico o el mixto de Tycho.³¹ En 1611 Galileo es elegido, por todo esto, miembro de la famosa *Accademia dei Lincei*, fundada en 1603.

No terminan aquí las aportaciones galileanas a la Astronomía. En 1611 ve las manchas solares; en 1612 refuta que sean pequeños planetas interpuestos y la *Accademia* le publica en 1613 sus *Cartas sobre las manchas solares*, donde por primera vez defiende pública y abiertamente, por escrito, a Copérnico.

Pronto iba a dar comienzo el hostigamiento inquisitorial a Galileo, sobre el que tanto, y tan bien, se ha escrito, y que durará desde 1615 hasta prácticamente su muerte en 1642. De este período son sus magnas obras *IL SAGGIATORE* (1623), *DIALOGO SOPRA I DUE MASSIMI SISTEMI DEL MONDO* (1632), y finalmente *DISCORSI E DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE, INTORNO A DUE NUOVE SCIENZE* (1638).

³⁰ El nombre de “telescopio” fue propuesto en 1611 por un matemático griego, de nombre Demisini, en un banquete ofrecido por el Príncipe Cesi a Galileo para el ingreso de éste en la *Accademia dei Lincei*.

³¹ Sabemos que en el *Almagesto* no se pronuncia Ptolomeo sobre los valores absolutos de los deferentes y epiciclos; lo hace en su libro posterior *HIPÓTESIS PLANETARIAS*, colocando los planetas interiores con deferentes y epiciclos a menor distancia de la Tierra que el Sol. Con esta configuración, entre las fases de Venus no se encontrarían ni la fase llena ni la de cuarto decreciente, pues este planeta se hallaría siempre entre el Sol y la Tierra.

IV. EL UNIVERSO FÍSICO

Hasta finales del siglo XVII la Astronomía se centró en la cinemática de los astros, sin proponer causas dinámicas para estos movimientos. La primera propuesta rigurosa vino de Newton, con su ley universal de la gravitación. Rige tanto la caída de los graves como el movimiento de los astros.

A. Newton, el maestro

Como hombre, fue un fracaso; como monstruo, fue grandioso. Así dice Aldoux Huxley de Newton.³² Para Keynes: *Newton ... fue el último niño prodigio a quien los Reyes Magos podrían rendir justo y sincero homenaje.*³³ Considerado como el científico más grande de todos los tiempos (gloria a compartir a lo sumo con Arquímedes y Einstein), a Newton debemos, entre otras cosas, el cálculo de fluxiones directo (cálculo diferencial) e inverso (cálculo integral), la teoría de los colores, y la ley de la gravitación universal. Gestas todas realizadas a sus 23 años, en los 18 meses más fecundos de toda la historia de la imaginación creadora. *Todo esto ocurría en los años de la peste de 1665 y 1666, pues en aquellos días me encontraba en lo mejor de la vida para la creación, y nunca tuve más afición que entonces por las matemáticas y la física,* escribía Newton medio siglo después.³⁴ Sus famosos PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA (1687) son obra cumbre de la ciencia.

Según nos enseñó Newton, la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ con que una masa inercial m_1 , situada en el punto $\mathbf{r}_1$ de un referencial galileano, atrae a otra masa m_2 colocada en $\mathbf{r}_2$ es

$$\mathbf{F}_{12} = -G_N m_1 m_2 r_{12}^{-3} \mathbf{r}_{12},$$

donde $\mathbf{r}_{12} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $r_{12} := |\mathbf{r}_{12}|$, y G_N es la constante (de Newton) de la gravitación universal. Aunque el propio Newton estimó (indirectamente) el valor de G_N —en realidad, lo que estimó fue la densidad media de la Tierra³⁵— su primera medida (también indirecta) fue hecha por Cavendish (1798), con un 1% de precisión. Hoy se sabe que³⁶

$$G_N = 6.67428(67) \times 10^{-11} \text{ uSI}.$$

La cosmología, provista de esta ley dinámica universal, se convierte en ciencia moderna. Las órbitas keplerianas aparecen como deducción matemática, y la ley armónica de Kepler se reviste como ley “1-2-3”:

$$G_N (M_\odot + m_p)^1 = \omega_p^2 a_p^3,$$

siendo $M_\odot$ la masa del Sol, m_p la de un planeta, ω_p la velocidad angular media del movimiento relativo Sol-planeta, y a_p el semieje mayor de la elipse descrita por $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_\odot$. La influencia de los otros planetas y satélites se supone despreciable. Como $m_p \ll M_\odot$, la ley “1-2-3” da origen a la tercera ley de Kepler, y a la obtención inmediata de la masa del Sol.

Ya sobaban los ángeles que empujaban a los planetas en torno al Sol. Los Principia fueron, según Kline, epitafio a la explicación física: *hypotheses non fingo*, escribe Newton. No le interesa la naturaleza del posible agente, material o no, causante de la gravitación, y lo deja “a la consideración de sus lectores”. Leibniz y uno de los Bernoulli le atacaron duramente. Pero la física newtoniana rigió, soberana, hasta principios del siglo XX, cosechando los éxitos más rotundos en cuanto a eficacia y precisión predictiva ($\sim 10^{-8}$). Bástenos citar la predicción por Clairault del regreso del cometa Halley, así como la del planeta Neptuno por Adams y Le Verrier en 1841 (analizando sus perturba-

³² *If we evolved a race of Isaac Newtons, that would not be progress. For the price Newton had to pay for being a supreme intellect was that he was incapable of friendship, love, fatherhood, and many other desirable things. As a man he was a failure; as a monster he was superb.*

³³ *Newton was not the first of the age of reason: he was the last of the magicians, the last of the Babylonians and Sumerians, the last great mind which looked out on the visible and intellectual world with the same eyes as those who began to build our intellectual inheritance rather less than 10,000 years ago.,* en *Newton: The Man*, THE COLLECTED WRITINGS OF JOHN MAYNARD KEYNES, Volume X. MacMillan St. Martin's Press, pp. 363-364.

³⁴ *All this was in the two plague years of 1665 and 1666. For in those days I was in my prime of age for invention & minded Mathematics & Philosophy more than at any time since.* (Parte del borrador de una carta, hallado tras la muerte de Newton, que aparentemente escribió éste a Pierre des Maizeaux.)

³⁵ Existe la siguiente relación: $G_N \rho_\oplus = (3/4\pi) g_\oplus / R_\oplus^2$.

³⁶ K. Nakamura et al., *Review of Particle Physics*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **37**, 075021 (2010).

ciones sobre Urano, descubierto por Herschell en 1781) y su localización en 1846 por Galle a solamente $52''$ de arco de la dirección prevista. Sólo una pequeña anomalía (avance del perihelio de Mercurio), detectada por Le Verrier en 1859, nubla ligeramente el horizonte.

La universalidad de la gravitación newtoniana se extiende al dominio estelar con la observación por Herschell de sistemas binarios de estrellas. El descubrimiento por Newton de la descomposición espectral de la luz al atravesar un prisma óptico conducirá años más tarde a conocer la composición de los astros. Finalmente, para asegurar una vida perdurable al Universo, Newton, que creía inmóviles las estrellas en el espacio absoluto, concluyó que dicho Universo debía ser infinito, totalmente rociado por doquier de estrellas con sus cortejos de planetas; de este modo las distintas fuerzas gravitacionales sobre cada estrella se compensarían entre sí evitando el colapso total o parcial.³⁷

Del cosmos griego llegamos, tras todos estos pioneros, a un cosmos, por supuesto ordenado, dotado de una ley universal que rige la atracción gravitacional, e infinito y estacionario.

1. La ley de áreas

En el Libro Primero de los Principia de Newton, como Teorema I figura la ley de áreas para todo campo de fuerzas centrales, seguida de una bella demostración geométrica.³⁸ Dice así el enunciado del teorema: *Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.*³⁹

La demostración es muy simple: sea S el centro de fuerzas, y una posición inicial del móvil en A . En un

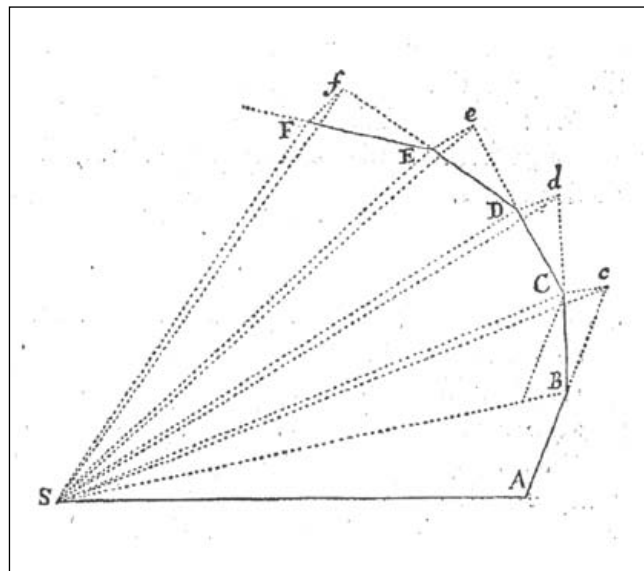


Figura 18. Dibujo original de los Principia.

pequeño intervalo de tiempo Δt pasará a la posición B ; si no hubiera fuerzas, seguiría hasta c en el siguiente Δt , de modo que el segmentos AB y Bc serían de igual longitud, y por tanto los triángulos ASB y BSc de igual área. Pero el efecto de la fuerza centrípeta hacia S , cuando se halla en B , hace que el móvil se desvíe a una dirección BC , coplanaria con el triángulo ASB (la nueva velocidad deber estar en el plano de la anterior velocidad y de la aceleración que cambia a ésta). Por otro lado, el cambio de velocidad experimentado debe ser proporcional a la aceleración, esto es, debe estar en la dirección BS , y por tanto, la posición C del móvil en el instante $2\Delta t$ es tal que cC y BS han de ser paralelos. En consecuencia, los triángulos BSC y BSc son de igual área, y por tanto también los triángulos BSC y ASB . Etc. QED.

Hay que remarcar, sin embargo, que, igual que en el argumento precedente, el espíritu del cálculo de flujiones, del análisis en suma, de la disección en “infinitésimos”, permea, disfrazado de geometría, aunque no en fórmulas, la obra de Newton.

³⁷ Como bien señala Hawking (1987), el que la fuerza ¡infinita! que las estrellas en un hemisferio de tal Universo ejercerían sobre otra concreta se cancelara exactamente con la debida al hemisferio opuesto no pasa de ser un piadoso deseo, por cuanto la diferencia entre dos infinitos es algo a definir.

³⁸ Parece ser que fue Robert Hooke quien enseñó a Newton cómo la ley de áreas se cumple para toda fuerza central. Ver, por ejemplo, *The Errors & Animadversions of Honest Isaac Newton*, por Sheldon Lee Glashow, en http://www.iecat.net/butlleti/pdf/90_butlleti_sheldon.pdf.

³⁹ Las áreas descritas por los radios que unen a un centro de fuerzas inmóvil los cuerpos en giro, yacen en un mismo plano y son proporcionales a los tiempos.

2. La ley $1/r^2$

¿Qué hace girar a los planetas alrededor del Sol? En tiempos de Kepler la respuesta de algunos a este problema era decir que había ángeles tras ellos batiendo sus alas y empujando a los planetas en torno a su órbita. Como veréis, esta respuesta no se aleja mucho de la verdad. La única diferencia es que los ángeles se asientan en dirección distinta y sus alas empujan hacia adentro. (Feynman)

En el Libro III, Proposición VII, Teorema VII, afirma Newton en sus Principia: *Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitatem materiae in singulis*. (La gravedad se produce universalmente en todos los cuerpos, y es proporcional a la cantidad de materia de cada uno de ellos.)

Y un poco más abajo, añade: *Gravitatio in singulis corporis particulas aequales est reciproce ut quadratum distantiae locorum à particulis*. (La gravitación sobre partículas iguales es inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias.)

En el Libro III, en el Escolio General tras el Problema XXII sobre la Proposición XLII, afirma Newton (edición segunda de sus Principia) que la gravedad actúa *según la cantidad de materia que [el Sol y los planetas] contienen, y propaga su virtud doquiera a inmensas distancias, decreciendo siempre como el inverso del cuadrado de las distancias*.

Ya Escoto Erígena (siglo IX) observó que el peso varía con la altura, y Bullialdo (1605-1694) parece haber sugerido la ley $1/r^2$.

Veamos, primero, cómo de órbitas circulares y de la tercera ley de Kepler llegamos a la ley $1/r^2$, y luego pasaremos al argumento seguido por Newton para llegar a la universalidad.

La ley básica de la gravitación está “impresa” o codificada en la ley armónica o tercera ley de Kepler:

$$a^3/T^2 = \text{const.}$$

Con órbitas circulares de radio R , se tiene $T = 2\pi R/v$, y por tanto podemos reescribirla como

$$v^2/R = \text{const}'/R^2$$

por lo que la fuerza atractiva responsable de la aceleración centrípeta es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Este es esencialmente el argumento ideado por Newton en 1665/66 durante su retiro en Lincolnshire huyendo de la peste declarada en Londres. Parece ser que Hooke le había ya comentado previamente a Newton que podía llegarse a dicha conclusión.

De la universalidad de esta ley tanto para los fenómenos terrestres como los astronómicos se percató Newton comparando la aceleración a_{Luna} con que la Luna gira en torno a la Tierra, con la aceleración de caída de los graves sobre ésta (que, recordemos, es independiente del grave). En cada segundo la Luna cae hacia la Tierra una distancia

$$0.136 \text{ cm} = (1/2)a_{\text{Luna}}(1 \text{ s})^2$$

y en cada segundo, un grave, por ejemplo una manzana, cae hacia la Tierra

$$4.90 \text{ m} = (1/2)a_{\text{manzana}}(1 \text{ s})^2.$$

Luego

$$1/3603 = a_{\text{Luna}}/a_{\text{manzana}}.$$

Por otro lado

$$(r_{\text{Tierra}}/d_{\text{Tierra-Luna}})^2 \approx (1/60)^2$$

por lo que, efectivamente, las aceleraciones gravitacionales son $\propto r^{-2}$.⁴⁰

⁴⁰ Newton es más cuidadoso, y tiene presente la influencia del Sol, cuyo efecto estima en un aumento de la aceleración centrípeta media de la Luna en un factor del orden de $1 + 1/(177 + 29/40)$. Parte de los siguientes datos: $d_{\text{T-L}} = 60r_{\text{T}}$, $2\pi r_{\text{T}} = 123249600$ pies parisinos (medida hecha por los franceses), $T_{\text{L}} = 27^d 7^h 43^m$, por lo que Newton deduce que cada minuto la Luna cae hacia la Tierra una distancia igual a $15 \frac{1}{12}$ pies parisinos, o más exactamente, 15 pies parisinos, 1 pulgada y $1 \frac{4}{9}$ líneas. Si la ley $1/r^2$ es válida, esta longitud es lo que debe caer un cuerpo sobre la superficie de la Tierra en 1 segundo (pues $d_{\text{T-L}} = 60r_{\text{T}}$); y efectivamente, Newton recuerda que Huygens ha medido que la longitud de un péndulo que bate segundos ($T/2 = 1 \text{ s}$) a la latitud de París es de 3 pies parisinos y $8 \frac{1}{2}$ líneas, y que lo que un grave cae en 1 s sobre la superficie de la Tierra es la semilongitud de tal péndulo por π^2 , es decir, 15 pies, 1 pulgada y $1 \frac{7}{9}$ líneas, compatible con lo anterior.

3. Las cónicas como órbitas de los graves

La primera ley de Kepler fue demostrada por Newton en los PRINCIPIA, como consecuencia de la ley $1/r^2$ de la atracción gravitatoria. En la Proposición XI del Primer Libro se propone como Problema VI probar que si un móvil P recorre una elipse cumpliendo la ley de las áreas con relación a un foco S de la misma, entonces su aceleración centrípeta es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia PF de P a F : *Revolvatur corpus in ellipsi; requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos*. Nótese que este resultado no prueba que las órbitas de los planetas sean elipses, sino el *recíproco*: si las órbitas son elipses, entonces la fuerza es del tipo $1/r^2$. Tras las proposiciones XII y XIII en las que extiende la solución al problema VI de la elipse a los casos de la hipérbola y la parábola, Newton, ya en la primera edición, añade un Corolario I que dice: *Ex tribus novissimis propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis P secundum lineam quamvis rectam PR quacunque cum velocitate exeat de loco P, & vi centripeta, quæ sit reciproce proportionalis quadrato distantie locorum a centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra*.

Así quedó en la primera edición de los Principia, y hasta 23 años después no se dejaron oír críticas sobre la incompletitud del resultado de Newton (particularmente por parte de Johann Bernoulli en 1710). Por eso Newton se adelantó mandando una carta en 1709 a su editor para que completara el corolario anterior añadiéndole estas frases aclaratorias, que aparecen en la segunda edición (1713): *Nam datis umbilico, & puncto contactus, & positione tangentis, describi potest Sectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex data vi centripeta: et Orbes duo se mutuo tangentes eadem vi describi non possunt*.

En la tercera edición (1726) completará ligeramente este comentario, reemplazando su última frase por: *Datur autem curvatura ex data vi centripeta, & velocitate corporis: & orbes duo se mutuo tangentes*

eadem vi centripeta eademque velocitate describi non possunt.

En resumen, el Cor. I queda así: *De las tres últimas proposiciones se deduce que si un cuerpo P se dirige desde el lugar P a lo largo de una recta arbitraria PR con velocidad cualquiera, y al mismo tiempo actúa sobre él una fuerza centrípeta inversamente proporcional a los cuadrados de las distancias de sus lugares a un centro, este cuerpo se moverá en una de las secciones cónicas con foco en el centro de fuerzas; y recíprocamente. Pues dados el foco, el punto de contacto, y la posición de la tangente, se puede trazar una cónica que tenga una curvatura dada en ese punto. Pero la curvatura se conoce sabiendo la fuerza centrípeta y la velocidad: y no puede haber dos órbitas tangentes [distintas] con igual fuerza centrífuga e igual velocidad*.

Y así quedó para la posteridad. Hoy veríamos este remate newtoniano como consecuencia de un teorema de unicidad de ecuaciones diferenciales:⁴¹ Sea $\mathbf{r}_1(t)$ es un movimiento con aceleración centrípeta k_1/r_1^2 hacia el origen de coordenadas O . Sea $\mathbf{r}_2(t)$ un movimiento sobre una elipse, satisfaciendo la ley de áreas respecto de uno de sus focos coincidente con el origen O . Sabemos, por la Proposición XI, que la aceleración centrípeta de este movimiento elíptico es de la forma k_2/r_2^2 . Supongamos que ambos caminos se tocan tangencialmente en un instante t_0 , con igual curvatura en ese punto: $\mathbf{r}_1(t_0)=\mathbf{r}_2(t_0)$, $\dot{\mathbf{r}}_1(t_0)=\dot{\mathbf{r}}_2(t_0)$, y $\kappa_1(t_0)=\kappa_2(t_0)$. Entonces $\mathbf{r}_2(t)=\mathbf{r}_1(t)$, $\forall t$, pues ambas órbitas tienen, por un lado, aceleraciones centrípetas inversamente proporcionales al cuadrado de las distancias, y comparten las mismas condiciones iniciales (no solo en posición y velocidad, sino también en curvatura, lo que obliga a que $k_2=k_1$).⁴²

Bueno, vamos a dar la solución newtoniana, *more geometrico*, al problema VI en la Proposición XI (antes presentado en latín): *Si un cuerpo gira en una elipse, hallar la ley de la fuerza centrípeta tendente al foco de la elipse*.

Sean C , A , B el centro y los extremos positivos de los ejes de la elipse, y S , H sus focos. Sea un punto P

⁴¹ B. Pourciau, *Reading the Master: Newton and the Birth of Celestial Mechanics*, The American Mathematical Monthly **104**, 1-19 (1997).

⁴² Utilizando las Proposiciones XII y XIII de los Principia puede extenderse este argumento a cónicas arbitrarias, no necesariamente elípticas.

4. La ley de armonías según Newton

Finalmente, veamos cómo en los Principia se presenta la tercera ley de Kepler. Lo hace Newton en la Proposición XIV, Teorema VI: *Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta sit reciproce in duplicata ratione distantiae locorum a centro; dico quod orbium latera recta principalia sunt in duplicata ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore describunt.*⁴⁵

La demostración es ahora muy fácil. Sabemos que $QT^2/QR \rightarrow L$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$. Por otro lado el límite de $2QR/(\Delta t)^2$ es la aceleración centrípeta a , y el límite de $\frac{1}{2}QT.SP/\Delta t$ es la velocidad areolar $v_{\text{área}}$. De todo esto, y del supuesto $a \propto 1/SP^2$, resulta inmediatamente

$$L/v_{\text{área}}^2 = \text{const.}$$

como se quería probar.

Aquí está la ley armónica en una versión local que no exige órbitas completas.

Y en la Proposición XV, Teorema VII, nos encontramos con la tercera ley de Kepler: *Iisdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsis sunt in ratione sesquuplicata majorum axium.*⁴⁶ (Edición 1726).

En efecto, para cada elipse $v_{\text{área}} = \pi CA.CB/T$, siendo T el periodo. Luego del teorema anterior $L \propto v_{\text{área}}^2$ área deducimos que $2CB^2/CA \propto \pi^2 CA^2.CB^2/T^2$, y por tanto $1/CA \propto CA^2/T^2$, esto es, $T \propto A^{3/2}$. QED.

5. Límites de la dinámica newtoniana

Como “absurda” fué tildada la teoría newtoniana de la gravitación (TNG) por Huygens, pues su acción a través del espacio vacío impedía cualquier mecanismo de transmisión.

De “nauseabunda a las mentes acostumbradas a no aceptar ningún principio físico que no sea incon-

testable y evidente” fue denunciada por uno de los Bernoulli.

Todo ello porque con su *hypotheses non fingo* Newton renunció a discutir sobre la naturaleza, material o inmaterial, del agente causante de la gravitación; pues para Newton las hipótesis, metafísicas o físicas, de cualidades ocultas o mecánicas, las afirmaciones que no son deducibles de los fenómenos, no caben en la filosofía experimental.

El propio Newton, al estudiar las perturbaciones de unos planetas sobre otros, observa que las órbitas de Júpiter y Saturno se alejan cada vez más de sus elipses keplerianas. ¿Acaso es inestable el sistema solar? ¿O será incorrecta la TNG? Discute a fondo esto en correspondencia con su discípulo Clarke y con Leibniz, y se ve obligado a echar mano de Dios como temporero cósmico para arreglar de vez en cuando el sistema solar. Leibniz rechaza esta idea, que supondría una creación imperfecta, aunque Clarke le rebate diciendo que tales arreglos bien podían formar parte del plan original del Creador. ¡La teología seguía influyendo en los conflictos científicos!

Este problema ocupó durante un siglo a las mentes más preclaras, hasta que en 1799 Laplace dió solución a la gran anomalía de estos planetas, probando que de hecho sus variaciones son periódicas, aunque, eso sí, con un período muy largo $T \sim 900$ años. [La razón de tal longitud temporal y del gran tamaño de esas perturbaciones estriba en que los períodos orbitales de Saturno y Júpiter están aproximadamente en una simple relación aritmética $2T_{\text{Saturno}} \approx 5T_{\text{Júpiter}}$, lo que propicia una acción resonante (denominadores pequeños en teoría de perturbaciones celestes).]

6. Paso a la complejidad

Las órbitas de los planetas no son exactamente elípticas. En primer lugar, están perturbadas por las interacciones con los otros planetas y con los satélites; pero aunque no estuvieran estos, en el sistema de dos cuer-

⁴⁵ Si varios cuerpos orbitan en torno a un mismo centro, y la fuerza centrípeta es inversamente proporcional a los cuadrados de las distancias de los cuerpos al centro, sostengo que los lados rectos principales de las órbitas son proporcionales a los cuadrados de las áreas descritas en el mismo tiempo por los radios que van desde los cuerpos al centro.

⁴⁶ Con los mismos supuestos, mantengo que los períodos en las elipses con proporcionales a los semiejes mayores elevados a 3/2.

pos más simple imaginable formado por el Sol S y un único planeta P la órbita de éste no es una elipse, pues en la interacción, aparte del término dominante dado por Newton, existe un término correctivo que proviene de la modificación einsteiniana de la gravitación, y que en nuestro sistema solar produce efectos relativos del orden de 10^{-8} .⁴⁷

Cuando se consideran tres o más cuerpos en interacción gravitatoria mutua, el problema matemático se hace enormemente complejo. Brillantes matemáticos de los siglos XVIII y XIX (Euler, Lagrange, Laplace, Jacobi, Hamilton, Poincaré,...) se ocuparon del llamado problema de los N cuerpos, obteniendo algunos resultados sobresalientes que voy a comentar.

En 1887 Ernst Heinrich Bruns demostró que el problema de los tres cuerpos no admite ninguna constante del movimiento que sea una función algebraica de las posiciones, velocidades, y del tiempo, y que sea algebraicamente independiente de las 10 constantes del movimiento clásicas esperadas por la invariancia galileana del sistema (posición inicial del centro de masas, conservación de momento lineal, conservación de momento angular, y conservación de energía).⁴⁸ Este teorema fue generalizado por Paul Painlevé al caso de N -cuerpos, aunque su demostración es errónea, y ha tenido que esperar a Emmanuelle Julliard-Tosel para su demostración incluso en el caso general: para el problema de N cuerpos en dimensión d , con $1 \leq d \leq N$, toda constante del movimiento algebraica en posiciones, velocidades y tiempo es algebraicamente dependiente de las $(d+2)(d+1)/2$ constantes clásicas).⁴⁹

Euler (1763) fue el primero en encontrar algunas soluciones periódicas al problema de los tres cuerpos (la configuración colineal, en la que los tres cuerpos

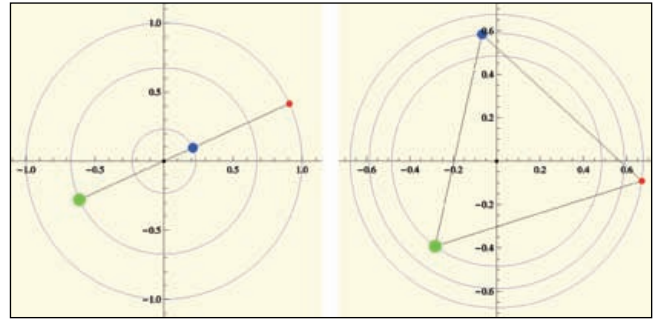


Figura 20. Configuraciones centrales de Euler y de Lagrange, para masas $m_1=2$, $m_2=3$, $m_3=4$. La recta y el triángulo equilátero giran uniformemente con sendas frecuencias angulares que son funciones de las masas. Con las masas dadas, y tomando $G_N=1$, se tiene $\omega=2.55036$ en el caso colineal, y $\omega=3$ en el caso del triángulo equilátero.

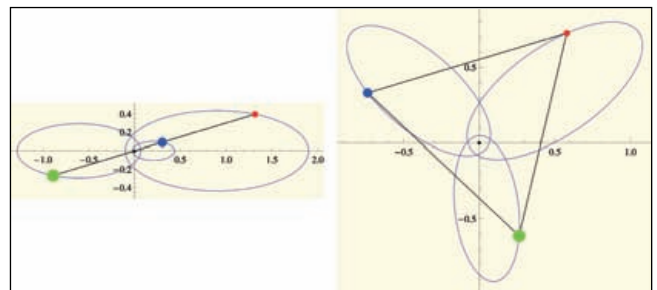


Figura 21. Configuraciones homográficas de Euler y de Lagrange, para masas $m_1=2$, $m_2=3$, $m_3=4$, y elipses con $a=1$, $e=0.9$. La recta y el triángulo equilátero giran cambiando de escala mientras las masas siguen movimientos keplerianos con igual frecuencia media a lo largo de elipses homotéticas con un foco en el origen (centro de masas). Estas frecuencias escalan con $a^{-3/2}$, y para $a=1$ coinciden con las dadas en la figura anterior.

yacen siempre en todo instante sobre una recta móvil, que pasa por el CM del sistema y gira uniformemente en un plano).⁵⁰

A Lagrange (1772) debemos la configuración triangular, con los tres cuerpos situados en los vértices de

⁴⁷ Incluso sin esta corrección, una descripción física completa debería incluir, por ejemplo, la disipación de energía debida a causas múltiples.

⁴⁸ E. H. Bruns, *Ueber die Integrale der Vielkörper-Problems*, Ber. Königl. Sächs. Ges. der Wiss., pp. 1-39, 55-82 (1887); Acta Math. 11, 25-96 (1887).

⁴⁹ P. Painlevé, *OEUVRES DE PAUL PAINLEVÉ*, Tome III, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1975, *Équations différentielles du second ordre, Mécanique, Quelques documents*.

Y. Hagihara, *CELESTIAL MECHANICS*, The MIT Press (Vols. 1 and 2), Japan Society for the Promotion of Science (Vols. 3 and 4), Cambridge, Mass.-London (Vols. 1 and 2), Tokyo (Vols 3 and 4), 1970 (Vol. 1), 1971 (Vol. 2a), 1972 (Vol. 2b), 1974 (Vol. 3), 1975 (Vol. 4), Volume IV, Part 2: Periodic and quasi-periodic solutions.

E. Julliard-Tosel, *Brun's theorem: The proof and some generalizations*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 76, no. 4, 241-281 (2000).

⁵⁰ L. Euler, *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium*, Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop. 11, 144-151 (1767).

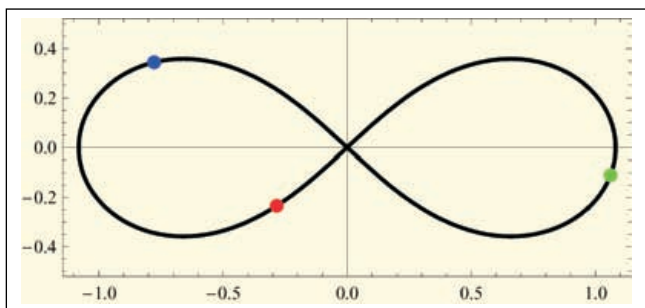


Figura 22. Coreografía con 3 masas.

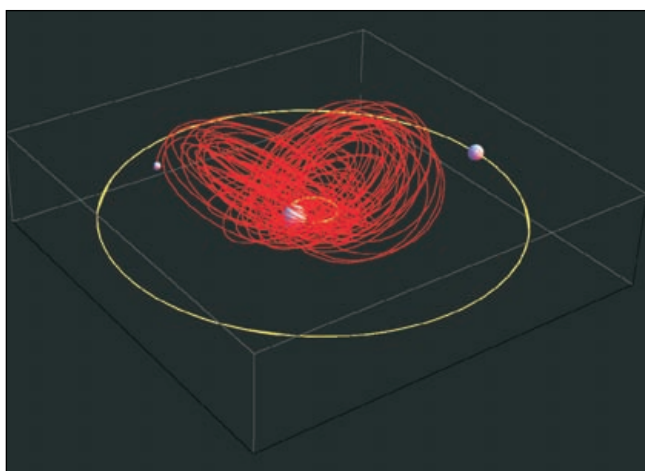


Figura 23. Órbita (en rojo) de un planetesimal con los datos dados en el texto.

un triángulo equilátero que gira uniformemente en torno a su baricentro.⁵¹

Estas soluciones “centrales” de Euler y de Lagrange admiten una generalización “homográfica” en la que la evolución dinámica mantiene la forma de la configuración (salvo rotaciones) pero su tamaño varía. Los puntos se mueven en cónicas homofocales, con un foco en el centro de masas, de igual excentricidad.

Más tarde Hill obtuvo otras parecidas a un sistema Sol-Tierra-Luna, que son estables, y en el año 2000

Chenciner y Montgomery probaron la existencia de una nueva configuración en la que tres cuerpos de igual masa se persiguen a lo largo de una órbita plana en forma de “ocho”.⁵² Esta solución es (numéricamente) estable.⁵³

Fuera de estas soluciones particulares y de otras configuraciones muy académicas conocidas como “coreografías”, en las que una colección de N partículas de igual masa se mueven todas a la vez sobre una misma órbita, con pasos sucesivos por el mismo punto desplazados en un intervalo de tiempo T/N , las soluciones al problema general solo son abordables numéricamente, y las órbitas adquieren por lo general una complicación extraordinaria. Pequeñas variaciones en los datos iniciales pueden llevar a resultados con enormes diferencias, por lo que el caos es omnipresente en los sistemas gravitatorios. Como muestra, en la figura adjunta mostramos una órbita de un planetesimal (masa despreciable) en el campo gravitatorio formado por dos masas $m_1=0.9$, $m_2=0.1$ en unidades $G_N=1$, en movimiento relativo circular. Inicialmente, estas masas están en los puntos $(-0.1, 0, 0)$, $(0.9, 0, 0)$, y el planetesimal se halla en $(0, 0, 0.5)$, con velocidad $(0.5, 0, 0)$.

La armonía de las elipses keplerianas tiende a ocultarse en la maraña de la complejidad. Si tardó el hombre dos mil años en reconocer las cónicas en un entorno astronómico apacible y diáfano como es nuestro sistema solar, ¿cuánto tiempo le hubiera costado entresacar la ley $1/r^2$ de la gravitación de ser la Tierra el planetesimal en un entorno dominado por un sistema binario o ternario, compacto, de estrellas?

Finalmente, queda otra sorpresa. Se ha demostrado que en un problema con 5 o más cuerpos gravitatorios, puede darse la circunstancia de que alguno de ellos, digamos F , sea arrojado por los demás al *infinito* en un tiempo ¡finito! Ahora bien, para que esto ocurra, los restantes cuerpos no pueden permanecer en una región

⁵¹ J. L. Lagrange, *Essay sur le problème des trois corps*, en OEUVRÉS, vol. 6, pp. 229-331, Gauthier-Villars, Paris, 1873; Prix de l'Académie, vol. IX, Ch. II, Panekoucke, Paris, 1777 (1772), p. 61.

⁵² A. Chenciner, R. Montgomery, *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses*, *Annals of Mathematics* **152**, 881-901 (2000).

⁵³ C. Simó, *Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem*, *Celestial Mechanics* (Evanston, II, 1999), *Contemp. Math.* **292**, 209-228 (2002).

T. Kapela, C. Simó, *Computer assisted proofs for non-symmetric planar choreographies and for stability of the Eight*, *Nonlinearity* **20** 1241-1255 (2007).

acotada, pues entonces la aceleración de F tendería cero en su huída, su velocidad se estancaría por ello, y no podría llegar al infinito en un tiempo finito. En su escape F deber ser visitado muy de cerca e infinitas veces por alguno de los otros cuerpos, para que le proporcione un buen “empujón”.⁵⁴

7. ¿Hay caos en nuestro sistema solar?

El caos determinista en el sistema solar proviene básicamente del solapamiento de resonancias (ya entre dos cuerpos, ya entre tres). Se sabe⁵⁵ que el sistema solar interior (desde Mercurio hasta Marte, inclusive) es caótico (aunque todavía no se hayan identificado con seguridad sus causas, muy posiblemente jueguen un destacado papel las resonancias seculares⁵⁶), con tiempos de Lyapunov $t_L \sim 5-7$ Ma.⁵⁷ Para la Tierra, $t_L \approx 4.8$ Ma, de modo que resulta imposible predecir en qué lugar de su órbita se hallará nuestro planeta dentro de, por ejemplo, 100 Ma. En cuanto al sistema solar exterior, se sabe con seguridad que Plutón presenta caos (por solapamiento de resonancias entre dos cuerpos, Neptuno y Plutón: $2\omega_N \approx 3\omega_P$), con un tiempo de Lyapunov de 10-20 Ma, pero los movimientos de los otros planetas (Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno), pueden ser caóticos o no (esto último, al menos, en periodos de hasta 1 Ga), dependiendo de sus condiciones iniciales; para la mayoría de estas condiciones, pero no para todas, su movimiento es caótico, producido por solapamiento de resonancias entre tres cuerpos.⁵⁸ Los tiempos de Lyapunov para estos cuatro planetas exteriores van desde los 6.4 hasta los 8.4 Ma.⁵⁹

8. ¿Es estable nuestro sistema solar?

Como ya dijimos antes, la cuestión de la estabilidad del sistema solar preocupó tanto a Newton que llegó a

dejar en manos del Todopoderoso aquellos arreglos necesarios que no pudiera remediar la gravitación.

En pleno siglo XXI sigue el problema sin cerrarse del todo, aunque cálculos masivos recientes,⁶⁰ que cubren 5 Ga e incluyen los efectos de la Luna y de la relatividad general, indican que la estabilidad del sistema solar es muy sensible a los datos iniciales sobre Mercurio. De 2501 análisis realizados, con distintas posiciones iniciales de Mercurio compatibles con las efemérides actuales y que no difieren de la actual en más de 1 m, en 25 de los casos Mercurio acabó cayendo al Sol o colisionando con la Tierra o con Venus dentro de unos 3 Ga, mucho antes de que el Sol inicie su fase de gigante roja. Evidentemente, debido al comportamiento caótico del sistema solar, cada integración de las trayectorias a lo largo de 5 Ga ha de verse como una muestra aleatoria de las trayectorias verdaderas, y en consecuencia, los resultados indicados han de ser valorarse como estadísticos.

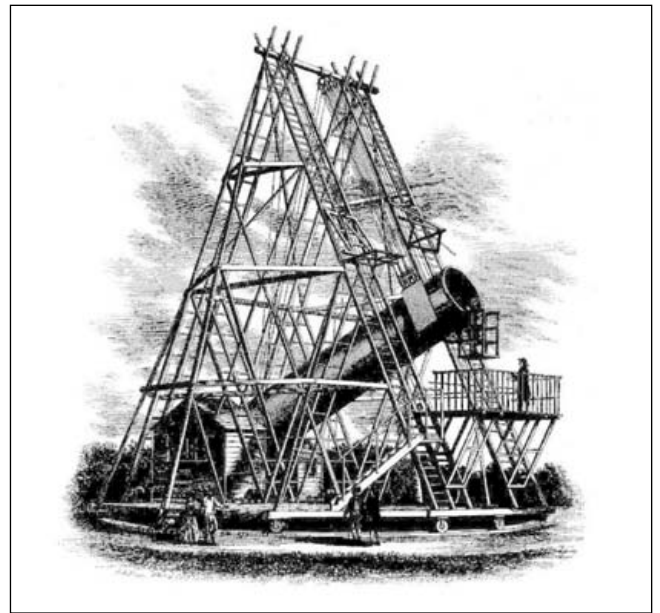


Figura 24. El telescopio de Herschel de 12 m.

⁵⁴ D. G. Saari, Z. Xia: *Off to infinity in finite time*, AMS Notices **42**, 538-546 (1995).

⁵⁵ K. Batygin, G. Laughlin, *On the Dynamical Stability of the Solar System*, The Astrophysical Journal **683**, 12071216 (2008).

⁵⁶ N. Murray, M. Holman, *The role of chaotic resonances in the solar system*, Nature **410**, 773-779 (2001).

⁵⁷ Un error posicional de Δd_0 hoy se habrá convertido en $\Delta d_t \sim \Delta d_0 e^{t/t_L}$ dentro de un tiempo t .

⁵⁸ W. B. Hayes, *Is the outer Solar System chaotic?*, Nature Physics **3**, 689-691 (2007).

⁵⁹ K. Batygin, G. Laughlin, *loc. cit.*

⁶⁰ J. Laskar, M. Gastineau, *Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth*, Nature **459**, 817-819 (2009).

Finalmente, no hay que olvidar que la captación de materia oscura por los planetas podría ir reduciendo el tamaño de sus órbitas, con la consiguiente repercusión en la vida del sistema solar. Por ejemplo, se ha estimado que este efecto, en unos pocos Ga, podría disminuir a su mitad el tamaño de la órbita terrestre en torno al Sol.⁶¹

B. Herschel, el astrónomo músico

Friedrich Wilhelm Herschel (1738-1822), músico compositor de muchas sinfonías y conciertos, ganó sin embargo su puesto en la historia como primer astrónomo en sentido moderno. No solo amplió los confines clásicos del sistema solar con su feliz descubrimiento del planeta Urano (1781),⁶² sino que su meticulosa observación astronómica le permitió ampliar, asistido por su hermana Carolina, el rico catálogo de las nebulosas, así como descubrir varias lunas de Saturno y del propio Urano.

Diestro instrumentista óptico, se sirvió de los telescopios que él mismo diseñó y construyó (en número superior a cuatrocientos) para alejar las fronteras del universo. Famoso entre ellos es su gigantesco telescopio reflector de 12 m de tubo (distancia focal) y 1.26 m de apertura (1787), que dominó entre todos los telescopios, a la sazón existentes, durante medio siglo (Fig 24).

Fue el primero en observar estrellas dobles, constatando así en particular la vigencia de la ley de la gravitación más allá del sistema solar. Infirió que las estrellas presentan movimientos propios, y en particu-

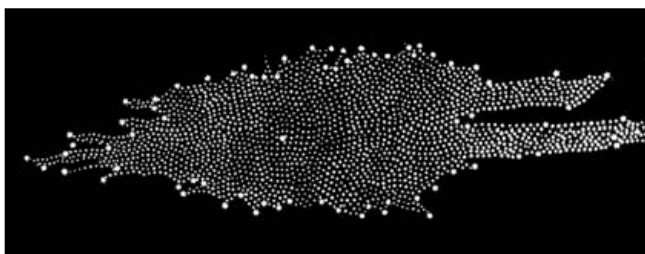


Figura 25. Nuestra Galaxia según Herschel. El Sol, según el mapa de Herschel, se halla en una posición bastante central.



Figura 26. Satélite espacial Herschel (ESA).

lar, que se mueve nuestro Sol, y con él todo su cortejo planetario, hacia la estrella Lambda Herculis. A través del conteo de estrellas en diferentes direcciones coligió una distribución estelar estadística para nuestra Vía Láctea (Fig. 25), y propuso una estructura de esta en forma de disco.

Especuló sobre la naturaleza de las nebulosas, cuyo catálogo amplió en más de 2500 nuevas entradas, e intuyó que muchas de ellas podían ser verdaderos “universos isla” (lo que hoy reconocemos como galaxias), tal como había imaginado Kant.

Finalmente, su agudo sentido en la observación le llevó a descubrir la zona infrarroja del espectro electromagnético, una banda de radiación que tan importante papel habría de jugar en el futuro de la astrofísica. En recuerdo a esta importante aportación científica de nuestro célebre astrónomo lleva el nombre de Herschel una de las dos sondas espaciales puestas en órbita, en la zona L2 del sistema Sol-Tierra (a 1.5 Gm de la Tierra), por la Agencia Espacial Europea en mayo de 2009. La nave Herschel es el primer observatorio espacial en el infrarrojo lejano (55 to 672 μm). Su misión es observar el universo en esta banda de longitudes de onda, apropiadas, por ejemplo, tanto para el estudio de exoplanetas cercanos como de las primeras estrellas y galaxias del universo más remoto (Fig. 26).

⁶¹ L. Iorio, *Effect of sun and planet-bound dark matter on planet and satellite dynamics in the solar system*, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics 05(2010)018.

⁶² Herschel lo bautizó como *Georgium sidus*, en reconocimiento al apoyo recibido del rey Jorge III de Inglaterra.