Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 102, Nº. 1, pp 265-272, 2008
IX Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica

¿DÓNDE ESTÁ HOY LA MATEMÁTICA?

MANUEL LÓPEZ PELLICER *

* E.T.S. Ingenieros Agrónomos. Apartado 22012. 46071 Valencia.

En 1900 se celebró en París el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos. David Hilbert dio la conferencia inaugural titulada "Mathematische Probleme" donde propuso su famosa colección de 23 problemas, que han guiado gran parte de la investigación matemática del siglo veinte. Hilbert señaló en su conferencia el papel de los problemas en el desarrollo de la matemática así:

¿A quién de nosotros no le complacería levantar el velo bajo el que el futuro yace escondido, para echar una mirada a los progresos venideros de nuestra ciencia y a los secretos de su desarrollo durante los próximos siglos? ¿Cuáles serán los objetivos especiales a los que los espíritus matemáticos más influyentes de las generaciones futuras se consagrarán? ¿Qué nuevos métodos y resultados descubrirán los nuevos siglos en el amplio y rico campo del pensamiento matemático?

Figura 1. David Hilbert 1862-1943.

Figura 2. John von Neumann 1903-1957.

Contestar dónde está hoy la Matemática presupone intuir hacia donde va la Matemática y, siguiendo a Hilbert, deberíamos pensar en las cuestiones aún no resueltas y cuya solución esperamos del futuro.

Pero Hilbert fue uno de los últimos matemáticos capaz de identificar los problemas más importantes en los diversos campos de la matemática de su tiempo y de señalar líneas posibles de desarrollo para el futuro.

Se esperó otro intento similar al de Hilbert en la conferencia de apertura del Congreso Internacional de Matemáticos de 1954 en Amsterdam, dada por von Neumann con el título "On unsolved problems in Mathematics". Hubo una enorme expectación entre los casi 1600 participantes que pensaban que la conferencia sería similar a la famosa conferencia de David Hilbert del congreso de París. Se creyó que la conferencia de von Neumann guiaría la investigación matemática de la segunda mitad del siglo veinte. Pero von Neumann habló de un problema especial de la teoría espectral, que resultó muy interesante para los especialistas, si bien la reacción del gran público se puede resumir con las palabras que Laurent Schwartz le dijo a John Horváth a la salida del congreso: “*Est ce que von Neumann est tombé sur la tête*?”.

Sabemos que en 1953 los organizadores del congreso de Ámsterdam de 1954 tenían dudas sobre la posibilidad de repetir una conferencia similar a la de Hilbert, pues en noviembre de 1953 H.D. Kloosterman informó a John von Neumann que el comité organizador del Congreso Internacional de 1954 había decidido programar una conferencia semejante a la de Hilbert de 1900 y le ofreció a von Neumann tres posibilidades:

1. Dar una conferencia preparada y dada por un solo matemático.
2. Que un pequeño grupo de matemáticos preparase una conferencia y que la diese uno de ellos.
3. Que un grupo de matemáticos preparase conferencias expuestas luego por cada uno de ellos.

Después de unas semanas de reflexión von Neumann contestó que ningún matemático abarca ya toda la matemática como lo había hecho Hilbert cincuenta años antes, pero que estaría dispuesto a dar una conferencia sobre Análisis matemático y áreas cercanas, como la lógica, con aplicaciones de las matemáticas, si el comité lo aceptaba.

Con motivo del cambio de milenio, V. I. Arnold, en nombre de la Unión Matemática Internacional, consciente de la imposibilidad de repetir la conferencia de Hilbert de 1900, se dirigió a varios matemáticos solicitándoles que describieran algunos grandes problemas matemáticos para el siglo veintiuno, con la intención de que entre todos hicieran para este siglo lo que Hilbert realizó en 1900 y se proyectó durante el siglo XX.

Sus trabajos están recogido en la publicación, *Mathematics: Frontiers and Perspectives*. Unos autores hablan desde la perspectiva de los problemas de su propio campo de especialización, otros con enfoque más amplio, tratando de identificar tendencias generales más que problemas concretos al modo de Hilbert.

Siguiendo la línea de esta publicación vamos a hacer un pequeño recorrido enunciando algunos problemas matemáticos actuales. La relación no puede ser completa y no cubre todas las áreas. Puede suplementarse con las referencias bibliográficas.

LA HIPÓTESIS DE RIEMANN

La Hipótesis de Riemann tiene relación con el concepto de número primo, que es un entero positivo que no se puede dividir exactamente por ningún número positivo, excepto por 1 y por sí mismo. Euclides en el siglo III antes de Cristo, probó que la serie de números primos 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13,… es ilimitada, al demostrar que dado un conjunto de números primos existe otro número primo mayor que todos ellos.

En el siglo XIX, el matemático alemán Bernhard Riemann trató de completar la observación de Euclides y afirmó que la sucesión de números primos seguía cierta pauta, lo que no se ha podido ni probar ni refutar y es quizás el problema más profundo que tiene hoy la Matemática pura. Su enunciado formal considera la función Zeta de Riemann

$$\varsigma(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}},\ \text{con}\ \mathrm{R}(s)>1,$$

Figura 3. Georg Friedrich Bernhard Riemann 1826-1866.

y afirma que los ceros de la función Zeta dentro de la banda crítica $0 \le \mathrm{R}(s) \le 1$ están todos sobre la recta $\mathrm{R}(s) = \frac{1}{2}$, sin que se haya conseguido la demostración.

Es el octavo problema enunciado en la lista de Hilbert.

FINITUD DEL NÚMERO DE EQUILIBRIOS RELATIVOS EN MECÁNICA CELESTE

Este problema de mecánica celeste consiste en averiguar si es finito el número de equilibrios relativos en el problema de n cuerpos con masas m_1, m_2, … y m_n.

En el problema de los tres cuerpos hay cinco equilibrios relativos, dos descubiertos por Euler y tres por Lagrange. A estos tres últimos corresponden los planetas troyanos del sistema solar.

En 1970, Smale interpretó los equilibrios relativos como puntos críticos de una función inducida por el potencial del problema plano de n cuerpos y Shub ha demostrado que el conjunto de puntos críticos es compacto.

¿P=NP?

Este problema está ligado con el problema filosófico de discernir lo que se puede llegar a conocer y lo que no. En 1913 el lógico austríaco Kurt Gödel estableció que no se podía alcanzar la certeza absoluta en la aritmética. Eso significa que cualquier sistema axiomático que contenga a la aritmética tiene proposiciones cuya verdad o falsedad es indecidible desde ese sistema axiomático.

De forma análoga, en 1930, Alan Turing obtuvo unas reglas para discernir en Teoría de la Computación lo que es computable de lo que no lo es. Lo computable en tiempo polinomial se dice que es computable en tiempo *P*. Por ejemplo, cuando se dice que un ordenador puede calcular en tiempo polinomial el mejor recorrido para visitar *n* ciudades, se está indicando que el tiempo de computación es del orden n^k unidades de tiempo.

Si el tiempo de computación de un problema crece exponencialmente, puede transformarse en un problema intratable computacionalmente. Entonces se dice que se tiene un problema *NP*. El que factorizar números grandes sea computacionalmente intratable es el fundamento de la seguridad de muchos de los actuales códigos criptográficos.

Se están publicando resultados interesantes para decidir cuando un problema es o no de tipo *P*. No obstante, parece que la obtención de un algoritmo general que permita decidir si un algoritmo es o no de tipo *P* está relacionado con el teorema de incompletitud de Gödel. Por otra parte, el distinguir si un problema computacional es de tipo *P o NP* puede tener respuesta variable con el tiempo al depender de que la rapidez de computación en el futuro llegue a ser mayor de lo que hemos pensado que podría ser posible.

COMPUTACIÓN TEÓRICA

La Computación Teórica nació hace unos setenta años, antes de que existieran los ordenadores, y es actualmente uno de los campos de investigación científica más importante y activo, pues está lleno de conexiones con otras ciencias y ha sido capaz de atraer a científicos de primera fila.

Por los años cuarenta fueron fundamentales las aportaciones de Alan Turing para el nacimiento del concepto de *computación*, sus límites y posibilidades. Estos estudios dieron la base teórica para la construcción por Von Neumann del primer ordenador con la arquitectura actual, permitiendo así la revolución informática que estamos viviendo.

Hitos fundamentales en computación teórica han sido el cambio de enfoque que supuso pasar de la noción de *computación* al concepto de *computación eficiente*, la formulación de la noción de completitud–*NP*, el desarrollo de la Teoría de Algoritmos, utilizando la aleatoriedad como un recurso, y la elaboración de una amplia gama de modelos computacionales. Además, surgió la Teoría de la Complejidad, uno de cuyos principales objetivos es la clasificación de los problemas según su dificultad computacional.

Lo que se pensó al principio que era un conjunto de ejercicios mentales, ha dado lugar a una potente teoría y a sistemas prácticos de la mayor importancia económica, conduciendo, por ejemplo, a la moderna criptografía.

El desarrollo de la Computación Teórica se ha visto favorecido por el intercambio de ideas con áreas matemáticas clásicas y con otros campos científicos, pues la Computación Teórica se relaciona con la Combinatoria, el Álgebra, la Topología y el Análisis, siendo cada vez más los matemáticos que se interesan por los aspectos computacionales de sus campos de estudio tradicionales, pasando de la existencia de un objeto al deseo de averiguar *¿cuánto se tarda en encontrarlo?*

También ha contribuido al desarrollo de la Computación Teórica su superposición con cuestiones algorítmicas de otros campos científicos que consideran datos que no están del todo bien definidos y que son de tipos muy variados, como una foto, un sonograma, datos suministrados por el telescopio espacial Hubble, cadenas de ADN o registros neuronales ante distintos estímulos.

Finalmente, no hay duda de que potenciarán el desarrollo de la Computación Teórica ideas filosóficas y problemas relacionados con la computación, tales como la posibilidad de que la aleatoriedad ayude a la computación, o el deseo de averiguar la causa de la dificultad de un teorema, o la posibilidad de simular problemas de Mecánica Cuántica.

COMPUTACIÓN CUÁNTICA

En 1982 Richard Feynman predijo que la simulación de sistemas de Mecánica Cuántica con ordenadores digitales llevaría a la necesidad de nuevas formas de computación.

También es previsible que esta necesidad llegue a ser acuciante en modelos complejos de simulación, pues los ordenadores actuales son extremadamente rápidos, pero aún usan el sistema clásico de cálculo binario con ceros y unos que data de la máquina de sumar de George Boole de hace 150 años.

Hasta hace unos años este sistema binario de cálculo se ha considerado suficiente, pues la capacidad de los *chips* se ha duplicado cada dos años, reduciendo su precio a la mitad, gracias a las constantes mejoras en ingeniería y a la producción de *chips* cada vez más pequeños, pero ya estamos cerca de los límites de tamaño que impone la Mecánica Cuántica.

También Richard Feynman indicó en 1982 que las carencias de los ordenadores digitales se podrían soslayar mediante alguna forma de ordenador cuántico, siendo obvio que si la velocidad de los ordenadores cuánticos les permitiera resolver problemas de Mecánica Cuántica, también podrían resolver problemas clásicos con mayor rapidez. La confirmación de esta hipótesis vino en 1994 con la demostración de Peter W. Shor de que un ordenador cuántico podría factorizar números grandes en un tiempo dado por una potencia del número, mejorando la velocidad de los algoritmos clásicos. Entonces los criptógrafos no podrán utilizar en sus códigos de seguridad números grandes difíciles de factorizar computacionalmente, pues dicha factorización se hará con gran rapidez.

La computación cuántica está en un nivel teórico, pues no está resuelto como construir los ordenadores cuánticos, lo que ha motivado el desarrollo de esfuerzos paralelos para diseñar ordenadores basados en principios distintos de los contenidos en la aritmética Booleana, con el mismo propósito de aumentar la capacidad de computación.

DISTRIBUCIÓN DE PUNTOS SOBRE LA ESFERA BIDIMENSIONAL

Se trata de encontrar $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ sobre la esfera bidimensional $S^2\subset R^3$ de manera que la función

$$V_n(x)=\sum_{1\le i\le j\le N}\log\frac{1}{\|x_i-x_j\|}$$

verifique que

$$V_n(x)-W_n\le c\log n,$$

siendo c una constante y

$$W_n=\min_{x\in S^2}V_n(x).$$

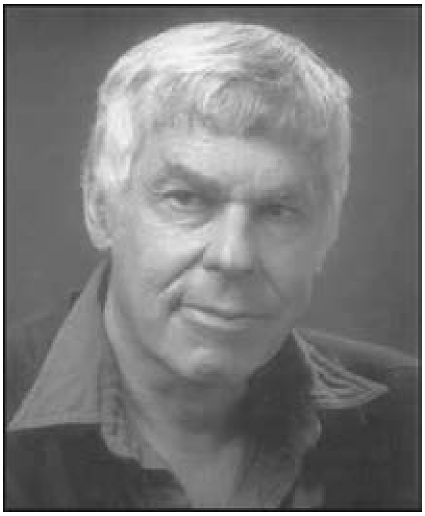

Figura 4. Stephen Smale 1930- .

El problema consiste en encontrar un algoritmo que con n como dato de entrada y con tiempo de computación polinomial en n proporcione como dato de salida el vector $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisfaga la desigualdad $V_n(x) - W_n \leq c \log n$.

Este problema surgió al pretender encontrar Shub y Smale un polinomio como punto de partida de un algoritmo de homotopía para obtener por vía computacional el Teorema Fundamental del Álgebra.

INTRODUCCIÓN DE MODELOS DINÁMICOS EN TEORÍA ECONÓMICA

La teoría de Arrow y Debreu del equilibrio de precios en Economía se reduce a la ecuación "oferta igual a demanda" en el caso de un único mercado. Para varios mercados la situación es más compleja y se considera la función *exceso de demanda* $Z(p) = D(p) - O(p)$ definida en el espacio de precios y con valores en el espacio de bienes. Las funciones demanda D y oferta O se definen agregando las demandas y ofertas individuales. La Teoría Económica justifica la admisión de unos axiomas sobre la función Z, que por aplicación del teorema de Hopf da un vector de precios de equilibrio p^* tal que $Z(p^*) = 0$ y por tanto en p^* sucede también que "oferta igual a demanda".

Se pretende encontrar modelos dinámicos en los que los estados sean más amplios que los vectores de precios y en los que la evolución de los precios en función del tiempo venga determinada por las acciones individuales de los agentes económicos.

EL DECIMOSEXTO PROBLEMA DE HILBERT

Consiste en averiguar si dado el sistema de ecuaciones diferenciales en R^3

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

donde P y Q son dos polinomios, el número de ciclos límite admite una cota K de la forma

$$K \leq d^q,$$

donde d es el máximo de los grados de P y Q y q es una constante universal.

Este enunciado es una versión moderna de la segunda parte del decimosexto problema de Hilbert, que ha resultado casi tan dificultoso como la hipótesis de Riemann.

En 1923 Dulac publicó que el sistema tiene un número finito de ciclos. En 1957 Petrovskii y Landis publicaron un artículo en el que daban solución positiva al problema, pero estos mismos autores encontraron un error en su demostración. En 1985, Ilyashenko descubrió un error en el trabajo de Dulac. En 1991 Ilyashenko y en 1992 Écalle han publicado dos artículos independientes relativos a la afirmación de Dulac.

Los especialistas piensan que no hay cotas, pero nada hay probado ni en afirmativo ni en negativo.

EL ATRACTOR DE LORENZ

En 1963 Lorenz analizó mediante ordenador el sistema de ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = -10x + 10y$$
$$\frac{dy}{dt} = 28x - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = -\frac{8z}{3} + xy$$

encontrando que la mayor parte de las soluciones tendían a cierto atractor, encontrando así uno de los primeros ejemplos importantes de *caos*.

Este trabajo numérico inspiró el desarrollo riguroso de una ecuación diferencial ordinaria definida geométricamente que parece tener el mismo comportamiento. Hay que averiguar si la dinámica del sistema de ecuaciones original coincide con la del modelo geométrico. La respuesta positiva consistiría en construir un homeomorfismo de R^3 en R^3 que llevara soluciones del atractor de Lorenz sobre soluciones del atractor geométrico.

La respuesta a este problema sería un paso importante en el establecimiento de bases firmes de la teoría de los sistemas dinámicos aplicados.

LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden escribir así:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - v\Delta u + gradp = 0,$$

$$divu = 0,$$

y se debe encontrar una aplicación u de clase C^∞, $u : R_+ \times \Omega \to R^3$ y otra aplicación $p : \Omega \to R$ que satisfagan estas ecuaciones de manera que u debe tener un valor dado en $t = 0$ y unos valores determinados en la frontera $\partial\Omega$. Además se tiene que $R_+ = [0, \infty[$, $u\nabla$ es el operador

$$u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

y v es una constante positiva.

Muchos matemáticos han trabajado en resolver estas ecuaciones. Su solución general será un paso fundamental en el análisis de la turbulencia y ayudará a completar el programa de Ruelle-Takens, quienes fueron los introductores del atractor caótico en un modelo de turbulencia.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POLINÓMICAS

Consideremos una aplicación $f : C^n \to C^n$ donde $f(z) = (f_1(z), ..., f_n(z))$, siendo $z = (z_1, ..., z_n)$ y cada f_i un polinomio en n variables de grado d_i. El problema consiste en encontrar un algoritmo que actuando iterativamente y partiendo de un vector inicial $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ proporcione un valor aproximado de un cero de f en un tiempo de computación acotado por un polinomio en el número de coeficientes de f. El tiempo de computación se mide por el número de operaciones aritméticas y de comparaciones $\leq$ que se deban realizar.

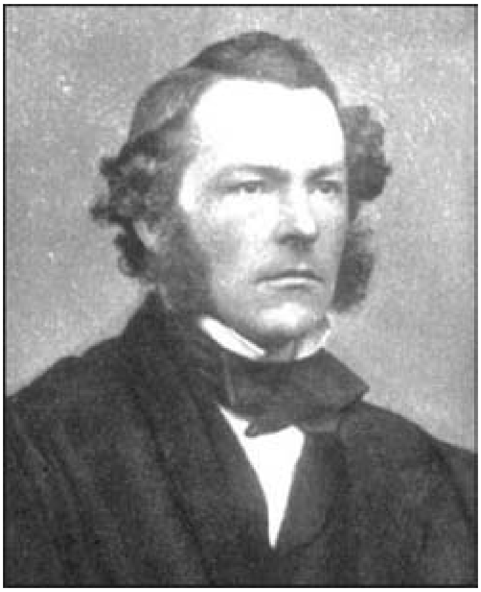

Figura 5. George Gabriel Stokes 1819-1903.

Si se dota al espacio de las aplicaciones f de una medida de probabilidad, para cada $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ se ha encontrado un algoritmo que, además de depender de $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$, depende de la probabilidad, de manera que el tiempo medio de computación, promediado en f según la probabilidad considerada, esté acotado por el referido polinomio en el número de coeficientes de f.

Queda por determinar un algoritmo que cumpla la acotación para el tiempo medio de computación y que sea independiente de $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$.

La determinación del número de ceros de polinomios y sistemas de polinomios es uno de los problemas más antiguos e importantes de Matemáticas. El problema planteado consiste en decidir si puede ser resuelto por los ordenadores en un tiempo de computación polinomial.

LOS LÍMITES DE LA INTELIGENCIA, ARTIFICIAL Y HUMANA

Penrose ha intentado demostrar que la inteligencia artificial tiene límites tratando la decidibilildad del conjunto de Mandelbrot y discutiendo algunas implicaciones del Teorema de Incompletitud de Gödel.

Es deseable un amplio estudio con modelos detallados del cerebro y del ordenador buscando similitudes y diferencias entre la inteligencia artificial y la humana. Tal vez la investigación del proceso de aprendizaje, la resolución de problemas y la teoría de juegos, junto con el manejo de los números y las aproximaciones, así como la percepción de las probabilidades y de la geometría nos ayuden en la búsqueda de lo común entre las inteligencias natural y artificial.

ALGUNAS IDEAS PARA POTENCIAR LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN EL FUTURO

Después de la Segunda Guerra Mundial, las nuevas técnicas en Ciencia y Tecnología generaron gran entusiasmo en muchos jóvenes estudiantes, lo que les estimuló hacia carreras de investigación científica. Esta tendencia recibió un notable estímulo en 1957 cuando la Unión Soviética lanzó al espacio el primer satélite Sputnik, pues las clases dirigentes se dieron cuenta del poder político y económico que la Ciencia podía generar, y la investigación científica, siempre fascinante para los investigadores, adquirió importancia para la sociedad.

Después de cincuenta años, se constata en muchos países que ha decaído el interés social por muchos campos de investigación científica. En particular, las Matemáticas han perdido importancia para la sociedad, tanto en los países desarrollados como en aquellos en vías de desarrollo, y muchos estudiantes brillantes, que en otros tiempos hubieran escogido estudiar Matemáticas, eligen Informática, Ciencias Empresariales y otros campos donde el futuro parece ser más prometedor, lo que es no es cierto, pues las oportunidades profesionales para los matemáticos son abundantes y variadas, tanto en áreas tradicionales, donde aparecen nuevos retos, como en las aplicaciones, donde es previsible que la demanda de matemáticos con preparación adecuada va a aumentar significativamente.

Necesitamos pues atraer a los jóvenes talentos hacia la Matemática, para lo que debemos presentar a los estudiantes una imagen completa de las Matemáticas con una amplia gama de posibilidades, con retos y gratificación intelectual. Es necesario propiciar una mayor comunicación entre los niveles educativo y profesional, pues de lo contrario podemos perder excelentes mentes matemáticas para este siglo XXI, que son las que han de continuar el desarrollo matemático. Quienes en mejor posición se hallan para poder transmitir los atractivos de las Matemáticas son los profesores, de Secundaria y de Universidad, y los profesionales, sobre todo transmitiendo su visión desde la época de estudiantes al período profesional.

Los matemáticos debemos transmitir a la sociedad el valor del esfuerzo matemático, lo que exige cierta educación matemática para entender el poder de la investigación matemática para profundizar en el conocimiento y para mejorar nuestra calidad de vida. Así se potenciará el desarrollo de la investigación matemática con fondos públicos o privados. Debe ser un reto para los matemáticos que la sociedad conozca el papel de las Matemáticas catalizando nuevos avances en distintas áreas mediante aplicación de nuevas ideas y de poderosas herramientas.

Debe ser otro desafío para los matemáticos transmitir a la sociedad que las Matemáticas no están aisladas, y que su actividad interacciona continuamente con la industria y la administración.

Creemos que los matemáticos deben seguir el ejemplo de Thomas Hales en la presentación de resultados con los nuevos medios de comunicación. Hales en lugar de publicar su demostración del problema de Kepler del empaquetamiento de esferas en una revista científica, a la que normalmente sólo tiene acceso un reducido número de especialistas, decidió exhibirlo a través de Internet ante una audiencia ilimitada. Instó abiertamente a que se revisara en detalle su demostración e invitó a que se aportaran ulteriores contribuciones, y además, Halles, profesor en la Universidad de Pittsburg, desarrolló el programa Flyspeck, acrónimo del título The Formal Proof of Kepler, durante un año sabático que terminó en abril de 2008, con el propósito de potenciar la colaboración internacional para probar formalmente su resultado de empaquetamiento óptimo, obtenido con ayuda de muchas horas de ordenador.

Durante ese año sabático realizó las siguientes visitas en el año 2007:

- Instituto Max Planck, Bonn (Alemania), del 1 al 31 de Mayo.
- E.N.S. París (Francia), del 1 de junio al 15 de julio.
- Reikiavik (Islandia), del 15 de julio al 15 de agosto.
- Pittsburgh (Estados Unidos), del 15 al 22 de agosto.
- Instituto Matemático de Hanoi (Vietnam), del 22 de agosto al 4 de enero de 2008.

Completó el año sabático con las siguientes estancias durante el año 2008:

- Pittsburgh (Estados Unidos), del 9 al 15 de enero.
- Instituto de Ciencias Matemáticas y de la Computación de la Universidad Radbout de Nijmegen (Holanda), del 15 de enero al 30 de abril.
- Estrasburgo (Francia), en mayo.
- Budapest (Hungría), durante julio.

Los matemáticos nos enfrentamos pues a un doble reto:

- Ser capaces de mantener la tradicional fortaleza de nuestra investigación básica, que es semillero de nuevas ideas y aplicaciones.
- Ampliar nuestro contacto con el mundo, ofreciendo nuestro trabajo a los demás e incorporando a otros al mundo de las matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Jair Minoro Abe y Shotaro Tanaka (editores). Unsolved problems on Mathematics for the 21st century. IOS PRESS, Ámsterdam (2001).
2. Phillip A. Griffiths. Mathematics at the Turn of the Millennium. American Mathematiocal Monthly 107(1) (2000).
3. Piergiorgio Odifreddi. The Mathematical Century. Princeton University Press (2000).