

LAS MATEMÁTICAS DE LA POLÍTICA*

SIXTO RÍOS GARCÍA*, DAVID RÍOS INSUA*,** Y JOSÉ M. LAVÍN**

* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Valverde, 22. 28004 Madrid.

** Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad Rey Juan Carlos

RESUMEN

En este trabajo se describen algunas de las principales aplicaciones de las Matemáticas en Política. Tras incidir en la relevancia de las cuestiones relativas a la toma de decisiones y la resolución de conflictos en Política, hacemos una introducción breve al Análisis de Decisiones, a la Teoría de Juegos y al Análisis de Negociaciones.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo describiremos de forma sencilla algunas aplicaciones de las Matemáticas en la Política. A pesar de la aparente desconexión entre ambas disciplinas, un breve análisis de los principales conceptos políticos nos permitirá vislumbrar la importancia de los problemas de toma de decisiones en concurrencia en la actividad política. Surgen así tres disciplinas matemáticas clave en este campo:

- El Análisis de Decisiones, que apoya la toma de decisiones de un individuo en condiciones de incertidumbre y en presencia de objetivos múltiples y conflictivos.
- La Teoría de Juegos, que permite analizar situaciones de conflicto entre dos o más participantes, esencialmente desde una perspectiva predictiva.
- El Análisis de Negociaciones, que intenta aconsejar a una parte involucrada en una situación de

conflicto, teniendo en cuenta una descripción del comportamiento previsible de las otras partes.

En realidad, y aunque las relaciones entre ambas disciplinas vienen de lejos a nivel académico, véase p.ej. Ríos (1975), no lo son tanto a nivel práctico y son poco conocidas por el gran público, motivo éste que nos lleva a presentar estas ideas en tono divulgativo. Centramos nuestra discusión en los modelos democráticos aportando algunas ideas sobre las consecuencias del teorema de Arrow sobre la imposibilidad de la democracia y el poder incorporar a los ciudadanos a la toma de decisiones a través de la red. Por razones de limitaciones de espacio, sólo daremos referencias a algunos temas muy importantes como por qué el centro político es tan codiciado o cómo se puede medir el poder.

2. CONCEPTOS BÁSICOS EN POLÍTICA

Comenzaremos presentando muy brevemente algunos de los conceptos clave de la política como motivación de la relevancia de algunas disciplinas matemáticas, luego presentadas en cierto detalle. Específicamente, intentaremos reflejar algo de luz sobre los conceptos de política, gobierno, poder, conflicto y democracia, poniendo el énfasis en la idea de política racional. En realidad, no existen definiciones fijas de los conceptos anteriores, ya que distintos autores destacan los aspectos que más les interesan para formular sus teorías, algunas de las cuales vislum-

* Sixto Ríos nos dejó el 8 de Julio de 2008. El fue inspirador principal de la conferencia que dió lugar a este artículo, entre muchas otras cosas.

braremos. En cierto sentido, esto acentúa las interrelaciones de los conceptos que nos conciernen y la necesidad de aportar algo de luz a través de una disciplina externa como son las Matemáticas.

2.1. Política

Reflexionaremos sobre distintos aspectos de la política. Esta palabra deriva del griego *polis*, que significa ciudad o estado, y de *politeia*, gobierno o constitución: su origen refleja claramente su aspecto público. En wikipedia, se define la política como *el proceso y actividad, orientada ideológicamente, de toma de decisiones de un grupo para la consecución de unos objetivos*. Otra definición distinta, pero también aséptica, sería *arte, doctrina u opinión referente al gobierno de los Estados*.

Se encuentran también muchas otras definiciones marcadas por las tendencias de sus autores. Así, por ejemplo, Schmitt (1933) afirma que no hay una definición clara de *lo político*, planteando un *juego* entre amigos y enemigos, intentando poner de manifiesto el componente bélico de la política como confrontación de fuerzas. En esa misma línea, Von Clausewitz (1832) compara la guerra y la política en su monumental *De la guerra*, equiparando la estrategia militar y la estrategia política. También Duverger (1964) insiste en la idea de política como *una confrontación de fuerzas*, que luego discutiremos en más detalle al mencionar el concepto de conflicto.

2.2. Gobierno

En gran medida, las políticas vienen implantadas de forma efectiva por un gobierno, que es *el órgano que tiene la autoridad y el poder para hacer y establecer normas y leyes dentro de un grupo u organización civil, académica o de otra índole, para que ésta tome un rumbo determinado*. En su sentido más amplio, gobernar significa administrar o supervisar las actividades de un grupo de personas. Se refiere, típicamente, a la función ejecutiva.

En nuestra discusión será especialmente relevante tener en cuenta que, en los últimos años, al concepto de gobierno se le ha unido el de *gobernanza*, que suma

a la acción de gobierno, la acción y participación de sus ciudadanos en las políticas gubernamentales, ya sea de manera individual o a través de asociaciones de todo tipo. Sobre todo, se emplea en términos económicos, pero también sociales o de funcionamiento institucional, esencialmente, con respecto a la interacción ciudadana en sus distintos niveles, cuando se producen grandes cesiones competenciales hacia arriba o hacia abajo.

2.3. Poder

Uno de los principales conceptos en política es el de poder. Comprende muchas facetas, incluyendo, por ejemplo, la influencia y la capacidad de intimidar o el control de una situación de votación. Los sociólogos definen habitualmente el poder como la capacidad de imponer la voluntad propia sobre la de otros para hacer o impedir hacer algo. Más generalmente, podríamos definir poder como *la capacidad, real o percibida, para producir cambios significativos en las vidas de la gente, a través de las acciones propias o de otros*.

En el contexto de este trabajo, cobra especial importancia el poder político como *función social conducente a la toma de decisiones para el conjunto de la sociedad, asegurando su ejecución por medio de la autoridad legítima y la supremacía de la fuerza pública*. En el análisis político normativo, suelen distinguirse tres dimensiones clave del poder: la capacidad de toma de decisiones, el establecimiento de agendas y la conformación de preferencias.

El más conocido teórico sobre el poder es Machiavelo que, en *El Príncipe* (1532), da claves sobre cómo conseguir, mantener y ejercer el poder. A partir de esta obra, diversos autores han desarrollado aspectos específicos de la cuestión del poder y su ejercicio. Por ejemplo, Foucault (1975) establece el poder como una cuestión de estrategia en una sociedad. Son muy relevantes, también, las ideas de Morgenthau (1948), que centra toda la actividad de las naciones en sus relaciones externas: los estados piensan y actúan en términos de intereses definidos como *poder*, estando la lucha por el poder en la esencia del ser humano y siendo las condiciones anárquicas del medio internacional caldo de cultivo ideal para fomentar esta

lucha. Morgenthau creía que la política, en general, es una lucha por el poder y que el poder político es una relación psicológica entre aquéllos que lo ejercen y aquéllos sobre los que se ejerce, dando un control a quienes manejan el poder sobre los que no lo hacen. Dicha influencia puede ejercerse a través de órdenes, amenazas, persuasión o una combinación de las anteriores y puede tener varias fuentes: desde la fuerza o la coacción, a la tradición, el carisma, la religión, el conocimiento o el dinero.

El control del poder es una de las razones principales del conflicto, como describimos a continuación.

2.4. Conflicto

El concepto de conflicto se asocia a situaciones en las que las acciones de un individuo, o un grupo, influyen y se ven influenciadas por las de otro, siendo por tanto, casi ubicuo en la actividad política. Lo que hace político a un conflicto es su dimensión pública, cuando afecta a algo más que asuntos privados. Así, en estos términos, un conflicto se refiere a *una situación entre dos o más grupos de personas con metas percibidas como incompatibles, en la que cada grupo busca minar la capacidad de los otros para alcanzar sus metas.*

Para Coser (1956), el conflicto social se produce cuando en la lucha por valores, status o recursos, los actores desean neutralizar o destruir a sus rivales. En ese aspecto, Marx y Engels (1848) plantearon la historia de la Humanidad como la historia de la lucha de clases. El conflicto es necesario para el progreso según Dahrendorf (1972), ya que produce cambio social, siendo clave la desigual distribución del poder y del acceso a éste entre los oponentes. A partir de Coser, se empieza a reconocer el conflicto como una relación social entre humanos de aspectos positivos, si puede controlarse antes de que se convierta en desintegrador. La aparición de la Teoría del Conflicto surge tras los cambios producidos por la II Guerra Mundial y la posesión de armas de destrucción masiva que poseen las dos superpotencias emergentes en los años 50 del pasado siglo. Las profundas transformaciones de la lógica del conflicto explican el nacimiento de esta nueva teoría. También sería interesante ver cuál es su relación con el *Realismo Político*, teoría sobre las

Relaciones Internacionales de Morgenthau (1948), que coloca el poder como el centro de la acción y del conflicto entre los países en el ámbito internacional.

El fracaso en la resolución de un conflicto puede conllevar su escalada para hacerlo más destructivo, agresivo o doloroso. La escalada de conflicto tiene un papel táctico en el conflicto militar y se formaliza en las reglas explícitas de combate. Existen numerosos ejemplos de escalada de conflictos en la historia. Uno de ellos sería la carrera de armamento entre las dos superpotencias durante la Guerra Fría, que luego describimos.

2.5. Democracia

Los conceptos anteriores versan sobre el ejercicio de la política. Quizás por los términos empleados parezca que nos referimos a un ejercicio puramente maquiavélico descarnado y que pudiesen ser más propios de un gobierno totalitario que de uno democrático. Sin embargo, las disputas por el control del poder entre grupos son también inherentes a la democracia, donde establecemos un juego reglado de acceso al poder, esencialmente basado en el conflicto entre partidos. También en el juego democrático es donde podemos ver una mayor aplicación práctica de la toma de decisiones o del Análisis de Negociaciones, ya que los grupos participantes no se encuentran restringidos como ocurre en un gobierno dictatorial, sino que son capaces de plantear una oposición y pactos que obligan a una mayor sofisticación en la negociación y la inclusión de más puntos de vista en la misma.

La democracia, literalmente *poder del pueblo*, del griego *demos*, pueblo, y *kratos*, poder, es *una forma de gobierno para un estado, o una organización, en la que todos los ciudadanos tienen igual voto o voz a la hora de configurar la política o elegir gobernantes.* Aunque suele aplicarse en el contexto de estados, los principios son aplicables a otros organismos como universidades, sindicatos, organizaciones cívicas, ...

Hay muchas otras variantes de definición. Así, Bobbio (1984) la establece mínimamente como *forma de gobierno que posee reglas básicas que determinan quién tiene autoridad para tomar decisiones que afectan a la población y mediante qué procedimientos*

se llevarán a cabo para tomar las decisiones. Linz y Stepan (1978) aportan una definición puramente procedimental de la democracia: *Libertad legal para formular y proponer alternativas políticas con derechos concomitantes de libertad de asociación, libertad de expresión y otras libertades básicas de las personas; competencia libre y no violenta entre líderes con una revalidación periódica de su derecho a gobernar; inclusión de todos los cargos políticos efectivos en el proceso democrático y medidas para la participación de todos los miembros de la comunidad política, cualesquiera que fuesen sus preferencias políticas.* Para Sartori (1990), la democracia es la *democracia liberal* y tiene tres variantes: a) principio de legitimidad; b) sistema político; c) ideal.

Es muy interesante la visión de Dahl (1971) que identifica *democracia* con *poliarquía* ya que afirma que la Democracia es completamente imposible en el mundo real y a todo lo que se puede aspirar es a una Poliarquía (*Gobierno de muchos*): una combinación de liderazgos controlados por los no líderes, cuyas acciones se corresponden con los deseos de la mayoría de los ciudadanos durante un periodo no corto de tiempo, estableciendo tres condiciones básicas:

- El ciudadano debe poder formular sus preferencias.
- El ciudadano debe poder manifestar públicamente estas preferencias sin miedo a la represión.
- Todos los ciudadanos deben recibir igualdad de trato por parte del gobierno.

Para ello, el gobierno debe garantizar a sus ciudadanos la libertad de asociación, la libertad de expresión, la libertad de voto, la capacidad de ser elegido para el servicio público, el derecho de los líderes políticos a competir y buscar apoyo, el derecho de los líderes políticos a luchar por los votos, el que exista diversidad de fuentes de información, el que existan instituciones que garanticen que la política del gobierno, y éste mismo, dependan de los votos y otros modos de expresar las preferencias ciudadanas.

2.6. Política racional

Nosotros pondremos el énfasis en la *Política Racional* que viene asociado al de comportamiento

racional, proveniente del ámbito del Análisis de Decisiones, y al de *acción racional*, que es aquélla en la que el agente sopesa consistentemente los medios de los que dispone para alcanzar los fines que se ha propuesto, de modo que pueda lograrlos de la mejor manera posible.

Weber (1988) fue uno de los primeros autores en emplear la acción racional en un ámbito social. Está determinada por expectativas en el comportamiento, tanto de objetos como de otros hombres, utilizando tales expectativas como medios o condiciones para el logro de sus fines propios racionalmente sopesados y perseguidos. Sin embargo, Schumpeter (1942) asocia la acción social racional a la existencia de líderes políticos. Los ciudadanos se dejan llevar por la irracionalidad a la hora de votar, ya que la esfera de lo político está alejada del votante y los únicos que actúan racionalmente son los líderes, ya que ellos no son ajenos a esa esfera de lo político.

2.7. Comentarios

Hemos revisado brevemente algunos de los principales conceptos políticos que motivan nuestra posterior discusión. Si por un momento reflexionan sobre lo aquí considerado, observarán que al hablar de política nos hemos referido, en esencia, a la toma de decisiones por individuos y grupos, los terrenos de las disciplinas matemáticas del Análisis de Decisiones, la Teoría de Juegos y el Análisis de Negociaciones, que ahora esbozamos.

3. ANÁLISIS DE DECISIONES

El Análisis de Decisiones proporciona una aproximación prescriptiva sobre cómo debe tomar decisiones una persona, o grupo de personas, en presencia de incertidumbre y objetivos múltiples. A nivel conceptual una de sus fortalezas es, precisamente, lo sencillo que se pueden presentar sus ideas básicas.

Empezamos describiendo el tratamiento de la incertidumbre. Típicamente, estaremos interesados en aprender sobre varios parámetros θ en relación con una decisión política (e.g., la tasa de paro, la probabilidad de que el enemigo tenga armas de destrucción

	Tiene ADM	No tiene ADM
Atacar Irak	Ahorra dinero frente a ataques futuros	Desastroso para RRPP
No atacar Irak	Mayor gasto en defensa	No hay cambio sustancial

Cuadro 1. Tabla de decisiones cualitativa de la guerra de Irak.

masiva,...) Para ello observaremos un fenómeno que aporta información sobre tales parámetros, recogemos datos y formaremos la verosimilitud $p(x|\theta)$ que describe cómo los datos x dependen probabilísticamente de θ . En la aproximación del Análisis de Decisiones, se supone que el decisor tiene acceso a otra información, previa a la observación de datos, que modelizamos mediante la distribución a priori $p(\theta)$. Ambas fuentes de información se combinan mediante la fórmula de Bayes, que proporciona la distribución a posteriori $p(\theta|x)$, que es la distribución del parámetro θ dados los datos x ,

$$p(\theta|x) = \frac{p(\theta)p(x|\theta)}{\int p(\theta)p(x|\theta)d\theta}$$

Para la predicción de valores futuros y del fenómeno, usamos la distribución predictiva: si conociésemos el valor de θ , usaríamos la distribución $p(y|\theta)$. Como hay incertidumbre respecto de θ , modelizada a través de la distribución a posteriori $p(\theta|x)$, la integramos para obtener la distribución predictiva

$$p(y|x) = \int p(y|\theta)p(\theta|x)d\theta$$

El objetivo final en política es tomar decisiones, por ejemplo para elegir entre varios planes para combatir una crisis. A cada plan a y cada resultado futuro y , le asociaríamos una consecuencia $c(a,y)$. Por ejemplo, si el paquete de medidas a tiene éxito (y , resultado futuro en este caso), habríamos incurrido en ciertos costes, obtenido ciertos niveles de desempleo,... Tal consecuencia se evaluaría mediante la utilidad $u(a,y)$ y escogeríamos el plan que maximiza la utilidad esperada predictiva

$$\int u(a,y)p(y|x)dy$$

Ilustramos una pequeña aplicación política del Análisis de Decisiones considerando críticamente un

ejemplo debido a Wong y Roederer (2006) en relación con la decisión de USA de iniciar la guerra de Irak. La situación presentada debe asociarse al periodo previo a la invasión (2003) en la que la principal excusa e incertidumbre para comenzar el conflicto bélico era que Irak dispusiese de armas de destrucción masiva (ADM). Para simplificar, supondremos que las dos únicas alternativas eran atacar o no Irak. Cualitativamente, el problema se describe mediante el Cuadro 1.

Suponiendo, como ocurría, que los servicios de inteligencia norteamericanos estaban bastante convencidos de la existencia de ADM, podemos asignar una probabilidad de 0,75 a la posesión de armas por parte de Irak (0,25, a la carencia). Supongamos, además, que asignamos las ganancias siguientes en billones de dólares:

- +50, si EEUU ataca y existen las armas, pues se ahorran costes frente a ataques futuros.
- -70, si se ataca y no existen dichas armas, por el descrédito en las relaciones internacionales.
- -100, si no se ataca e Irak posee las armas, por el posterior incremento del gasto en defensa.
- 0, si no se ataca e Irak no dispone de las armas.

y que, siendo EEUU neutro al riesgo, véase French y Ríos Insua (2000), utilizamos como utilidad el dinero ganado. Queda, entonces, la tabla de decisiones del Cuadro 2, ya cuantificada con probabilidades y utilidades. Calculamos, entonces las utilidades esperadas de atacar o no Irak. Así, la utilidad esperada de atacar

	0,75	0,25
Atacar Irak	50	-70
No atacar Irak	-100	0

Cuadro 2. Tabla de decisiones cuantitativa de la guerra de Irak. Versión 1.

Irak es u (atacar, ADM) $\times p$ (ADM) + u (atacar, no ADM) $\times p$ (no ADM) que es $50 \times 0,75 + (-70) \times 0,25 = 20$ billones de dólares. Análogamente, la utilidad esperada de no atacar Irak es -75 billones de dólares. Por tanto, según este análisis, la mejor opción sería atacar Irak. Podemos, realizar un análisis de sensibilidad calculando, por ejemplo, la probabilidad crítica p de que Irak tenga armas que hace que ambas acciones tengan igual utilidad esperada, para lo cual debemos hacer:

$$50 \times p + (-70) \times (1 - p) = (-100) \times p + 0 \times (1 - p)$$

cuya solución es $p = 7/22 \approx 0,32$. Así, podríamos afirmar que, bajo la estructura anterior de utilidades, debemos mantener la decisión de atacar Irak siempre que creamos que la probabilidad de que tenga ADM sea mayor que 0,32. Como quiera que, en este caso, la probabilidad asignada era 0,75, que es muy superior a tal valor crítico, parece reasegurarnos en la decisión adoptada de atacar Irak.

Podríamos realizar también análisis de sensibilidad respecto de la estructura de utilidad. Supongamos que adoptamos la estructura del Cuadro 3, que preserva los costes asociados a atacar Irak y mantiene la diferencia de costes asociados a no atacar, aumentando las ganancias. En este caso, las utilidades esperadas de atacar y no atacar Irak serían, respectivamente, 20 y 15 (billones de dólares), siendo aún mejor atacar Irak, pero estando mucho más cercanas las utilidades esperadas de ambas acciones. De hecho, si calculásemos el valor crítico para el que se igualan las utilidades esperadas, vemos que éste es cercano a 0,72, que ésta muy cercano al valor asignado de 0,75, sembrando serias dudas sobre la conveniencia de atacar Irak.

El ejemplo sencillo anterior muestra el enorme potencial del análisis de decisiones a la hora de justificar y debatir una decisión política: en lugar de discutir acaloradamente sobre una base intuitiva, tenemos la posibilidad de discutir racionalmente sobre una base científica.

	0,75	0,25
Atacar Irak	50	-70
No atacar Irak	-10	90

Cuadro 3. Tabla de decisiones cuantitativa de la guerra de Irak. Versión 2.

Obviamente, el problema anterior resulta demasiado simplificado y deberíamos proceder a un análisis algo más sofisticado, como el que presenta Brown (2005) sobre la posible guerra con Irán, basado en diagramas de influencia.

4. TEORÍA DE JUEGOS

Como hemos mencionado, uno de los motores fundamentales de la política es el conflicto público. Es por ello interesante considerar algunos de los conceptos principales de la teoría por excelencia del análisis de conflictos, a saber la Teoría de Juegos, ver Aliprantis y Chakrabarti (1999) o Raiffa (2002), para más detalles. De hecho, la Teoría del Conflicto antes aludida ha afectado a la Teoría de Juegos. Aunque ésta es anterior, ya que Von Neumann y Morgenstern publicaron su libro pionero en 1944, las implicaciones entre la teoría socio-política y la matemático-económica van en aumento. En esta teoría, los individuos o grupos se modelizan como actores que escogen entre un conjunto de alternativas para alcanzar sus objetivos. Un par de ejemplos sencillos ilustrarán sus dos conceptos clave: estrategias no dominadas y estrategias en equilibrio.

	I	D
A	5,4	4,1
D	13,9	6,5

Cuadro 4. Juego para ilustrar el concepto de dominancia.

En su expresión más sencilla, en Teoría de Juegos se consideran situaciones con dos participantes que pueden elegir entre dos alternativas cada uno de ellos, dependiendo los resultados de cada participante también de la decisión que tome su contricante. Se hacen hipótesis habituales como las de conocimiento común u otras similares. Como ilustración, se define un juego mediante la matriz del Cuadro 4.

Se interpreta como sigue: la entrada 5,4, por ejemplo, significa que cuando el participante por filas elige

A y el participante por columnas elige I, entonces el primero gana 5 y el segundo gana 4. Obsérvese en este caso que el participante por filas, haga lo que haga su contrincante, obtiene mejores resultados con la estrategia D, mientras que el participante por columnas, haga lo que haga su contrincante, obtiene mejores resultados con la estrategia I. Decimos que (D,I) es una estrategia no dominada o eficiente del juego. Como en este caso, el procedimiento de eliminar, tal vez secuencialmente, estrategias dominadas puede conducir a la solución de un conflicto. No siempre es posible esto, como ocurre en el ejemplo siguiente:

	I	D
A	5,4	11,7
D	13,9	6,5

Cuadro 5. Juego para ilustrar el concepto de equilibrio.

Aquí podemos emplear el concepto de equilibrio (de Nash, no cooperativo). Un par de alternativas están en equilibrio cuando ningún contrincante tiene incentivos para abandonar, unilateralmente, la misma. En este caso, las estrategias (D,I) y (A,D) están en equilibrio. Por ejemplo, para la estrategia (D,I), si el primer participante fija D, el segundo participante obtiene menos utilidad (4) si abandona unilateralmente la estrategia I, en lugar de la D. Puesto que (13,9) es mejor que (11,7) los participantes deberían escoger (D,I). Debe indicarse que, en general, no siempre es posible encontrar estrategias en equilibrio, salvo que se permita aleatorizar estrategias.

Más aún, pueden darse situaciones en las que la aplicación individual de la racionalidad lleva a una mala decisión de grupo. Son los denominados dilemas sociales. Consideremos, por ejemplo, la ya mencionada carrera de armamento de los años 60-80, entre los EEUU y la extinta URSS. Según el análisis de Taylor y Pacelli (2008), en aquella situación cada país podía optar por continuar armándose o reducir su armamento. Ambos países conocían bien que las dificultades

económicas producidas por la carrera hacían más deseable el desarme conjunto a la carrera. Además, preferían su superioridad a la paridad militar. Supongamos, pues, que ambos países valoraban las consecuencias, de peor a mejor, como sigue: 1, Inferioridad militar; 2, Carrera (igualdad, con penurias); 3, Desar-

		URSS	
		Desarmarse	Armarse
EEUU	Desarmarse	3,3	1,4
	Armarse	4,1	2,2

Cuadro 6. Un esquema de la carrera de armamento.

me mutuo; 4, Superioridad militar. Entonces, la carrera armamentística entre URSS y EEUU podría describirse mediante el juego del Cuadro 6.

En esta situación, la estrategia (armarse, armarse) es no dominada y, además, corresponde a un equilibrio, a pesar de que la estrategia (desarmarse, desarmarse) sea mejor que la mencionada¹. Esto explicaría, cualitativamente, el comportamiento de los gobiernos de EEUU y URSS durante la carrera. Tenemos así un ejemplo de situación en la que el comportamiento racional egoísta en busca sólo del interés propio conduce a una situación peor para el grupo. Tal situación podría soslayarse si fuese posible la comunicación entre las partes, o por repeticiones del juego.

Este tipo de análisis, esencialmente cualitativos, se han empleado para analizar numerosos conflictos. Así, por ejemplo, en Taylor y Pacelli (2008) se presentan varios modelos de la crisis de los misiles cubanos y de la guerra de Yom Kippur; en Brams (1985) se analizan varios modelos de las luchas entre Solidaridad y el Partido Comunista en la Polonia de 1980-81 o del caso Watergate.

La Teoría de Juegos tiene numerosas aplicaciones interesantes en Política. Por ejemplo, Downs (1957) formula su célebre teorema del votante de la mediana,

¹ Es un ejemplo de dilema del prisionero.

que explicaría el interés de los partidos políticos por apoderarse del centro, como un equilibrio de Nash en una situación política particular. Deberíamos, sin embargo, incidir, en que la Teoría de Juegos tiene un carácter esencialmente predictivo bajo condiciones muy fuertes, como, por ejemplo, la mencionada de conocimiento común. Pero nos adherimos, Ríos Insua et al (2009) y Rothkopf (2007), a la perspectiva que pone en duda la practicidad de la Teoría de Juegos en situaciones de negociación en que hay que aconsejar a una de las partes.

5. ANÁLISIS DE NEGOCIACIONES

Otra forma de resolver un conflicto es a través de la negociación. Una negociación es un proceso de toma de decisiones en el que dos o más partes se comunican e intercambian ideas, argumentos y ofertas con la intención de satisfacer sus necesidades y alcanzar sus objetivos educando e informando a sus contrincantes y cambiando las relaciones, posiblemente haciendo concesiones, para alcanzar un acuerdo. Las negociaciones pueden ser *distributivas*, en las que debe repartirse un sólo bien, o *integrativas*, en las que las partes combinan sus capacidades y recursos para crear valor y hacer una repartición más beneficiosa. Una negociación puede concluir en una solución satisfactoria para ambas partes, en una ruptura de las mismas o en una ruptura con acuerdo para intentar replantear las negociaciones nuevamente. En muchas ocasiones, la ruptura se acaba resolviendo con una votación o con un arbitraje. Existen numerosas variantes del problema de negociación, en función de si, entre otros, interactúan dos o más partes; o si las partes son monolíticas; o si se requiere un acuerdo; o si son posibles amenazas; o si se puede emplear ayuda externa;...

En caso de disponer de las utilidades esperadas de los participantes, podríamos adoptar una solución de arbitraje como la de Nash (1950) o la de Kalai-Smorodinsky (1975), entre muchas otras descritas en Thomson (1994), que, aparte de ciertas condiciones técnicas, intentan incorporar algún principio de equidad o justicia. Creemos, sin embargo, que tales soluciones arbitradas pueden aparecer como impuestas

a los participantes, por lo que preferimos gestionar, alternativamente, un proceso de negociación.

Para ello, se plantea una situación en la que vamos ofreciendo a los negociadores una solución en cada iteración. Si todos los participantes aceptan una de esas ofertas, entonces el proceso termina y ésta es la solución a implantar. En caso contrario, ofreceríamos a los participantes una nueva solución. Para que el proceso tenga sentido, las soluciones ofrecidas han de tener buenas propiedades, en el sentido de ser equitativas; deben tener en cuenta las respuestas dadas por los participantes en las distintas fases y, finalmente, deben estar diseñadas para converger a una solución no dominada. En este proceso, además, las funciones de valor de cada participante pueden utilizarse para ayudarle privadamente a evaluar y criticar la solución ofrecida en cada iteración. Hay diversos esquemas que se adaptan a esta aproximación y que se estudian dentro del Análisis de Negociaciones, véase Raiffa (2002) para una introducción, disciplina que integra elementos de la Teoría de Juegos, del Análisis de Decisiones Multicriterio y del Análisis de Decisiones descriptivo, y estudia todas las cuestiones relativas a las negociaciones, como las partes, los criterios, las alternativas o el papel del mediador, así como los diferentes métodos de negociación.

Entre ellos, están los *métodos basados en la búsqueda de una sucesión de acuerdos* mejores. Los participantes van modificando una propuesta ineficiente inicial, con la ayuda de un mediador, de forma que cada nuevo acuerdo sea conjuntamente mejor que el anterior, hasta que no sean posibles más mejoras conjuntas. Estos métodos se llaman SNT (Single Negotiating Text), término introducido por Fisher (1978), y se utilizaron, por ejemplo, en las negociaciones de paz entre Israel y Egipto en Camp David, ver Raiffa (1982). Este esquema de negociación está implementado, por ejemplo, en el Joint Gains del Decisionarium². Tiene el inconveniente de la dependencia clara de la solución inicial.

Existen otros métodos de negociación, como los *basados en concesiones*, en los que las partes comienzan la negociación desde posiciones diferentes, y

² <http://www.decisionarium.hut.fi>

deben realizar concesiones desde tales posiciones iniciales hasta que, finalmente, se encuentran en un punto común. Son muy habituales en negociaciones de compraventa. Un inconveniente es que el acuerdo alcanzado puede ser subóptimo. Si esto se detecta, se suelen utilizar métodos SNT para renegociar entre aquellas soluciones mejores que el acuerdo alcanzado. Algunos métodos basados en concesiones han sido implementados en Inspire, dentro del proyecto InterNeg³.

En este tipo de problemas, los esquemas que nosotros proponemos emplear son dos *métodos interactivos y guiados* que denominamos, respectivamente, de *incrementos equilibrados* (Balanced Increment Method, BIM) (Ríos Insua et al, 2003; Ríos y Ríos Insua, 2008) y de *concesiones equilibradas* (Balanced Concession Method, BCM) (Ríos y Ríos Insua, 2008), que siempre ofrecen una solución eficiente a los participantes. El esquema de negociación finalizará cuando las partes acepten una de las soluciones ofrecidas, o no sea posible ofrecer una solución muy distinta de la anterior. Una gran ventaja que tienen estos métodos es que garantizan un acuerdo que nunca será subóptimo, en caso de que se alcance. También pueden contemplarse como métodos para explorar la frontera de Pareto del espacio de acuerdos.

El Análisis de Negociaciones también describe cómo ayudar a una parte a tomar una decisión en una situación de conflicto, aportando una aproximación asimétrica prescriptiva / descriptiva, en la que una vez obtenida una descripción probabilística de lo que van a hacer las otras partes (aproximación descriptiva), se realiza un Análisis de Decisiones estándar para la parte a la que se aconseja (aproximación prescriptiva). Por ejemplo, en el caso del Cuadro 5 anterior, supongamos que hemos sido capaces de concluir que nuestro rival (por columnas) va a adoptar la columna de la izquierda con probabilidad 1/3 y la de la derecha con probabilidad 2/3. En tal caso, deberíamos aconsejar al participante por filas adoptar la fila A, pues obtiene utilidad esperada 9, antes que la B, que le aportaría utilidad esperada 25/3.

En estos casos, la dificultad principal es asignar las probabilidades de las acciones de las otras partes, cuestión ésta que llevó a Harsanyi (1982) a considerar

inválida la aproximación bayesiana a la Teoría de Juegos, precursora del Análisis de Negociaciones, véase Kadane y Larkey (1982) y Raiffa (1982). En general, la aproximación bayesiana a la Teoría de Juegos es menos conservadora que la Teoría de Juegos clásica. El Equilibrio de Nash (en un juego de suma cero) asume que el oponente invariablemente elige la acción que más ventajas le produce, forzando al otro jugador a defenderse en el escenario de peor caso posible, eligiendo acciones más costosas y a veces más irreales. La aproximación bayesiana permite que el analista use las posibles creencias y razonamientos subjetivos acerca de los problemas y las metas de su rival para pronosticar y tomar más acertadamente sus decisiones propias. El enfoque bayesiano puede acercarse a la Teoría de Juegos de varias formas, pero siempre tendrá el elemento común de que cada parte estudiará el proceso de toma de decisiones del otro, calculando las acciones de su adversario, que reflejará un razonamiento similar por parte de éste. Ilustraremos cómo puede hacerse en ocasiones tal asignación con un problema político relativo a asignación de recursos para combatir el terrorismo.

Consideramos un juego secuencial con dos participantes, Apolo y Dafne, cada uno con dos opciones, respectivamente $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$ y $\mathcal{D} = \{d_1, d_2\}$ cuya única incertidumbre es un resultado binario S (éxito o fracaso para Apolo). Apolo ejerce el papel de atacante (terrorista) y Dafne el de defensor (gobierno). La situación planteada se corresponde a un modelo de Defensa-Ataque, en el que, primero, el Defensor despliega su defensa d y, luego, el Atacante realiza su ataque a , tras haber observado d , intentando maximizar el daño producido, véase Brown et al (2006) y Ríos Insua et al (2009). Las funciones de utilidad sobre los costes son $u_A(c_A)$ y $u_D(c_D)$, con costes que dependen de las acciones de ambas partes. Para el análisis del problema, no necesitamos que Apolo conozca las utilidades y probabilidades de Dafne, pero sí que ésta estime las de Apolo. El diagrama de influencia (y el árbol de decisión) al que se enfrenta Dafne, se refleja en la figura 1. Para resolver este problema, Dafne necesita además de $p_D(S|a,d)$, $\pi_D(c_D|a,d,S)$ y $u_D(c_D)$, $p_D(a|d)$, i.e. sus probabilidades de que Apolo elija el ataque a tras haber observado que Dafne ha elegido la defensa d . Para ello, debe estimar la función de utili-

³ <http://www.interneg.org>

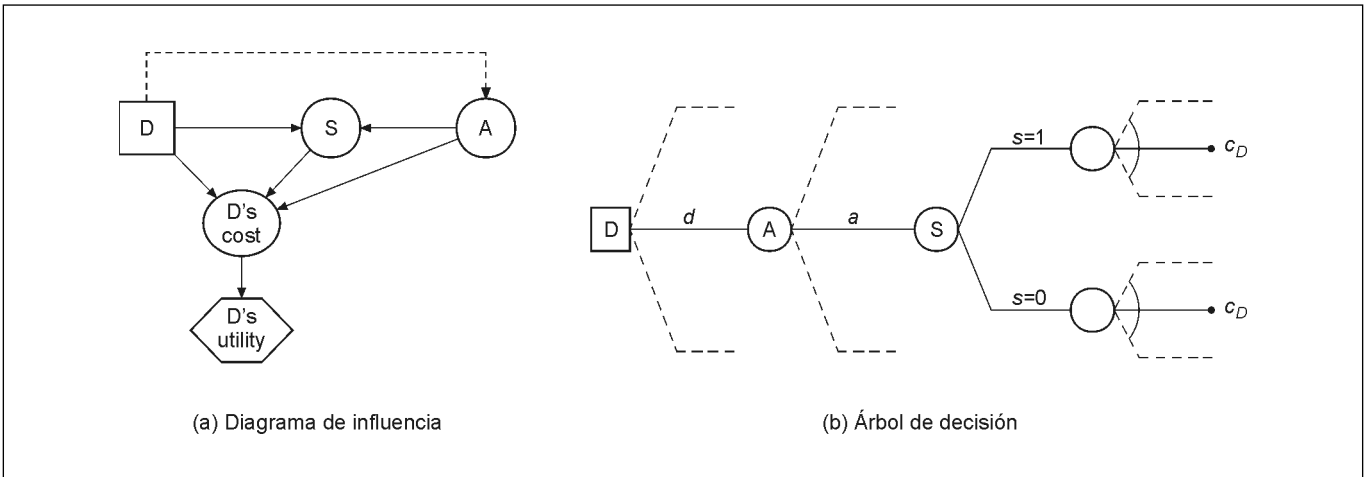


Figura 1. Problema de decisión para Dafne.

dad de Apolo, sus probabilidades de éxito en S , condicionado a (a,d) , y los costes asociados c_A , condicionados a (a,d,S) .

Para ello, Dafne debe ponerse en el papel de Apolo y pensar en la decisión que va a tomar. Podría entonces proceder a describir su incertidumbre sobre (π_A, p_A, u_A) con una distribución F , a partir de la cual puede deducir, suponiendo que Apolo es racional y maximiza la utilidad esperada que:

$$p_D(a|d) = P_F[a = \arg \max_{x \in A} \Psi_A(x, d)]$$

donde

$$\Psi_A(a, d) = P_A(S=0|a, d) \int U_A(c_A) \Pi_A(c_A|a, d, S=0) dc_A + P_A(S=1|a, d) \int U_A(c_A) \Pi_A(c_A|a, d, S=1) dc_A$$

para $(\Pi_A, P_A, U_A) \sim F$. Usamos, entonces, simulación Montecarlo para aproximar $p_D(a|d)$: obtenemos n muestras $\{(\pi_A^i, p_A^i, u_A^i)\}_{i=1}^n$ de F y aproximamos

$$\hat{p}_D(a|d) \approx \frac{\# \{a = \arg \max_{x \in A} \psi_A^i(x, d)\}}{n}$$

Una vez que Dafne ha completado estas valoraciones, puede resolver su problema. Su utilidad esperada en el nodo \textcircled{S} de la Figura 1 es:

$$\psi_D(a, d) = p_D(S=0|a, d) \int u_D(c_D) \pi_D(c_D|a, d, S=0) dc_D + p_D(S=1|a, d) \int u_D(c_D) \pi_D(c_D|a, d, S=1) dc_D$$

Su utilidad esperada aproximada en el nodo \textcircled{A} es:

$$\hat{\psi}_D(d) = \psi_D(a_1, d) \hat{p}_D(a_1|d) + \psi_D(a_2, d) \hat{p}_D(a_2|d)$$

Finalmente, la decisión óptima de Dafne sería $d^* = \arg \max_{d \in D} \hat{\psi}_D(d)$.

6. ¿ES POSIBLE LA DEMOCRACIA?

En democracia es habitual resolver un conflicto o tomar una decisión de grupo por medio de una votación. De hecho, para la mayoría de los ciudadanos, nuestra única participación en el sistema democrático es a través de las votaciones en las que participamos periódicamente, en nuestro país usualmente cada cuatro años. Un sistema de votación es un mecanismo para escoger entre diferentes opciones basado en las entradas de los votantes. El sistema incluye las reglas que describen cómo expresan los votantes sus preferencias y cómo se agregan tales preferencias para obtener el resultado final. Por ejemplo, en las elecciones al Parlamento español los distritos son provinciales, se da, a lo sumo, un voto a una de las listas, que son cerradas y con tantos candidatos como escaños, y se reparten después estos con la regla de d'Hondt.

Numerosos sistemas de votación se basan en el concepto de regla de la mayoría, o de que más de la mitad de los votantes obtienen el resultado que quieren. Dada su simplicidad, sorprende a muchos la gran cantidad de sistemas de votación que existen, o que algunos sistemas de votación muy populares pueden producir resultados apoyados por menos de la

mitad de los votantes. Así, distintos sistemas de votación pueden producir resultados diferentes, especialmente si no hay una clara mayoría: la elección del sistema de votación es un componente fundamental en el diseño de un gobierno democrático.

Un resultado, curiosamente no demasiado conocido en muchos ámbitos, que afecta a cualquier sistema de votación es el Teorema de Imposibilidad de Arrow (1951). De forma algo simplista, este resultado viene a decir que la democracia es imposible; más estrictamente, establece que resulta imposible construir un perfil de preferencias de un grupo a partir de los perfiles de preferencias de los individuos que lo componen, que satisfaga algunas propiedades de racionalidad colectiva luego mencionados.

Para ilustrar un ejemplo bien conocido, consideramos la regla de la mayoría simple. Supongamos que tres individuos expresan sus preferencias sobre tres alternativas como sigue:

	1	2	3
Individuo 1	a	b	c
Individuo 2	b	c	a
Individuo 3	c	a	b

Cuadro 7. Perfiles de preferencias individuales.

Se comprueba fácilmente que si el grupo emplea la regla de la mayoría simple, tiene el siguiente patrón de preferencias del grupo

$$a > b \quad b > c \quad c > a,$$

con lo que el grupo tendría preferencias intransitivas. Más aún, puede comprobarse que la regla de la mayoría simple está sometida, al menos, a dos posibles manipulaciones: control de la agenda para obtener un resultado deseado y votación estratégica para obtener el resultado deseado.

El teorema de Arrow demuestra que, de hecho, cualquier sistema de votación tiene algún inconveniente de ese estilo. Más precisamente, consideramos

situaciones en las que dos o más individuos quieren ordenar, como grupo, un conjunto de tres o más alternativas, a partir de sus ordenaciones individuales, permitiéndose empates. Las reglas de formación del perfil de grupo a partir de los perfiles de individuos se denominan constitución. Pues bien, el teorema mencionado afirma que no hay ninguna constitución que pueda satisfacer las siguientes propiedades razonables:

- *Universalidad.* La constitución debe estar definida para todos los perfiles.
- *Racionalidad individual y de grupo.* Los órdenes individuales y de grupo deben ser transitivos y completos.
- *Promoción de la eficiencia.* Si todos los individuos prefieren A a B estrictamente, el grupo debe preferir A a B estrictamente.
- *Ausencia de dictador.* No hay un individuo cuyas preferencias se conviertan, automáticamente, en las preferencias del grupo, independientemente de las preferencias de los demás.
- *Independencia frente a alternativas irrelevantes.* El resultado no cambia si se añaden o eliminan alternativas no ganadoras.

Keeney (1976) proporciona una versión del teorema en la que es posible la representación, bajo la hipótesis de intercomparabilidad de las funciones de valor en diferencias. Saari (2001, 2008) proporciona una descripción más benigna de los teoremas de imposibilidad.

7. DISCUSIÓN

En este artículo, hemos dado algunos apuntes sobre aplicaciones matemáticas en la política: el Análisis de Decisiones, la Teoría de Juegos, el Análisis de Negociaciones y la Teoría de Votaciones. Por brevedad, lógicamente, no hemos prestado atención a muchos otros temas de interés. Entre ellos destacamos la definición de medidas de poder, véase, p.ej. Shapley y Shubik (1954) o Banzhaf (1965); los métodos de división justa, véase p.ej. Brams (2008); la realización de predicciones electorales, véase, p.ej. Pavía et al (2008); o la definición de distritos electorales, véase p.ej. Balinsky (2008). Algunas revisiones globales de métodos matemáticos en Política pueden verse en

Taylor y Pacelli (2008), Brams y Fishburn (2002), Brams y Taylor (1996), Brams (2008) o Morrow (1994). También, debemos destacar el papel de la criptografía como metodología fundamental para el desarrollo de soluciones seguras en votaciones electrónicas, véase Krimmer (2006) para algunas ideas.

Un aspecto político importante en la actualidad es el referido a la democracia participativa, especialmente con ayuda de las TIC. Debido al creciente déficit democrático, se van buscando formas de permitir a los ciudadanos participar de forma más intensa en los procesos de toma de decisiones, una cuestión no exenta de debate. Así, por ejemplo, Buchanan y Tullock (1962) introducen su Teoría de la Elección Pública, donde establece que las decisiones de las instituciones públicas tienen un coste que soportan los ciudadanos, lo que implica que el coste de la decisión es un factor que influye en la eficiencia y los efectos de la decisión política. Pero además, al sufrir los ciudadanos los costes, deben tener posibilidad de controlar a las instituciones mediante mecanismos creados a tal fin. Por contra, para Schumpeter, la idea de una participación más amplia de la ciudadanía no sería factible ya que no hay medios posibles de participar en la toma de decisiones. Claro que Schumpeter decía eso en el siglo XX, muchas décadas antes de la revolución de las TICs. La referencia ahora no sería muy válida excepto para los contrarios a la introducción de las TIC en política. Sin embargo, la mayoría de los trabajos en esta dirección se han centrado en promover el e-debate y el e-voto, sin tener en cuenta el beneficio potencial que pueden aportar los métodos aquí descritos desplegados en la web para apoyar la toma de decisiones de grupos distribuidos. Una visión superadora puede verse en Ríos Insua (2008) y Ríos Insua et al (2008), que se particulariza al caso de presupuestos participativos en Ríos y Ríos Insua (2008).

AGRADECIMIENTOS

Trabajo realizado con el apoyo de proyectos del MEC y de la CAM (programa e-DEMOCRACIA-CM). Agradecemos las discusiones de todos los participantes en el correspondiente seminario promovido por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

REFERENCIAS

1. Arrow, K. (1951) *Social Choice and Individual Values*, Wiley.
2. Aliprantis, C., Chakrabarti, S. (1999) *Games and Decision Making*, Oxford University Press.
3. Balinski, M. (2008) Fair majority voting (or how to eliminate gerrymandering), Feb, *American Mathematical Monthly*, 97-113.
4. Banzhaf, J. (1965) Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis, *Rutgers Law Review*, 19, 317-343.
5. Bobbio, N. (1984) *Il futuro della democrazia. Una difesa delle regole del gioco*, Einaudi.
6. Brams, S. (1985) *Rational Politics*, CQ Press.
7. Brams, S. y Taylor, A. (1996) *Fair Division*, Cambridge U.P.
8. Brams, S.J. y Fishburn, P.C. (2002) Voting procedures, in Arrow, Sen, Suzumura (eds) *Handbook of Social Choice and Welfare*, Elsevier.
9. Brams, S. (2008) *Mathematics and Democracy*, Princeton U.P.
10. Brown, R. (2005) *Rational Choice and Judgment*, Wiley.
11. Brown, G, M. Carlyle, Salmeron J. and K. Wood (2006) Defending critical infrastructure, *Interfaces*, 36, 6, 530-544.
12. Buchanan, J. y Tullock G.(1962) *The calculus of the consent*, University of Michigan Press.
13. Coser, L. (1956) *The Functions of Social Conflict*, Free Press.
14. Downs, A. (1957) *An Economic Theory of Democracy*, Harper Collins.
15. Dahrendorf, R. (1972) *Konflikt und Freiheit: Auf dem Weg zur Dienstklassengesellschaft*, Piper.
16. Dahl, R. (1971) *Poliarchy, participation and opposition*, Yale University Press.
17. Duverger, M. (1964) *Introduction a la politique*, Gallimard.
18. Fisher, R. (1978) *International Mediation: A Working Guide*, Int. Peace Academy.
19. Foucault, M. (1975) *Surveiller et punir*, Gallimard.
20. French, S. y Ríos Insua, D. (2000) *Statistical Decision Theory*, Arnold.
21. Harsanyi, J. (1982) Subjective probability and the theory of games, *Management Science*, 28, 2, 113-120.
22. Kadane, J.B. y P.D. Larkey (1982) Subjective probability and the theory of games, *Management Science*, 28, 2, 120-124.
23. Kalai, E. y Smorodinski (1975) Other solutions to Nash bargaining problem, *Econometrica*, 43, 513-518.

24. Keeney, R.L. (1976) A group preference axiomatization with cardinal utility, *Management Science*, 23, 140-145.
25. Krimmer, R. (2008) *e-Voting 2008*, GI.
26. Linz, J.J. y Stepan, A.(1978) *The Breakdown of Democratic Regimes, Latin America*, Johns Hopkins University Press.
27. Machiavelli, N. (1532) *Il principe*.
28. Marx, K. y Engels, F. (1848) *Das Manifest der Kommunistischen Partei*.
29. Morgenthau, H. (1948) *Politics among Nations: The Struggle of Power and Peace*, Alfred Knopf.
30. Morrow, J. (1994) *Game Theory for Political Scientists*, Princeton U.P.
31. Nash, J.F. (1950) The bargaining problem, *Econometrica*, 18, 155-162.
32. Pavia, J.M., B. Larraz y J. M. Montero, (2008) Election forecasts using spatiotemporal models, *Jour. Amer. Stat. Assoc.*, 103, 1050-1059.
33. Raiffa, H. (1982) *The Art and Science of Negotiation*, Harvard University Press.
34. Raiffa, H. (2002) *Negotiation Analysis*, Harvard University Press.
35. Ríos, J. y Ríos Insua, D. (2008) A methodology for participatory budget formation, *Journal of the Operational Research Society*, 59, 203-212.
36. Ríos, S. (1975) La Investigación Operativa en problemas de política, *Revista de la Real Academia de Ciencias*, 69, 76-83.
37. Ríos Insua, D. (2008) *TIC³: Matemáticas, Política y TIC*, Real Academia de Ciencias.
38. Ríos Insua, D., Holgado, J., Moreno R. (2003) An e-negotiation system to support e-democracy, *J. Multicriteria Decision Analysis*, 12, 213-218.
39. Ríos Insua, D., J. Ríos, J.A. Rubio, J.M. Vera, (2008) *Mitos y Realidades de la Democracia Electrónica*, Editorial LID.
40. Ríos Insua, D., J. Ríos y D. Banks, (2009) Adversarial risk analysis, *Jour. Amer. Stat. Assoc.*
41. Rothkopf, M. (2007) Decision analysis: the right tool for auctions, *Decision Analysis*, 4, 167-172.
42. Saari, D. (2001) *Decisions and Elections*, Cambridge U.P.
43. Saari, D. (2008) *Disposing Dictators, Demistifying Voting Paradoxes*, Cambridge U.P.
44. Sartori, G. (1990) *Elementi di teoria política*, Il Mulino.
45. Schmitt, C (1933) *Der begriff des politsichen*, Hanseatische Verlagsanstalt.
46. Schumpeter, J.A. (1942) *Capitalism, Socialism and Democracy*, Harper.
47. Shapley, L. y M. Shubik (1954) A method for evaluating the distribution of power in a committee system, *American Political Science Review*, 48, 787-792.
48. Taylor, A. y Pacelli (2008) *Mathematics and Politics*, Springer.
49. Thomson, W. (1994) Cooperative models of bargaining, *Handbook of Game Theory*, North-Holland, Aumann, R.J. y Hart, S. (eds.), Vol. II, Capítulo 35, 1238-1277.
50. Von Clausewitz, C. (1832) *Vom kriege*, Dummlers Verlag.
51. Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944) *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press.
52. Weber, M. (1988) *El político y el científico*, Alianza Editorial.
53. Wong, E. Y. y Roederer, R. (2006) Should the U.S. have attacked Iraq?, *OR/MS Today*, Dec.