GEOMETRÍA Y FÍSICA, ¿CARA Y CRUZ DE UNA MISMA MONEDA?

PEDRO LUIS GARCÍA PÉREZ
Real Academia de Ciencias y Universidad de Salamanca

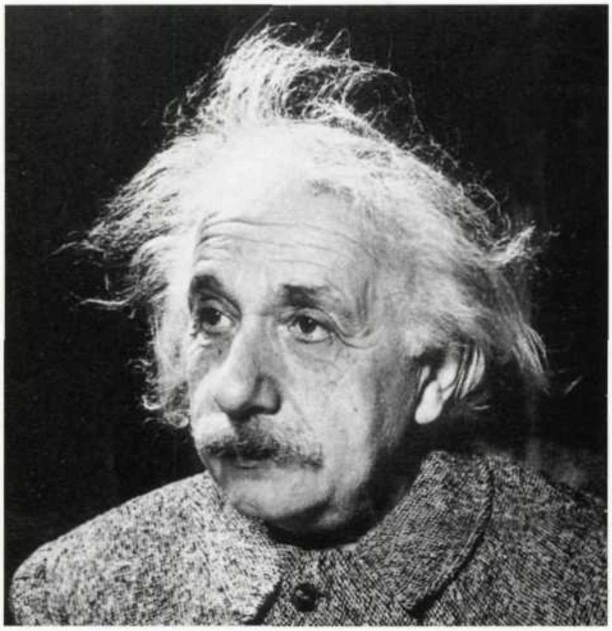
INTRODUCCIÓN

Desde los griegos a la actualidad, a lo largo de más de veinticinco siglos de historia, nunca se ha puesto en duda que la ciencia es el resultado de la interrelación de tres elementos básicos: la *realidad* o conjunto de los denominados hechos objetivos; la *observación* de los mismos mediante la experimentación; y la *teoría,* que construida a partir del más preciado de los dones del hombre, el pensamiento, trata de proporcionar una visión racional de los hechos. Sin estos tres elementos no sólo es imposible la ciencia, sino, más aún, el que se pueda hablar de algo externo a nosotros con sentido. Son dichos elementos el implícito punto de partida de toda consideración sobre el mundo que nos rodea, siendo su explicitación en cada parcela concreta del saber el destino último del conocimiento científico.

Bajo esta concepción, la matemática, al considerarse como un típico producto del pensamiento, independiente de toda experiencia, tal y como es entendida desde la visión axiomática, debería ser diferente de las demás ciencias, por cuanto sus conceptos, proposiciones y resultados no se refieren a la realidad. Sin embargo, y esto es lo que a lo sumo se admite desde esa visión, al estar normalmente inspirados sus principios básicos en alguna parcela de la realidad, esta disciplina tendría que tener algún tipo de relación con las otras ciencias, cuya aclaración en cada caso concreto se presenta como una cuestión fundamental.

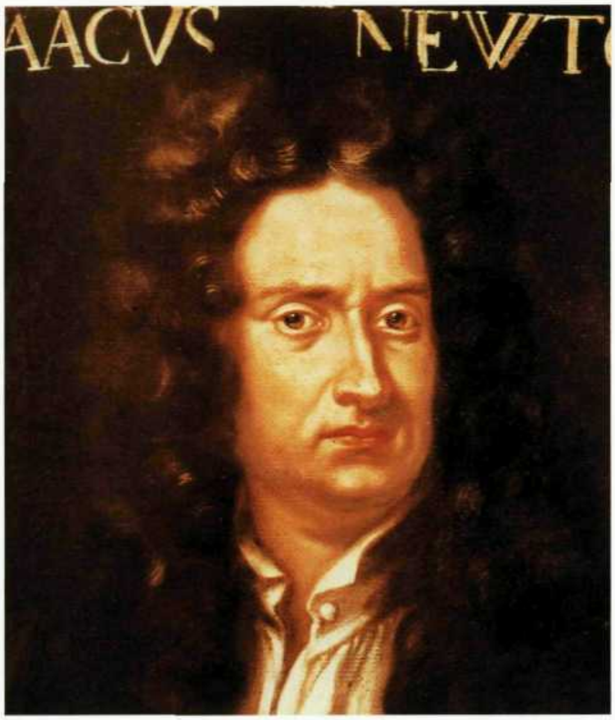
El caso más claro al respecto es la geometría, la más racionalmente pura de las doctrinas matemáticas, después de la aritmética, pero también de las más enraizadas en la realidad desde sus mismos comienzos. Recuérdese que geometría es la medida del terreno en su acepción original. De hecho, la geometría euclídea fue hasta comienzos del siglo XX el marco espacial único en el que se desenvolvió la física, considerándose por tal motivo a esta doctrina como el capítulo cero de esta ciencia.

El descubrimiento a fines del siglo XIX de geometrías distintas de la euclídea, unido a la revisión de los fundamentos de la física iniciada por Einstein a principios del XX, tuvieron como principal consecuencia la creciente absorción de la física por la geometría. La rígida distinción entre conceptos geométricos y físicos de la etapa anterior se fue difuminando cada vez más a costa del sacrificio del marco euclidiano de la física. De este modo se llega, casi con el único recurso del pensamiento, a uno de los más grandes descubrimientos de la ciencia moderna, la relatividad general, con la que se hace realidad uno de los mayores deseos de todos los tiempos: *la identidad entre física y geometría.* Con ello culmina un largo periodo de desarrollo de la geometría diferencial y de la física teórica que, iniciado en el siglo XVII con la aplicación del cálculo infinitesimal a la geometría, tuvo a la gravitación newtoniana y al electromagnetismo de Maxwell como sus más señeras doctrinas.

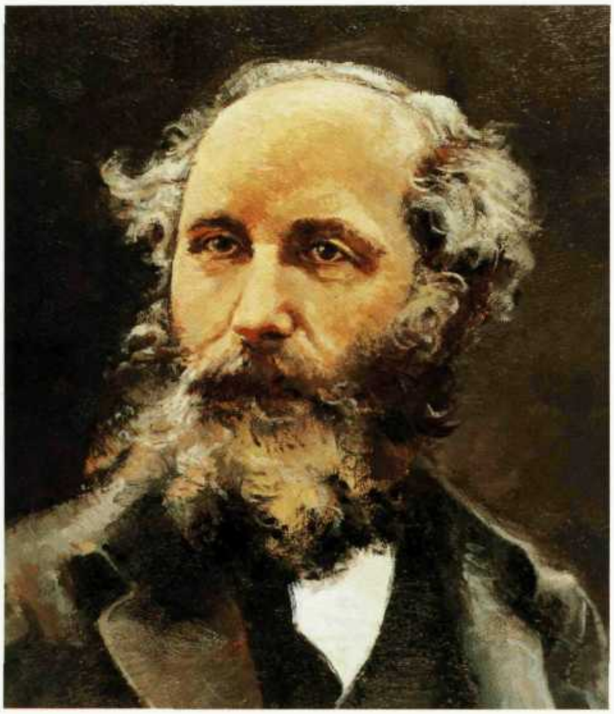


Albert Einstein (1879-1955).

Fuera de esa maravillosa síntesis, cuyo dominio natural de aplicación es el mundo macroscópico, queda la física cuántica, auténtica asignatura pendiente de los últimos



Sir Isaac Newton (1643-1727).



James Clerk Maxwell (1831-1879).

cien años en lo que a su formulación teórica se refiere. Con la incorporación de nuevos y sorprendentes hechos, sólo accesibles a través de una experimentación cada vez más agresiva y sofisticada, la fundamentación de esta nueva rama de la física a cargo de una impresionante nómina de cultivadores (Böhr, Schrödinger, Heisenberg, Dirac, Von Neumann, Feynman, Gellman, etc.) no ha llegado, ni mucho menos, al nivel de comprensión alcanzado en el dominio clásico tan espléndidamente coronado por la teoría de la relatividad. No es de extrañar, pues, que tras la euforia de más de cuarenta años que produjo la formulación analítico-funcional de la mecánica cuántica, se despertase un interés creciente por la geometrización de las nuevas ideas con objeto de comprenderlas mejor y de relacionarlas con la mentalidad anterior, tarea esta a la que se han dedicado muchos esfuerzos en los últimos treinta años.

Éste es, a grandes rasgos, el marco general en el que voy a situar esta conferencia sobre «geometría y física» de la tercera edición del «Programa de Promoción de la Cultura Científica» de la Real Academia de Ciencias, con la que deseo, sobre todo, poner de manifiesto en el ámbito concreto de estas dos ciencias, algunos aspectos de ese gran tema de siempre, que es: *el de la naturaleza de las matemáticas en relación con el resto de las ciencias.*

Con este objetivo en mente, empezaré con unos breves comentarios sobre la geometría euclídea, desde su concepción original a su formulación analítica, destacando como principal aportación de la primera el llamado *método axiomático,* y de la segunda el concepto de *sistema de referencia,* con lo que se consigue por primera vez una caracterización teórica de la idea de observación en geometría. En este escenario es, precisamente, donde se desarrolla la física clásica, tema al que dedicaré algunas palabras. Así llegamos a la tercera parte de la exposición, donde se describe la concepción moderna de la geometría, establecida por Felix Klein en 1872 en su famoso Programa de Erlangen, a la vez que mostramos la cara física del nuevo punto de vista representada por la teoría de la relatividad especial propuesta por Einstein en 1905. La extensión de estas ideas a la física de campos a propósito de la «relatividad general», y su encaje natural en la geometría diferencial serán tratados a continuación. Por último, me referiré a las sorprendentes relaciones descubiertas en los últimos treinta años entre la geometría y la física cuántica, que están siendo tan beneficiosas para la matemática pura como esperanzadoras para una mejor comprensión del mundo microscópico.

DE LA GEOMETRÍA EUCLÍDEA A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA: ¿QUÉ ES OBSERVAR?

No hay geometría teórica antes de los griegos. Las matemáticas egipcia, mesopotámica y babilónica no pasaron de ser un simple compendio de observaciones empíricas de una serie de hechos geométricos, aritméticos y hasta algebraicos, con una finalidad esencialmente práctica. Para los hombres de esas culturas no existió nunca la necesidad de una explicación teórica de los hechos, sentimiento este que aparece por primera vez en Grecia y que constituye el principal motor de su grandiosa cultura.

Felix Christian Klein (1849-1925).

Con los griegos, la geometría se convirtió en una delicada construcción mental que, plasmada en los famosos *Elementos* de Euclides, fue la principal referencia matemática hasta la invención del cálculo infinitesimal, continuando con una destacada presencia en los siglos posteriores. Así, por ejemplo, en el prólogo de la primera traducción inglesa de esta obra en 1570, Billingsley escribe: «Sin el estudio diligente de los *Elementos* de Euclides, es imposible adquirir un conocimiento perfecto de la geometría, y consecuentemente de las otras ciencias matemáticas». Y Bonnycastle, en el prefacio de su edición de los *Elementos,* dice, ya finalizando el siglo XVIII: «De todos los trabajos de la antigüedad que han sido transmitidos hasta el presente, ninguno es tan universal y estimado como los *Elementos* de geometría de Euclides».

La principal aportación de la visión griega de la geometría fue, sin duda alguna, la «axiomática». Según este método, que más tarde se extendió a otras ciencias, los hechos geométricos se presentan bajo la forma de ciertos *enunciados* (los *teoremas),* deducibles a partir de unas *relaciones primitivas* (los *axiomas)* que ligan entre sí a unos *objetos primitivos (punto, recta, plano...).* La palabra primitivo significa que tanto a los *objetos* como a los *axiomas* no hay que darles ningún significado intuitivo o experimental previo. Se trata de una serie de enunciados iniciales que constituyen una especie de definición implícita de los objetos primitivos a la vez que las reglas de juego para generar toda la doctrina por aplicación del razonamiento lógico. El único requisito que deben cumplir los axiomas es el de ser independientes y no contradictorios entre sí; lo primero, para evitar redundancias, y lo segundo, para que la teoría sea consistente.

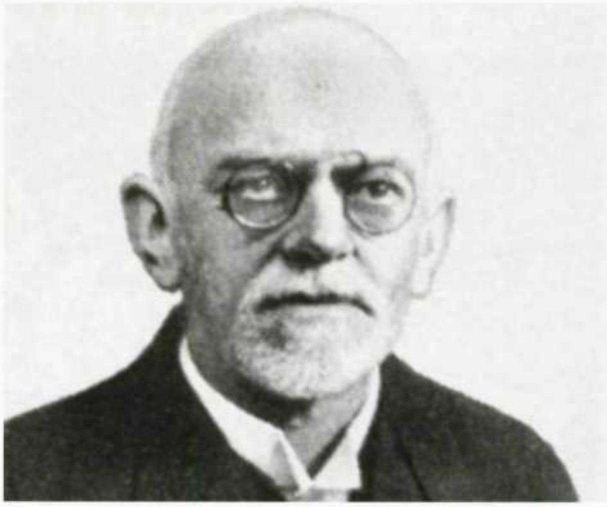
No cabe, ciertamente, mayor esfuerzo de abstracción para construir la geometría desde semejante punto de vista, habida cuenta del directo enraizamiento de los axiomas en la realidad más inmediata. Ello explica que aunque los griegos lograran plasmar lo esencial de la doctrina, ésta no se vio totalmente exenta de algunos procesos encubiertos cuya clarificación definitiva no se alcanza hasta principios del siglo XX con la axiomatización llevada a cabo por Hilbert en sus famosos «fundamentos de la geometría».

Y si es fácilmente entendible tal esfuerzo mental para mantener separado del razonamiento lógico la constante intuición visual de los hechos que tratan de explicarse, no lo es menos la dificultad que comporta el *aspecto métrico* de la doctrina, por apuntar directamente a uno de los conceptos más problemáticos de la historia de las matemáticas: *los números.*

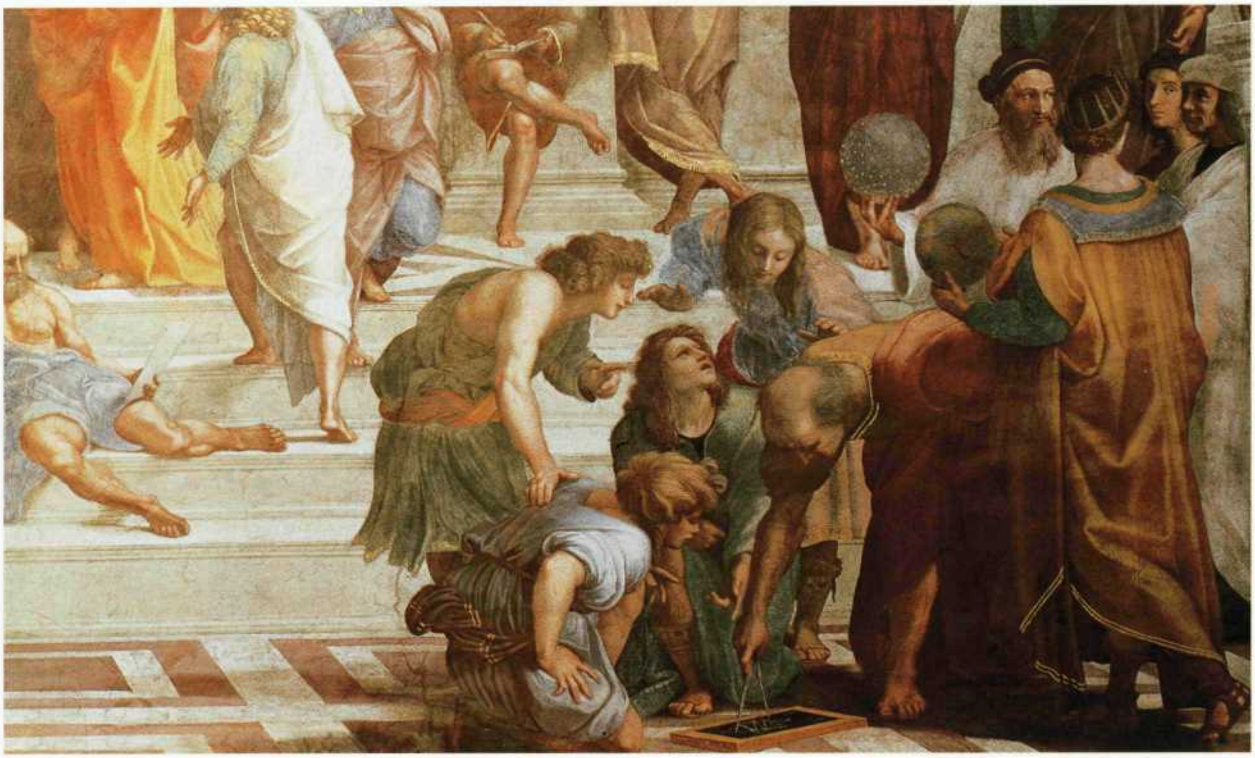
Los únicos números admitidos por los griegos eran los números naturales (1, 2, 3, 4,...), identificándose lo que hoy día conocemos como números reales (positivos) con ciertas cantidades geométricas, tales como, segmentos de línea, ángulos, áreas, volúmenes, etc., que recibieron el nombre genérico de *magnitudes.* Mediante los denominados *axiomas de congruencia,* las magnitudes de una misma clase podían compararse por su tamaño (menor, igual o mayor), así como sumarse y restarse (la más pequeña de la más grande). Mientras que el proceso de formación de algunas magnitudes a partir de otras, tales como la obtención de un área a partir de dos segmentos de línea o de un volumen a partir de un segmento de línea y un área, podían interpretarse como una especie de multiplicación de magnitudes cuyo resultado era una magnitud de diferente clase.

Resulta fascinante ver cómo a partir de este planteamiento puede construirse una impecable teoría de la medida (de áreas y volúmenes), y también establecerse el concepto de proporción, base de la teoría de la semejanza.

La admiración y el respeto por el punto de vista antiguo persistió incluso en el tiempo de Descartes, considerándose



David Hilbert (1862-1943).



Euclides de Alejandría (325 a. C. - 265 a. C.).

la aplicación del álgebra a la geometría euclídea establecida por el genial filósofo como la principal aportación de éste al desarrollo de la geometría. En particular, con la elección de un segmento de línea como unidad, Descartes logró definir para los segmentos de línea las operaciones usuales de la aritmética, paso decisivo hacia una nueva visión del concepto de número. En efecto, con Descartes y los de su generación (Pascal, Fermat, Desargues, etc.) se cae en la cuenta, por primera vez, del carácter abstracto de los números, desligados de su ropaje geométrico en tanto que magnitudes euclidianas. Y aunque la formulación rigurosa del nuevo concepto tuvo que esperar dos siglos más, hasta que en 1872 Dedekind definió los números reales mediante la noción de cortadura en el campo de los números racionales, puede decirse que el espíritu de los nuevos números estaba ya totalmente captado en el siglo XVII. Con ello se entra plenamente en la modernidad, de la mano de los nuevos números, del concepto de función y del invento del cálculo infinitesimal.

Y es en este ambiente donde nace la «geometría analítica», que fue concebida y desarrollada, esencialmente, tal y como nos ha sido transmitida.

Dados tres ejes perpendiculares entre sí y elegido un segmento de línea como unidad, se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los *puntos* y las *ternas de números reales*, los *planos* y las *ecuaciones lineales en tres incógnitas*, las *rectas* y los *pares de ecuaciones lineales*, etc. Surge así como concepto fundamental, previo a todo lo demás, el concepto de *espacio* (o conjunto de los puntos caracterizados por sus tres coordenadas numéricas). La visión griega del Cosmos como una colección de figuras geométricas sumergidas en la *nada*, cede su lugar a una idea del Universo como *espacio infinito*, en el cual lo accesible a nuestros sentidos pasa a ser ahora un conjunto de objetos analíticos inmersos en el espacio. Por otra parte, con la introducción de la *función medida* que permite asignar a cada objeto *(medible)* un número real (su medida) se produce un cambio radical en el planteamiento griego de las cuestiones métricas. Con palabras de S. S. Chern:

> Fue Descartes quien en el siglo XVII revolucionó la geometría usando coordenadas. Como dijo Hermann Weyl, «la introducción de los números como coordenadas fue un acto de violencia». Desde entonces, figura y número, como ángel y diablo, se disputan el alma de todo geómetra.

Y si revolucionaria fue la nueva caracterización teórica de la geometría, no lo es menos la nueva concepción del hecho de observar traído por ella. Si para un griego la observación de la realidad no es más que las acciones llevadas a cabo por un *sujeto pensante* que, desde fuera de la geometría, trata de entender ésta teóricamente, con el nuevo planteamiento *observador* y *sistema de referencia* son una misma cosa. De este modo, la idea de observación se incorpora conceptualmente a la geometría misma, apareciendo el número y todo lo que de él se deriva como elementos esenciales de ella. Lo que de la geometría se observa desde un sistema de referencia es ahora un mundo analítico que tiene poco que ver con la visión griega de esta ciencia. La idea de *medición y cálculo* constituye la principal preocupación de la nueva investigación geométrica, hecho que coincide, precisamente, con el que inspira a la física que nace en esa época y que, como no podía ser de otra manera, se concibe y desarrolla en ese oportuno marco geométrico.

LA FÍSICA EN SU CONCEPCIÓN TRADICIONAL

En un famoso discurso pronunciado por Helmholtz en 1869, se decía refiriéndose a esta ciencia:

> El fin de la física es hallar los movimientos que sirven de base a todos los cambios y descubrir las fuerzas propulsoras de esos movimientos; en suma, convertirse en mecánica.

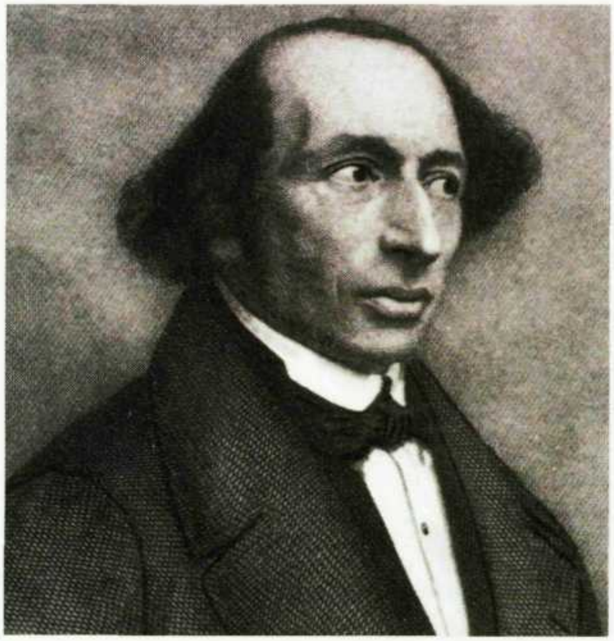
Nada más expresivo que esta frase para resumir lo que ha sido la física clásica desde su aparición en el siglo XVII hasta su ocaso en el XIX.

Situada en el espacio de la geometría euclídea, de la que usa a su conveniencia todos sus conceptos y resultados y con un manejo de la noción de *tiempo* deliberadamente ingenuo (lo que se mide con un reloj), la física clásica se ocupa, esencialmente, de las leyes que rigen la variación respecto del tiempo de las funciones representativas de las *partículas* y de los *campos*. Estas leyes, que se expresan por ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable tiempo para las partículas, y por ecuaciones en derivadas parciales en las variables de espacio y de tiempo para los campos, alcanzaron su cenit en las dos grandes teorías de ese periodo: la gravitación newtoniana y el electromagnetismo de Maxwell. La primera, en la que se describe el movimiento de los astros por efecto de las fuerzas derivadas del campo gravitatorio producido por ellos; y la segunda, en la que se trata, análogamente, el movimiento de las partículas eléctricas en el campo electromagnético que ellas generan.

En torno a estas dos teorías se fueron desarrollando otras nuevas doctrinas (elasticidad, hidrodinámica, termología y transmisión del calor, electrodinámica de los medios continuos, etc.) que, por una parte, las complementaron y, por otra, extendieron su método a otros fenómenos físicos con un éxito notable tanto desde el punto de vista teórico como aplicado. Es este el gran momento de la física matemática del XVIII y principios del XIX (Euler, D'Alambert, Lagrange, Laplace, Fourier, etc.), que ya no se contenta con una explicación racional de los hechos sino que trata, además, de incidir matemáticamente sobre ellos para controlarlos y sacarles un beneficio práctico. Nace así lo que hoy día entendemos por matemática aplicada.

Como se ve, bajo esta concepción, el marco geométrico y la física que en él se desenvuelve están perfectamente diferenciados. El *tiempo* es un parámetro externo al espacio euclídeo tridimensional en el que las dos nociones físicas fundamentales (las partículas y los campos) evolucionan al transcurrir aquél. Puede decirse que toda teoría física está basada, según este planteamiento, en una especie de combinación (G) + (F), de una parte geométrica (G), y de una parte física (F), donde la primera está rígidamente fijada por la geometría euclídea, mientras que la segunda varía de una doctrina a otra, considerándose todo lo referente a ella como la física propiamente dicha de la doctrina en cuestión.

René Descartes (1596-1650).



Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851).

Y es en relación con esta parte física donde desempeña un papel decisivo la así llamada mecánica analítica. Establecida por Lagrange en 1788, siguiendo las pautas del cálculo de variaciones introducido por Euler unos años antes, su principal hallazgo no es tanto la caracterización de los movimientos de un sistema físico como soluciones de un problema de extremos para una cierta funcional, como el haber descubierto un procedimiento canónico para definir las nociones mecánicas fundamentales (ecuaciones de movimiento o de campo, estados, magnitudes dinámicas, etc.) a partir del concepto de *acción*. Este procedimiento que, entre otras cosas, zanjó una vieja polémica en torno a lo que debía entenderse por dar una explicación mecanicista de un fenómeno físico, se convirtió más tarde, con Hamilton y Jacobi, en el fundamento de lo que en la actualidad se conoce como una *estructura mecánica*, concepto este que constituye uno de los pilares básicos de la física teórica contemporánea.

Éstos son, a nuestro juicio, los aspectos más destacables de la física clásica en relación con el tema que nos ocupa. La consideración de esta ciencia a fines del siglo XIX como

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

un edificio casi perfecto y acabado dio lugar a innumerables afirmaciones, un tanto exageradas y entusiastas, como, por ejemplo, la que se atribuye al famoso físico y matemático inglés William Thomson, más conocido como lord Kelvin, quien en 1898 llegó a decir:

> Hoy la física forma, esencialmente, un conjunto perfectamente armonioso, ¡un conjunto prácticamente acabado!

Por fortuna, estamos en esos momentos a las puertas del siglo XX, a punto de aparecer las teorías de la relatividad y de los quanta, con las que se produjo, como es sabido, una nueva revolución de esta ciencia en la que todavía, recién iniciado el siglo XXI, nos encontramos plenamente inmersos.

EL GRAN SALTO O LA RELATIVIDAD ESPECIAL COMO GEOMETRÍA EN SENTIDO DE KLEIN

Tras la invención de la geometría analítica, la geometría antigua basada en la axiomática siguió desarrollándose habiendo incorporado los aspectos más característicos de la

William Thomson, lord Kelvin (1824-1907).

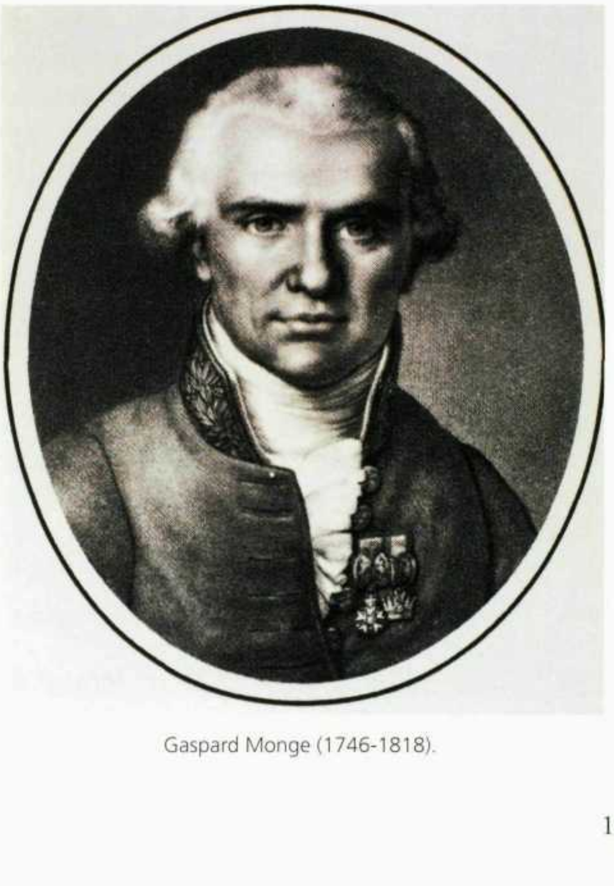
nueva mentalidad, tales como: el espacio como conjunto de los puntos, el concepto de función numérica para las cuestiones métricas, la idea de transformación, etc. Ambas geometrías se convirtieron desde entonces en sendos métodos para tratar la única realidad geométrica existente –la geometría euclídea–, pasando a denominarse: geometría analítica y geometría sintética, respectivamente. Una doctrina clave en ese desarrollo fue la que se llamó desde principios del siglo XIX: geometría proyectiva, cuya larga y brillante historia a lo largo de ese siglo culminó en la nueva concepción de la geometría, establecida por Felix Klein en 1872 en su famoso «Programa de Erlangen».

El marco histórico en el que se sitúa el nuevo planteamiento fue el siguiente:

En los primeros años del siglo XIX, la geometría proyectiva se puso de actualidad con la publicación de la *Geometría descriptiva* de G. Monge, director de la Escuela Politécnica de París. Uno de sus discípulos, Poncelet, especialmente atraído por la parte sintética de la geometría desarrollada por Monge, se convirtió en el fundador de la geometría proyectiva con su libro *Tratado de las propie-*

dades proyectivas de las figuras, que basó en el concepto de transformación proyectiva. Lo que Poncelet observa es que estas transformaciones no conservan las propiedades usuales de la geometría euclídea, y distingue dichas propiedades, denominadas *métricas,* de aquellas que permanecen invariantes por las transformaciones proyectivas, que él llamó propiedades *descriptivas.* Sin embargo, no se alcanzará una exposición clara y natural de esta cuestión hasta la publicación de la obra de Cayley, quien considera al espacio euclídeo como un parte de un espacio más amplio (el espacio proyectivo), consistente en añadir al primero un plano más (el plano del infinito), al cual dota de una cónica no degenerada imaginaria (el absoluto). A partir de aquí, las propiedades de la geometría euclídea las caracteriza como aquellas que permanecen invariantes por las transformaciones proyectivas que dejan fijo el absoluto (las semejanzas). Fue tal el entusiasmo que produjo en Cayley este descubrimiento, que le hizo exclamar al final de su memoria: «la geometría euclídea es una parte de la geometría proyectiva (...) la geometría proyectiva es toda la geometría».

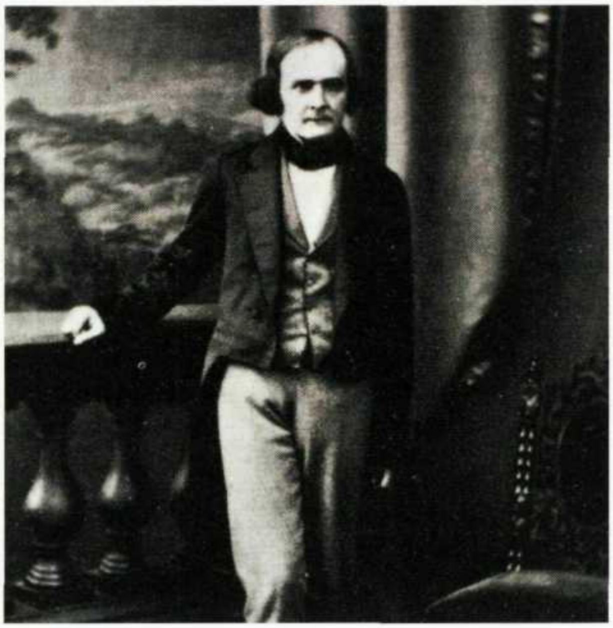
Por otro lado, hacia 1860, hicieron su aparición las ideas de *grupo* y de *invarianza,* limitadas al principio al dominio en el que fueron introducidas por sus creadores, Cauchy y Galois, esto es: a los grupos de permutaciones de un conjunto finito de objetos. Pero pronto se ve que los distintos tipos de transformaciones de la geometría proyectiva tienen estructura de grupo respecto de la composición de transformaciones, apareciendo, en particular, los teoremas de la geometría euclídea como la expresión de relaciones idénticas entre invariantes o covariantes del grupo de las semejanzas.



Gaspard Monge (1746-1818).

Estas ideas adquieren una forma clara y definitiva con Felix Klein, quien descubre en la estructura de grupo de transformaciones la verdadera esencia de toda doctrina geométrica, enunciando por fin su famosa definición de geometría como:

> El conjunto de los invariantes respecto de un grupo de transformaciones.



Arthur Cayley (1821-1895).

Con este nuevo y revolucionario punto de vista se consigue una clasificación estructural de los diferentes teoremas de la geometría a partir de los grupos correspondientes, constituyéndose cada clase de teoremas en una geometría diferente: la geometría proyectiva, basada en el grupo de las proyectividades; la geometría euclídea, en el de las semejanzas; e incluso, las geometrías de Lobatchewski-Bolyai y de Gauss-Riemann, recién descubiertas por motivaciones de tipo axiomático, quedaron englobadas en el nuevo punto de vista al considerarse los grupos de transformaciones proyectivas que dejan invariantes a un cierto tipo de cuádricas en el *espacio de los planos* del espacio proyectivo. De este modo, la noción de geometría llega a tan alto grado de generalidad que, unida a la *teoría de invariantes* desarrollada en su seno, permitió en el dominio de la geometría clásica construir todos los *invariantes* y todas sus *relaciones* de un modo sistemático. Desde ese momento, la geometría clásica se convierte en un edificio prácticamente acabado, dejando de ser ya una investigación de vanguardia.

Pero volviendo a la idea originaria de Klein, veamos cómo ésta se refleja en la interpretación analítica de la geometría.

Dado un sistema de referencia de la geometría definida por un grupo de transformaciones, se observa que todos los demás se obtienen aplicando a éste todas las transformaciones del grupo, lo cual permite establecer, para cada pareja de sistemas de referencia, una correspondencia o *cambio de coordenadas* entre las representaciones analíticas definidas por ambos sistemas, satisfaciendo tres condiciones naturales (de identidad, invertibilidad y transitividad), que no son otra cosa que la traducción a los sistemas de referencia de los axiomas de grupo. Dar una geometría de Klein resulta equivalente ahora a fijar una *familia de sistemas de referencia* en el sentido anterior, donde las nociones geométricas se traducen en *expresiones analíticas* que son *comunicables* entre los diferentes miembros de la familia mediante los cambios de coordenadas correspondientes. En otras palabras: «noción geométrica es toda expresión analítica que es *vista de la misma forma por todos los observadores*». La idea de *comunicación* entre los diferentes miembros de una *familia de observadores* se convierte así en el rasgo característico de la nueva geometría analítica.

Y es precisamente así como la concepción kleiniana de la geometría entra en la física de la mano de Einstein, donde *noción geométrica* es sinónimo de *concepto físico* y donde la definición de geometría se corresponde con el famoso *principio de relatividad.*

Desde este punto de vista, la mecánica de Newton no es otra cosa que la geometría asociada a los *sistemas galileanos*, que son aquellos que identifican al *espacio-tiempo* con las cuaternas (x, y, z, t) de números reales, de tal modo que las ecuaciones de Newton se expresan en su forma analítica usual. El grupo correspondiente es el de Galileo, siendo el *espacio* y el *tiempo* conceptos físicos al tratarse de sendos invariantes numéricos asociados a las parejas de puntos. Por el contrario, la *velocidad de la luz* varía al pasar de un sistema galileano a otro o, dicho de otro modo, las ecuaciones de Maxwell, base del electromagnetismo, no son invariantes respecto del grupo de Galileo. Estas ecuaciones, sí que son invariantes, en cambio, respecto de otro grupo descubierto por el físico holandés H. A. Lorentz unos años antes, mediante el cual aparece otra familia de observadores para el espacio-tiempo: los *sistemas lorentzianos.* La historia es a partir de aquí bastante bien conocida y no vamos a insistir en ella: decisión de Einstein de sustituir el grupo de Galileo por el de Lorentz para fundar la mecánica, donde ahora la constancia de la velocidad de la luz sí que es un concepto físico, dejando de serlo en cambio los de *espacio* y *tiempo;* propuesta de nuevas ecuaciones para fundar la dinámica con el resultado de un sustancial cambio en el concepto de energía, etc.

Así, la relatividad especial no sólo queda comprendida y desmitificada, sino que al lado de la mecánica de Newton y de las otras geometrías clásicas constituye un ejemplo más de geometría en el nuevo sentido. Hecho que constituye un salto gigantesco respecto de la concepción tradicional de la física, por cuanto que son los propios fenómenos objeto de estudio los que configuran la geometría en cuyo seno adquirirán sentido. *Realidad, observación* y *teoría,* los tres elementos básicos del conocimiento científico, adquieren en este caso un significado claro y preciso dentro de la propia geometría que ellos generan. La combinación (G) + (F) de geometría euclídea y de conceptos físicos propiamente dichos de la etapa anterior pasa a convertirse ahora en una pura geometría (G), que ya no será euclídea en general, sino lo que le corresponda según

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

Evariste Galois (1811-1832).

Galileo Galilei (1564-1642).

su grupo de transformaciones o, equivalentemente, la *familia de observadores* desde los cuales se mira.

GEOMETRÍA DIFERENCIAL Y FÍSICA DE CAMPOS

Ahondando un poco más en la idea anterior, lo que se observa en los ejemplos más simples de geometría (por ejemplo, la geometría euclídea, la mecánica newtoniana o la relatividad especial) es que los *cambios de coordenadas* entre los sistemas de referencia que definen a esas geometrías vienen dados por ciertas *funciones lineales* de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ para un cierto n ($n = 3$ para la geometría euclídea y $n = 4$ para la mecánica newtoniana y la relatividad especial). Ello sugiere ampliar estas familias, añadiéndoles otros sistemas de referencia cuyos cambios de coordenadas con la familia inicial sean funciones con un mayor grado de arbitrariedad. Se obtendría así una nueva geometría, que al poseer una familia de observadores más amplia o, equivalentemente, un grupo de transformaciones más grande, tendría menos invariantes o conceptos geométricos que la de partida, convirtiéndose por tal motivo en una geometría más general.

Y si es este el proceso en una dirección; es decir, algo así como un *paso* de una *geometría lineal* a una *geometría no lineal*, ¿no podría definirse algún tipo de proceso al revés?, o dicho de otro modo: ¿sería posible caracterizar de alguna forma este tipo de geometrías no lineales, y rescatar después las geometrías lineales a partir de ellas? Por otra parte, ¿no representarían estas nuevas geometrías el verdadero estatus de la doctrina y, acaso también, el marco más adecuado para desarrollar la física? Si el descubrimiento de Klein fue esencialmente metodológico al poner de manifiesto que toda realidad geométrica (o física) sólo puede explicarse en el seno de una geometría modelada por dicha realidad, parece razonable tratar de recorrer el camino al revés, sentando las bases conceptuales mínimas sobre las que debería definirse la problemática general de estas dos ciencias.

Nos situamos así en un tercer nivel en la concepción de la geometría que, descubierto e iniciado su estudio sistemático por el genio conceptual de Riemann, pasó a convertirse en el siglo recién acabado en uno de los más grandes logros de la matemática contemporánea: la *geometría de variedades*. Y es de nuevo de la mano de Einstein como las nuevas ideas penetran en la física, conduciendo esta vez a otro de los grandes descubrimientos del siglo XX: la *relatividad general*.

El marco en el que se plantea la nueva concepción no es otro que una generalización natural de la geometría analítica, donde los sistemas de referencia no están definidos ya sobre la totalidad del espacio, y donde se permite a los cambios de coordenadas que vengan dados por funciones reales de cierto tipo general. Con más precisión: se considera sobre un conjunto dado M (el espacio) una familia $\mathcal{F} = \{(S_i, U_i)\}$ (los sistemas de referencia locales), donde cada uno de ellos es una correspondencia biunívoca, S_i, de un subconjunto U_i de M (el dominio del sistema de referencia) sobre un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ (n: la dimensión del espacio), de tal manera que: la colección de dominios $\{U_i\}$ cubre M; para cada pareja (S_i, U_i) y (S_j, U_j) de miembros de $\mathcal{F}$, la aplicación $S_j \circ S_i^{-1}$ (el cambio de coordenadas) viene definida por n funciones reales de una cierta clase (por ejemplo: continuas, diferenciables, analíticas, etc.) y donde, por último, la familia $\mathcal{F}$ se supone *maximal* en el sentido de no estar contenida en ninguna otra familia verificando las condiciones anteriores. Se llega así, bajo el más puro estilo cartesiano, al concepto general de *variedad* (topológica, diferenciable, analítica, etc., según la naturaleza de las funciones que definen los cambios de coordenadas) con un número arbitrario, n, de dimensiones.

El nuevo concepto permitió englobar a todos los tipos de espacios geométricos conocidos hasta entonces (las curvas y superficies del espacio euclídeo ordinario, el espacio proyectivo, el conjunto de las configuraciones de un sistema mecánico, etc.), y también proporcionó la caracterización geométrica del *espacio-tiempo* como una variedad diferenciable de dimensión 4, en la cual se desarrollará la física:

> Las leyes generales de la Naturaleza tienen que expresarse por ecuaciones que sean válidas en todos los sistemas de coordenadas, esto es, que sean covariantes respecto a cualquier sustitución, generalmente covariante (Einstein, 1915).

Con este planteamiento, la idea originaria de Riemann consistió, esencialmente, en fundar la geometría sobre una variedad dada en un *álgebra de funciones* y no en un *gru-*

po de transformaciones. Centrándonos en el caso diferenciable, que es el que más interesa en física, el dato básico para construir una geometría sobre una variedad diferenciable M es, según Riemann, el álgebra A de las funciones reales sobre M en las que se transforman las funciones diferenciables sobre $\mathbb{R}^n$ por cualquier sistema de referencia de la familia que define a la variedad. Todos los demás conceptos deben construirse a partir del álgebra de funciones, exclusivamente. En particular, el *grupo* de la nueva geometría que, en el caso que nos ocupa, viene caracterizado como el seudogrupo, G, de las transformaciones locales invertibles de M que dejan invariante al álgebra: el denominado *grupo de los difeomorfismos locales* de la variedad.

Esta idea no debe de extrañarnos dado el interés de Riemann por la teoría de funciones, en la que la noción de variedad constituye el sustrato espacial necesario para entender la *multiformidad* de las funciones analíticas según su original punto de vista. A este respecto, es oportuno indicar aquí que fue Klein el primero en desarrollar una

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

idea más libre de las superficies de Riemann, al considerar este concepto no tanto como un recurso técnico con origen en las funciones objeto de estudio, como al revés: el ámbito espacial indispensable en el que las funciones deben asentarse. Así lo expresa H. Weyl en la introducción de su famoso libro *El concepto de superficie de Riemann* que, publicado en 1913, constituye un puente clave entre la teoría de funciones del siglo XIX y la moderna definición de variedad diferenciable.

Y ya en posesión del nuevo marco geométrico (variedad diferenciable y grupo de sus difeomorfismos locales) en el que se desea construir la geometría o, en el caso del espacio-tiempo, desarrollar la física: ¿cuáles son, ahora, los objetivos concretos de estas dos ciencias? La nueva geometría, denominada geometría diferencial, se ocupa del estudio de los llamados *objetos geométricos* sobre una variedad diferenciable, mientras que la nueva física puede decirse, siguiendo a Einstein, que tiene como principal objetivo el estudio de los *campos* sobre el espacio-tiempo. La coincidencia de partida no puede ser mayor si se tiene en cuenta la identificación que a su vez hizo Einstein de los campos físicos con los tensores que, como se sabe, son los objetos geométricos más simples de los que están dotadas las variedades diferenciables.

Si en su versión analítica originaria (fines del siglo XIX y principios del XX: Riemann, Christofel, Ricci-Curbastro, Levi-Civita, etc.), los tensores son conjuntos de funciones localmente definidas sobre la variedad que se transforman de un determinado modo por los cambios de coordenadas; con su caracterización intrínseca a partir del álgebra de funciones se inaugura, a principios de los años cincuenta, el lenguaje moderno de esta disciplina. Es la conocida formulación *sin coordenadas* de la geometría diferencial, con la que se logra plasmar por fin la prescripción de Riemann de definir todos los conceptos sobre una variedad a partir de su álgebra de funciones.

El punto de partida del nuevo lenguaje es la caracterización del espacio tangente $T_x(M)$ en un punto x de una variedad diferenciable M, como el espacio vectorial real de las derivaciones del álgebra de funciones diferenciables, A, en los números reales, y la subsiguiente doble versión del concepto de campo de vectores como una asignación (diferenciable) a cada punto x de la variedad de un vector tangente, D_x, en dicho punto, o, equivalentemente, como una derivación, D, del álgebra A en sí misma. De este modo, el conjunto de los campos de vectores se identifica con el A-módulo $\chi(M)$ de los operadores diferenciales lineales de primer orden homogéneos actuando sobre el álgebra de funciones (localmente, con las expresiones de la forma $D = \sum_i f^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ operando sobre las funciones). A partir de aquí, los tensores pueden identificarse con las aplicaciones A-multilineales sobre el A-módulo $\chi(M)$. Así, por ejemplo, una métrica de Riemann es una aplicación $g: \chi(M) \times \chi(M) \to A$, bilineal, simétrica y definido-positiva (localmente, $g = \sum_{i,j} g_{ij}(x)\, dx_i \otimes dx_j$, donde $\otimes$ es el producto tensorial,

$$g_{ij}(x) = g_{ji}(x) \text{ y } g(D,D) = \sum_{i,j} g_{ij}(x) f^i(x) f^j(x) > 0$$

para todo campo de vectores $D = \sum_i f^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ no nulo).

De un modo similar, pueden introducirse las formas diferenciales con su producto natural (el producto exterior $\wedge$) y los diferentes «operadores diferenciales» (derivadas de Lie, diferencial exterior, derivadas covariantes, etc.), con los que se completa todo el entramado tensorial sobre una variedad diferenciable.

El objetivo principal de la geometría diferencial es ahora fácil de enunciar:

Sobre los tensores y, en general, sobre los *objetos geométricos* de una variedad diferenciable, actúa de un modo natural su grupo de difeomorfismos locales, produciendo un problema de clasificación: *dos objetos geométricos son localmente equivalentes si existe un difeomorfismo local que transforma uno en otro.* La geometría diferencial puede decirse que tiene como su más genuino objetivo resolver este problema de clasificación para los diferentes objetos geométricos. Y es aquí donde la maquinaria tensorial interviene en toda su extensión proporcionando los *invariantes* adecuados y la técnica precisa para abordar este problema. Más concretamente, el concepto básico de la doctrina es el de *operador tensorial natural* o con terminología más clásica, «invariante tensorial» sobre la familia de objetos geométricos considerada, el cual viene definido como una correspondencia, T, que asigna a cada objeto, g, de la familia un tensor, $T(g)$, de tal manera que para todo difeomorfismo local, τ, se verifica $\tau T(g) = T(\tau g)$.

Con este problema general como objetivo es como nació la geometría diferencial como doctrina independiente, empezando con el estudio particular de un primer objeto geométrico notable: las métricas de Riemann.

Introducido este concepto en 1854 por Riemann en su famosa memoria *Sobre las hipótesis que están en la base de la geometría,* representa la culminación de un cuarto de siglo de fértil desarrollo de la geometría diferencial de curvas y superficies del espacio euclídeo ordinario que tuvo a Gauss como su máxima figura. Si las *Disquisiciones generales acerca de las superficies curvas,* publicadas por Gauss en 1827, significaron el despegue de la geometría diferencial del cálculo, con la introducción de los espacios de Riemann puede decirse que la geometría diferencial entra en mayoría de edad. Y es, sobre todo, el modo como se llevó el estudio de los nuevos espacios lo que permitió concretar el principal objetivo de esta nueva doctrina.

Dos conceptos fundamentales que Riemann introduce en su célebre memoria son: las *curvas geodésicas* y el *tensor de curvatura.* Mientras que las primeras van a ser las *líneas rectas* de la nueva geometría, el segundo constituye el *invariante tensorial básico* del que están dotadas las métricas. De hecho, el descubrimiento y el uso que se hace de este invariante es, sin duda alguna, la aportación más relevante de la geometría riemanniana.

Con más precisión: Riemann define para cada métrica, $g = (g_{ij}(x))$ un tensor 1-contravariante 2-covariante, Curv $g = (R^i_{jkl}(x))$, el *tensor de curvatura* de la métrica, cuyas componentes, $R^i_{jkl}(x)$ dependen de las componentes de la métrica, $g_{ij}(x)$, hasta sus segundas derivadas, y donde la asignación $g \rightarrow$ Curv g es un *invariante tensorial* en el sentido anteriormente apuntado; esto es, para todo difeomorfismo local, τ, se verifica τCurv $g =$ Curv τg.

Este tensor constituye el concepto clave de la geometría riemanniana en el marco de la problemática general de la geometría diferencial que hemos enunciado antes. En particular, proporciona una medida de la *desviación de la euclicidad* en el siguiente sentido: Curv $g = 0$ es la condición necesaria y suficiente para que una métrica de Riemann sea localmente euclídea, esto es: que exista un sistema de coordenadas locales (x_i) respecto del cual:

$$g = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2$$

Este resultado es, ciertamente, modélico, entre otras, por las siguientes razones:

Resuelve del modo más simple posible el problema de equivalencia local para las métricas de Riemann con tensor de curvatura nulo: *sólo existe una clase de equivalencia de dichas métricas, las euclídeas.* Permite rescatar la geometría euclídea desde la geometría diferencial, al caracterizar el grupo euclídeo como el subgrupo de los difeomorfismos que dejan invariante la métrica. Por otra parte, las geodésicas correspondientes son, como cabía esperar, las rectas euclideanas. Con un entusiasmo parecido al que le hizo exclamar a Cayley su famosa frase en cuanto a la relación entre las geometrías euclídea y proyectiva, podríamos decir ahora: «la geometría euclídea es una parte de la geometría diferencial (...) la geometría diferencial es toda la geometría». Por último, introduce un elemento nuevo en geometría, esto es: la definición de ciertos objetos geométricos como soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales; en nuestro caso, el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden:

$$R^i_{jkl}\left(g_{ij}(x), \frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x_l}, \frac{\partial^2 g_{ij}(x)}{\partial x_l \, \partial x_m} \right) = 0$$

de incógnita una métrica.

Siguiendo en esta línea, y pasando ahora a la física, si se consideran métricas no singulares con un índice de inercia arbitrario, el resultado anterior es igualmente válido. En particular, en el caso del espacio-tiempo, M_4, y de las métricas no singulares de índice de inercia 3 (las métricas de Lorentz) se tiene también que la anulación del tensor de curvatura es una condición necesaria y suficiente para que existan sistemas de coordenadas locales (x, y, z, t) respecto de los cuales la métrica se expresa de la forma:

$$g = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\, dt^2$$

Se rescata así la relatividad especial a partir de las métricas de Lorentz sobre el espacio-tiempo, exactamente igual a como se hizo para obtener la geometría euclídea a partir de las métricas de Riemann. Esta métrica seudoeuclídea es la tan celebrada *métrica de Minkowski,* mientras que los sistemas de coordenadas locales (x, y, z, t) anteriores son los *sistemas inerciales.* Por otra parte, el grupo inhomogéneo de Lorentz, base de la relatividad especial, viene caracterizado, análogamente, como el subgrupo de los difeomorfismos del espacio-tiempo que dejan invariante la métrica de Minkowski. Ésta es la estructura geométrica precisa de la relatividad especial, donde el electromagnetismo clásico adquiere su verdadero sentido.

En efecto, la clase de tensores que definen un *campo electromagnético* son las 2-formas, F, satisfaciendo las ecuaciones de Maxwell:

$$dF = 0 \ , \ \mathrm{div}_g F = 0$$

donde d es la diferencial exterior y div_g la divergencia respecto de la métrica.

Si en un sistema de coordenadas locales (x, y, z, t) el número de componentes de F es justo el que se necesita para describir el campo en cuestión:

$$F = H_z dx \wedge dy - H_y dx \wedge dz + H_x dy \wedge dz + E_x dx \wedge dt + \\ + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt$$

donde (E_x, E_y, E_z) y (H_x, H_y, H_z) se interpretan como un *campo eléctrico* y un *campo magnético* en el sistema de coordenadas considerado), las ecuaciones de campo anteriores son las más sencillas en la incógnita F que satisfacen la condición de invarianza Lorentz.

Esta observación tan simple ilustra muy bien la enorme rigidez que tiene la teoría tensorial a la hora de identificar los campos físicos y sus correspondientes ecuaciones de campo con los tensores y sus posibles ecuaciones tensoriales invariantes. Sin embargo, esta rigidez en la elección de una *teoría de campos* no encuentra su explicación natural hasta que la doctrina no se formula variacionalmente. Con ello, volvemos a hablar de este importante tema al que ya nos referimos al comienzo de nuestra exposición.

Como se dijo entonces, lo esencial del formalismo variacional en física es que proporciona una caracterización canónica de las nociones básicas de un sistema físico a partir del concepto de acción. Constituye, ciertamente, la estructura fundamental de la física en el marco geométrico que corresponda. No es de extrañar, pues, que haya trascendido el ámbito concreto en el que nació en el siglo XVIII con Lagrange y, más esencialmente, en el XIX con Hamilton y Jacobi, y se haya adaptado de forma tan admirable a la relatividad y a las teorías cuánticas. Un descubrimiento clave en este desarrollo lo constituye la caracterización que hizo E. Noether de las magnitudes dinámicas de un sistema físico y de sus correspondientes leyes de conservación a partir de las simetrías del sistema. Concluido este trabajo poco después de que Hilbert propusiera su formulación variacional de la relatividad general, ha sido sin duda alguna uno de los resultados que más profundamente han influido en la física del siglo XX. En particular, la introducción del concepto de *tensor de impulso-energía* de un campo en el marco de la teoría de la relatividad especial, a partir de la invarianza de la lagrangiana por el subgrupo de las traslaciones del espacio-tiempo, ha sido un resultado clave en el desarrollo de la denominada física relativista de campos.

En electromagnetismo, la acción es la funcional:

$$L : F \rightarrow \int \langle F, F \rangle_g \mathrm{vol}(g)$$

donde $\langle F, F \rangle_g$ es el cuadrado escalar del campo electromagnético, F, respecto de la métrica de Minkowski g, y $\mathrm{vol}(g)$, es el elemento de volumen asociado a dicha métrica.

Sometiendo a la funcional L a las variaciones $F \rightarrow F + tdA$ (A = 1-forma arbitraria) que preservan la *ligadura* definida por el primer grupo de ecuaciones de Maxwell, $dF = 0$, se obtiene el segundo grupo de dichas ecuaciones, $\mathrm{div}_g F = 0$, como ecuaciones de Euler de este problema variacional.

El tensor de impulso-energía correspondientes es:

$$T(F) = \langle F, F \rangle_g \, g^{-1} - 2F_1^1 \bullet F^2$$

donde g^{-1} es la métrica g contravariada, F_1^1 y F^2 son las expresiones 1-covariante 1-contravariante y 2-contravariante de F, respectivamente, y el $\bullet$ indica contracción tensorial.

En cuanto a la ley de conservación de este tensor, se expresa como:

$$\mathrm{div}_g T(F) = 0$$

para cada solución F de las ecuaciones de Maxwell.

El ambiente era, como se ve, más que favorable para que la relatividad general pudiese aparecer en cualquier momento. Desde un principio, Einstein asoció la arbitrariedad de un sistema de coordenadas al concepto de *aceleración*, y ésta al de *gravedad:*

> ¿Puede concebirse que este principio (el de relatividad especial) sea también válido para sistemas con aceleración relativa uno respecto de otro? (Einstein, 1907).

Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928).

Si se consideran dos sistemas de referencia, uno en reposo en un campo gravitatorio constante, y el otro bajo una aceleración constante con respecto al primero, entonces: bajo la base de nuestra experiencia real, no hay razón para suponer que los dos sistemas puedan distinguirse uno de otro en forma alguna. Debemos por ello suponer una equivalencia física completa entre el campo gravitatorio y la correspondiente aceleración del sistema de referencia (Einstein, 1907).

Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925).

Tullio Levi-Civita (1873-1941).

Desde luego, el proceso que condujo a Einstein a su famosa teoría de la gravitación, publicada en 1915, no fue en modo alguno lineal, habiendo ensayado el genial físico diferentes posibilidades, empezando por una de ellas concebida todavía en el marco de la teoría de la relatividad especial. Tras varios años de profunda reflexión a lo largo de los cuales aprendió de su amigo Marcel Grossman en Zurich la geometría riemanniana y el cálculo tensorial de Ricci y Levi-Civita, Einstein dio por fin el gran paso identificando el *campo gravitatorio* con una clase de métricas lorentzianas más generales que la de Minkowski, la cual, en particular, supuso que define un espacio-tiempo, *vacío* de gravitación. Esto le permitió describir el movimiento de los astros como las geodésicas de dichas métricas, las cuales a su vez caracterizó mediante las ecuaciones de campo: Ricci(g) = 0, donde Ricci(g) = ($R_{ij}(x)$) es el invariante tensorial que se obtiene del tensor de curvatura Curv $g = (R^i_{jrl}(x))$ mediante el proceso de contracción tensorial $R_{ij}(x) = \sum R^l_{ilj}(x)$.

Convertido plenamente a la dialéctica riemanniana, las razones que da Einstein en su célebre memoria de 1915 para las dos caracterizaciones anteriores no pueden ser más simples:

Si en el caso minkowskiano (espacio-tiempo vacío de gravitación) la trayectoria de un punto material es una recta de acuerdo con el principio de inercia, es natural identificar dichas trayectorias, en el caso general, con las geodésicas de la métrica que define el campo gravitatorio. Por otra parte, a la hora de elegir unas ecuaciones de campo más débiles que la anulación del tensor de curvatura (cuyas soluciones son, como se ha visto, la clase de métricas de Minkowski), Einstein se vio conducido casi unívocamente a la anulación del tensor de Ricci; esto es, al sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden invariantes, del mismo número de ecuaciones que incógnitas y con una dependencia lineal de las derivadas de segundo orden.

Lo más significativo de estas dos caracterizaciones es que, por primera vez en la historia de la física, se llega a unas leyes de esta ciencia de un modo puramente especulativo, sin apelar en lo más mínimo a la experiencia, y lo que es más sorprendente aún, con una confirmación a posteriori por parte de la naturaleza tan clara y convincente como nunca se habría esperado.

Con una diferencia de días, Hilbert propuso la formulación variacional de la relatividad general, obteniendo las ecuaciones de campo de esta teoría como ecuaciones de Euler de la lagrangiana definida por la curvatura escalar de la métrica $R_g = \sum_l R^i_i(g)$. Es este el momento en que los más grandes matemáticos de la época se interesan por el tema, convirtiendo a la Universidad de Göttingen en el centro indiscutible de las nuevas ideas: E. Noether publica los teoremas que llevan su nombre mediante los cuales resuelve el problema de la conservación de la energía local en relatividad general; Einstein generaliza sus ecuaciones de campo para incluir el campo material que es *fuente* del gravitatorio; se inician los intentos para dar una teoría unificada de la gravitación y el electromagnetismo, etc. Especialmente importante es esto último, por cuanto que fue, entre otras cosas, la principal motivación de la teoría de conexiones, doctrina ésta de las más centrales de la geometría diferencial del siglo XX.

En efecto, lo que pusieron de manifiesto dichos intentos hacia una tal teoría unificada, iniciados en 1919 por H. Weyl y a los que Einstein dedicó la mayor parte de sus

Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955).

esfuerzos, hasta su muerte en 1955, es que la noción fundamental sobre la que debía basarse la geometría riemanniana para estar de acuerdo con la Naturaleza era la de *desplazamiento paralelo infinitesimal de un vector.* Según este concepto, debido originariamente a Levi-Civita, toda métrica lleva asociada de un modo natural una isometría entre los espacios (métricos) tangentes a cada pareja de puntos de la variedad dependiendo únicamente del camino que los une. Es la denominada conexión de Levi-Civita asociada a la métrica, que es de la que en realidad dependen los conceptos geométricos fundamentales de una variedad riemanniana (geodésicas, tensor de curvatura, etc.).

La definición general de conexión lineal, sin referencia ya a una métrica, no se hizo esperar. Y aunque las diferentes teorías del campo unificado que fueron proponiéndose fracasaron en aquello que inicialmente pretendían, consiguieron en cambio algo tan importante como el haber descubierto las *variedades a conexión lineal,* el más significativo avance en geometría diferencial desde el tiempo de Riemann.

Y es, en esta ocasión, donde, al revés, la dialéctica física marca el camino por donde habría de ir la geometría.

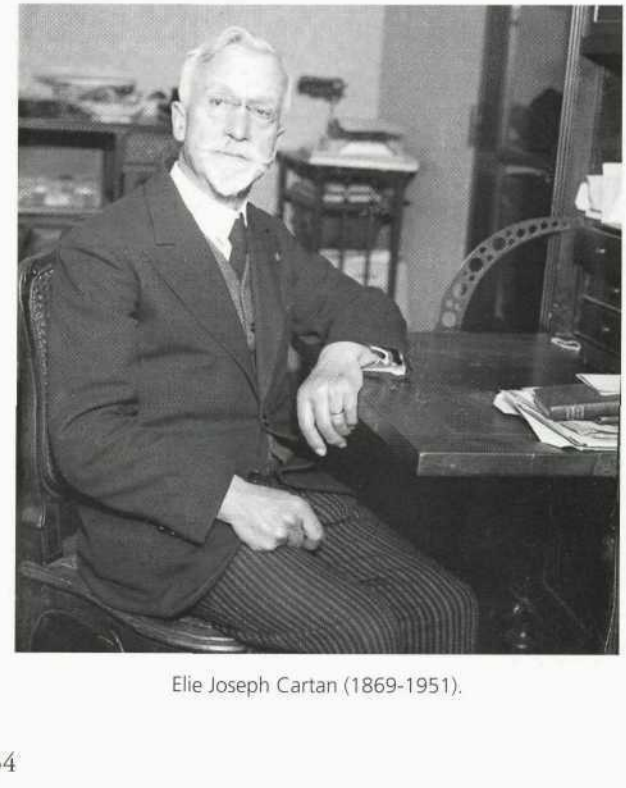
Las diferentes versiones propuestas fueron finalmente englobadas a partir de 1922 en la síntesis realizada por E. Cartan, con la cual empiezan por fin a comprenderse todas las limitaciones anteriores, atravesando la geometría diferencial por uno de sus periodos más fecundos.

La idea de Cartan fue extremadamente original y abrió otra vía de penetración de los grupos y de las ideas kleinianas en la geometría diferencial. Si a cada punto x de una variedad, M, se le asocia una geometría, Σ_x, todas ellas isomorfas a una cierta geometría de Klein, Σ, dar una conexión asociada a esa geometría es establecer un isomorfismo entre las geometrías en cada pareja de puntos dependiente del camino que los une. Estos isomorfismos constituyen el último sustrato de la idea de desplazamiento paralelo, convirtiendo a la geometría diferencial en el estudio de las *redes de interconexiones* entre las geometrías locales en cada pareja de puntos, las cuales aparecen así como una primera aproximación de la verdadera geometría de la variedad. Con la reconstrucción de esta idea mediante los espacios fibrados, introducidos por Ehresman y Whitney entre 1937 y 1939 en el contexto topológico, se entra ya en la etapa de fundamentación y globalización de la geometría diferencial, la cual, por una parte, dirige su principal atención hacia los problemas globales, y por otra, abre su cada vez más amplio marco conceptual a las nuevas exigencias de la física teórica.

El nuevo concepto, básico hoy día en geometría y física, es fácil de describir:

Un espacio fibrado (diferenciable) consiste en poner en cada punto, x, de una variedad diferenciable, M, algún tipo de espacio, E_x, todos ellos isomorfos a una cierta variedad diferenciable, N, de tal modo que la colección $E = \bigcup_x E_x$ de dichos espacios sea a su vez una variedad diferenciable (localmente de la forma $U_x \times N$, donde U_x es un cierto entorno de cada punto x), y donde la proyección natural $\pi : E \to M$ es también diferenciable. De este modo nos encontramos con un tipo de variedad constituida por *fibras,* donde cada una de ellas consiste en el espacio que se ha puesto en cada punto de la variedad de partida que, por tal motivo, se denomina *variedad base.*

Una noción fundamental asociada a este concepto es la de sección del fibrado, esto es: una aplicación diferenciable s: $U \to E$ (U: abierto de M) tal que $\pi \cdot s =$ identidad.



Elie Joseph Cartan (1869-1951).

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947).

Tales secciones son los nuevos objetos que se definen sobre las variedades o, correspondientemente, la versión más general que puede darse de un campo físico.

En particular, la geometría diferencial y la física einsteniana están basadas en los fibrados cuyas secciones son los campos tensoriales, los cuales tienen, como vimos, la propiedad fundamental de que los difeomorfismos locales de la variedad base actúan de modo natural sobre sus secciones o, lo que es lo mismo, dichos difeomorfismos pueden levantarse al espacio fibrado como difeomorfismos del mismo, transformando fibras en fibras.

Y es precisamente esta propiedad, en la que esencialmente se basa la geometría diferencial y la física de campos, la que en la década de los setenta es tomada como principio básico para establecer el marco categorial preciso de la geometría diferencial. En efecto, en una serie de trabajos fundamentales: Nijenhuis (1972), Kirillov (1977), Palais-Terng (1977), Epstein-Thurston (1979), etc., se definen los *fibrados naturales* como aquellos que incorporan a su propia definición dicha propiedad de levantamiento de los difeomorfismos locales de la variedad base, consiguiéndose una clasificación completa de dichos fibrados, así como de los *operadores naturales* que pueden definirse entre ellos.

Niels Henrik David Bohr (1885-1962).

De este modo, la identidad de conceptos y de planteamientos que hemos ido destacando entre la geometría y la física se convierte, tras esta *categorización*, en un hecho claro y manifiesto, alcanzando estas dos doctrinas en el dominio considerado un grado de coincidencia tal que justificaría ya de sobra el título dado a esta conferencia, incluso sin su interrogante.

¿HACIA UNA GEOMETRIZACIÓN DE LAS TEORÍAS CUÁNTICAS?

El otro gran descubrimiento que vino a perturbar esa *armoniosa y acabada* física que en 1898 proclamaba lord Kelvin, fue el de los *fenómenos cuánticos*, cuyo primer centenario se cumplió en diciembre de 2000. Si la relatividad fue el último acto de reflexión del pensamiento clásico, la física cuántica por el contrario empezó prácticamente desde cero con una serie de hechos nuevos, inexplicables desde la física clásica pero incuestionables desde el punto de vista experimental. Hechos, por otra parte, que fueron accesibles gracias a una experimentación cada vez más agresiva y sofisticada, donde por primera vez la interacción entre *observador* y *objeto observado* produce unos cambios en el *sistema* que se observa que ya no son asumibles por los errores inherentes a los aparatos de medida.

Como era de esperar, los primeros intentos para explicar tales hechos no pasaron de ser una colección de reglas más o menos *ad hoc* que, ingeniosamente superpuestas a las doctrinas clásicas, introdujeron una primera ordenación en la abundante literatura experimental que se iba produciendo. Así es como, de hecho, nace la física cuántica en 1900, cuando Max Planck soslayó las contradicciones observadas en la distribución de energía entre los osciladores que componen el llamado *cuerpo negro*, postulando la famosa constante «**h**» que lleva su nombre y suponiendo que un oscilador de frecuencia ν sólo puede tener energías que sean múltiplos de $\mathbf{h}\nu$. De un modo análogo, en 1905, Einstein explicó el *efecto fotoeléctrico*, descubierto en 1899 por J. J. Thompson y P. Lenard. Y en 1913, N. Bohr, imponiendo *restricciones cuánticas* al momento angular del electrón que gira alrededor del núcleo en el modelo del átomo de hidrógeno propuesto en 1911 por Rutherford, obtuvo una interesante fórmula que relaciona las líneas espectrales de la radicación emitida por este elemento químico (cuando es adecuadamente excitado) con la estructura atómica del mismo. Esta idea fue más tarde extendida a otros átomos más complejos, lográndose una ordenación de la espectroscopia impensable unos años antes. Con todo ello, sin embargo, este tipo de explicaciones, aparte de no proporcionar un procedimiento general para obtener las *reglas de cuantificación*, era muy difícil de conciliar con las teorías clásicas que les servían de soporte, como, por ejemplo, la de la estabilidad de las órbitas de Bohr, en franca contradicción con la electrodinámica.

Por fin, en 1925, Schrödinger (inspirado en los trabajos de L. de Broglie) y Heisenberg descubrieron de modo independiente reglas de cuantificación generales que, en los cinco años siguientes, gracias a los esfuerzos combinados de ambos y de Dirac, Bohr, Born, Jordan, Von Neumann y otros, condujo al establecimiento de lo que desde entonces se conoce como mecánica cuántica que, entre otras cosas: tenía a la mecánica clásica como caso límite (para grandes masas y distancias), implicaba la existencia de reglas de cuantificación bien definidas, explicaba la estabilidad de las órbitas de Bohr y también el modo como la materia y la radicación podían ser a la vez *campos* y *partículas*.

El precio de tal fundamentación fue grande en aquel momento debido al profundo cambio que supuso en las nociones de *estado* y de *observable* clásicos. En efecto, el modelo de sistema mecánico que postula la nueva física es el de un espacio de Hilbert complejo de dimensión infinita, $\mathcal{H}$, donde los *estados* se identifican con los subespacios de dimensión 1 de $\mathcal{H}$ y los *observables* con sus operadores autoadjuntos. Dado un observable A y un estado $<\phi>$, el *resultado de la medida de* A en $<\phi>$ no es ya un número real sino una medida de probabilidad sobre la recta real, $E \to <\pi^A_E\phi, \phi>$, donde π^A_E es el proyector asociado a A y al subconjunto boleriano E de la recta real según un teorema clásico de descomposición espectral, ϕ es un representante de módulo unidad de $<\phi>$ y $< , >$ denota el producto escalar de $\mathcal{H}$. Por otra parte, se da como dato del sistema, igual que en física clásica, un observable de especial interés, la energía o hamiltoniana caracterizándose la *evolución temporal* de los estados o de los observables por el grupo uniparamétrico e^{-iHt} generado por H de acuerdo con otro resultado clásico (el teorema de Stone). En cuanto a la relación entre la nueva mecánica y la clásica hay que buscarla en la vieja formulación de Poisson de la mecánica hamiltoniana, y en un proceso nuevo denominado *cuantificación*.

Werner Karl Heisenberg (1901-1976), a la derecha, junto a Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984).

La nueva física siguió teniendo entre sus principales objetivos explicar qué son las *partículas* y cuáles son los *campos* producidos por ellas, así como describir las interacciones que se producen entre ambos. A este respecto, hay que hacer notar que desde el descubrimiento del *electrón* por J. J. Thompson en 1897, las *partículas* dejaron de ser simples *puntos materiales* para convertirse en entidades más complejas, estrechamente ligadas a la experimentación que permite detectarlas; y en cuanto a los *campos*, decir que a los tradicionalmente existentes (el *gravitatorio* y el *electromagnético*), se sumaron dos más, los campos *fuerte* y *débil*, que rigen la física del núcleo atómico y la desintegración β, respectivamente. Este ambicioso programa, encaminado a dar una teoría unificada de las partículas elementales y de los cuatro tipos de fuerzas existentes en la naturaleza, cristalizó en la famosa *teoría cuántica de campos* que, basada en una sofisticada unificación de las nociones de partícula y de campo y con un uso sistemático de las representaciones de grupos como técnica clasificatoria, ha ido configurando a lo largo de más de cuarenta años una teoría de las partículas elementales razonablemente comprensible. Sin embargo, y dejando aparte el considerable número de problemas que han ido presentándose (divergencias ultravioleta, anomalías, etc.) muy difíciles de manejar matemáticamente, dos cuestiones básicas siguen sin tener una explicación convincente hasta la fecha, a saber: *cuál es el último nivel de elementalidad en las partículas* y *cómo conciliar la relatividad general con la mecánica cuántica;* la primera, dependiendo de la cada vez mayor potencia de los aceleradores empleados en la experimentación, y la segunda, de un carácter más especulativo, cuya principal dificultad se encuentra en la diferencia de escalas en las que operan la gravitación y la mecánica cuántica.

Habiendo sido diversas áreas del análisis (teoría de operadores, C*-álgebras, representaciones infinitas de grupos, funciones de varias variables complejas, etc.) la principal técnica matemática de todas estas teorías, se comprende ese largo divorcio entre la geometría y la física cuántica del que tanto se ha hablado en el pasado. Matizando un poco más, puede decirse que existen tres etapas bien definidas en el proceso de geometrización de la nueva física que, empezando a mitad de los años cincuenta, en plena época de formalización de la geometría diferencial, han llevado a las teorías cuánticas a su estatus geométrico actual que tan beneficioso está siendo para la física como para la matemática en su más amplio sentido.

Tratemos de mostrar lo que ha sido más característico de cada una de dichas etapas.

En la primera, que podemos situarla entre 1955 y 1970, aparecen como principales temas de interés: la mecánica simpléctica, la teoría variacional de campos sobre espacios fibrados y el formalismo geométrico de las teorías de gauge. Se trata de una formulación en el lenguaje de la geometría diferencial moderna, recién acuñado en esos años, de tres doctrinas consideradas esenciales para la física cuántica. Principalmente tratadas por matemáticos con especial interés en sus aspectos globales, dicho tratamiento despertó también la curiosidad de parte de la comunidad física, que veía en ello una oportunidad nueva para la aclaración de conceptos físicos fundamentales.

Comenzando con el primer tema, una estructura simpléctica sobre una variedad diferenciable, M, de dimensión finita, viene definida por una 2-forma, Ω, no singular y cerrada (esto es, $d\Omega = 0$) . Se trata de una versión hemisimétrica del concepto de métrica sobre una variedad, donde la no singularidad implica que la dimensión de ésta sea par, $2n$, mientras que la condición $d\Omega = 0$ permite asegurar, según un resultado clásico debido a Darboux, la existencia de sistemas de coordenadas locales (q_j, p_j) respecto de los cuales:

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq_j$$

Un sistema hamiltoniano con n grados de libertad puede caracterizarse ahora como una variedad diferenciable, M, de dimensión $2n$, dotada de una métrica simpléctica, Ω, y de una función diferenciable H. Los puntos de M se interpretan como los *estados* por los que puede pasar el sistema y las funciones sobre M como sus magnitudes dinámicas u *observables*. La métrica Ω caracteriza la estructura dinámica del sistema, mientras que la función H define un observable de especial interés denominado energía o hamiltoniana.

Dado un observable f, el campo vectorial D_f sobre M definido por la condición ${}^{i}D_f^{\Omega} = -df$ (${}^{i}D_f$ = *producto interior respecto de* D_f) se denomina campo vectorial hamiltoniano correspondiente a f. En particular, el campo vectorial D_H correspondiente a la hamiltoniana H, genera un grupo uniparamétrico de transformaciones de M que se interpreta como la *evolución temporal* del sistema. Por otra parte, el producto $\{f, g\} = \Omega(D_f, D_g)$ dota a los observables de una estructura de álgebra de Lie real, el *álgebra de Poisson*, a partir de la cual, recíprocamente, puede recuperarse la métrica simpléctica.

Un problema fundamental en mecánica cuántica es ahora el siguiente: asociar a cada sistema clásico un sistema cuántico de tal manera que a ciertos observables clásicos se les pueda hacer corresponder observables cuánticos de un modo bien definido. Es a Dirac, Weyl y Von Neumann a quienes se debe la formulación precisa de este problema, conocido como *problema de Dirac* o *cuantificación*. De un modo más preciso, se trata de construir representaciones (irreducibles) de ciertas subálgebras del álgebra de Poisson de un sistema clásico en el álgebra de los observables de un sistema cuántico, donde por representación se entiende una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $f \to \hat{f}$ del álgebra de Poisson en el álgebra de los operadores autoadjuntos, tal que $\{\hat{f}, \hat{g}\} = [\hat{f}, \hat{g}]$ y $\hat{1} = kI$, donde $[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f} \circ \hat{g} - \hat{g} \circ \hat{f}$ es el conmutador de operadores y kI es un múltiplo no nulo del operador identidad.

Introducidas, a principios de los años sesenta, las variedades diferenciables de dimensión infinita y las técnicas básicas del *análisis global*, la generalización de la geometría simpléctica a este nuevo marco y su aplicación a la teoría hamiltoniana de campos no se hizo esperar. Especialmente notable en esta dirección fue el programa sobre cuantificación de campos no lineales desarrollado por I. Segal en esos años. La idea básica de Segal consistió en considerar al conjunto de las soluciones de las ecuaciones de campo como sustituto del espacio de los estados de la teoría hamiltoniana, con la esperanza de poder generalizar a esta *variedad de soluciones*, como se la conoce desde entonces, los métodos estándar de cuantificación de los sistemas con un número finito de grados de libertad. De hecho, Segal estudió con detalle el caso de un campo escalar sobre el espacio-tiempo de Minkowski, definido por una cierta ecuación en derivadas parciales hiperbólica no lineal, a cuyo conjunto de soluciones dotó de una estructura de variedad simpléctica de dimensión infinita mediante el propagador asociado a dicha ecuación. Este programa, si bien no tuvo el éxito esperado, debido fundamentalmente a las dificultades analíticas que fueron presentándose, sí aportó la brillante y original idea de considerar como espacio natural para fundar la teoría hamiltoniana de los sistemas físicos definidos por un problema

John von Neumann (1903-1957).

Richard Phillips Feynman (1918-1988).

variacional, al conjunto de las soluciones de sus correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange.

De este modo nos vemos conducidos al segundo tema que hemos destacado en esta etapa, esto es: la *teoría variacional de campos sobre espacios fibrados.*

Definidos los fibrados de jets, $j^k\pi : J^kE \to M$ (*k:* un número natural), asociados a un fibrado diferenciable, $\pi : E \to M$, el dato básico para definir un problema variacional de orden k sobre el conjunto $\Gamma(E)$ de las secciones locales de E, es una n-forma $j^k\pi$-horizontal, $\mathcal{L}$, sobre J^kE ($n = \dim M$), denominada «densidad lagrangiana». Integrando dicha n-forma sobre la *extensión* k-*jet* de cada sección y considerando *variaciones* que preservan la estructura geométrica de los espacios de jets, se definen de un modo natural la funcional y el concepto de extremal típicos del cálculo de variaciones. En particular, para $k = 1$, a fines de los años sesenta se asoció canónicamente a cada densidad lagrangiana, $\mathcal{L}$, una n-forma, Θ_L, que generaliza a tales problemas el invariante integral clásico de E. Cartan de la mecánica analítica (R. Hermann, P. García-A. Pérez Rendón, H. Goldsmith-S. Sternberg). Dicha noción se convirtió en el concepto clave del cálculo de variaciones de primer orden al caracterizarse a partir del mismo todas las nociones y procesos típicos de la teoría variacional (extremales, simetrías y leyes de conservación, transformación de Legendre, ecuación de Hamilton-Jacobi, etc.). Especialmente importante fue la noción de *métrica multisimpléctica* sobre el conjunto de las extremales, con la que se pudo aclarar definitivamente la teoría hamiltoniana de campos, que tan intensamente había sido tratada en décadas anteriores (Caratheodory, Weyl, De Donder, Lepage, etc.). Esta doctrina, conocida desde entonces como «formalismo de Hamilton-Cartan del cálculo de variaciones sobre espacios fibrados», constituye una importante área interdisciplinar cuya investigación en muchos de sus aspectos (geometría multisimpléctica, discretizaciones, reducción lagrangiana, etc.) se encuentra aún lejos de estar agotada.

Una de las principales aplicaciones de este formalismo en esos años fue a los campos de Yang-Mills o, más generalmente, a las denominadas «teorías de gauge», que también incluyen como ejemplo a la relatividad general.

Dado un campo clásico definido por un problema variacional cuya densidad lagrangiana, $\mathcal{L}_\phi$, depende de un cierto objeto geométrico, ϕ, tal que su grupo de simetrías $\mathcal{G}_\phi$ (típicamente, un grupo de Lie de dimensión finita) deja invariante $\mathcal{L}_\phi$, se trata de transformar dicho problema en otro cuya densidad lagrangiana sea invariante por un grupo de Lie, $\mathcal{G}$, de dimensión infinita («grupo gauge») que tiene a $\mathcal{G}_\phi$ como subgrupo.

En relatividad general, primera teoría gauge que de hecho aparece en la historia de la física, ϕ es la métrica de Minkowski, g, $\mathcal{G}_g$ el grupo inhomogéneo de Lorentz y $\mathcal{G}$ el grupo de los difeomorfismos del espacio-tiempo. La solución en este caso del anterior problema fue la que dio Einstein, consistente en sustituir la métrica de Minkowski, g, en la lagrangiana inicial $\mathcal{L}_g$ (campo fuente) por una métrica de Lorentz arbitraria (campo gravitatorio), y tomar como lagrangiana del sistema constituido por ambos campos la suma $\mathcal{L}_g + R(g)\omega_g$ (R_g: la curvatura escalar y ω_g el elemento de volumen de la métrica g). Como es sabido, dicho sistema es ya invariante por todos los difeomorfismos y tiene como ecuaciones de Euler-Lagrange las ecuaciones de la gravitación de Einstein acopladas con el campo fuente inicial.

Del mismo tipo es la idea básica que llevó a Yang y Mills en 1955 a introducir los campos que llevan su nombre para describir las *interacciones fuertes* en física nuclear. Tras interpretar la interacción usual de los campos cargados eléctricamente con el campo electromagnético que ellos generan, como el paso de una lagrangiana, $\mathcal{L}$, invariante por el grupo unitario $U(1) = \{e^{2\pi it}, t \in \mathbb{R}\}$, a la lagrangiana suma

$$\mathcal{L} + \frac{1}{4}\|F\|^2\omega_g (F = dA)$$: campo electromagnético de potencial A, y $\| \ \|$, la norma asociada a la métrica de Minkowski g), la cual es invariante por el *grupo gauge* $G = \{e^{2\pi i f(x)}, f(x)$: función sobre el espacio-tiempo$\}$, dichos autores generalizaron a SU(2) y a otros grupos de simetrías el formalismo anterior, introduciendo un nuevo campo de ¡naturaleza geométrica desconocida! Pocos años más tarde (Kerbran-Lunc, R. Hermann, A. Pérez-Rendón, Yang y Wu, etc.) dichos campos se identificaron con las conexiones sobre un fibrado principal, inaugurándose con ello uno de los más brillantes capítulos de las relaciones entre física y geometría.

Con más precisión: dado un fibrado principal $p: P \to M$ con grupo estructural un grupo de Lie, G, se considera un *campo fuente* definido sobre las secciones de un fibrado vectorial asociado a P (respecto de una representación lineal de G) por una lagrangiana, $\mathcal{L}_A$, dependiente de la conexión plana canónica, A, de cada trivialización local de P, e invariante por la acción natural de G en dichas trivializaciones. A partir de aquí, análogamente al procedimiento einsteniano, se sustituye la conexión plana, A, por una conexión arbitraria (el potencial de Yang-Mills), tomándose como lagrangiana del sistema definido por ambos campos la suma $\mathcal{L}_A + \frac{1}{4}\|F\|^2 \omega_g$ (F= Curv A: campo de Yang-Mills de potencial A, y $\| \ \|$, la norma asociada a las métricas de Minkowski y de Cartan-Killing del grupo G). Por construcción, este sistema es invariante por el *grupo gauge*, $\mathcal{G}$, de los automorfismos p-verticales del fibrado principal, al actuar sobre las conexiones y las secciones del fibrado asociado de partida del modo natural.

La segunda etapa del proceso de geometrización que estamos describiendo, podemos situarla entre 1970 y 1985.

Obtenidas las formulaciones geométricas de las teorías físicas antes referidas, se produce en esos años un inesperado vuelco en las relaciones entre la geometría y la física comparable, en cierto modo, al que tuvo lugar en el primer cuarto del siglo XX en torno a las teorías de la relatividad y del campo unificado. Ideas y desarrollos clave de las teorías cuánticas pudieron transferirse, una vez formuladas en el nuevo lenguaje, a la geometría diferencial, topología, geometría algebraica, etc., produciendo resultados sorprendentes en estas disciplinas y, del otro lado, la propia física se vio beneficiada de ello, no sólo por la interpretación cuántica que hizo de muchos de esos resultados, sino también por haberse abierto de este modo una vía de penetración a la física teórica de las poderosas técnicas empleadas en esas especialidades matemáticas.

La *Cuantificación geométrica*, los *Moduli de campos de Yang-Mills sobre espacios de Riemann* y las *Variedades graduadas y supervariedades*, son tres importantes doctrinas muy representativas de esta segunda etapa.

Dada una variedad simpléctica (M, Ω) de dimensión finita, lo que se dio en llamar a principios de los años setenta *Cuantificación geométrica*, tenía como principal objetivo resolver el *Problema de Dirac* en términos de la geometría de la variedad. Esta doctrina, que tuvo su origen en una idea de J. M. Souriau, fue establecida y desarrollada por B. Kostant, que la usó como un instrumento básico de su teoría de las representaciones unitarias de los grupos de Lie conexos. En particular, la determinación mediante esta teoría, de todas las representaciones unitarias de los *grupos de Lie solubles de tipo I* fue uno de los más importantes resultados obtenidos por este autor en esos años.

Tras la realización de la métrica simpléctica, Ω, como 2-forma de curvatura de una conexión hermítica sobre un fibrado de línea complejo $\pi: L \to M$, el álgebra de Poisson de (M, Ω) puede hacerse operar sobre las secciones de L de tal manera que el paréntesis de Poisson se transforma en el conmutador de operadores, proceso este conocido con el nombre de *precuantificación*. Tomando ahora secciones que son *constantes en ciertas direcciones* mediante la introducción de una estructura adicional denominada *polarización*, y tensorializando dichas secciones por unos nuevos objetos llamados *semiformas* se consigue un espacio de Hilbert complejo que, de este modo, está asociado canónicamente a la variedad simpléctica y a la polarización consideradas. La *cuantificación* se obtiene, finalmente, restringiendo el homomorfismo de precuantificación a dicho espacio de Hilbert.

Aparte de la indudable aportación conceptual que dicha doctrina supuso para la mecánica cuántica de los sistemas con un número finito de grados de libertad, el principal interés de ella se halla, realmente, del lado matemático, habiendo sido esta teoría intensamente tratada con muy buenos resultados a lo largo de esos años.

En otro orden de cosas, y esta vez por motivaciones de la teoría cuántica de campos según la formulación de Feynmann, se mostró gran interés, también a principios de los años setenta, por el estudio de un tipo particular de soluciones de las ecuaciones de Yang-Mills en el espacio euclídeo de dimensión 4 llamadas *instantones* o *seudopartículas* (A. Belavin, A. Polyakov, R. Jackiw, C. Rebby, etc.). Estas ecuaciones, que sobre el espacio-tiempo de Minkowski son hiperbólicas, se convierten en el espacio euclídeo en elípticas, con propiedades bien diferentes

Marius Sophus Lie (1842-1899).

Bertram Kostant (1928-).

como es sabido. De especial interés desde el punto de vista matemático son los resultados obtenidos por M. Atiyah, N. Hitchin e I. Singer en esos años.

Originariamente, de lo que se trataba era de estudiar la estructura del conjunto de los mínimos de la funcional de Yang-Mills sobre las conexiones del SU(2)-fibrado principal trivial, $\mathbb{R}^4 \times SU(2)$ ($\mathbb{R}^4$ con su métrica euclídea ordinaria) que son asintóticamente planas en un cierto sentido. A tal fin y teniendo en cuenta la invarianza de esta funcional por el grupo conforme de $\mathbb{R}^4$, la idea clave consistió en ver cómo la condición asintótica impuesta permitía extender dicho problema a otro sobre un SU(2)-fibrado principal no trivial sobre la esfera S^4. Si $-k$ es el segundo número de Chern de P, el resultado principal de Atiyah, Hitchin y Singer afirma: «que el grupo gauge de P deja invariante al conjunto de las conexiones de Yang-Mills minimales, siendo el conjunto de sus órbitas (el gauge-moduli de tales conexiones) una variedad de dimensión $8k - 3$». Dicho resultado, en cuya demostración se hace un uso sistemático de los teoremas del índice para complejos elípticos y de la teoría de deformaciones, tuvo sorprendentes consecuencias y aplicaciones que atrajeron la atención de físicos y matemáticos.

Así, por ejemplo, mediante la transformada twistor de Penrose las conexiones consideradas se convierten en fibrados vectoriales complejos de rango 2 holomorfos (y, por consiguiente, algebraicos) sobre el espacio proyectivo $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$, mientras que la equivalencia gauge de conexiones se transforma en equivalencia algebraica de fibrados. De este modo se pasa del estudio de la estructura del conjunto de las soluciones de una ecuación en derivadas parciales a un problema de clasificación de fibrados sobre el espacio proyectivo. Tal es el tipo de resultados obtenidos por Atiyah y Ward a este respecto, mediante los cuales la teoría de Yang-Mills entró brillantemente en el dominio de la geometría algebraica.

Más sorprendente aún si cabe fue el famoso teorema de Donaldson sobre «4-espacios exóticos» que produjo una gran conmoción en la comunidad matemática internacional. En combinación con el importante trabajo desarrollado con anterioridad por Freedmann, este resultado implica la existencia de variedades diferenciables de dimensión 4, topológicamente pero no diferenciablemente equivalentes al espacio euclídeo estándar $\mathbb{R}^4$, siendo $n = 4$ la única dimensión para la que tales espacios existen. Y si sorprendente fue tal resultado, más todavía lo fue la técnica empleada para su obtención, a saber: considerar el *gauge-moduli de las conexiones de Yang-Mills minimales* sobre una variedad arbitraria de dimensión 4 como técnica geométrica para investigar las propiedades topológicas de dichas variedades.

Finalmente, el tercer tema característico de esta segunda etapa, las *variedades graduadas y supervariedades*, puede decirse que constituye la respuesta matemática adecuada a las teorías físicas de la *supersimetría* y, en particular, de la *supergravedad*, que aparecen a fines de los años setenta y principios de los ochenta.

Como se sabe, en teoría cuántica de campos hay dos clases de campos que describen los diferentes tipos de partículas elementales: los campos bosónicos (de espín entero) y los fermiónicos (de espín semientero). Los primeros, con funciones de onda simétricas, y los segundos, que obedecen al principio de exclusión de Pauli, y tienen como estados funciones con valores en un álgebra de Grassmann. Pues bien, el principio básico de la *Supersimetría* consiste en suponer que las ecuaciones de campo de la teoría son invariantes por ciertas transformaciones que *mezclan* ambos tipos de campos o, lo que es lo mismo, intercambian entre sí bosones y fermiones.

La doctrina se desarrolló en dos vertientes diferentes: la teoría de variedades graduadas debida a Berezin, Kostant y Leites, y la teoría de supervariedades de Rogers, Jadczyk-Pilch, Boyer-Gitler, etc. Grosso-modo, si en las supervariedades se aumenta el conjunto de los puntos de una variedad clásica, en las variedades graduadas los puntos son los mismos y lo que cambia es el álgebra de funciones sobre la variedad.

Ambos puntos de vista incorporaron casi de inmediato la teoría de campos, dando lugar a una teoría de supercampos muy atractiva matemáticamente y de gran aplicación física. En particular, la conversión de las interacciones típicas de las teorías de gauge en un supercampo de Yang-Mills libre, definido por una *superconexión,* constituye uno de los mayores logros de esta doctrina, que tuvo importantes aplicaciones en gravitación cuántica.

Llegamos así a la tercera y última etapa de este proceso de geometrización que, empezando en los primeros años ochenta, se encuentra todavía en desarrollo.

Si las ideas cuánticas continuaron produciendo avances importantes en las doctrinas matemáticas de la etapa anterior y en otras que se fueron *sumando (nudos y lazos, teoría de números,* etc.), la física teórica, en posesión ya de un nuevo marco conceptual y de técnicas matemáticas muy poderosas, empieza a dar pasos de más envergadura para abordar algunos de sus problemas de base no resueltos. En esta renovada interacción, la física plantea asimismo a la matemática problemas nuevos de gran profundidad que habrían sido impensables unos años antes.

De entre los muchos y variados temas tratados en esta etapa destacan especialmente dos: la *teoría de cuerdas* y la *geometría no conmutativa,* a las que dedicaremos unos breves comentarios.

Michael Atiyah (1929-).

Aunque el origen de la teoría de cuerdas se encuentra en el estudio de las interacciones fuertes desarrollado a fines de los años sesenta y en la cromodinámica cuántica de primeros de los setenta, es a principios de la década de los ochenta, con los trabajos de Poliakov y Witten, cuando se reconoce que esta teoría podía proporcionar un marco adecuado para una formulación unificada de la mecánica cuántica y la gravitación. Desde entonces, la teoría de cuerdas y su versión supersimétrica (las supercuerdas) ha sido una de las doctrinas de la física teórica que ha acaparado más atención de físicos y matemáticos. Por primera vez el espacio subyacente a la teoría deja de ser el espacio-tiempo clásico para convertirse en una de las variables del problema, que ha de ser determinada por métodos matemáticos o físicos.

En las teorías bosónicas la dimensión del Universo es 26, mientras que en la versión supersimétrica se reduce a 10 (teoría de supercuerdas) u 11 (teorías M y F). Y es también la estructura global del Universo la que debe ser *computada* de acuerdo con la teoría. Así, por ejemplo, en las denominadas teorías heteróticas (con grupos de simetría $E_8 \times E_8$ o Spin(32)) se *demuestra* que el Universo ha de ser el producto cartesiano de una variedad de Minkowski por una variedad de Calabi-Yau de dimensión compleja 3.

También es de destacar la profunda conexión existente entre el cómputo de las magnitudes cuánticas en teoría de cuerdas (funciones de partición, funciones de correlación, etc.) y la estructura geométrica de las variedades de moduli de superficies de Riemann compactas.

Como se ve, la creciente sofisticación de los objetos geométricos que aparecen a lo largo de esta etapa obligó a ir sustituyendo el marco espacio-temporal clásico por otros que resultaban más acordes con las nuevas teorías. Desde luego, siempre se pensó que no había razón alguna para suponer que la estructura del espacio físico a escalas de orden de magnitud de la constante de Planck fuese la de un continuo de cuatro dimensiones como en física macroscópica. Pero es ahora cuando por primera vez se aborda este problema de un modo sistemático, destacando muy especialmente en esta dirección el ambicioso programa de A. Connes sobre *geometría no conmutativa,* mediante el cual parece que se está empezando a conseguir una visión global de la física en la que lo clásico y lo cuántico pueden convivir ya en una razonable armonía.

El planteamiento, bien conocido por otra parte en geometría algebraica, se remonta a Riemann y se basa en la idea de obtener el espacio subyacente a un álgebra de funciones como el *espectro* del álgebra.

Como ya hicimos notar, el fenómeno de la *multiformidad* en teoría de funciones condujo al concepto de superficie de Riemann y poco después a las variedades: un marco natural para el desarrollo, entre otras doctrinas, de la geometría diferencial y de la física de campos. El énfasis riemanniano en las funciones y no en el espacio subyacente a las mismas fue también destacado a propósito de la caracterización de los objetos geométricos sobre una variedad a partir de su álgebra de funciones. Sin embargo, y a pesar del éxito alcanzado en esos dominios, dicho marco espacial no fue capaz de albergar en su seno a doctrinas matemáticas tan fundamentales como la aritmética, el álgebra o el análisis, ni tampoco a la física en su global complejidad.

El nuevo punto de vista, cuyo antecedente preciso se encuentra en una adaptación a la teoría de funciones de las técnicas desarrolladas por Dedekind para el tratamiento algebraico de la teoría de números, representa un *paso más* en la idea central riemanniana. En efecto, en una célebre memoria de Dedekind y Weber, publicada en 1882 –*Teoría de funciones algebraicas de una variable*–, aparece plasmada por primera vez la revolucionaria idea de considerar como dato previo para fundar una geometría, no un espacio, considerado como un *conjunto de puntos,* sino más bien una determinada *estructura algebraica,* a partir de la cual el *espacio* se construye de tal modo que los elementos del álgebra inicial se convierten en funciones sobre él mismo. Esta idea constituye, de hecho, el principal antecedente del álgebra conmutativa y de la geometría algebraica modernas, donde el espacio de un *esquema afín* viene definido como el conjunto de los ideales primos de un anillo. Y como suele ocurrir con todos los descubrimientos grandes, el nuevo punto de vista trascendió el ámbito concreto en el que nació para verlo reflejado en otras diferentes disciplinas (análisis, álgebra diferencial, lógica, etc.), en las que la nueva visión no sólo proporcionó una aclaración esencial de las mismas, sino lo que es más importante aún, les permitió avanzar con un renovado ímpetu que de otro modo no se habría producido.

Éste es, a grandes rasgos, el marco conceptual en el que se cree que la física cuántica puede alcanzar su verdadero estatus teórico con base exclusiva en la experiencia.

Mucho se ha hablado de la dificultad para entender las doctrinas cuánticas a lo largo del siglo que acaba de concluir. Pero un análisis cuidadoso del tema muestra que el problema no se halla tanto en el planteamiento conceptual originario, muy estrechamente ligado a los hechos experimentales, como en su interpretación posterior en términos de construcciones teóricas más propias de la visión macroscópica clásica que de la realidad cuántica propiamente dicha. Puede decirse, que si acertada fue la caracterización matemática inicial de los conceptos básicos de la mecánica cuántica (las matrices de Heisenberg, por ejemplo, traducción casi literal de las *series de Balmer* de la espectroscopia), no se dispuso en cambio de un marco geométrico adecuado que explicase tal caracterización. La historia vuelve a repetirse una vez más, siendo esta vez las ideas espectrales las que parece que están permitiendo avanzar al análisis funcional y a la física cuántica en sus respectivos caminos hacia la evidencia.

Fiel a esta visión positivista de la mecánica cuántica, el punto de partida de la teoría de Connes es el álgebra de los observables de un sistema cuántico: *un álgebra (no conmutativa) de operadores de un espacio de Hilbert complejo estable por la involución que transforma cada operador en su adjunto.* Dicha álgebra se considera la única realidad observable, siendo el objetivo fundamental de la teoría encontrar el espacio como espectro del álgebra y desarrollar en este nuevo marco (no conmutativo) todo el programa de la física clásica (conmutativa), con la esperanza de que la doctrina resultante sea ya la física, sin calificativos, capaz de explicar unitariamente todos los hechos descubiertos hasta ahora con independencia de la escala en la que éstos se manifiestan.

Como era de esperar, el programa empieza con un análisis exhaustivo del caso conmutativo donde, según la teoría de Gelfand, el espectro del álgebra (o conjunto de los *ideales maximales)* es un espacio topológico compacto cuya álgebra de funciones continuas se identifica canónicamente con el álgebra inicial. La traducción a este lenguaje de resultados clave de la teoría de variedades (en particular, los teoremas de D. Sullivan sobre orientación KO-homológica) permite una caracterización algebraica de esta teoría a partir de la cual queda despejado el camino hacia el caso no conmutativo y su geometría correspondiente. Con una adaptación a este caso, no exenta de cambios sustanciales (el nuevo espectro es, por ejemplo,

Julius Wihelm Richard Dedekind (1831-1916).

el conjunto de las representaciones irreducibles del álgebra dada en espacios de Hilbert), la clase de variedades que ahora aparece es muy amplia y sorprendente, incluyendo, entre otras, a variedades con singularidades, espacios discretos, conjuntos de Cantor, etc. En particular, la descripción llevada a cabo en este nuevo marco del modelo estándar de Glashow-Weinberg-Salam mediante una geometría producto cartesiano de una geometría discreta por el espacio-tiempo ordinario, constituye uno de los mayores éxitos de esta teoría, con resultados importantes sobre la estructura del espacio-tiempo a pequeña escala ($\sim (100\ \mathrm{Gev})^{-1}$).

CONCLUSIÓN

De la concepción euclidiana de la geometría a esta novísima visión no conmutativa de la misma, la evolución de esta ciencia a lo largo de veinticinco siglos ha sido impresionante. Las *figuras* y el *espacio,* en constante revisión conceptual, han constituido los elementos básicos de esta doctrina, habiendo sido, de hecho, la idea que se ha tenido de ellos y de las leyes por las que se han regido en cada momento, la verdadera esencia del pensamiento geométrico.

Tras una ausencia clara de la idea de espacio en la matemática griega, es con Descartes cuando por primera vez se introduce este concepto como el conjunto de los *puntos euclídeos* caracterizados por sus tres *coordenadas numéricas* en una *referencia.* Desde entonces hasta finales del siglo XIX, es este el marco espacial en el que se desarrolla la geometría euclídea, única doctrina geométrica existente. Y fue también el espacio euclídeo el escenario donde se desarrolló en ese mismo periodo la física clásica bajo una concepción en la que la geometría y la física están claramente diferenciadas.

En 1872, con el famoso Programa de Erlangen de Felix Klein se produce el gran cambio en la concepción de la geometría al caracterizarse ésta como el conjunto de los *invariantes* respecto de un *grupo* de transformaciones o, equivalentemente, como el conjunto de las *expresiones analíticas* en una *referencia* que son *vistas de la misma forma* por todos los miembros de una *familia* de ellas (estando relacionadas *familia* y *grupo* por el hecho de ser los cambios de coordenadas entre las referencias de la familia los que definen las transformaciones del grupo). Y es bajo esta segunda forma, típicamente cartesiana, como la nueva concepción de la geometría entra en la física en 1905 de la mano de Einstein con la *teoría de la relatividad especial,* en la que *invariante* es sinónimo de *concepto físico* y la nueva definición de geometría se corresponde con el famoso *principio de relatividad.* Ya no existe una sola geometría sino muchas y, del lado físico, cada clase de fenómenos genera una geometría en el nuevo sentido, en cuyo seno dichos fenómenos adquieren su verdadera razón de ser en términos puramente geométricos.

La generalización del concepto de familia de referencias sobre un espacio en el sentido de que cada uno de sus miembros proporciona *coordenadas,* no para el espacio entero, sino solamente para la vecindad de cada uno de sus puntos, y donde los *cambios de coordenadas* entre los miembros de la familia se supone que vienen dados por funciones de una cierta clase general (continuas, diferenciables, analíticas, etc.), condujo al concepto de *variedad;* sobre las cuales, la familia de referencias —o, equivalentemente, el seudogrupo de las transformaciones locales definidas por los cambios de coordenadas— define una geometría canónicamente asociada a la variedad. En este tipo de geometrías, siguiendo a Riemann, se pone más énfasis en el álgebra de funciones que en el grupo de transformaciones, el cual viene caracterizado como la mayor parte de los conceptos intrínsecamente asociados a la variedad en términos de las funciones. En particular, en el caso diferenciable, se obtiene la geometría diferencial, cuyo objetivo originario es la clasificación de los tensores sobre una variedad diferenciable respecto de su seudogrupo de difeomorfismos locales; objetivo este esencialmente idéntico a la concepción einsteniana de la física como teoría de campos sobre el espacio-tiempo con ecuaciones de campo determinadas por la única condición de ser invariantes por todos los difeomorfismos (principio de relatividad general). Así fue, en efecto, como Einstein se vio conducido a su famosa teoría de la gravitación, en la que por primera vez en la historia de la física se llega a unas leyes de la naturaleza de un modo puramente especulativo, sin apelar en lo más mínimo a la experiencia.

Fuera de este marco geométrico, brillante coronación del pensamiento clásico, queda la física cuántica, la cual a lo largo de los últimos cien años ha tenido que enfrentarse a una serie de hechos nuevos, inexplicables clásicamente, pero incuestionables desde el punto de vista experimental. Con un planteamiento teórico estrechamente ligado a la observación —el álgebra de Heisenberg de los observables cuánticos—, la geometría de variedades, basada en el álgebra (conmutativa) de las funciones sobre una variedad, nunca ha sido, ciertamente, el esquema geométrico adecuado para la descripción de los fenómenos cuánticos. Y es por ello por lo que este tipo de explicaciones geométricas ha conducido a dificultades de las que, incluso, no se han visto exentas algunas doctrinas básicas recientes (supersimetría, teoría de cuerdas y supercuerdas, etc.). No es de extrañar, pues, la atracción que ha producido en los últimos años la geometría no conmutativa o geometría cuántica que, basada exclusivamente en la observación experimental al concebir el espacio geométrico como el *espectro del álgebra no conmutativa de los observables cuánticos,* está ofreciendo una visión unitaria de la física en la que los hechos clásicos y cuánticos aparecen por primera vez en pie de igualdad con independencia de sus respectivas escalas de manifestación.

Este proceso de absorción creciente de la física por la geometría arroja, a nuestro juicio, bastante luz sobre la naturaleza de las matemáticas y su relación con el resto de las ciencias.

Desde luego, el desarrollo de la matemática no parece que sea un mero juego lógico tal y como se entiende desde la postura axiomática. Tras el famoso teorema de indecibilidad de Gödel, dicha postura resulta insostenible, frustrándose así el viejo sueño de Hilbert de una matemática cerrada en sí misma al modo formal. La evolución experimentada por la geometría, de la que aquí hemos hablado, sugiere algo muy distinto. Con palabras entresacadas de los muchos diálogos que sobre este tema he tenido con mi maestro, el profesor Juan Sancho Guimerá, podríamos decir:

> que continuamente se produce un retorno a los fundamentos para reformular y superar las primitivas concepciones desde una nueva visión. Este retorno aparecerá tal vez como una generalización, pero realmente se trata de una profundización reveladora de nuevas estructuras que antes sólo estaban presentes de manera implícita. En estas sucesivas revelaciones, en las que cada etapa ilumina la anterior, reside lo esencial del avance en el conocimiento matemático: un proceso altamente no trivial, entre otras razones, porque no tiene un carácter deductivo.

Y si éstas podrían ser las señas de identidad del conocimiento matemático, parece natural que también deberían serlo de cualquier profundización teórica en el resto de las ciencias.

En este eterno retorno a los fundamentos, podemos tener la fortuna de que se produzca una coincidencia tan grande entre una doctrina matemática y alguna parcela de la ciencia natural, que puedan terminar ambas por hacerse indistinguibles una de otra. Tal parece que es el caso de las teorías geométricas y físicas de las que hemos hablado aquí.

BIBLIOGRAFÍA

1. Abellanas, P. (1979) *Unas reflexiones sobre la biografía de la Matemática.* Lección inaugural del curso académico de la Universidad Complutense de Madrid.
2. Bartocci, C., Bruzzo, U. y Ciancci, R. (eds.) (1991) *Differential Geometrical Methods in Theoretical Physics.* Lect. Not. in Physics, Vol. 375. Ed.: Springer-Verlag.
3. Billingsley, H. (1570) *The Elements of Geometry, of the Most Ancient Philosopher Euclide of Megara.* Ed.: John Daye, London.
4. Bonnycastle, J. (1798) *Elements of Geometry, Containing the Principal Propositions in the First Six, and the Eleventh and Twelfth Books of Euclid.* Ed.: J. Johnson, London .
5. Bleuler, K. y Werner, M. (eds.) (1988) *Differential Geometrical Methods in Theoretical Physics,* Ed.: Kluwer Acad. Publish.
6. Byers, N. (1996) E. Noether's Discovery of the Deep Connection Between Symmetries and Conservation Laws, *Proc. of Symp. on the Heritage of Emmy Noether,* Bar-Ilam University, Isarel.
7. Connes, A.(1990) *Geometrie Non Commutative.* Ed.: Inter Editions, París.
8. Chern, S. S. (1979) From triangles to manifolds, *Am. Math. Montlhy,* **86**, 339-349.
9. Descartes, R. (1664) *La Geometrie.* Ed.: C. Angot, París.
10. Einstein, A. (1916) Die Grundlage der allgemeinen Relativitäts-Thorie. *Annalen der Physik,* **49**.
11. Epstein, D. A. & Thurston, W. P. (1979) Transformation Groups and Natural Bundles, *Proc. London Math. Soc.* **38**, nº **3**, 219-236.
12. Etayo, J. (1988) Los Caminos de la Geometría. En: *Historia de la Matemática en los siglos XVII y XVIII.* Real Academia de Ciencias, Madrid, 11-29.
13. Etayo, J. (1992) El reinado de la Geometría Proyectiva. En *Historia de la Matemática en el siglo XIX.* Real Academia de Ciencias, Madrid, 115-138.
14. García, P. (1968) Geometría Simpléctica en la Teoría Clásica de Campos. *Collect. Math.* vol. XIX, 73-139.
15. García, P. (1978) Geometría de los Campos de Yang-Mills. En: *V Jornadas Luso-Españolas de Matemáticas,* U. de Aveiro.
16. García, P. (1979) Cuantificación Geométrica. En: *Mem. de la Real Academia de Ciencias de Madrid,* Serie de C. Exactas, vol. XI.
17. García P. (1985) Sobre los fundamentos geométricos de las teorías físicas. Lección inaugural del XVII Curso de Estudios Superiores de la Armada. Ed.: Real Observatorio de la Marina.
18. García, P. y Pérez-Rendón, A. (1969) Simplectic approach to the theory of quantized fields I. *Comm. Math. Phys.* **13**, 24-44.
19. García, P., Pérez-Rendón, A. y Souriau, J. M. (eds.) (1980) *Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics,* Lect. Not. in Math. Vol. **836**. Ed.: Springer-Verlag.
20. García, P. y Pérez-Rendón, A. (eds.) (1987) *Differental Geometrical Methods in Mathematical Physics.* Lect. Not. in Math. Vol. **1251**. Ed.: Springer-Verlag.
21. Hartshorne, R. (2000) Teaching Geometry According to Euclid. *Notices of the Am. Math. Soc.,* Vol. **47**, n.º **4**, 460-465.
22. Heisenberg, W. (1929) *The Physical Principles of the Quantum Theory,* Lecciones U. de Chicago.
23. Klein, F. (1974) *Le programme d'Erlangen.* Collection *Discours de la Methode.* Ed.: Gauthier-Villars.
24. Lichnerowicz, A. (1982) Geometrie et Physique. En: *Proc. of the meeting «Geometry and Physics»,* U. de Florencia.
25. Mackey, G. W. (1963) *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics.* The Math. Phys. monograph Series. Ed.: W. A. Benjamin, Inc.
26. Maravall, D. (1992) El desarrollo de la Mecánica y la Física Matemática en el siglo XIX. En: *Historia de la Matemática en el siglo XIX.* Real Academia de Ciencias, Madrid, pp. 175-209.
27. Maravall, D. (1998) Einstein. En: *Historia de la Matemática en el siglo XX.* Real Academia de Ciencias, Madrid, pp. 105-141.
28. Muñoz, J. (1995) *Reflexiones acerca de la naturaleza e historia de las Matemáticas.* Lección Inaugural del Curso 1995-96 de la Universidad de Salamanca.

29. Sánchez-Ron, J. (1999) Einstein, General Relativity and the Field Concept. En: *Relativity and Gravitation in General.* Ed.: World Scientific, 147-159.
30. Santander, M. (2000) Matemáticas y Mecánica Cuántica. *Revista Española de Física* **14**, n.º 5, 23-30.
31. Sternberg, S. (1978) *On the role of Field Theories in our Physical Conception of Geometry,* Lect. Not. in Math. vol. 676, Springer-Verlag (1978).
32. Weyl, H. (1918) *Gravitation und Elektricität,* Sitzungsberichte der Preussischen Akad. der Wissenschaften.
33. Weyl, H. (1949) Relativity theory as a stimulus in mathematical research. *Proc. of the Am. Phyl. Soc.* **93**, 535-541.
34. Weyl, H. (1955) *The Concept of a Riemann Surface.* Ed.: Addison-Wesley Publishing Comp. Inc.