

LA OMNIPRESENCIA DEL CAOS

CARLES SIMÓ TORRES
Real Academia de Ciencias

RESUMEN

La mayor parte de la actividad humana y, de manera muy especial, todos los temas de la Ciencia y la Tecnología, se basan en la utilización de *modelos matemáticos deterministas* que describen cómo se rigen los fenómenos naturales. Sin ese carácter determinista, incluso nosotros no existiríamos. La parte de la matemática denominada *Sistemas Dinámicos* sirve para *entender* el comportamiento observado y *predecir* o bien *demostrar por qué no pueden hacerse buenas predicciones* cuando se estudia un cierto fenómeno. Siguiendo ideas que se remontan, como mínimo, a Henri Poincaré, en los últimos treinta años se ha descubierto que la *falta de predecibilidad* o *caos* no es debida al uso de un modelo matemático inadecuado, sino que *es intrínseca* a la misma naturaleza de las leyes deterministas. En estas notas se van a exponer las *causas* del *caos* en los sistemas deterministas, *cómo entenderlo* de forma geométrica simple, sus *consecuencias* y, por último, cuál es la razón de su *omnipresencia* en mayor o menor cuantía en todos los fenómenos de la naturaleza.

INTRODUCCIÓN

El conocimiento de las llamadas *leyes de la naturaleza*, que rigen los sistemas físicos (y, por tanto, también los sistemas biológicos) ha sido posible gracias a la *observación*, *experimentación* y *modelización*. Es en este último punto en donde las *medidas* de distintas magnitudes efectuadas durante los experimentos u obtenidas de la observación, se *relacionan* mediante *fórmulas matemáticas*. Dichas fórmulas pueden ser intuitivas por científicos clarividentes, sugeridas por consideraciones teóricas o por analogía con hechos similares.

Típicamente, cuando estudiamos fenómenos *dinámicos* (esto es, en los que las diversas magnitudes evolucionan con el *tiempo*) esas fórmulas se expresan mediante las llamadas *ecuaciones diferenciales*, que nos dan la velocidad de variación de las magnitudes con el tiempo en función de los valores que toman las mismas en cada instante y,

eventualmente, del propio tiempo. Se está postulando así un *determinismo* en la evolución de la naturaleza o del fenómeno estudiado. Si el modelo es suficientemente *fiable*, un puro razonamiento matemático (con la eventual ayuda del ordenador) debe permitir *predecir* el estado del sistema a partir del estado en un cierto instante de tiempo. Si la predicción no se ajusta a la realidad (como sucede a menudo, por ejemplo en meteorología, en las predicciones sobre la evolución de la población mundial o en lo que se refiere a cuándo y con qué intensidad se produce cierta lluvia de estrellas) estaremos inclinados a creer que *el modelo no es correcto* o que tiene tal *complejidad* (es decir, tantas variables interdependientes) que cualquier intento de describirlo en términos matemáticos va a resultar fallido.

La importancia de la mal llamada *teoría del caos* radica en que muchos sistemas, aun *extremadamente simples*, manifiestan una notable inestabilidad *intrínseca* cuyo efecto puede describirse como *enorme amplificación de pequeños errores iniciales*. En lenguaje matemático se habla de *dependencia sensible a condiciones iniciales*, que es el término correcto que habría que utilizar en lugar de teoría del caos. En cierto modo, el sistema, aunque se admita que es *determinista*, se comporta de manera que *parece aleatorio*. Diferencias en el estado inicial, menores que la precisión de las medidas, tienen efectos importantes. Así pues, modelos muy sencillos pueden dar lugar a dinámicas *aparentemente* complicadas e impredecibles (al menos parcialmente).

Sin embargo, los esfuerzos realizados en las últimas décadas, basados ya en la obra pionera de Henri Poincaré, han permitido entender gran parte de esa *dinámica caótica*, y sentar las bases y la metodología para avanzar en la comprensión. Una herramienta esencial consiste en considerar la evolución de un sistema como una curva recorrida a lo largo del tiempo en el llamado *espacio de fases*. De esa forma, problemas dinámicos se pueden interpretar y entender desde un punto de vista *geométrico*. El papel que han desempeñado las *técnicas numéricas* y *gráficas* implementadas en ordenadores, como una *herramienta experimental* más, ha sido y es sumamente importante, siempre que se *verifique*, contrastando con la observación

auténticamente experimental, la fiabilidad del modelo utilizado.

A lo largo de estas notas se van a exponer las *causas* del caos en los sistemas deterministas, *cómo entenderlo* de forma geométrica simple, sus *consecuencias* y, por último, cuál es la razón de su *omnipresencia* en mayor o menor grado en todos los hechos de la naturaleza. Las *inestabilidades locales* junto a la *realimentación* del sistema debida a términos *no lineales*, son la clave para la comprensión del caos.

El «redescubrimiento» por E. N. Lorenz, para sistemas disipativos, y por M. Hénon y C. Heiles, para conservativos, de la existencia de *regiones de dinámica caótica* ha marcado el último tercio del siglo XX. El hecho era conocido por algunos matemáticos que trabajaban en *Sistemas Dinámicos* siguiendo la línea de pensamiento iniciada, básicamente, por Poincaré. También, de *forma empírica*, por experimentalistas que, no hallando explicación razonable a los comportamientos observados, lo atribuían a *ruido aleatorio* en el sistema.

Por una parte, los *modelos deterministas* eran cuestionados. Por otra, se tomaba como paradigma que *modelos sencillos* deberían tener comportamiento simple y que la presencia de *dinámicas complicadas* no podía ser debida más que a modelos complejos. La evidencia y el análisis muestran hoy que la situación es muy distinta, y que la *complejidad* de la dinámica tiene que ver con la estructura geométrica del *espacio de fases*, independientemente de que el número de variables involucradas sea 3 o 3 millones.

El papel preponderante que desempeñan los términos *no lineales* en los modelos matemáticos sirve también para poner en guardia sobre *extrapolaciones* respecto a otras situaciones conocidas. Esas extrapolaciones pueden ser *totalmente injustificadas* y llevar a conclusiones erróneas. Ello es especialmente sensible en temas que afectan el futuro de la Humanidad. *La contaminación, la evolución climática, la insuficiencia de alimentos o la superpoblación*, por citar algunos temas candentes, deben estudiarse de forma *profunda y rigurosa*. No hay que dejarse influir por *catastrofistas* ni hay que actuar con *comportamientos inconscientes*. Los esfuerzos deben centrarse primero en *comprender* las posibles evoluciones y las causas de unas y otras, para poder *actuar* de la mejor forma posible. Envueltos en polémicas estériles, no parece que se avance en absoluto en la dirección correcta: la que marca la *comprensión y análisis del problema*.

Las figuras 1 y 2 corresponden a simulaciones del llamado *modelo estacional de Lorenz de 1984* (*Lorenz 84 season model*). Éste describe, de forma muy esquemática, algunos de los *mecanismos* que influyen en la climatología de la Tierra cuando se tienen en cuenta las variaciones con las distintas estaciones. El modelo depende de diversos *parámetros*. En la figura 1 se muestra una solución *periódica estable*. Ligeros cambios en los parámetros llevan a casos, como en la figura 2, para los que la situación es *caótica*. En esa figura se muestra una *proyección*, en dos dimensiones, de los *puntos* que representan el estado del sistema

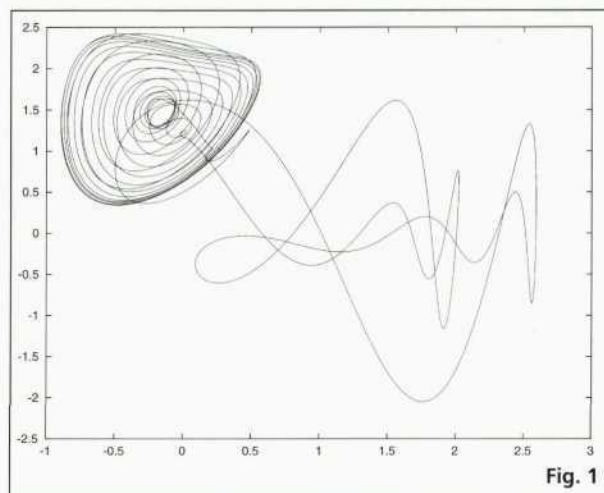


Fig. 1

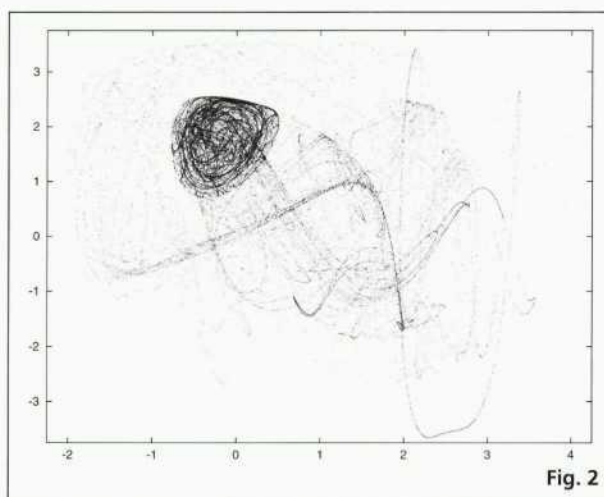


Fig. 2

a *intervalos de tiempo regulares*. Aunque ahora se tiene una *fuerte dependencia* de la evolución del estado del sistema respecto a las *condiciones iniciales*, se observan *rasgos en común* en las dos figuras, como si la dinámica caótica se obtuviera *ensanchando y difuminando* la dinámica regular anterior. Existe un *esqueleto geométrico* en común en las dos figuras, formado por órbitas que no son visibles en las mismas (de hecho, se trata de órbitas inestables).

Podemos formularnos la siguiente pregunta: El hecho de que existan comportamientos caóticos en sistemas incluso muy simples, y que en sistemas que dependan de varios *parámetros* existan valores de los mismos para los que una cierta componente caótica aparece de forma inevitable (las llamadas *rutras hacia el caos*), ¿es bueno o es malo?

La respuesta es muy sencilla: simplemente «es». Las cosas son así y, en principio, no cabe atribuirles ninguna característica de «bondad» o «maldad». Lo importante es que hayamos *reconocido* su existencia y podamos obrar en consecuencia. En realidad, si alguna cualidad cabe atribuirle, es la de *bondad*. En efecto, se abren más posibilidades cuando la dinámica es más rica. Sabiendo *cómo y por qué* sucede una cosa, estamos en condiciones de aprovecharla o de prevenirla. Existen actualmente distintos pro-

cedimientos para *controlar* o *estabilizar* el caos. Por otra parte, diversas misiones espaciales se han diseñado usando una especie de *billar cósmico* que se basa en las mismas *ideas geométricas* que permiten la comprensión del caos. Desde el punto de vista industrial, una dinámica caótica puede permitir, por ejemplo, efectuar *mezclas* de sustancias con un *coste energético* mucho menor.

En resumen, lo que ha salido reforzado es el *conocimiento*. Éste es, precisamente, el punto clave que se intenta transmitir con el ciclo de conferencias del que forma parte la presente exposición. En las notas que siguen a continuación se transcriben y amplían las ideas esenciales esbozadas de forma oral, utilizando la misma línea expositiva.

LOS FENÓMENOS QUE SE CONSIDERAN

Los fenómenos que son susceptibles de estudiarse mediante modelos matemáticos son muchísimos, pero no todos. Abarcan prácticamente todas las áreas de las ciencias experimentales y de la tecnología, esto es, todos los fenómenos en los que se sigue una relación unívoca de causa a efecto. Si sometemos una viga apoyada en sus extremos a ciertas cargas, va a flexar de cierta forma perfectamente bien definida. Para simplificar, podemos *ignorar* (o, de forma más correcta, *estimar* y, si es adecuado, *menospreciar*) efectos como la heterogeneidad del material de que está hecha la viga, los efectos de fatiga, las irregularidades locales, el cambio de las propiedades mecánicas debido a efectos térmicos, etc.

Por el contrario, ciertos fenómenos económicos, sociales o de conducta de organismos vivos pueden *no ser objeto de estudio matemático bien definido*. Ello puede ser debido a ignorancia o a una imposibilidad práctica de conocer *todas* las causas que influyen en el fenómeno. En el ejemplo de la conducta, el conocimiento de las estructuras cerebrales del organismo, la totalidad de experiencias que ha vivido, su estado físico, etc., posiblemente podrían ayudar a entender su comportamiento, pero su predicción precisa me parece (¡afortunadamente!) no factible.

Volviendo a fenómenos mucho más simples, relacionados con propiedades de la materia inerte, el primer paso que hay que dar para poder *matematizar* un hecho físico es detectar ciertas magnitudes que lo describan de la manera más completa posible. En casos sencillos, como el movimiento de los astros del sistema solar, una primera descripción se obtiene con el conocimiento de la posición y velocidad de su centro de masas en cierto instante de tiempo. Un detalle mayor requiere el conocimiento de su orientación, como cuerpo sólido, su forma, los materiales que lo componen y las propiedades mecánicas de los mismos, etc. Una vez aisladas las magnitudes relevantes (en ese ejemplo consideraríamos posición y velocidad) hay que medirlas. La medición precisa puede no ser una tarea fácil.

Si queremos *medir* dónde está y con qué velocidad se mueve el centro de masas de la Luna respecto al centro de masas de la Tierra, nos encontramos con que se trata

de magnitudes *no accesibles directamente*. Habrá que medir la distancia desde cierto punto de la superficie de la Tierra a cierto punto de la superficie de la Luna, intentar estimar las posiciones de dichos puntos respecto a los respectivos centros de masas, teniendo en cuenta incluso las deformaciones de las cortezas debidas a efectos de marea (menores en *tierra firme* que en los mares, pero presentes en todo caso). La velocidad no se podrá medir tampoco directamente (mediciones Doppler pueden permitir conocer la velocidad radial de un punto respecto al otro, pero eso no es más que un dato parcial). Habrá que medir distancias en distintos instantes de tiempo, tener en cuenta la rotación de ambos astros alrededor de sus respectivos ejes, etc., para poder deducir las velocidades requeridas.

Solventadas todas las dificultades, al menos con el grado de precisión que se necesite, estamos en condiciones de caracterizar *el estado* del sistema estudiado. Ello nos lleva de manera natural al siguiente punto.

EL ESPACIO DE FASES

A partir del momento en que somos capaces de medir las magnitudes que caracterizan el estado del fenómeno que queremos estudiar podemos, desde el punto de vista abstracto, prescindir del problema *físico* y concentrarnos en su *representación*, esto es, la colección de valores numéricos obtenidos a partir de la medición.

Un estado queda descrito por un cierto instante de tiempo (el instante en el que hemos medido o para el que hemos sido capaces de deducir el estado) y un punto de un cierto espacio, que puede ser $\mathbb{R}^n$ o un subconjunto del mismo. Aquí n sería la *dimensión* del sistema. En el caso del movimiento de la Luna alrededor de la Tierra la dimensión es 6, tres componentes de la posición y tres de la velocidad. Ese es un ejemplo sencillo en que la dimensión es *finita*. Casos más complejos en que la dimensión no es finita aparecen de manera natural cuando el fenómeno estudiado queda caracterizado por cierta magnitud o magnitudes en todos los puntos de un cuerpo. Por ejemplo, un problema térmico requiere el conocimiento de la temperatura en todos los puntos de un cuerpo. Aquí el *dato* no es un valor (o valores) numérico, sino una función definida en cierto dominio, el dominio ocupado por el cuerpo. Se trata así de problemas de *dimensión infinita*. Obviamente, aun en ese caso, el número de medidas que tomemos será finito, lo mismo que la representación del estado en un programa de ordenador, pero habrá que ser consciente de la verdadera dimensión del problema y estudiar cuidadosamente cómo acotar los errores cometidos cuando intentamos estimar el valor de la temperatura en un punto en el que no se haya efectuado la medición. Los problemas de meteorología son un ejemplo de problemas en dimensión infinita. Las magnitudes que caracterizan el estado son temperatura, presión, humedad, composición, etc., en los puntos de la atmósfera.

Seguimos la exposición restringiéndonos al caso de dimensión finita. El conjunto de los valores numéricos que representen todos los posibles estados del sistema se denomina *espacio de estados* o, siguiendo la terminología clásica, *espacio de fases*. Toda evolución del estado del sistema tiene su reflejo en una evolución en el espacio de fases, y la variación a lo largo del tiempo puede ser vista como una curva en el espacio de fases. Esto es muy conveniente por lo siguiente:

- La descripción de la evolución de un fenómeno se puede hacer de manera geométrica.
- En la fase de estudio matemático del problema podemos prescindir del fenómeno concreto, unificando así el tratamiento. Conceptualmente, problemas de cinética química, de movimiento de astros o de funcionamiento de un circuito eléctrico no presentan ninguna diferencia entre sí. Ello permite obtener resultados de validez general.
- Se pueden considerar simultáneamente *todos* los posibles comportamientos del sistema. En particular, se puede estudiar el efecto de pequeños cambios en los *datos iniciales* para ver su influencia al cabo de un cierto tiempo. Así pueden detectarse fácilmente cuáles son las *causas* que originan *efectos aparentemente caóticos*.
- Es posible *ampliar* el espacio de fases para que contenga puntos que *no representan ninguna situación física real*, pero cuyo conocimiento puede permitir comprender comportamientos que, de otra manera, parecerían inexplicables. Ello puede requerir la inclusión de casos límite o singulares, de valores complejos o la consideración del tiempo como una variable compleja.

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Consideramos fenómenos que *evolucionan con el tiempo*, siendo las soluciones estacionarias o estados de equilibrio un caso particular de los mismos. El problema de la modelización consiste en describir cuál es la velocidad de variación, respecto al tiempo, de un estado dado como función del propio estado y del instante de tiempo considerado. Admitir que esa función existe significa admitir el *determinismo*. Un lector puede no estar de acuerdo con esta premisa. Afortunadamente para él, sus células sí lo están. Si las reacciones químicas que tienen lugar en ellas fueran arbitrarias, no podrían cooperar para dar lugar a un organismo pluricelular, o incluso desde el punto de vista celular la vida no sería posible. Si el estímulo recibido al ver impresa una letra «a» fuera arbitrario, la lectura (y, por extensión, todo tipo de aprendizaje) sería imposible.

La influencia de causas *externas* al fenómeno estudiado puede hacerse mediante esa dependencia temporal o bien, si así se requiere, considerando un sistema más amplio en el que el fenómeno sea mucho más global. Por ejem-

plo, el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra puede ser estudiado suponiendo conocidos el movimiento del centro de masas del sistema Tierra-Luna respecto al Sol y también los movimientos de los planetas. O, por el contrario, puede considerarse simultáneamente un problema de *n* cuerpos en el que los planetas y sus lunas mayores se mueven sometidos a las leyes de la gravitación de Newton, y considerar el sistema solar como un *sistema cerrado* sin más influencias externas. O, si se quiere, podemos incluir también efectos debidos a la propia galaxia, etc.

Asimismo podemos tener en cuenta correcciones relativistas a los términos newtonianos dominantes; eventualmente se pueden añadir los efectos de los asteroides mayores y los efectos sobre el movimiento del centro de masas de la forma de la Tierra en lugar de considerarla como una simple masa puntual.

La elaboración de un modelo matemático depende fuertemente de cuáles sean los objetivos perseguidos, de cuál sea la precisión requerida, etc. En todo caso se trata de llegar a obtener la *ley de variación del estado respecto al tiempo*. En algunos casos, esta *ley* puede deducirse a partir de *leyes físicas de carácter más elemental*. Es decir, de principios simples a partir de razonamientos lógicos. En otros casos es posible *intuir* una expresión aproximada a partir de un análisis de las variaciones del estado respecto al tiempo. Modelos aproximados pueden *refinarse* mediante sucesivos pasos de elaboración de modelo, deducción de previsiones y comparación con medidas experimentales. En ese sentido, las ciencias consideradas *duras* suelen ser más *simples* que otras disciplinas, debido a que se puede recurrir a la experimentación en laboratorio o al contraste con datos fiables.

Muchas otras disciplinas, como por ejemplo la economía o la sociología, presentan problemas difíciles a causa de la falta de modelos adecuados, por la comprensible falta de *experimentación en laboratorio* para verificar una y otra vez los modelos. Si hablamos con propiedad, es dudoso que algunas disciplinas que se consideran *científicas* puedan ser aceptadas como tales cuando se manifiesta una notable incapacidad en explicar efectos o a causa de la excesiva dependencia de los modelos en corrientes de opinión, escuelas o modas. Otras, que se aceptan como plenamente *científicas*, pueden, a veces, *abusar* de esa consideración tratando de aplicar los modelos matemáticos que las describen a situaciones que *no han sido validadas por la experimentación*. Es útil *extrapolar* el conocimiento adquirido en un caso a otros más cercanos a situaciones límite, pero siendo plenamente conscientes de que toda extrapolación comporta dudas sobre la validez del modelo.

En todo caso debe tenerse en cuenta que *ningún modelo matemático* o, si se quiere, *ninguna ley que se use para describir el comportamiento de un fenómeno es exacta*. Se trata siempre de aproximaciones que pueden ser más o menos útiles, suficientes para obtener la información que se precisa o completamente inútiles. La palabra final sobre la utilidad la tiene la comparación con el fenómeno real, la capacidad para explicar y predecir correctamente.

Fijémonos en que ese *paradigma por excelencia* de la ciencia, la capacidad de *efectuar predicciones*, se enfrenta abiertamente al tópico principal de estas notas: *la impredecibilidad en sistemas deterministas* que se manifiesta por la *omnipresencia del caos*. En las secciones siguientes se verán qué cosas son predecibles y cuales no, o si se tiene alguna *predecibilidad parcial*.

Por último hay que mencionar, dentro de los modelos matemáticos, aquellos que no corresponden a ningún fenómeno concreto. Su estudio podría ser considerado de *interés puramente académico*. Sin embargo, muchos de esos modelos pueden ser considerados *paradigmas* de casos directamente aplicables a situaciones reales. Siguiendo la vieja máxima de *divide y vencerás*, el matemático puede analizar individualmente, en esos paradigmas, todas las dificultades que aparecen mezcladas en un problema real, entenderlas una a una y pasar luego a estudiar las posibles maneras de combinarlas. Puede decirse que son *modelos de modelos* y deben considerarse como una etapa intermedia en el análisis de un modelo complejo.

En lo que sigue voy a tomar el camino *más sencillo*. Esto es, voy a analizar sólo las dificultades que aparecen desde el momento en que se tiene un modelo matemático, obviando su *contraste con la realidad*. Esta es, a fin de cuentas, quien tiene la *última palabra*. Sin embargo, para muchos modelos *elaborados cuidadosamente*, la concordancia entre las *conclusiones del análisis del modelo* y lo que se observa en la realidad es *sorprendentemente buena*.

LAS ECUACIONES: CASOS CONTINUO Y DISCRETO

La traducción de los modelos matemáticos a fórmulas se hace mediante *ecuaciones* que rigen la *dinámica* del sistema. Siguiendo con modelos de evolución respecto al tiempo o *evolución temporal* nos encontramos con *ecuaciones diferenciales*. En su forma más simple son relaciones de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1)$$

x representa el punto del espacio de fases en que el sistema se encuentra en el instante t y $f(t, x)$ es la función de t y x que nos dice cómo varía x . La ecuación (1) es la expresión matemática de la ley que rige el fenómeno, y lo que se pretende hallar es una función, $\varphi(t)$ tal que, substituida en (1), se satisfaga idénticamente:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t))$$

La ecuación (1) no basta para determinar la *solución* $w(t)$ unívocamente. Debemos dar también, por ejemplo, el estado del sistema, x_0 , en un cierto instante t_0 . Entonces denotaremos la solución como $\varphi(t, t_0, x_0)$ para tener constancia de cuáles son las *condiciones iniciales* de que partimos.

Otra restricción que admitiremos en lo que sigue es que no toda función f es admisible para que (1) tenga solución unívocamente definida. Se requiere una cierta *regularidad* de la misma. Puede bastar, por ejemplo, que f sea continua respecto a las variables t y x y tenga derivadas de primer orden, respecto a las componentes de x , que sean también continuas. Sin embargo, para no estar detallando constantemente las condiciones de regularidad, supondremos de ahora en adelante que las funciones f que aparezcan son analíticas respecto a todas sus variables, esto es, que coinciden con su desarrollo de Taylor en un cierto entorno.

Si en f no aparece t de forma explícita (esto es, el sistema es *cerrado* y no está influido por causas externas que dependan de t) diremos que el sistema es *autónomo*:

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (2)$$

En ese caso, el valor de t_0 siempre puede ser tomado igual a 0 o, en otras palabras, el estado del sistema para el valor del tiempo t depende del estado inicial, x_0 , y del intervalo de tiempo transcurrido $t - t_0$, pero no de los valores concretos t_0 y t . En este caso, la solución se escribe simplemente como $\varphi(t, x_0)$. También es cierto que todo sistema puede ser considerado autónomo por el simple procedimiento de introducir una variable de estado adicional, s , a la que se impone $ds/dt = 1$ y $s(t_0) = t_0$, con lo que s coincide con t . Entonces el estado viene descrito por una variable, z , que consiste en considerar x y s conjuntamente, y la ecuación diferencial adquiere un status de la forma $dz/dt = F(z)$, en donde F tiene como componentes las de f y una componente adicional igual a 1. Sin embargo, y como cabe esperar de esa *falsa autonomía*, los problemas son exactamente los mismos, la dependencia de f respecto t se halla camuflada, y sólo se trata de un cambio de nombre.

Una ecuación como (1) describe un modelo *continuo*, esto es, tal que la variable x evoluciona de forma continua con t , describiendo así una curva en el espacio de fases $\mathcal{E}$.

En ciertos casos puede ser interesante describir la variación del estado de un sistema de forma *discreta*, especialmente si el sistema es autónomo. Es decir, en lugar de considerar la curva $\varphi(t, x_0)$, podemos considerar los valores que toma para instantes de tiempo que difieran en una cierta cantidad, T . Por ser el sistema autónomo, fijado T el valor de $\varphi(T, x_0)$ depende sólo de x_0 . Tenemos así definida una aplicación biunívoca, analítica y de inversa analítica, es decir, un *difeomorfismo analítico*, que se denomina también *sistema dinámico discreto*.

$$x \rightarrow F(x) = \varphi(T, x) \quad (3)$$

El paso del estado en el instante t al $t + T$ puede considerarse una *aplicación estroboscópica*: sólo vemos el estado del sistema en instantes de tiempo separados por un intervalo T .

No es esa la única manera de obtener un sistema discreto a partir de uno continuo autónomo. Otra posibilidad ampliamente utilizada consiste en la llamada *aplicación de Poincaré*. Supongamos que el punto inicial, x_0 , está en una (hiper)superficie, Σ , definida, por ejemplo, por la condición $g(x) = 0$ en donde g es una función (que seguimos considerando analítica por simplicidad) cuya diferencial primera no se anula en ningún punto, de forma que el plano tangente a la superficie está definido en todos los puntos de la misma. Supongamos, además, que el vector f que define (2) no pertenece nunca al plano tangente a Σ para ningún punto x tal que $g(x) = 0$. Esta condición se expresa de manera simple imponiendo que los gradientes ∇g de la función g y f no sean ortogonales en ningún punto de Σ . Se dice en ese caso que el campo vectorial definido por f y la superficie Σ son *transversales*. Por último, pedimos que la solución $\varphi(t, x_0)$, que está en Σ para $t = 0$ vuelva a la superficie para algún $t > 0$. Sea $t^*(x_0)$ el mínimo valor de t para el que eso ocurre. Entonces definimos el punto $\varphi(t^*(x_0), x_0)$ como *imagen* $\mathcal{P}(x_0)$ de x_0 por la aplicación de Poincaré $\mathcal{P}$ asociada a la superficie transversal (o *sección de Poincaré*) Σ . Notemos que, mientras que $f(x_0) \neq 0$ implica la existencia de una sección de Poincaré *local* (esto es, definida en un entorno de x_0), la existencia de una sección *global* es mucho más problemática, depende de la *topología* del espacio de fases y no puede garantizarse en general. Si sólo disponemos de secciones locales no tiene por qué existir la imagen de un punto de Σ por $\mathcal{P}$. Sin embargo, no entraremos en esos problemas de existencia de $\mathcal{P}$ y supondremos que para $x \in \Sigma$ en un entorno de x_0 tanto $\mathcal{P}$ como sus sucesivos iterados están definidos.

La ventaja de trabajar con sistemas discretos y, más concretamente, con aplicaciones de Poincaré, es que reducen la dimensión en una unidad. Si nos concentramos, como haremos más adelante, en problemas en los que la dimensión del espacio de fases es 3, reducimos la dimensión local de las secciones de Poincaré a 2, con lo que las descripciones son más simples. Conviene tener bien presente que, en el caso de sistemas discretos, dados por (3), un punto representativo del estado del sistema en la sección de Poincaré no se mueve en la misma *de forma continua*, sino que *salta a otro punto* de forma discreta. Ello no debe implicar ninguna confusión para el lector.

Además, la mayor parte de ecuaciones diferenciales, salvo casos elementales y poco interesantes, o algunos tipos de soluciones que se mencionarán más adelante, no pueden *resolverse* de forma explícita por métodos analíticos. Ello significa que debemos proceder a utilizar *técnicas numéricas*, tanto si queremos hallar una solución de (1) o (2) como si queremos calcular una aplicación de Poincaré. Como se ha dicho, es útil considerar *modelos simplificados* de los *modelos matemáticos* de los fenómenos a estudiar. Cabe así el recurso de admitir que conocemos expresiones explícitas simples de aplicaciones de Poincaré y tomarlas como paradigma para conocer sus propiedades. La simulación numérica de un modelo simplificado de una transformación discreta como (3) puede

significar unas pocas decenas de operaciones aritméticas, con lo que es factible (incluso en un PC) llevar a cabo simulaciones a un ritmo de varios millones de iterados por segundo. La situación es más compleja en el caso de ecuaciones diferenciales, en las que típicamente puede ser ya difícil llegar a un millar de iterados por segundo de una aplicación de Poincaré.

Por otra parte, es siempre posible pasar de un sistema discreto como (3) a una ecuación diferencial como (1) (atención: *no autónoma*) que dependa de forma periódica (por ejemplo, de período 2π) tal que $F(x_0)$ coincida con $\varphi(2\pi; 0, x_0)$. En el caso de dependencia 2π -periódica de f respecto a t la aplicación $x \rightarrow \varphi(2\pi; 0, x)$ sólo depende de x (pero no reduce dimensión, sólo elimina la dependencia temporal). El paso de sistema discreto a continuo a que se hace referencia aquí, se conoce como *suspensión*, pero no entramos en detalle, ya que no se va a utilizar en lo que sigue.

EL ESQUELETO DE LA DINÁMICA

Dada una ecuación diferencial autónoma (2) definiendo un sistema dinámico continuo o una transformación (3) definiendo un sistema discreto, nuestro interés general debe centrarse en comprender cómo sus soluciones u órbitas *llenan* o *estructuran* el espacio de fases. Ésa parece una tarea complicada. Sin embargo, hay que tener en cuenta que la dinámica *se organiza* alrededor de ciertos objetos geométricos del espacio de fases formados por soluciones que desempeñan un papel clave. Esos objetos constituyen el llamado *esqueleto del sistema*. Su conocimiento arroja indicaciones muy importantes sobre el comportamiento global del sistema.

Las soluciones más simples son los puntos de equilibrio (también llamados puntos fijos o estados estacionarios). En el caso de ecuaciones diferenciales se caracterizan por cumplir $f(a) = 0$, con lo que $\varphi(t, a) = a$ es una solución para todo t . En el caso discreto se trata de los puntos a tales que $F(a) = a$, con lo que todos los iterados, $F^k(a)$ vuelven a dar el mismo punto a .

Soluciones simples son también las periódicas, caracterizadas en el caso continuo por la existencia de valores de a y T tales que $\varphi(T, a) = a$. Para cualquier valor de $t \in \mathbb{R}$ basta hallar un valor de $\tau \in (0, T)$ tal que $t - \tau$ sea múltiplo de T . Entonces $\varphi(t, a) = \varphi(\tau, a)$. El conocimiento de la solución para un intervalo de t de longitud T determina la solución para todo t . Notemos que, debido al carácter autónomo que estamos suponiendo para la ecuación diferencial, el *punto inicial*, a , puede ser reemplazado por cualquier otro en su órbita, $\varphi(t^*, a)$, para un t^* arbitrario.

En el caso discreto, una solución periódica de período estricto n se tiene para un punto a para el que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n(a) = a$, $F^k(a) \neq a \forall 1 \leq k < n$. El caso $n = 1$ se incluye como caso particular. Notemos que, definiendo una nueva aplicación discreta $\mathcal{F} = F^n$, el estudio de puntos periódicos de F de período estricto n se reduce al de puntos fijos de $\mathcal{F}$.

Es importante también considerar que una órbita periódica de una ecuación diferencial puede verse como un punto fijo de la correspondiente aplicación de Poincaré. Por el contrario, un punto de equilibrio de una ecuación diferencial no puede estar en una sección de Poincaré, ya que en él se pierde toda posible transversalidad. En algunos casos, es factible extender el concepto de aplicación de Poincaré para que el punto fijo del campo se vea como punto fijo de dicha aplicación, pero ese artificio suele acarrear pérdida de regularidad y no lo consideramos.

Un conjunto $\mathcal{A}$ se llama *invariante* por φ si $\varphi(t, a) \in \mathcal{A}, \forall a \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathbb{R}$. Si ello sólo ocurre para $t \geq 0$ (resp. para $t \leq 0$), hablamos de un conjunto *positivamente invariante* (resp. *negativamente invariante*). En particular, puntos fijos y órbitas periódicas son casos simples de conjuntos invariantes. Los conjuntos invariantes están formados por soluciones, y toda solución que posee un punto en un conjunto invariante se halla completamente contenida en él. De forma análoga se definen conjuntos invariantes para sistemas discretos.

Conjuntos invariantes simples son también los *toros invariantes*. Un toro de dimensión k , $\mathbb{T}^k$, se define como el producto de k circunferencias. Podemos parametrizarlo por k ángulos, $\theta_1, \dots, \theta_k$. Un caso simple e interesante aparece cuando la ecuación diferencial sobre el toro invariante puede escribirse como $d\theta_i/dt = \omega_i, i = 1, \dots, k$. Los valores ω_i son las *frecuencias* con que giran los distintos ángulos. Designando el vector de ángulos por θ y el de frecuencias por ω escribimos $d\theta/dt = \omega$ de forma más compacta. Si todas las frecuencias son múltiplos enteros de un cierto valor, $\omega_i = n_i \omega_0, n_i \in \mathbb{Z}, \forall i$, entonces todas las soluciones en el toro son periódicas con período $2\pi/\omega_0$. Esa situación se conoce como *totalmente resonante*. En el extremo contrario tenemos el caso *no resonante*. Aparece si toda expresión del tipo

$$\sum k_i \omega_i \quad \text{con} \quad k_i \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

es distinta de cero excepto en el caso trivial en que todos los coeficientes k_i sean nulos. Entonces todas las soluciones son densas en $\mathbb{T}^k$ y reciben el nombre de *soluciones cuasiperiódicas* con k frecuencias fundamentales. Por el contrario, en el caso totalmente resonante es obvio que (4) tiene $k-1$ soluciones independientes. Entre un caso y otro se encuentran casos *parcialmente resonantes*. Si (4) tiene j soluciones independientes, las soluciones son cuasiperiódicas con $k-j$ frecuencias fundamentales, densas en toros de dimensión $k-j$ contenidos en $\mathbb{T}^k$.

Otros conjuntos invariantes y que desempeñan un papel esencial en la *creación de dinámica caótica* aparecerán más adelante. En este punto es oportuno destacar que tanto las soluciones periódicas como las cuasiperiódicas pueden obtenerse por métodos analíticos en casos simples; es decir, se pueden expresar como series de Fourier (en uno o varios argumentos de la forma ωt) para las que los coeficientes satisfacen relaciones recurrentes.

Nos preocupa ahora la estabilidad de puntos fijos y órbitas periódicas y, por extensión, de cualquier conjunto invariante. El primer paso consiste en estudiar la *estabilidad lineal*. Para un punto de equilibrio de (2) o un punto fijo de (3) basta con linealizar el comportamiento alrededor del mismo. En el caso de ecuaciones diferenciales autónomas la ecuación que aparece al linealizar es de la forma:

$$d\xi/dt = A\xi \quad (5)$$

siendo A una matriz constante. (Ése es el único caso de ecuaciones diferenciales que puede «resolverse» siempre explícitamente). En ese caso la estabilidad para $t > 0$ requiere que todos los valores propios de A tengan parte real menor que o igual a cero. De manera parecida, estabilidad para $t < 0$ requiere parte real mayor que o igual a cero, siendo así necesario que la parte real de todos los valores propios sea nula para tener estabilidad para todo t . Notemos que ésas son condiciones necesarias de estabilidad, pero no suficientes en general. Sin embargo, si todos los valores propios de A tienen parte real negativa, se sigue la estabilidad para tiempo positivo, esto es, toda solución que empiece suficientemente cerca del punto de equilibrio tiende hacia él si $t \rightarrow +\infty$. Por el contrario, algún valor propio de parte real positiva es suficiente para tener soluciones inestables para $t > 0$.

En el caso discreto basta calcular DF en el punto fijo. Una condición necesaria para la estabilidad de los iterados positivos $F^k, k > 0$ es que todos los valores propios de DF tengan módulo menor que o igual a 1. De manera parecida se tienen los otros casos. Basta un valor propio de módulo mayor que 1 para tener inestabilidad lineal. En el caso de puntos n -periódicos por F , reemplazamos DF por $D(F^n)$.

Si volvemos a las ecuaciones diferenciales y consideramos la estabilidad de órbitas periódicas, podemos recurrir a una sección de Poincaré y reducir el problema a la estabilidad de un punto fijo de la aplicación de Poincaré asociada. Directamente puede estudiarse la estabilidad como sigue: Consideremos las llamadas *ecuaciones variacionales de primer orden* asociadas a la ecuación $dx/dt = f(x)$. Estas ecuaciones se obtienen linealizando la ecuación diferencial alrededor de la solución considerada. Sea $\varphi(t, a)$ una solución periódica de período T . Las variacionales se escriben de esta forma:

$$dM/dt = DF(\varphi(t, a))M \quad (6)$$

donde M es una matriz $n \times n$ cumpliendo la condición inicial $M(t=0) = I_n$. Por supuesto, I_n significa la matriz identidad en $\mathbb{R}^n$. Si calculamos la matriz M para $t = T$ obtenemos la llamada *matriz de monodromía* de la órbita periódica. La estabilidad se estudia a partir de esa matriz, $M(T)$. Estabilidad para $t > 0$ requiere que todo valor propio tenga módulo menor que o igual a 1. Todos los de módulo menor que 1 garantiza estabilidad para $t > 0$. Además, en el caso de órbitas periódicas, la *teoría de Floquet*

asegura que el sistema lineal (6) es *reducible a coeficientes constantes*, es decir, que un cambio de variables T -periódico reduce (6) a una ecuación como (5).

En el caso de toros invariantes y, *a fortiori*, para conjuntos invariantes arbitrarios, las ecuaciones variacionales dan también información sobre las propiedades de estabilidad local. Pero, en general, no es cierto que se puedan *reducir* a ecuaciones con coeficientes constantes, siendo así mucho más difícil dar criterios simples de estabilidad.

En lo que sigue nos restringiremos al caso de inestabilidades creadas en puntos fijos de sistemas discretos. Todos los conceptos se generalizan a objetos invariantes arbitrarios y al caso de ecuaciones diferenciales, pero eso no aporta muchas ideas geométricas nuevas. La restricción que nos imponemos es suficiente para la comprensión de las ideas básicas. Ello nos va a permitir introducir los conceptos de *punto fijo hiperbólico* y de *punto fijo normalmente hiperbólico*, que se generalizan a conjuntos invariantes arbitrarios. A continuación podremos introducir las *variedades invariantes estable e inestable* asociadas a un objeto hiperbólico. El conjunto de todos los objetos invariantes y, en el caso de que sean hiperbólicos (o normalmente hiperbólicos), sus correspondientes variedades invariantes constituyen el *esqueleto de la dinámica*. Éste permite predecir la mayor parte de posibles evoluciones de las soluciones.

HIPERBOLICIDAD Y DEPENDENCIA SENSIBLE A CONDICIONES INICIALES

Consideremos un punto fijo, a , de un sistema dinámico discreto. No es restrictivo suponer que el punto fijo es el origen $a=0$. El punto se llama *hiperbólico* si todo valor propio, λ , de $DF(0)$ tiene módulo distinto de la unidad. Es decir, todas las direcciones alrededor del punto fijo son inestables, sea para iterados positivos F^k , $k > 0$ (si $|\lambda| > 1$) o para negativos F^k , $k < 0$ (si $|\lambda| < 1$). Si todos los valores propios tienen módulo menor (resp. mayor) que 1, hablamos de un *atractor* (resp. un *repulsor*). Nos interesaremos en el caso de que existan los dos tipos de valores propios: esto es, de tipo atractor y de tipo repulsor. Cuando, además de valores propios de ambos tipos, hay otros con módulo igual a la unidad, hablamos de *hiperbolicidad normal*. Simplemente, a más de un cierto carácter hiperbólico, hay direcciones que tienen un *comportamiento neutro*.

Un resultado importante que asegura que en el caso hiperbólico basta con considerar la aproximación lineal de la transformación para tener toda la información local, es el siguiente:

Teorema (Hartman). *Sea 0 punto fijo hiperbólico del difeomorfismo F . Entonces existe un entorno U y un homeomorfismo h tales que en U el homeomorfismo h conjuga la aplicación F con su parte lineal en el punto fijo $DF(0)$. Es decir: $h(F(x)) = DF(0)h(x)$ para todo $x \in U$.*

En otras palabras, el comportamiento de F y $DF(0)$ es el mismo salvo un cambio de variable dado por h . Note-

mos que, en general, h sólo es un homeomorfismo, y no se puede pedir ninguna propiedad de diferenciabilidad. El número de valores propios de módulo mayor que 1 basta para decidir si dos puntos fijos hiperbólicos en la misma dimensión son *conjugados*: salvo cambios de variable se comportan localmente de la *misma manera*.

Si existen valores propios de módulo exactamente 1, entonces el estudio de la estabilidad en esas *direcciones neutras* requiere términos no lineales. La parte lineal no puede dilucidar el carácter estable o inestable. Es más, puede suceder que si sólo consideramos la parte lineal, el sistema se comporte como estable y que los términos no lineales inestabilicen, y al revés, que la parte lineal sea inestable y los términos no lineales se encarguen de estabilizar.

La hiperbolicidad, en el caso de tener tanto valores propios de módulo mayor que 1 como menor que 1, está asociada, localmente, a una *inestabilidad de tipo exponencial*. En efecto, supongamos por simplicidad que estamos en dimensión 2 y que los valores propios valen 2 y 1/3. Un punto en la dirección de un vector propio inestable (de valor propio 2) y a distancia inicial d del punto fijo se alejará del mismo como $d \times 2^k$ después de k iterados (al menos mientras la distancia sea suficientemente pequeña y los términos dominantes sigan siendo los lineales). Por el contrario, la distancia se comportará como $d \times 3^k$ si hacemos k iterados por la aplicación inversa, F^{-1} , y hemos tomado el punto inicial en la dirección de un vector propio de valor propio 1/3.

Notemos que ese *crecimiento exponencial de la distancia* da lugar a la llamada *dependencia sensible a condiciones iniciales*. En general, diremos que un punto x tiene dependencia sensible a condiciones iniciales si existe una cierta distancia $\delta > 0$ tal que para toda distancia inicial $\varepsilon > 0$, que puede ser arbitrariamente pequeña, existen un punto y y un valor de $n \in \mathbb{N}$ tales que $d(x, y) < \varepsilon$ pero $d(F^n(x), F^n(y)) > \delta$ para algún $0 < m \leq n$. Esto significa que existen puntos arbitrariamente próximos a x tales que los iterados acaban separándose de los correspondiente iterados de x en una cantidad finita, δ .

Queda claro que podemos pensar en el valor de ε como un error en la medida de la posición del punto x en el espacio de fases. Por pequeño que sea, al cabo de un cierto tiempo (o, en el caso discreto, al cabo de un cierto número de iterados) el error se ha *amplificado* hasta una cierta cantidad δ . Toda *hiperbolicidad* lleva asociada *dependencia sensible* y, recíprocamente, toda dependencia sensible se origina en algún tipo de hiperbolicidad, que puede ser *parcial* o *débil*. Una hiperbolicidad *débil* no se detecta en los términos lineales, sino en los de orden superior, pero, topológicamente, sus efectos son los mismos. Es más difícil de detectar, pero existen procedimientos (las llamadas *formas normales*) que permiten el estudio sistemático.

El concepto de *hiperbolicidad* se generaliza a conjuntos invariantes arbitrarios $\mathcal{A}$. La idea básica es que existen direcciones en las que los iterados sucesivos de F producen que puntos cercanos a $\mathcal{A}$ se alejen del mismo, y otras direcciones en las que tales puntos se acercan a él.

DIMENSIÓN 3 O MAYOR EN EL CASO CONTINUO (2 O MAYOR EN EL DISCRETO)

Hasta ahora hemos considerado sistemas en dimensión finita arbitraria. Podemos preguntarnos cuál es la mínima dimensión en la que podemos tener dinámica «interesante». Obviamente, ecuaciones autónomas en dimensión 2 no ofrecen interés desde el punto de vista dinámico. En efecto, además de que el conocido teorema de Poincaré-Bendixson y sus extensiones a superficies de dimensión 2 arbitrarias nos dicen cuáles son los posibles tipos de órbitas en el espacio de fases, podemos hacer la siguiente consideración. Si tomamos una sección de Poincaré (aunque sea sólo de forma local), la correspondiente aplicación de Poincaré debe ser un difeomorfismo sobre una curva (mientras dicha aplicación esté definida). En particular, si parametrizamos dicha sección por un parámetro arbitrario (por ejemplo, la longitud de arco), el difeomorfismo debe conservar el orden o bien debe invertirlo. Así, los sucesivos cortes de cualquier órbita con una sección transversal deben estar *ordenados*. No hay lugar para ningún comportamiento caótico. En particular, toda aplicación de Poincaré debe ser biunívoca.

Por el contrario, si consideramos sistemas discretos en dimensión 2 o, equivalentemente, ecuaciones diferenciales en dimensión 3, existen numerosos ejemplos de *dinámica no trivial*. Por citar algunos de ellos, las llamadas transformación de Hénon, aplicación estándar, o las ecuaciones de Lorenz y la mayoría de sistemas hamiltonianos de 2 grados de libertad restringidos a un nivel fijado de energía (que son ecuaciones en dimensión 3), suministran ejemplos de sistemas mostrando dinámica no predecible, dependencia sensible a condiciones iniciales y órbitas que se consideran caóticas.

Ciertamente, algunos ejemplos populares de transformaciones discretas que dan lugar a órbitas caóticas aparecen en dimensión 1. Un tal ejemplo es la llamada *aplicación logística*, que asocia a un valor real x , entre 0 y 1, el valor $\mu x(1-x)$, siendo μ un parámetro real. Para un conjunto de valores de μ entre 3.565 y 4, que ocupa cerca del 90% de ese intervalo, se tiene dinámica no predecible. Es obvio que la aplicación logística no es biunívoca. El estudio de ese tipo de problemas, aunque no directamente relacionado con aplicaciones de Poincaré (y, por tanto, con ecuaciones diferenciales), ilustra propiedades que aparecen también en transformaciones inversibles «próximas».

A continuación seguiremos la exposición centrándonos en sistemas discretos en dimensión 2, si bien se mencionarán ejemplos en dimensión superior.

LAS CURVAS INVARIANTES Y SU GENERALIZACIÓN: LAS VARIEDADES INVARIANTES

Volvemos a puntos fijos hiperbólicos con una dirección estable y una inestable. Alrededor del punto fijo (que podemos seguir suponiendo el origen), tomando los ejes

coordenadas en la dirección de los vectores propios y llamando (x, y) a las coordenadas, la transformación se escribe de esta forma:

$$F:(x, y) \rightarrow (\lambda_1 x, \lambda_2 y) + O_2 \quad (7)$$

donde suponemos que los valores propios cumplen $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$ y O_2 significa términos de grado superior al primero.

Si en (7) consideramos sólo los términos lineales, la transformación F es trivial. Todo punto en el eje x se aleja hacia infinito por iteraciones de F ; todo punto en el eje y tiende hacia el punto fijo, y los demás puntos están situados sobre curvas que tienen por ecuación $x^{\log \lambda_2} y^{\log \lambda_1} = cte$, donde la constante depende del punto inicial. Pueden imaginarse como una generalización de hipérbolas que tienen los ejes coordenados como asíntotas. En particular, los ejes son invariantes por F . Podemos preguntarnos qué sucede en el caso general:

Teorema (de la variedad estable). Sea O punto fijo hiperbólico de F , transformación que suponemos analítica en un entorno de O . Entonces existe una curva invariante estable, definida localmente como $x = g^s(y)$, tangente a la dirección estable (el eje y) en O , analítica y caracterizada como el conjunto de puntos (dejando de lado el punto fijo) que tienen todos los iterados positivos en un entorno del origen.

De manera parecida se define la curva invariante inestable, que puede representarse como una función $y = g^u(x)$, tangente en el origen al eje x . Notemos que, para ambas curvas, es posible también una representación paramétrica de la forma:

$$s \mapsto (h_1(s), h_2(s)), \quad (h_1(0), h_2(0)) = (0, 0), \\ F(h_1(s), h_2(s)) = (h_1(\lambda_1 s), h_2(\lambda_2 s))$$

donde como λ debe tomarse λ_1 (resp. λ_2) en el caso de la curva inestable (resp. estable). La representación paramétrica no es única, ya que queda libre una posible elección de la «escala» de s . Si en el caso de la curva inestable se pide, por ejemplo, que el coeficiente de s en h_1 sea igual a 1, entonces la parametrización es única.

En general, si la dimensión del subespacio asociado a valores propios de módulo menor que 1 es k (y la de los de módulo mayor que 1 es $n-k$), en lugar de curvas se obtienen *variedades diferenciables* de dimensión k (*variedad estable* $W_{0,loc}^s$) y $n-k$ (*variedad inestable* $W_{0,loc}^u$).

Las curvas (o variedades) obtenidas así de forma local en un entorno del punto fijo, pueden globalizarse por iteración. Las variedades estable, W_0^s , e inestable, W_0^u , se obtienen como

$$W_0^s = \bigcup_{k \geq 0} F^{-k} W_{0,loc}^s, \quad W_0^u = \bigcup_{k \geq 0} F^k W_{0,loc}^u$$

respectivamente. Por convenio supondremos siempre que el punto fijo no pertenece ni a W^s ni a W^u .

También es relevante observar que, en el caso de dimensión 2, las curvas invariantes tienen *dos componentes*

cada una: en la inestable podemos distinguir $W_{0,+}^u$ y $W_{0,-}^u$ según el signo de x en la parte local de la variedad (es decir, la componente de la derecha y la de la izquierda). De manera similar tenemos dos componentes $W_{0,+}^s$ y $W_{0,-}^s$ o superior e inferior, para la estable.

Insistimos una vez más en que, como estamos considerando sistemas discretos, los puntos no se mueven sobre la variedad estable (o inestable) de forma continua, sino saltando de un punto a su imagen de manera discreta.

CÓMO SE CORTAN LAS VARIEDADES INVARIANTES

En la aproximación lineal, las variedades invariantes no se cortan. Al no haber términos no lineales, no puede producirse ninguna *realimentación* y todos los puntos de las mismas escapan hacia infinito: los de W^u por iterados positivos de F y los de W^s por iterados negativos.

Pero si se consideran términos no lineales, las curvas o variedades invariantes pueden dejar de ser «rectas» y tener puntos en común. Analicemos qué ocurre si la variedad inestable y la estable tienen un punto de intersección, h . Esos puntos reciben el nombre de *puntos homoclínicos*. Como $h \in W^u$, las iteraciones por F^k con $k < 0$ hacen tender $F^k(h)$ hacia el punto fijo. Pero lo mismo sucede si iteramos con $k > 0$, ya que el punto se encuentra en W^s . Por una parte esto justifica que esos puntos se llamen también *puntos biasintóticos*, ya que $F^k(h) \rightarrow 0$ tanto para $k \rightarrow -\infty$ como para $k \rightarrow +\infty$. Por otra, si h es homoclínico, todos sus iterados también lo son, por lo que toda su órbita por F (esto es, $\{F^k(h), k \in \mathbb{Z}\}$) está formada por homoclínicos y se denomina *órbita homoclínica*.

Si estamos en dimensión 2, como las curvas invariantes tienen dimensión 1, puede suceder que *coincidan*. En este caso decimos que constituyen una *separatriz*. Como es natural, se trata de un caso *altamente degenerado*. Normalmente no coinciden e incluso, en general, si se cortan en un punto homoclínico, lo hacen formando un ángulo no nulo. Decimos entonces que estamos en presencia de un *punto homoclínico transversal*. Si las curvas no coinciden pero tienen homoclínicos no transversales hablamos de *tangencias homoclínicas* (si el orden de contacto es par) o de *transversalidad débil* (si el orden de contacto es impar). Desde el punto de vista topológico, una transversalidad débil se comporta como una transversalidad con ángulo no nulo. En muchos casos, dependiendo de la geometría de las curvas invariantes o del carácter del sistema (por ejemplo, en el caso de que preserve área porque se haya obtenido como aplicación de Poincaré de un sistema hamiltoniano de dos grados de libertad confinado a un cierto nivel de energía), la existencia de tangencias homoclínicas implica la existencia de otros puntos homoclínicos que son transversales (quizás sólo débilmente).

Si estamos en presencia de una separatriz, ésta puede *deshacer* el efecto del punto hiperbólico como creador de dependencia sensible a condiciones iniciales. En efecto, imaginemos que pasamos cerca del punto fijo, y que nos

alejamos de él cerca de la curva inestable (la curva inestable tiene un carácter atractor, mientras que la estable lo tiene repulsor; basta pensar en el caso lineal y en las curvas en forma de hipérbola que se han mencionado). Dos puntos que tengan componentes distintas en la dirección inestable ven cómo esas componentes aumentan exponencialmente, por lo que también aumenta exponencialmente su distancia. Si existe una separatriz, los iterados de ambos puntos vuelven a pasar cerca del punto fijo, acercándose a él próximos a la curva estable. Su distancia, durante esa fase de las iteraciones, disminuye, por lo que puede compensar el aumento producido anteriormente.

Si existen *homoclínicos transversales*, esa cancelación de efectos no puede producirse. De hecho, pueden decirse muchas más cosas:

- Como hemos supuesto ambos valores propios positivos en el punto fijo, eso implica que el determinante de $DF(0)$ es positivo. Como no puede anularse nunca (ya que F es un difeomorfismo) debe ser $\det(DF)$ positivo en todo punto. En particular F preserva orientación. Si en un punto h , homoclínico transversal, la curva inestable pasa, por ejemplo, de la parte derecha de la estable a la izquierda, entonces en la imagen $F(h)$ debe hacer lo mismo (en caso contrario cambiaría la orientación). Pero ello implica que en algún otro punto, h' , la curva inestable pasa de la izquierda a la derecha de la estable, con lo que existe, como mínimo, otro punto homoclínico transversal, al menos débilmente.
- Mediante un cambio de coordenadas alrededor del punto fijo podemos conseguir que, para F , las variedades invariantes locales estén sobre los ejes coordenados. En efecto, basta usar las coordenadas (u, v) con $u = x - g'(y)$, $v = y - g''(x)$. Sean h y h' dos puntos homoclínicos transversales en órbitas distintas y situados en la variedad estable local, y sean $(0, b)$, $(0, c)$, $0 < b < c$ sus coordenadas. Suponemos que esos homoclínicos se obtienen cortando la curva estable con la componente derecha de la inestable. Sean $0 < a < b < c < d$ y consideremos el rectángulo $\mathcal{R} = \{x \in (0, \varepsilon), y \in (a, d)\}$, siendo ε pequeño. Entonces los iterados de $\mathcal{R}$ por F pasan cerca del punto fijo, se mueven luego cerca de la curva inestable y, si se escogen de forma conveniente, vuelven a entornos de h o h' .
- Se tiene así la construcción denominada *herradura de Smale*. Es fácil entonces demostrar que existen puntos cuyos iterados vuelven infinitas veces a $\mathcal{R}$ de manera que los sucesivos pasos se hacen cerca de h o de h' en un orden arbitrario. Esto significa que, si codificamos el paso cerca de h como 0 y el paso cerca de h' como 1, para cualquier sucesión, infinita a derecha e izquierda, formada por los dígitos 0 y 1, existe un punto inicial tal que los *retornos* a $\mathcal{R}$ se hacen siguiendo la pauta marcada por la sucesión. Ése es el contenido del llamado *teorema homoclínico de Smale*.

- De hecho, y con la elección de R efectuada, podemos imponer mucho más. En efecto, podemos prescribir *cuántos iterados* de F queremos hacer entre dos pasos consecutivos por R , siempre que ese valor sea mayor que una cierta cantidad, n_0 , que depende de ε y que tiende hacia infinito como $\log(1/\varepsilon)$. El que se puedan escoger puntos cuyos iterados hagan casi cualquier cosa se conoce como *existencia de dinámica cuasialeatoria*.
- Usando la notación anterior, el dominio limitado por las curvas invariantes entre h y h' se conoce como *lóbulo*. De la existencia de un lóbulo se sigue la existencia de infinitos. Las imágenes por F de un lóbulo tienden a aproximarse a la curva inestable (al menos los puntos más cercanos a la curva estable), y las imágenes por F^{-1} se acercan a la estable. Más aún, cualquier segmento que corte transversalmente a la curva estable tiene imágenes por F que se comportan (localmente, cerca del punto fijo) como «paralelas» a la curva inestable, tendiendo hacia ella exponencialmente. Este es el contenido del llamado λ -lema o *lema de inclinación*.
- En el caso de que F preserve el área (o caso conservativo), todos los lóbulos tienen *la misma área*. Por otro lado, ninguna curva inestable puede *cortarse ella misma* (ni cortar a una curva inestable de otro punto fijo), y una cosa análoga sucede con una estable que no puede cortarse ella misma ni cortar a otras estables. Ello obliga a que las curvas invariantes *se plieguen de forma complicada* para satisfacer todas esas condiciones. Básicamente, éste es el motivo de la famosa frase de Poincaré en la que manifestaba su incapacidad para esbozar el comportamiento de las curvas invariantes en el caso conservativo.
- Imaginemos una F para la que exista una separatriz formada por la coincidencia de las componentes $W_{0,+}^u$ y $W_{0,+}^s$, mientras que las otras componentes, $W_{0,-}^u$ y $W_{0,-}^s$, escapan hacia infinito. *Perturbando F* podemos alterar ligeramente W^u y W^s y conseguir puntos homoclínicos transversales cercanos a la separatriz del caso no perturbado. Aparecen lóbulos de dos tipos: *lóbulos interiores*, cuyos puntos se mueven hacia la derecha después del paso cerca del punto fijo y, por tanto, vuelven a pasar cerca de la antigua separatriz, y *lóbulos exteriores*, cuyos puntos se mueven hacia la izquierda después de pasar cerca del fijo y escapan hacia infinito. Lo mismo sucede si iteramos por F^{-1} , substituyendo derecha e izquierda por arriba y abajo, respectivamente. Se tienen entonces situaciones de *captura temporal*. Existen puntos cercanos a la componente inferior $W_{0,-}^s$ que entran en la zona que delimitaba la antigua separatriz, permanecen en ella durante un número arbitrario de iterados y acaban escapando cerca de $W_{0,-}^u$. Por supuesto, también puede darse captura total en la que el escape no se produce. Este tipo de comportamiento se ilustra con la dinámica de ciertos cometas, asteroides, etc.
- Por último, consideremos una F tal que $W_{0,+}^u$ y $W_{0,-}^s$ den lugar a una separatriz y $W_{0,-}^u$ y $W_{0,+}^s$ den lugar a otra. Se tiene así una figura de 8. Una perturbación puede *escindir las separatrices* y dar lugar a homoclínicos transversales en cada parte del 8. Sea h un homoclínico transversal situado en $W_{0,+}^u$, cerca del punto fijo. Tomemos dos puntos, A y B , cerca de h , arbitrariamente próximos pero situados a lados distintos de $W_{0,+}^s$. Sus iterados $F^k(A)$ y $F^k(B)$ volverán cerca del fijo para k suficientemente grande. Pero lo harán a distintos lados de la curva estable, de manera que siguiendo con las iteraciones uno se alejará del punto fijo cerca de $W_{0,+}^u$ y el otro cerca de $W_{0,-}^u$. Como el paso cerca del punto fijo es sensible a condiciones iniciales, pequeños cambios en las coordenadas iniciales hacen que esos iterados puedan retornar cerca de homoclínicos a un lado arbitrario de W^u . Así, cada paso cerca del punto fijo significa una posible elección de hacia qué parte de W^u se sigue, como si se pudiera escoger a cara o cruz (véase, sin embargo, más adelante para las tiradas a cara o cruz). Eso se consigue con variaciones arbitrariamente pequeñas de las condiciones iniciales, que pueden estar por debajo de la precisión con que se efectúen las medidas para determinar la posición inicial. Éste es un nuevo ejemplo del *carácter cuasialeatorio asociado a los homoclínicos*.

Cuando se consideran diversos puntos fijos (o periódicos) hiperbólicos de F , cada uno de ellos tiene sus correspondientes curvas invariantes. Curvas inestables de un punto pueden cortar las estables de otros, dando lugar a los *puntos heteroclínicos*. La totalidad de las curvas estables e inestables de los distintos puntos hiperbólicos forma el *entramado homoclínico*, que el lector puede imaginar como un complicado retículo de calles (de longitud infinita) cruzándose infinitas veces entre ellas. Ésas son las calles por donde *circula la dinámica* y las que llevan al caos.

¡CAOS!

En la sección anterior hemos descrito los *efectos geométricos*, visualizables en el *espacio de fases*, de la existencia de un *entramado homoclínico*. Revisemos las condiciones que se requieren:

1. Debemos tener objetos invariantes con un cierto carácter hiperbólico, esto es, que existan variedades formadas por órbitas que tiendan hacia ellos y otras que se alejen de los mismos.
2. Las variedades invariantes deben *plegarse* de forma conveniente para que algunos puntos de las mismas vuelvan arbitrariamente cerca del objeto hiperbólico de partida. Para ello se requiere la existencia de términos *no lineales* en las ecuaciones, que produzcan la necesaria *realimentación*.

Las consecuencias serán entonces las siguientes:

- Se pierde la capacidad de *predecir* la posición de los iterados F^k de ciertos puntos iniciales, debido a la gran *sensibilidad respecto a las condiciones iniciales* y a los *inevitables errores* en la determinación de la posición del punto inicial.
- Existen puntos cuyas órbitas se comportan de manera *aparentemente aleatoria* o *cuasialeatoria* aunque el sistema sea *determinista*.

Estas características son las que, popularmente, se conocen como *caos*. Son intrínsecas al sistema y no tienen nada que ver con la falta de carácter determinista.

Existen numerosos *indicadores cuantitativos* del *grado de caoticidad* de un sistema. Entre ellos destacamos los siguientes:

- El *exponente maximal de Lyapunov*. Dada una órbita positiva $\{F^k(x), k > 0\}$, puntos arbitrariamente próximos a ella pueden alejarse de la misma de forma exponencial, de manera que la distancia $d(F^k(x), F^k(y))$ crece como $d(x, y) \exp(k\lambda)$ cuando k tiende a infinito y la distancia inicial, $d(x, y)$, tiende a cero de forma conveniente. El máximo valor de λ recibe el nombre de exponente maximal de Lyapunov. Desempeña el papel, para órbitas arbitrarias, que en el caso de un punto fijo juega el valor propio dominante.
- La *entropía métrica* respecto a una *medida invariante*. Supongamos que el sistema tiene una medida invariante, μ . En el caso de un sistema conservativo en el plano esa medida es el área. En otros casos puede ser más complicada. Sea $\mathcal{A}$ un *dominio invariante* por F y sea $\mathcal{A} = \bigcup_{j=1, \dots, N} \mathcal{A}_j$ una *partición* del mismo, $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, es decir, dos subconjuntos cualesquiera, $\mathcal{A}_j$ y $\mathcal{A}_j$, de la partición tienen intersección de medida cero. Se define la *entropía de la partición* como

$$h(\mathcal{P}(\mathcal{A})) = \sum_{j=1, \dots, N} \mu(\mathcal{A}_j) \times (-\log(\mu(\mathcal{A}_j)))$$

Ésa es una entropía *estática*, es decir, que no tiene aún nada que ver con el sistema dinámico discreto F . Para definir una entropía *dinámica* procedemos como sigue. Consideremos la partición formada por la intersección de las particiones $\mathcal{P}(\mathcal{A}), F(\mathcal{P}(\mathcal{A})), \dots, F^s(\mathcal{P}(\mathcal{A}))$. Denotamos, por simplicidad, $h_s(\mathcal{P}(\mathcal{A}))$ la entropía de esa nueva partición. El límite de $h_s(\mathcal{P}(\mathcal{A}))/s$ cuando $s \rightarrow \infty$ existe y se denomina *entropía de la partición* $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ respecto F . Finalmente, se llama entropía métrica de F respecto la medida μ , $h_\mu(F)$, al supremo respecto todas las particiones posibles.

La entropía métrica mide *cómo se mezclan* los puntos de $\mathcal{A}$ al iterarlos por F .

Existe una relación entre la entropía métrica y el exponente maximal de Lyapunov. En el caso plano y en que la medida sea el área, la entropía se obtiene por integración del exponente de Lyapunov en el dominio considerado.

Observemos que tanto los indicadores de caoticidad mencionados como cualquier otro que podamos utilizar, no son más que una *consecuencia* de la dinámica en el espacio de fases, que es el verdadero objeto geométrico interesante.

Otro punto fundamental es si la *caoticidad* afecta sólo un conjunto de puntos de medida muy pequeña (y, por lo tanto, va a ser difícil de observar) o, por el contrario, es algo que ocurre para un *conjunto masivo de puntos*.

En el caso conservativo, el decidir si el conjunto de puntos en los que el exponente de Lyapunov es positivo tiene medida positiva o, en otras palabras, *si la entropía métrica es positiva*, es una cuestión que aún no ha sido resuelta de forma rigurosa. Toda la *evidencia numérica* es que *ello es cierto*. Se conocen ejemplos para los que ha sido demostrado positivamente, pero son ejemplos académicos y que no se presentan habitualmente en los sistemas que aparecen en las aplicaciones.

Para los sistemas disipativos (de nuevo en el caso plano, ello significa que para todo dominio $\mathcal{A}$ se tiene que el área de $F(\mathcal{A})$ es menor que el área de $\mathcal{A}$, es decir, que el determinante de DF en todo punto es menor que la unidad), podemos tener los llamados *atractores extraños*. Son conjuntos que, al iterar por F atraen todos los puntos de un entorno suyo, en los que existen *órbitas densas* (esto es, que *visitan* todas las partes del atractor) y tales que, al *restringir* la dinámica F a ellos, se tiene *dependencia sensible* a condiciones iniciales. Ésa es otra de las manifestaciones de la caoticidad. También poseen «vistosas» *propiedades fractales*, pero, de nuevo, eso no es más que una consecuencia elemental de la dinámica.

La existencia de homoclínicos transversales en un sistema disipativo *no asegura* la existencia de atractores extraños. Se tienen, sin embargo, lo que podemos llamar *atractores extraños en potencia*, que se encuentran en la *adherencia de las curvas inestables*. Hemos utilizado el calificativo *en potencia*, ya que puede ser que otros *atractores más simples*, como son los *puntos periódicos* atractores, impidan que se desarrolle un auténtico atractor extraño, siendo los puntos del potencial atractor capturados por la órbita periódica.

Sistemas que no son conservativos ni disipativos, es decir, para los que existen dominios donde $| \det(DF) |$ es menor que 1 y otros donde es mayor que 1, pueden tener atractores extraños si, *en promedio*, se tiene cierta *disipación*. Un ejemplo ilustrativo se verá más adelante cuando mostremos cómo «prefabricar» un atractor extraño. De manera parecida puede hablarse de *repulsores extraños*. No son más que atractores extraños por la aplicación F^{-1} .

Pasando a ejemplos de *dinámica sensible a las condiciones iniciales* podemos comentar algunos que aparecen en aplicaciones varias.

- La *dinámica de los planetas del Sistema Solar*. Si se considera la *parte importante* del Sistema Solar, esto es, la más masiva, formada por el Sol y los planetas gi-

- gantes (Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno), simulaciones numéricas de su movimiento durante intervalos de tiempo de aproximadamente la edad del sistema solar parecen indicar que su comportamiento es muy regular. Por el contrario, si incluimos la *parte importante para nosotros* con Mercurio, Venus, la Tierra y Marte, esto es, los planetas menores, la situación es distinta y se manifiesta una cierta caoticidad. Se estima que el exponente maximal de Lyapunov para los 8 primeros planetas es de 1 unidad si tomamos como unidad de tiempo 5 millones de años. De forma equivalente, al cabo de 100 millones de años la amplificación de errores es de $\exp(100/5) \approx 5 \times 10^8$.
- Hay errores en los datos iniciales de los planetas que van a implicar errores notables al cabo de un tiempo grande y que, sin embargo, no tienen nada que ver con comportamiento caótico. Me refiero a errores en la *determinación de las frecuencias* con que se mueven alrededor del Sol. Un error de 10^{-9} (en vueltas/año) implica un error de 1/2 vuelta al cabo de 500 millones de años. Sin embargo, esos errores crecen linealmente con el tiempo. Los que provocan la caoticidad son más sutiles. Las órbitas de los planetas vienen caracterizadas, por ejemplo, por los llamados *elementos keplerianos*. Entre ellos tenemos la excentricidad, la inclinación respecto a un plano de referencia y sus variables angulares asociadas, el *argumento del perihelio* y el *argumento del nodo*. Esos elementos serían constantes si sólo consideráramos el problema de dos cuerpos formado por el Sol y el planeta estudiado. Debido a los efectos de unos planetas sobre otros, se producen perturbaciones en dichos elementos y varían con el tiempo. Se producen resonancias en que aparecen combinaciones lineales de los argumentos de perihelio y nodo de varios planetas. Esas combinaciones lineales se comportan como *péndulos perturbados*. En los mismos aparecen puntos hiperbólicos (correspondientes al punto de equilibrio inestable de un péndulo, con la masa por encima del punto de sustentación). Es el paso cerca de ellos y la escisión de las separatrices de esos puntos hiperbólicos lo que provoca la caoticidad del Sistema Solar. Ésta involucra, pues, las excentricidades, inclinaciones y argumentos de perihelio y nodo de, básicamente, los planetas menores.
 - Otro ejemplo astronómico aparece al estudiar el *movimiento del eje de rotación de los planetas*. En el caso de la Tierra es sabido que el eje de rotación se mueve aproximadamente sobre un cono, debido a la falta de esfericidad de la Tierra y a los efectos combinados de los pares de fuerzas creados por la Luna y el Sol. Es el efecto conocido como *precisión de los equinoccios*, que implica un giro del eje de rotación de unos $50''$ por año. Al mismo tiempo, la inclinación del ecuador terrestre respecto de la eclíptica se mantiene casi constante alrededor de 23° . Esta inclinación se conoce como *oblicuidad de la eclíptica*.
 - Consideremos qué pasaría *en ausencia de la Luna*. Aunque es mucho más pequeña, su proximidad hace que el efecto de la Luna sea el doble que el del Sol. Por tanto, sin la Luna la precisión de los equinoccios tendría lugar a razón de unos $17''$ por año. Existen perturbaciones sobre la rotación de la Tierra debidas a los planetas mayores (principalmente efectos de Júpiter y Saturno) que tienen casi exactamente esta frecuencia. Esas *perturbaciones exteriores* entrarían en resonancia con la velocidad angular del eje de rotación provocando que la *inclinación* del ecuador respecto a la eclíptica tuviera un comportamiento *caótico*. Simulaciones numéricas cuidadosas muestran que la inclinación de dicho eje podría, en tal caso, variar entre 0° y 60° . Una inclinación nula provocaría la fusión de los casquetes polares y, al haber menor cantidad de radiación solar reflejada, habría un aumento medio de la temperatura en la superficie de la tierra que se cifra en $+50^\circ\text{C}$. Un efecto contrario, con variaciones medias de -50°C , se produciría en el caso de inclinaciones grandes. Con tales extremos climáticos, *la vida sería ciertamente imposible para la especie humana*.
 - La *dinámica de naves espaciales* pasando cerca de un cuerpo masivo ilustra también el aprovechamiento de la dependencia sensible para conseguir importantes ahorros de energía. En efecto, pasos cerca de la Luna o de los planetas grandes aprovechan el campo gravitatorio de los mismos para conseguir variaciones importantes en la trayectoria de la nave. Conocidos como *flyby*, requieren una excelente precisión en las coordenadas de la nave y efectuar pequeñas maniobras de corrección para pasar por el lugar deseado. También las órbitas, aproximadamente periódicas y cuasiperiódicas, que se encuentran cerca de los puntos de libración colineales de los sistemas Tierra-Sol, Luna-Tierra y otros que puedan utilizarse en el futuro, dan una buena oportunidad de utilizar la hiperbolicidad, tanto para aproximarse a ellas (siguiendo su variedad estable), como para controlarlas de forma eficiente (aprovechando características de la dinámica para ahorrar energía), o para partir hacia nuevas misiones (siguiendo la variedad inestable).
 - La *dinámica de estrellas en una galaxia* puede estudiarse considerando que el efecto de las estrellas de la misma sobre una estrella dada es, aproximadamente, el debido a un *campo medio* creado por las propias estrellas. Así, el problema se simplifica y *basta* estudiar órbitas en un *sistema hamiltoniano de tres grados de libertad*. De hecho, fue en modelos simplificados de dos grados de libertad en donde se observaron, ya en los años sesenta, ejemplos de órbitas caóticas por M. Hénon y C. Heiles. La actividad en ese dominio es muy grande, ya que, aun con las fuertes simplificaciones que comporta, existen muchos puntos fundamentales no clarificados. Constituye un *paradigma* para modelos en múltiples campos, desde la dinámica de estrellas a la de partículas en un acelera-

dor, desde cinética química a órbitas de naves espaciales.

- La *meteorología* constituye uno de los paradigmas por excelencia de dinámica caótica. En una situación *anticyclónica*, las trayectorias en el espacio de fases son muy regulares y, localmente en tiempo, esto es, durante un lapso de unos cuantos días, el exponente maximal de Lyapunov puede ser aceptablemente pequeño. No así en una situación *ciclónica*. Entonces es fácil tener exponentes del orden de 1 unidad si utilizamos 1 día como unidad de tiempo. Y pueden ser mucho mayores en situaciones extremas o si queremos considerar de forma precisa la meteorología en una región pequeña. Pensemos que un exponente de 1 significa que en 3 días los errores se amplifican por un factor 20. Una imprecisión de un 5% en los datos iniciales puede llevar a errores del 100% en 3 días. Si en el futuro se puede disponer de datos más precisos, lo único que se consigue es *ampliar el horizonte de predecibilidad*. Siguiendo con exponentes de Lyapunov de 1 unidad, errores de un 1 por mil se amplifican al 100% en una semana. Por tanto, los *errores de predicción*, tan comunes en meteorología, no cabe achacarlos, de ningún modo, a los profesionales de esa disciplina, sino a la *inestabilidad intrínseca* de la misma.
- La *climatología a escala global* es una de las fuertes preocupaciones de la Humanidad. Al principio de estas notas se han mostrado unas ilustraciones de órbitas en un modelo *extraordinariamente simplificado*, el modelo estacional de Lorenz de 1984. No debe ser tenido en cuenta para ningún efecto práctico. Sólo como un paradigma para entender modelos más realistas. Como las figuras ilustran, pequeños cambios en los parámetros pueden llevar a cambios notables en el comportamiento. Sin embargo, siguiendo esta línea de pensamiento, es ya factible disponer de modelos cualitativamente aceptables (y, en un futuro próximo, también cuantitativamente) para fenómenos reales relevantes a escala mundial, como *El Niño*. (Véase más adelante en la discusión sobre las *cuencas de atracción y descripciones probabilistas*.)

Por supuesto, toda simulación numérica de un sistema caótico realizada en un ordenador tiene errores inevitables en la trayectoria que se calcula. Pensemos que en cada operación aritmética se introducen errores, que se amplifican por la inestabilidad intrínseca del sistema. Podemos utilizar técnicas refinadas de cálculo. Por ejemplo, he realizado simulaciones masivas del modelo Lorenz 84 utilizando métodos de Taylor de orden elevado, de los que he entresacado las figuras aquí mostradas. Además de ser mucho más precisos, en este caso son también mucho más rápidos que los métodos utilizados en los programas de simulación más divulgados. En caso de necesidad puede utilizarse aritmética de precisión elevada (esto es, podemos trabajar con 1.000 cifras decimales si

queremos). Pero, además del costo computacional que esto supone, veremos más adelante que ello no es preciso. No importa tanto el *punto concreto del atractor* en que se halla el sistema, como la *forma y propiedades globales* del mismo.

- *Dados, ruletas y tirar monedas* son popularmente aceptados como paradigmas de aleatoriedad. Sin embargo, se trata de sistemas mecánicos relativamente simples y que se rigen por leyes perfectamente deterministas. El hecho de que su resultado se *acepte como aleatorio* radica de nuevo en la *dependencia sensible a las condiciones iniciales*. Si consideramos, por ejemplo, el caso de un dado, cada vez que golpea la mesa con uno de sus vértices, aunque éste esté ligeramente redondeado y admitamos unas propiedades elásticas uniformes y una construcción cuidadosa, mínimos cambios en el punto de impacto se *amplifican* considerablemente. El rebote depende también de la velocidad angular en el instante de impacto. Si todos los datos se conocieran con la precisión requerida, podríamos predecir el resultado. Pero dicha precisión es mucho más grande de lo que somos capaces de medir. Lo mismo se aplica a la ruleta o a tiradas de monedas.

También son muy utilizados los programas de ordenador de *generación de números aleatorios*. Como todo programa, es absolutamente determinista. Conociendo el algoritmo y el valor inicial, el resultado queda unívocamente determinado (notemos que, si se utiliza aritmética de punto flotante, depende también del procesador, compilador y sistema operativo usado). En todo caso se utilizan algoritmos fuertemente sensibles a condiciones iniciales. Sus resultados, aunque deterministas, pasan los tests estadísticos de aleatoriedad. Pero, hablando con propiedad, no podemos atribuirles carácter aleatorio, sino *pseudoaleatorio* o *cuasialeatorio*.

Notemos que, desde un punto de vista matemático, todos los ejemplos mencionados son *semejantes*. Las causas del comportamiento caótico son prácticamente las mismas. En ciertos casos, el caos puede manifestarse al cabo de millones de años. En otros, al cabo de pocos años, de días o de fracciones de segundo. Ello es sólo una cuestión de *escalas de tiempo*, relevantes para nosotros, pero irrelevantes en abstracto.

«PREFABRICANDO» CAOS

Vamos a mostrar ahora, paso a paso, cómo se puede *prefabricar un atractor extraño*. Este es un ejemplo que he utilizado en diversas ocasiones e instruye sobre el papel de los *distintos ingredientes*.

Para ello usamos una familia de aplicaciones que depende de varios parámetros:

$$F_{\varepsilon, \mu, a}(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + \varepsilon \bar{y}, \\ \bar{y} &= y + \varepsilon [x - x^3 + \mu g(x, y, a)]\end{aligned}$$

Primero consideramos el caso conservativo: $\mu = 0$ (y, por tanto, el valor de g es irrelevante). En ese caso la transformación estudiada preserva el área y es próxima, si ε es pequeño, al flujo φ_ε del hamiltoniano $H = y^2/2 - x^2/2 + x^4/4$. El origen es un punto fijo hiperbólico. Además, los puntos fijos e_+ y e_- , de coordenadas $(1,0)$ y $(-1,0)$, respectivamente, son de tipo elíptico. Localmente φ_ε (y $F_{\varepsilon,0,0}$) se comporta como una rotación en ellos. Recordemos que, para una aplicación que preserva área, ϕ , si un valor propio de $D\phi(x^*)$ es λ , donde suponemos que x^* es un punto fijo de ϕ , entonces el otro valor propio es $1/\lambda$. El punto fijo se llama *elíptico* si λ es un número complejo de módulo 1, distinto de $+1$ y de -1 . Naturalmente, la parte lineal de la aplicación alrededor del punto fijo es una rotación, ya que, mirándola en el plano complejo, sólo consiste en multiplicar por un número de módulo 1.

Bajo el flujo φ_ε , el período límite, cuando tendemos hacia uno de estos dos puntos fijos, es $\pi\sqrt{2}$. A medida que nos acercamos a la separatriz (el nivel $H = 0$), el período tiende hacia infinito, creciendo monótonamente. El *número de rotación* se define, sobre estas órbitas, como la frecuencia: $2\pi/\text{período}$. Como $F_{\varepsilon,0,0}$ es una perturbación relativamente pequeña ($O(\varepsilon^2)$) de φ_ε y φ_ε es una aplicación de las llamadas *twist* (la derivada del número de rotación respecto a la energía es distinta de cero); el teorema del twist de Moser (o más generalmente, el teorema de Kolmogorov-Arnol'd-Moser, *KAM*) asegura que hay curvas invariantes por $F_{\varepsilon,0,0}$.

La figura 3 muestra tres de estas curvas, como γ_+ y γ_- alrededor de e_+ y e_- , respectivamente, y Γ en la parte exterior. Ello implica que los iterados sucesivos de puntos cercanos a la separatriz estén confinados. Naturalmente, esto vale si ε es suficientemente pequeño. Creo que en nuestro ejemplo hace falta $|\varepsilon| < 0.56...$ Dibujando los iterados de un punto conveniente cerca del origen, parece que éstos cubran una región de medida positiva. La pregunta

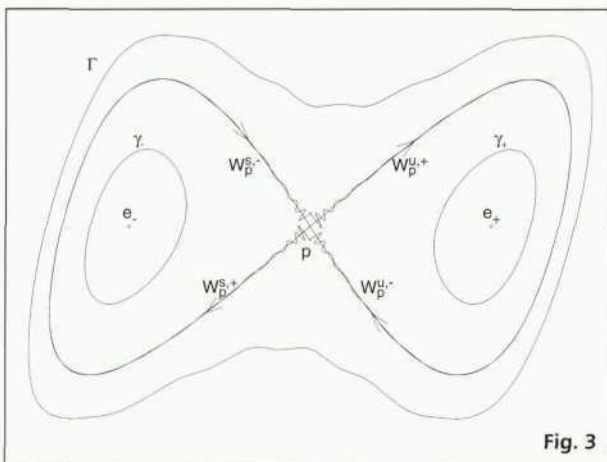


Fig. 3

que hay que formularse es si la *adherencia de la órbita tiene medida positiva*. Esta cuestión está relacionada con la que formulamos antes sobre entropía métrica positiva.

Vayamos ahora al caso *no conservativo*. Lo que queremos hacer es razonar cómo hay que escoger la forma que ha de tener el difeomorfismo y los parámetros adecuados para que se tenga dinámica no predecible, no sólo para ciertos puntos cerca de la zona donde estaba la separatriz del sistema hamiltoniano inicial, sino para la mayor parte de puntos en un entorno grande alrededor del origen. En otras palabras, mostraremos cómo se puede *fabricar un atractor extraño paso a paso*. Consideremos, pues, $\mu > 0$ y $g(x, y, a) = y \cdot h(x, y, a)$. Quisiéramos que los puntos fijos (que con la g de la forma escogida son los mismos que en el caso conservativo) fueran como sigue: el $(0, 0)$ de tipo silla disipativa (es decir $\lambda_u > 1$, $\lambda_s < 1$, $\lambda_u \lambda_s < 1$) y los $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ de tipo foco repulsor, para que no atraigan ningún punto. Además, quisiéramos que el determinante de $DF_{\varepsilon,\mu,a}$ fuera < 1 en todas partes salvo en un entorno de los puntos e_+ y e_- . Esto garantizaría un carácter disipativo.

El determinante mencionado se expresa como $1 + \varepsilon \mu \frac{\partial g}{\partial y}$. Escogemos la función $h(x, y, a)$, para conseguir ese objetivo, como

$$-1 + ax^2 - x^4 - \frac{2}{3}x^2y^2 - \frac{1}{5}y^4$$

Con esta elección de h se tiene *det*

$$(D\phi) = 1 + \varepsilon \mu (-1 + ax^2 - (x^2 + y^2)^2)$$

El flujo límite (cuando $\varepsilon \rightarrow 0$), que es solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 + \mu g(x, y, a)\end{aligned}$$

tiene una *bifurcación de Hopfen* e_+ y en e_- para $a = 2$. Una *conexión homoclínica* se presenta para valores de los parámetros de la forma $(\mu, a(\mu))$, donde $\lim_{\mu \rightarrow 0} a(\mu) \approx 2.81457...$ Pasemos a la transformación $F_{\varepsilon,\mu,a}$. En primer lugar, observemos que para tener un difeomorfismo precisamos *det* $(D\phi) > 0$ (por ser perturbación de un flujo, F preserva orientación). Si tomamos $a > 0$ y puntos (x, y) en una bola de radio r centrada en $(0, 0)$, se precisa $\varepsilon \mu (1 + r^4) < 1$. Por ejemplo, si tomamos $\varepsilon = 0.6$, $\mu = 0.05$, $a \leq 3$, la bola de radio 1.7 tiene todas las imágenes dentro de la bola de radio 2.35, donde se satisface la condición de difeomorfismo, y un iterado conveniente de la bola vuelve a caer dentro de ella. Así la bola contiene un atractor. Fijados ε y μ existen valores de a para los cuales hay puntos homoclínicos transversales como se desea. Por lo que acabamos de decir, si tomamos puntos en una bola de radio conveniente, se tiene

$$\bigcap_{n \geq 1} \phi^n B_r \subset B_r$$

Por otra parte, como e_+ y e_- son focos repulsivos, hay curvas como las Γ , γ_+ y γ_- de la figura anterior, tales que el

atractor está contenido en la región limitada por Γ y fuera de los dominios limitados por γ_+ y por γ_- . El atractor puede ser una *curva invariante*, una *órbita periódica* o un *atractor extraño*.

En nuestro caso, el atractor extraño está contenido en la adherencia, $\overline{W^u}$, de la variedad inestable del punto silla. La figura 4 muestra el atractor que se obtiene tomando la aplicación de la familia $F_{\varepsilon, \mu, a}$ para los siguientes valores de los parámetros: $\varepsilon = 0.6$, $\mu = 0.05$ y $a = 2.8$. El punto inicial ha sido $x = 0.01$, $y = 0$. Se ha calculado primero un millón de iterados, que se consideran como un transitorio, y se ha dibujado el siguiente millón de iterados. Uno de los problemas básicos es demostrar que, fijados ε y μ , la medida del conjunto de valores de «a» para los cuales hay atractor extraño es positiva, aunque dicho conjunto sea, posiblemente, totalmente disconexo (es decir, no contiene ningún intervalo abierto). Ello se ha conseguido para ciertos paradigmas de atractores, y hay un convencimiento de que es así en general.

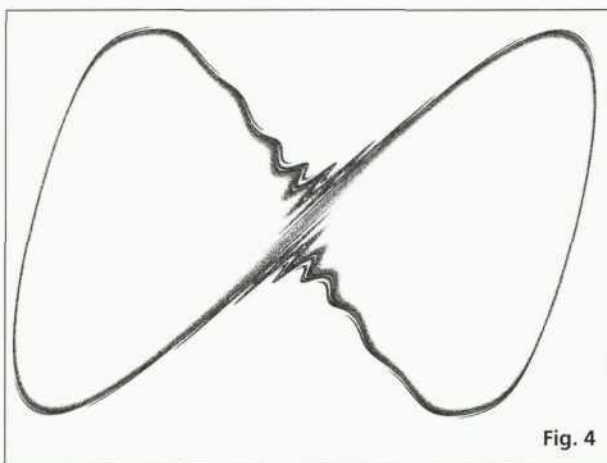


Fig. 4

En este momento conviene insistir en el problema que representa la existencia de atractores extraños (o, en general, de cualquier dinámica caótica) en lo que respecta a la *repetitividad de los experimentos*. Si un fenómeno natural es determinista, pero tiene una dinámica que da lugar a atractores extraños, y repetimos un experimento para confirmar la validez de un modelo matemático, tendremos problemas. En efecto, los distintos experimentos se hacen con *parámetros ligeramente diferentes* y con *condiciones iniciales también ligeramente diferentes*. Como consecuencia de la variación del atractor con los parámetros y de la dependencia sensible a las condiciones iniciales, los resultados pueden ser, aparentemente, muy distintos. Si no pensamos que puede haber atractores extraños, podremos creer que el modelo no es correcto o, incluso, que no se puede admitir que el fenómeno sea determinista. Entonces hace falta entender el modelo, las *bifurcaciones* que tiene para valores de los parámetros cercanos a un valor dado, y la estructura geométrica del atractor en el espacio de fases para interpretar correctamente los datos experimentales y poder *validar* el modelo. Se puede *representar gráficamente* el

atractor y comparar su forma y la manera en que los sucesivos iterados se reparten sobre él (es decir, la *medida invariante* que pueda haber sobre el atractor) con la correspondiente forma del conjunto de datos experimentales cuando se toman simultáneamente los correspondientes a diversas magnitudes y se proyectan en algún espacio, y con la distribución probabilística experimental de los puntos en distintas regiones.

CUENCAS DE ATRACCIÓN Y DESCRIPCIONES PROBABILISTAS

Vamos a concentrarnos ahora en el caso disipativo. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto positivamente invariante: $F(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. La intersección de todos los iterados de $\mathcal{A}$ (que es un conjunto de medida nula) contiene todos los atractores a los que puede tender un punto de $\mathcal{A}$. Dado un punto inicial en ese conjunto podemos preguntarnos cómo se delimitan las *cuencas de atracción* de los posibles atractores que pueden coexistir. La respuesta es simple: son variedades estables de puntos fijos o de órbitas periódicas las que *separan* las distintas cuencas. Para un estudio detallado hay que atender a las posiciones relativas de unas variedades respecto a otras, y tener en cuenta si el difeomorfismo preserva orientación o la cambia.

Por otra parte, los atractores propiamente dichos se hallan en la adherencia de variedades inestables. Cuando una variedad inestable experimenta una tangencia con una estable el *atractor en potencia* es destruido y sus puntos van a parar a un atractor distinto. Todo el proceso de *creación y destrucción* de atractores, cómo se *escinden* o cómo se *acoplan* es fácilmente explicable en términos de tangencias homoclinicas y heteroclinicas. Por supuesto, los aspectos geométricos se complican en el caso de dimensiones elevadas, aunque los principios básicos son los mismos.

Dado que sobre un atractor extraño existe una dinámica sensible a condiciones iniciales, no es posible predecir en qué punto del mismo va a encontrarse un iterado dado, si el número de iteraciones es superior al *horizonte de predecibilidad*. Es decir, después de aplicar F un cierto número de veces, la distancia entre los iterados de dos puntos, x e y , que inicialmente eran indistinguibles (porque su distancia era menor que los errores de medida o de representación en ordenador), puede llegar a ser del orden del tamaño del atractor. El objeto relevante, entonces, no es la posición de un iterado dado, sino la *distribución de los sucesivos iterados a lo largo del atractor*. Ésta viene expresada mediante las *medidas invariantes asociadas a la dinámica*. Una medida invariante μ^* debe satisfacer la condición $\mu^*(B) = \mu^*(F^{-1}(B))$ para todo B medible en $F(\mathcal{A})$. Sobre un atractor extraño una medida invariante nos da la probabilidad de encontrar los iterados en cada subconjunto del atractor. Al mismo tiempo esto nos permite hablar de una *predecibilidad parcial*. No podemos saber dónde está un iterado, pero al menos conocemos en qué

objeto se encuentra (el atractor) y cuál es la probabilidad de encontrarlo a lo largo del mismo.

Esto no deja de parecer una *paradoja*, ya que, partiendo de unas premisas deterministas, llegamos a la conclusión de que la dependencia sensible a condiciones iniciales puede producir como efecto que los iterados de un punto inicial *pierdan la memoria del punto de que han partido*. Esa *pérdida de información* no es más que un reflejo de la *creación de entropía* que lleva a cabo el sistema. Debemos poner en guardia que eso va a ocurrir en el límite, cuando el número de iterados tiende a ∞ . Durante el *período transitorio* el comportamiento puede ser muy distinto. Incluso puede suceder que el atractor sea una órbita periódica, pero que los primeros 10 millones de iterados, por ejemplo, induzcan a creer que estamos en presencia de un atractor extraño. Cuál de las dos cosas es más importante, si el comportamiento límite o el transitorio, depende del sistema físico. Es posible que el fenómeno estudiado *desaparezca* antes que se alcance el límite en el modelo matemático. Así se entiende, por ejemplo, que si admitimos un cierto modelo, válido en la actualidad, para el sistema solar, podamos llegar a la conclusión que los planetas gigantes se movían en órbitas parecidas a las actuales hace 10^{10} años, cuando por esas fechas el sistema solar aún no existía.

En los sistemas conservativos no hay atractores. La *descripción probabilista* de los efectos de la dependencia sensible a condiciones iniciales se hace en términos de *difusión*. Pero sutiles *cuasibarreras a la difusión*, que se manifiestan en términos de *ángulos extraordinariamente pequeños* entre las variedades en los puntos homoclínicos transversales, pueden llevar a que el *tiempo de difusión* sea muy superior a la vida del sistema. De nuevo nos encontramos con que la relevancia de los efectos va a depender de las escalas de tiempo.

LA OMNIPRESENCIA DEL CAOS

En muchos sistemas naturales se manifiestan, en mayor o menor grado, ciertos efectos dinámicos no ordenados o caóticos. En realidad, en los sistemas deterministas, el caos es simplemente un *orden más complejo* de lo que nos parece habitual. O bien, que es más difícil de reconocer. La relevancia de los efectos caóticos depende de las zonas afectadas.

Ciertamente hay sistemas disipativos en los que el único atractor que existe es un punto fijo. Desde un cierto punto de vista son sistemas *muy agradables* y fáciles de describir, ya que todo tiende hacia una situación estable. Desde otro punto de vista, son sistemas *poco interesantes*, ya que podemos considerar que *están muertos*. Lo mismo podemos decir de sistemas que poseen una única órbita periódica globalmente atractora. Usando una aplicación de Poincaré se reducen al caso anterior.

Desde un punto de vista heurístico es muy razonable esperar comportamientos caóticos. En efecto, por una par-

te se requieren situaciones de equilibrio inestable de tipo silla, lógicas cuando hay diversas fuerzas que actúan sobre un mismo objeto. En un péndulo, esas fuerzas son la gravedad y la reacción del eje en el que se sustenta el péndulo. En una reacción química hay que atravesar una barrera de potencial para que se produzca la reacción, pero esa barrera puede tener distinta altura en direcciones distintas, por lo que existen puntos tipo silla. Por otro lado, la naturaleza no suele ser, afortunadamente, lineal. Ambas cosas se combinan para dar lugar a homoclínicos. La existencia de *separatrices exactas* es un hecho altamente degenerado: pequeñas perturbaciones pueden destruirlas. Esto crea la transversalidad que da lugar a las dinámicas no predecibles.

Desde el punto de vista de análisis de sistemas dinámicos es fácil también explicar la *omnipresencia del caos*. En efecto, todo sistema que dependa de parámetros cambia de comportamiento al pasar por las llamadas *bifurcaciones*. Los casos más simples de las mismas aparecen, para ecuaciones diferenciales (siempre en dimensión 3 o mayor), estudiando las bifurcaciones asociadas a puntos fijos con cierta degeneración. Hay que proceder entonces a *desplegar genéricamente la degeneración*. Esto es, a estudiar cuáles son las maneras más simples de perturbar el caso degenerado. Se tiene que aparecen, inevitablemente, regiones del espacio de parámetros tales que, en el espacio de fases correspondiente, nos encontramos con dinámica caótica. Ciertamente esas regiones pueden ser muy pequeñas cerca de ese caso degenerado, pero al alejarnos del mismo pueden ocupar una parte considerable del espacio de parámetros. En realidad, en el caso de sistemas conservativos, lo realmente *excepcional* (tan excepcional que requiere que se satisfagan una infinidad de condiciones) es que *no exista caos*. Quizá se halla en zonas muy finas del espacio de fases, pero siempre está presente.

Ciertamente queda mucho por aprender; posiblemente algunas herramientas importantes para el estudio de modelos matemáticos no han sido aún descubiertas, y la explotación sistemática de métodos numéricos y gráficos para ese estudio se encuentra en sus inicios. Pero los principios geométricos básicos parecen ya suficientemente claros.

BIBLIOGRAFÍA

Algunas revistas elementales o generales:

- *Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. Contiene muchos artículos de aplicaciones a distintas áreas de la ciencia y la tecnología, y también de investigación básica. El número 3 del volumen 3 (junio 1993) está dedicado a distintas maneras de medir el comportamiento impredecible y a tests de determinismo.
- *Mundo Científico*, n.º 115 (julio-agosto, 1991). Contiene diversos artículos expositivos a nivel elemental.

Algunos textos básicos:

- ARNOLD, V. I., *Geometric Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer, 1982.
- ARNOLD, V. I. et al., *Dynamical Systems I, II, III, IV, V*, Springer, 1985-1988.
- ARNOLD, V. I., y AVEZ, A., *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, Benjamin, 1968.
- COLLET, P., y ECKMANN, J. P., *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, 1980.
- GUCKENHEIMER, J., y HOLMES, P., «Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields», *Applied Math. Sci.*, n.º 42, Springer, 1983.
- IOOSS, J., *Bifurcation of Maps and Applications*, North Holland, 1979.
- IOOSS, J., *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Springer, 1990.
- MIRA, C., *Chaotic Dynamics*, World Scientific, 1987.
- PALIS, J., y DE MELO, W., *Geometric Theory of Dynamical Systems: an Introduction*, Springer, 1982.
- PALIS, J., y TAKENS, F., *Hiperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*, Cambridge Univ. Press, 1993.
- WIGGINS, S., «Global Bifurcations and Chaos», *Applied Math. Sci.*, n.º 73, Springer, 1988.

Algunos artículos del autor y colaboradores, relacionados con el tema:

- ABRAHAM, R., y SIMÓ, C., «Some Analysis of Shifted and Forced van der Pol Equations», en S. N. PNEVMATIKOS (ed.), *Singularities and Dynamical Systems*, págs. 313-344, North Holland, 1984.
- BOSCH, M.; CARCASSES, J. P.; MIRA, C.; SIMÓ, C., y TATJER, J. C., «"Crossroad Area-Spring Area" Transition. (I) Parameter Plane Representation», *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, n.º 1(1), págs. 183-196, 1991; «(II) Foliated Parametric Representation», *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, n.º 1(2), págs. 339-348, 1991.
- BOSCH, M., y SIMÓ, C., «Attractors in a Silnikov-Hopf Scenario and a Related One-Dimensional Map», *Physica D*, n.º 62, págs. 217-229, 1993.
- BROER, H.; ROUSSARIE, R., y SIMÓ, C., «Invariant Circles in the Bogdanov-Takens Bifurcation for Diffeomorphisms», *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, n.º 16, págs. 1147-1172, 1996.
- BROER, H.; ROUSSARIE, R., y SIMÓ, C., «A Numerical Exploration of the Takens-Bogdanov Bifurcation for Diffeomorphisms», en C. MIRA, N. NETZER, C. SIMÓ y G. TARGONSKI (eds.), *European Conference on Iteration Theory (ECIT 89), Batschuns (Austria)*, págs. 320-334, World Scientific, Singapore, 1991.
- BROER, H., y SIMÓ, C., «Hill's Equation with Quasi-Periodic Forcing: Resonance Tongues, Instability Pockets and Global Phenomena», *Bul. Soc. Bras. Mat.*, n.º 29, págs. 253-293, 1998.
- BROER, H.; SIMÓ, C., y TATJER, J. C., «Towards Global Models near Homoclinic Tangencies of Dissipative

Diffeomorphisms», *Nonlinearity*, n.º 11(3), págs. 667-770, 1998.

- CINCOTTA, P., y SIMÓ, C., «Conditional Entropy: A Tool to Explore the Phase Space», en J. HENRARD y S. FERRAZ-MELLO (eds.), *Proceedings IAU Colloquium 172, em The Impact of Modern Dynamics in Astronomy*, Kluwer, 1999.
- FONTICH, E., y SIMÓ, C., «Invariant Manifolds for Near Identity Differentiable Maps and Splitting of Separatrices», *Erg. Th. & Dyn. Systems*, n.º 10, págs. 319-346, 1990.
- FONTICH, E., y SIMÓ, C., «On the Smallness of the Angle between Split Separatrices. Some Consequences», en J. P. DUFOUR (ed.), *Singularities, feuilletages et mécanique hamiltonienne*, págs. 41-52, Herman, 1985.
- FONTICH, E., y SIMÓ, C., «The Splitting of Separatrices for Analytic Diffeomorphisms», *Erg. Th. & Dyn. Systems*, n.º 10, págs. 295-318, 1990.
- GARRIDO, L., y SIMÓ, C., «Some Ideas about Strange Attractors», en *Proceed. Sitges Conference on Dynamical Systems and Chaos, Lect. Notes in Physics*, n.º 179, págs. 1-28, Springer, 1983.
- GELFREICH, V. G.; LAZUTKIN, V. F.; SIMÓ, C., y TABANOV, B., «Fern-like Structures in the Wild Set of the Standard and Semistandard Maps in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ », *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, n.º 2, págs. 353-370, 1992.
- GIORGILLI, A.; LAZUTKIN, V. F., y SIMÓ, C., «Visualization of a Hyperbolic Structure in Area-Preserving Maps», *Regular and Chaotic Dynamics*, n.º 2, págs. 47-61, 1997.
- GÓMEZ, G.; HOWELL, K.; MASDEMONT, J., y SIMÓ, C., «Station Keeping Strategies for Translunar Libration Point Orbits», *Advances of the Astronautical Sciences*, n.º 99, 1998.
- GÓMEZ, G.; JORBA, A.; MASDEMONT, J., y SIMÓ, C., *Study of Poincaré Maps for Orbits near Lagrangian Points*, ESA Technical Report, 1993.
- GÓMEZ, G.; JORBA, A.; MASDEMONT, J., y SIMÓ, C., «Study of the Transfer from the Earth to a Halo Orbit around the Equilibrium Point L_1 », *Cel. Mechanics*, 55:1-22, 1993.
- GÓMEZ, G.; JORBA, A.; MASDEMONT, J., y SIMÓ, C., «Study of the Transfer between Halo Orbits», *Acta Astronautica*, n.º 43, págs. 493-520, 1998.
- GÓMEZ, G.; JORBA, A.; MASDEMONT, J., y SIMÓ, C., «Study of the Transfer between Halo Orbits in the Solar System», *Advances in the Astronautical Sciences*, n.º 84, parte 1, págs. 623-638, 1994.
- GÓMEZ, G.; LLIBRE, J.; MARTINEZ, R.; RODRÍGUEZ, J., y SIMÓ, C., «On the Optimal Station Keeping Control of Halo Orbits», *Acta Astronautica*, n.º 15, págs. 391-397, 1987.
- GÓMEZ, G., y SIMÓ, C., «Homoclinic and Heteroclinic Points in the Hénon Map», en *Proceed. Sitges Conference on Dynamical Systems and Chaos, Lect. Notes in Physics*, n.º 179, págs. 245-247, Springer, 1983.

- JORBA, À., y SIMÓ, C., «On the Reducibility of Linear Differential Equations with Quasiperiodic Coefficients», *J. Diff. Eq.*, n.º 98, págs. 111-124, 1992.
- LAZUTKIN, V. F., y SIMÓ, C., «Homoclinic Orbits in the Complex Domain», *Intern. Journal on Bifurcation and Chaos*, n.º 7, págs. 253-274, 1997.
- LLIBRE, J., MARTÍNEZ, R. y SIMÓ, C., «Transversality of the Invariant Manifolds Associated to the Lyapunov Family of Periodic Orbits near L_2 in the Restricted Three Body Problem», *J. Diff. Eq.*, n.º 58, págs. 104-156, 1985.
- LLIBRE, J., y SIMÓ, C., «The Hénon-Heiles Potential», *Actas III CEDYA*, págs. 183-206.
- LLIBRE, J., y SIMÓ, C., «Homoclinic Phenomena in the Three Body Problem», *J. Diff. Eq.*, n.º 37, págs. 444-465, 1980.
- LLIBRE, J., y SIMÓ, C., «Oscillatory Solutions in the Planar Restricted Three-Body Problem», *Math. Ann.*, n.º 248, págs. 153-184, 1980.
- MARTÍNEZ, R., y SIMÓ, C., «A Note on the Existence of Heteroclinic Orbits in the Planar Three Body Problem», en S. KUKSIN, V. LAZUTKIN y J. PÖSCHEL (eds.), *Seminar on Dynamical Systems, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, 1991*, págs. 129-139, Birkhäuser, 1993.
- NEISHTADT, A. I.; SIMÓ, C., y TRESCHKEV, D. V., «On Stability Loss Delay for a Periodic Trajectory», *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, V.19, págs. 253-278, Birkhauser-Verlag, Basel, Switzerland, 1995.
- OLVERA, A., y SIMÓ, C., «The Dynamics near Invariant Cantorian Sets of Perturbed Twist Maps», en M. G. VELARDE (ed.), *Synergetics, Order and Chaos*, págs. 698-705, World Scientific, 1988.
- OLVERA, A., y SIMÓ, C., «Elliptic non-Birkhoff Periodic Orbits in the Twist Maps», *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, n.º 3, págs. 165-185, 1993.
- OLVERA, A., y SIMÓ, C., «An Obstruction Method for the Destruction of Invariant Curves», *Physica D*, n.º 26, págs. 181-192, 1987.
- OLVERA, A., y SIMÓ, C., «The Obstruction Method and Some Numerical Experiments Related to the Standard Map», en P. H. RABINOWITZ (ed.), *Periodic Solutions of Hamiltonian Systems and Related Topics*, págs. 235-244, Reidel, 1987.
- SIMÓ, C., «Analytical and Numerical Computation of Invariant Manifolds», en D. BENEST y C. FROESCHLÉ (eds.), *Modern Methods in Celestial Mechanics*, págs. 285-330, Editions Frontières, 1990.
- SIMÓ, C., «Atractores extraños, variedades invariantes y dimensión Hausdorff», *Actas Jornadas matemáticas luso-espanholas*, volumen I, págs. 153-162, Aveiro, 1978.
- SIMÓ, C., «¿El caos? Síntesis de atractores extraños», *Fronteras de la Ciencia y la Tecnología*, n.º 14, págs. 56-60, 1997.
- SIMÓ, C., «Comme entendre el comportament no predictable dels sistemes deterministes», en *Ordre i Caos en Ecologia*, Publicacions de la UB, págs. 19-54, 1995.
- SIMÓ, C., «Effective Computations in Celestial Mechanics and Astrodynamics», en V. V. RUMYANTSEV y A. V. KARAPETYAN (eds.), *Modern Methods of Analytical Mechanics and their Applications, CISM Courses and Lectures*, n.º 387, Springer, 1998.
- SIMÓ, C., «Estabilitat de sistemes hamiltonians», *Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes*, Barcelona, vol. XLVIII, págs. 303-336, 1989.
- SIMÓ, C., «On the Hénon-Pomeau Attractor», *J. of Statistical Physics*, n.º 21, págs. 465-494, 1979.
- SIMÓ, C., «Homoclinic and Heteroclinic Phenomena in Some Hamiltonian Systems», en K. MEYER y D. SAARI (eds.), *Hamiltonian Dynamical Systems, Contemporary Mathematics*, n.º 81, págs. 193-212, AMS, 1988.
- SIMÓ, C., «Homoclinic Phenomena and Quasi-Integrability», en V. SZEBEHELY (ed.), *Stability of the Solar System and Its Minor Natural and Artificial Bodies*, págs. 305-316, D. Reidel Pub. Co., Holland, 1985.
- SIMÓ, C., «Invariant Curves of Perturbations of Non Twist Integrable Area Preserving Maps», *Regular and Chaotic Dynamics*, n.º 3, págs. 180-195, 1998.
- SIMÓ, C., «Measuring the Lack of Integrability in the J_2 Problem», en A. E. ROY (ed.), *Predictability, Stability and Chaos in the N-Body Dynamical Systems*, págs. 305-309, Plenum Press, 1991.
- SIMÓ, C., «Models matemàtics i món real», *Revista de Catalunya*, n.º 32, págs. 26-38, 1989.
- SIMÓ, C., «An Overall View on Conservative Maps in the Plane», en C. ALSINA, J. LLIBRE, C. MIRA, C. SIMÓ, G. TARGONSKI y R. THIBAUT (eds.), *European Conference on Iteration Theory (ECIT 87)*, págs. 56-73, World Scientific, Singapore, 1989.
- SIMÓ, C., «An Overview on Some Problems in Celestial Mechanics», Curso de verano sobre Iniciación a los Sistemas Dinámicos, El Escorial, 1997, preprint. Accesible en <http://www-ma1.upc.es/escorial>.
- SIMÓ, C., «Perturbations of Translations in the Two-Dimensional Torus: the Case near Resonance», *Actas VI CEDYA*, Universidad de Zaragoza, 1984.
- SIMÓ, C., «Puntos heteroclinicos y frontera de estabilidad», *Actas Jornadas matemáticas hispano-lusitanas*, págs. 1263-1269, Santander, 1979.
- SIMÓ, C., «Some Experiments with Planar Maps: Strange Attractor, Stable Zones and the Role of Unstable Invariant Manifolds», en M. ATTEIA, D. BANCEL y I. GUMOWSKI (eds.), *NonLinear Problems of Analysis in Geometry and Mechanics*, págs. 176-183, *Res. Notes in Math.* n.º 46, Pitman, 1981.
- SIMÓ, C., «Strange Attractors for Differential Delay Equations», en *Proceed. Sitges Conference on Dynamical*

- Systems and Chaos, Lect. Notes in Physics*, n.º 179, páginas 188-191, Springer, 1983.
- SIMÓ, C., «The Use of Time as a Complex Variable», *Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona*, vol. LV, 5, págs. 276-290, 1996.
 - SIMÓ, C. y STUCHI, T., «Center Stable/Unstable Manifolds and the Destruction of KAM Tori in the Planar Hill Problem», preprint, 1998.
 - SIMÓ, C. y SUSÍN, A., «Connections between Invariant Manifolds in the Collision Manifold of the Planar Three-Body Problem», en T. RATIU (ed.), *The Geometry of Hamiltonian Systems*, págs. 497-518, MSRI series, Springer, 1991.
 - SIMÓ, C., y TATJER, J. C., «Basins of Attraction Near Homoclinic Tangencies», *Erg. Th. & Dyn. Systems*, n.º 14, págs. 351-390, 1994.
 - SIMÓ, C., y TRESCHEV, D., «Evolution of the "Last" Invariant Curve in a Family of Area Preserving Maps: The Case of the Separatrix Map», preprint, 1997.
 - SIMÓ, C., y TRESCHEV, D., «Stability Islands in the Vicinity of Separatrices of Near-Integrable Symplectic Maps», preprint, 1996.