POLIVALENCIA DE LA MATEMÁTICA: CIENCIA, TÉCNICA, ARTE, JUEGO, FILOSOFÍA...

MIGUEL DE GUZMÁN
Real Academia de Ciencias

INTRODUCCIÓN

La matemática ha sido ciertamente la primera de las ciencias en alcanzar su madurez, en la Grecia antigua, ya con los matemáticos pitagóricos y mucho más con Euclides, Arquímedes y Apolonio. Desde entonces hasta hoy ha sido considerada como paradigma para todas las demás ciencias en sus maneras de proceder y de enfrentarse con los problemas que en ellas van apareciendo.

También es claro que la matemática, especialmente desde el siglo XVII, ha sido y sigue siendo la base fundamental del desarrollo tecnológico. La aplicabilidad del pensamiento matemático, incluso de ciertos de sus desarrollos que en épocas previas habían parecido más abstractos y desprovistos de conexiones con la realidad física, se ha manifestado más tarde de modo misterioso como la clave para entender y manejar mejor porciones de la realidad que parecían resistirse al tratamiento mediante otras técnicas más directas. Las aplicaciones de la matemática, por otra parte, han encontrado en nuestro tiempo un intenso reforzamiento gracias a los desarrollos de la informática y de las comunicaciones, que han hecho posibles muchas exploraciones que hace pocos años resultaban impensables.

Sin embargo, menos conocidas son otras facetas de la matemática igualmente influyentes en el desarrollo de nuestra civilización. La matemática es, en efecto, un método de pensamiento eficaz y sobrio que ha servido a muchos de los filósofos de diversas épocas, comenzando por los pitagóricos, para iniciar exploraciones penetrantes en las raíces de la estructura del Universo, y que hoy mismo manifiesta profundas conexiones con el pensamiento filosófico.

Y aunque probablemente por culpa de nuestro sistema educativo no se pueda reconocer fácilmente esta otra faceta, la matemática, en muchos de sus aspectos, nació, se desarrolló y sigue evolucionando con gran vitalidad gracias a los aspectos lúdicos y al carácter de creadora de una intensa belleza que muchas personas han sabido encontrar en ella.

A través de estas páginas intentaré poner de manifiesto algunos de estos múltiples aspectos de la matemática, eligiendo tres que tal vez resulten un tanto insólitos y sorprendentes para las personas que no han tenido oportunidad de introducirse a fondo en el mundo de la matemática o en su milenaria historia. Examinaremos primero la profunda relación entre matemáticas y juegos, luego la conexión que la matemática ha conservado a lo largo de los siglos con la filosofía y, finalmente, exploraremos en breves trazos algunos de los rasgos estéticos de la matemática.

MATEMÁTICAS Y JUEGOS

Introducción

¿Dónde termina el juego y dónde comienza la matemática seria? Una pregunta capciosa que admite múltiples respuestas. Para muchos de los que ven la matemática desde fuera, ésta, mortalmente aburrida, nada tiene que ver con el juego. En cambio, para los más de entre los matemáticos, la matemática nunca deja totalmente de ser un juego, aunque además de ello pueda ser otras muchas cosas.

El juego bueno, el que no depende de la fuerza o maña físicas, el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático. Las diferentes partes de la matemática tienen sus piezas, los objetos de los que se ocupa, bien determinados en su comportamiento mutuo a través de las definiciones de la teoría. Las reglas válidas de manejo de estas piezas son dadas por sus definiciones y por todos los procedimientos de razonamiento admitidos como válidos en el campo. Cuando la teoría es elemental, éstos no son muchos ni muy complicados y se adquieren bien pronto, lo cual no quiere decir que el juego sea trivial. Elemental quiere decir cerca de los elementos iniciales y no necesariamente simple. Existen problemas elementales desproporcionadamente complicados respecto a su enunciado. Un ejemplo lo constituye el problema de averiguar el mínimo de las figuras en las que una aguja unitaria puede ser invertida en el plano por movimientos continuos. Cuando la teoría no es elemental es generalmente porque las reglas usuales del juego se han desarrollado extraordinariamente en número y en complejidad y es necesario un intenso esfuerzo para hacerse con ellas y emplearlas adecuadamente. Son herramientas muy poderosas que se han ido elaborando, cada vez más sofisticadas, a lo largo de los siglos. Tal es, por ejemplo, la teoría de la medida e integral de Lebesgue en el análisis superior.

La matemática así concebida es un verdadero juego que presenta el mismo tipo de estímulos y de actividad que se da en el resto de los juegos intelectuales. Uno aprende las reglas, estudia las jugadas fundamentales experimentando en partidas sencillas, observa a fondo las partidas de los grandes jugadores, sus mejores teoremas, tratando de asimilar sus procedimientos para usarlos en condiciones parecidas, trata finalmente de participar más activamente enfrentándose a los problemas nuevos que surgen constantemente debido a la riqueza del juego, o a los problemas viejos aún abiertos esperando que alguna idea feliz le lleve a ensamblar de modo original y útil herramientas ya existentes o a crear alguna nueva que conduzca a la solución del problema.

Por esto no es de extrañar en absoluto que muchos de los grandes matemáticos de todos los tiempos hayan sido agudos observadores de los juegos, participando muy activamente en ellos, y que muchas de sus elucubraciones, precisamente por ese entreveramiento peculiar de juego y matemática, que a veces los hace indiscernibles, hayan dado lugar a nuevos campos y modos de pensar en lo que hoy consideramos matemática profundamente seria.

Impacto de los juegos en el desarrollo de la matemática

La historia antigua ha sido propensa a preservar los elementos solemnes de la actividad científica, pero uno no puede menos de sospechar que muchas de las profundas cavilaciones de los pitagóricos, por ejemplo alrededor de los números, tuvieron lugar mientras jugaban con configuraciones diferentes que formaban con las piedras. El llamado *problema bovino de Arquímedes,* álgebra hecha con procedimientos rudimentarios, tiene un cierto sabor lúdico, así como otras muchas de sus creaciones matemáticas originales. Euclides fue, al parecer, el primer gran pedagogo que supo utilizar, en una obra perdida llamada *Pseudaria* (Libro de Engaños), el gran valor didáctico en matemática de la sorpresa producida por la falacia y la aporía.

En la Edad Media, Leonardo de Pisa (ca.1170-ca.1250), mejor conocido hoy y entonces como Fibonacci, cultivó una matemática numérica con sabor a juego con la que, gracias a las técnicas aprendidas de los árabes, asombró poderosamente a sus contemporáneos hasta el punto de ser proclamado oficialmente por el emperador Federico II como *Stupor Mundi.*

En la Edad Moderna, Geronimo Cardano (1501-1576), el mejor matemático de su tiempo, escribió el *Liber de ludo aleae,* un libro sobre juegos de azar con el que se anticipó en más de un siglo a Pascal y Fermat en el tratamiento matemático de la probabilidad. En su tiempo, como tomando parte en este espíritu lúdico, los duelos medievales a base de lanza y escudo dieron paso a los duelos intelectuales consistentes en resolver ecuaciones algebraicas cada vez más difíciles, con la participación masiva y más o menos deportiva, de la población estudiantil, de Cardano mismo y otros contendientes famosos como Tartaglia y Ferrari.

El famoso problema del Caballero de Meré, consistente en saber cómo deben ser las apuestas de dos jugadores que, habiendo de alcanzar n puntos con sus dados, uno ha obtenido p y el otro q puntos en una primera jugada, fue propuesto por Antoine Gobaud, Caballero de Meré (1610-1685) a Pascal (1623-1662). De la correspondencia entre éste y Fermat (1601-1665) a propósito del problema, surgió la moderna teoría de la probabilidad.

Leibniz (1646-1716) fue un gran promotor de la actividad lúdica intelectual: «Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos... Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente», escribía en una carta en 1715. Y en particular comenta en otra carta en 1716 lo mucho que le agrada el ya entonces popular solitario de la cruz, y lo interesante que le resulta jugarlo al revés.

En 1735, Euler (1707-1783) oyó hablar del problema de los siete puentes de Königsberg, sobre la posibilidad de organizar un paseo que cruzase todos y cada uno de los puentes una sola vez (camino euleriano). Su solución constituyó el comienzo vigoroso de una nueva rama de la matemática, la teoría de grafos, y con ella de la topología general.

También el espíritu matemático de la época de Euler participaba fuertemente del ánimo competitivo de la época de Cardano. Johann Bernoulli (1667-1748) lanza el problema de la braquistócrona como un reto a los mejores matemáticos de su tiempo. En este duelo participaron con ardor nada menos que Jakob Bernoulli (creador, precisamente con su solución al problema, del cálculo de variaciones), Leibniz, Newton y Huygens.

Se cuenta que Hamilton (1805-1865) sólo recibió dinero directamente por una de sus publicaciones y ésta consistió precisamente en un juego matemático que comercializó con el nombre de *Viaje por el Mundo.* Se trataba de efectuar por todos los vértices de un dodecaedro regular –las ciudades de ese mundo– un viaje que no repitiese visitas a ciudades circulando por los bordes del dodecaedro y volviendo al punto de partida (camino hamiltoniano). Esto ha dado lugar, en teoría de grafos, a problemas muy interesantes en torno a los grafos que admiten un camino hamiltoniano.

Los biógrafos de Gauss (1777-1855) cuentan que el *Princeps Mathematicorum* era un gran aficionado a jugar a las cartas y que cada día anotaba cuidadosamente las manos que recibía para analizarlas después estadísticamente.

Hilbert (1862-1943), uno de los grandes matemáticos de nuestro tiempo, es responsable de un teorema que tiene que ver con los juegos de disección: dos polígonos de la misma área admiten disecciones en el mismo número de triángulos iguales.

John von Neumann (1903-1957), otro de los matemáticos más importantes de nuestro siglo, escribió con Oskar Morgenstern en 1944 un libro titulado *Teoría de juegos y conducta económica*. En él analizan los juegos de estrategia donde aparece en particular el teorema de *minimax*, pieza fundamental para los desarrollos matemáticos sobre el comportamiento económico.

Según cuenta Martin Gardner, Albert Einstein (1879-1955) tenía toda una estantería de su biblioteca particular dedicada a libros sobre juegos matemáticos.

El fundamento matemático de los juegos

Estas muestras del interés de los matemáticos de todos los tiempos por los juegos matemáticos, que se podrían ciertamente multiplicar, apuntan a un hecho indudable con dos vertientes. Por una parte, son muchos los juegos con un contenido matemático profundo y sugerente, y por otra parte, una gran porción de la matemática de todos los tiempos tiene un sabor lúdico que la asimila extraordinariamente al juego.

El primer aspecto se puede poner bien de manifiesto con sólo ojear un poco el repertorio de juegos más conocidos. *La aritmética* está inmersa en los cuadrados mágicos, cambios de monedas, juegos sobre pesadas, adivinación de números... *La teoría elemental de números* es la base de muchos juegos de adivinación fundamentados en criterios de divisibilidad, aparece en juegos que implican diferentes sistemas de numeración, en juegos emparentados con el *Nim*... *La combinatoria* es el núcleo básico de todos los juegos en los que se pide enumerar las distintas formas de realizar una tarea, muchos de ellos sin resolver aún, como el de averiguar el número de formas distintas de plegar una tira de sellos, el problema del viajante... *El álgebra* interviene en muchos acertijos sobre edades, medidas, en el famoso juego de los 15, en el problema de las ocho reinas... *La teoría de grupos,* en particular el grupo de Klein, es una herramienta importante para analizar ciertos juegos con fichas en un tablero en los que se «come» al saltar al modo de las damas. *La teoría de grafos* es una de las herramientas que aparece más frecuentemente en el análisis matemático de los juegos. Nació con los puentes de Königsberg, se encuentra en el juego de Hamilton, da la estrategia adecuada para los acertijos de cruces de ríos, como el del pastor, la oveja, la col y el lobo, el de los maridos celosos, y resuelve también muchos otros más modernos como el de los cuatro cubos del llamado *Locura Instantánea*... *La teoría de matrices* está íntimamente relacionada también con los grafos y juegos emparentados con ellos. Diversas formas de topología aparecen tanto en juegos de sabor antiguo –el de las tres granjas y tres pozos, por ejemplo– como en juegos más modernos entre los que cabe destacar los relacionados con la banda de Möbius, problemas de coloración, nudos, rompecabezas de alambres y anillas... *La teoría del punto fijo* es básica en algunos acertijos profundos y sorprendentes como el del monje que sube a la montaña, el pañuelo que se arruga y se coloca sobre una réplica suya sin arrugar... *La geometría* aparece de innumerables formas en falacias, disecciones, transformación de configuraciones con cerillas, poliominós planos y espaciales... *La probabilidad* es, por supuesto, la base de todos los juegos de azar, de los que precisamente nació. *La lógica* da lugar a un sinfín de acertijos y paradojas muy interesantes que llaman la atención por su profundidad y por la luz que arrojan sobre la estructura misma del pensamiento y del lenguaje.

Matemáticas con sabor a juego

Por otra parte, resulta igualmente fácil señalar problemas y resultados profundos de la matemática que rezuman sabor a juego. Citaré unos pocos entresacados de la matemática más o menos contemporánea.

El teorema de Ramsey, en su forma más elemental, afirma que si tenemos seis puntos sobre una circunferencia, los unimos dos a dos, y coloreamos arbitrariamente los segmentos que resultan de rojo o de verde, entonces necesariamente hay al final un triángulo con tales segmentos por lado que tiene sus tres lados del mismo color.

El lema de Sperner, importante en la teoría del punto fijo, afirma que si en un triángulo ABC se efectúa una triangulación (una partición en un número finito de triángulos tales que cada dos de ellos tienen en común un lado, un vértice, o nada) y se nombran los vértices de los triángulos de la triangulación con A, B, C, de modo que en el lado AB no haya más que las letras A o B, en el AC nada más que A o C y en BC nada más que B o C, entonces necesariamente hay al menos un triángulo de la triangulación que se llama ABC.

El teorema de Helly afirma que si en un plano hay un número cualquiera de conjuntos convexos y compactos tales que cada tres tienen un punto en común, entonces todos ellos tienen al menos un punto en común.

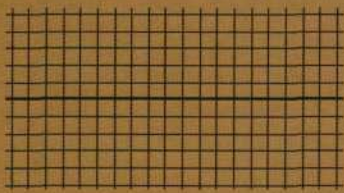
El problema de Lebesgue, aún sin resolver, pregunta por el mínimo del área de aquellas figuras capaces de cubrir cualquier conjunto del plano de diámetro menor o igual que 1.

El siguiente *problema de la aguja en un convexo tridimensional* está también aún abierto: ¿Cuál es el cuerpo convexo de volumen mínimo capaz de albergar una aguja de longitud 1 paralela a cada dirección dada? Se sospecha, por analogía con el caso bidimensional, que es el tetraedro regular de altura 1, pero no hay demostración de ello.

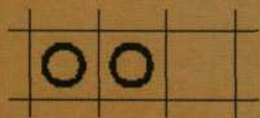
La rana saltarina

Tal vez conozcas el juego de la rana saltarina.

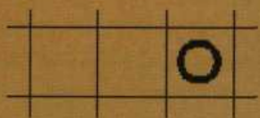
Si no es así, tanto mejor. Para jugarlo puedes hacerte en un papel bien grande una cuadrícula de cuadros grandes en los que quepa una peseta. En la cuadrícula señalarás una línea horizontal gruesa a cinco cuadros de la línea horizontal superior. Algo así:



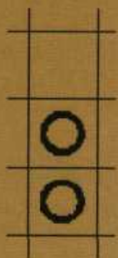
El juego consiste en lo siguiente. Colocas al principio un número de pesetas, el que quieras, distribuidas como te parezca mejor, cada una en algún cuadro de los de debajo de la raya gorda. Una vez colocadas, vas a empezar a mover y retirar pesetas del tablero. Se puede mover sólo horizontalmente (a derecha e izquierda) y verticalmente (hacia arriba) saltando por encima de otra contigua siempre que el cuadro al que se salta esté vacío, comiendo (retirando) la moneda sobre la que se ha saltado. Por ejemplo, de esta situación



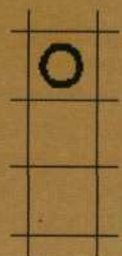
se puede pasar a esta otra



o de ésta



a esta otra



Se trata de situar al principio las fichas o monedas debajo de la raya de modo que logres colocar una moneda con los movimientos permitidos lo más alta posible por encima de la raya gorda. Cuando hayas practicado un poco puedes tratar de hacerlo con el mínimo número de monedas.

Consecuencias para la enseñanza de la matemática

La matemática es, en gran parte, juego, y el juego puede, en muchas ocasiones, analizarse mediante instrumentos matemáticos. Pero, por supuesto, existen diferencias sustanciales entre la práctica del juego y la de la matemática. Generalmente, las reglas del juego no requieren introducciones largas, complicadas ni tediosas. En el juego se busca la diversión y la posibilidad de entrar en acción rápidamente. Muchos problemas matemáticos, incluso algunos muy profundos, permiten también una introducción sencilla y una posibilidad de acción con instrumentos bien ingenuos, pero la matemática no es sólo diversión, sino ciencia e instrumento de exploración de su realidad propia mental y externa, y así, ha de plantearse no las preguntas que quiere, sino las que su realidad le propone de modo natural. Por eso muchas de sus cuestiones espontáneas le estimulan a crear instrumentos sutiles cuya adquisición no es tarea liviana. Sin embargo, es claro que, especialmente en la tarea de iniciar a los más jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo que lo haga mucho más motivador, estimulante, incluso agradable y, al menos para algunos, apasionante. De hecho, como veremos, han sido numerosos los intentos de presentar sistemáticamente los principios matemáticos que rigen muchos de los juegos de todas las épocas, con el fin de poner más en claro las conexiones entre juegos y matemáticas. Desafortunadamente para el desarrollo científico en nuestro país, la aportación española en este campo ha sido casi nula. Nuestros científicos y nuestros enseñantes se han tomado demasiado en serio su ciencia y su enseñanza y han considerado ligero y casquivano cualquier intento de mezclar placer con deber. Sería deseable que nuestros profesores, con una visión más abierta y más responsable, aprendieran a aprovechar los estímulos y motivaciones que este espíritu de juego puede ser capaz de infundir en sus estudiantes.

Notas sobre la literatura clásica sobre juegos

Los datos que siguen acerca de la historia de la literatura sobre recreaciones matemáticas están tomados fundamentalmente del artículo de *Schaaf* en la *Encyclopaedia Britannica* titulado *Number Games and Other Mathematical Recreations,* que contiene una excelente exposición de los juegos más significativos y de las obras más importantes. Pienso que los más seriamente aficionados a los juegos matemáticos agradecerán estas breves notas, que servirán al mismo tiempo para que los más escépticos puedan comprobar al menos con qué tesón ha sido y es cultivado el campo en otros países.

Aunque en la Edad Media y comienzos de la Moderna se dieron algunos intentos esporádicos de formalización y análisis matemático de juegos, con Fibonacci (1202), Robert Recorde (1542) y Geronimo Cardano (1545), el gran primer sistematizador de donde bebieron abundantemente posteriores imitadores fue Claude-Gaspar Bachet de Méziriac, quien en 1612 publicó su obra de vanguardia en este campo *Problémes plaisans et delectables qui se font par les nombres.* A él mismo se debe también la publicación en francés de *Diophanti,* traducción de un texto griego sobre teoría de números que ejerció un gran influjo sobre la historia de la matemática, sobre todo a través de Fermat. El libro de recreaciones de Bachet estaba basado sobre todo en propiedades aritméticas y contiene los problemas más clásicos sobre juegos de cartas, relojes, determinación del número de pesas para pesar 1, 2, 3..., 40 kilos, problemas de cruces...

En 1624, un jesuita francés, Jean Leurechon, escribió, bajo el seudónimo de *van Etten,* una obra, *Recréations Mathématiques,* basada en la de Bachet, pero que tuvo más exito que la de éste, puesto que alcanzó las 30 ediciones ya en 1700. La obra de *van Etten* fue modelo para sus continuadores Claude Mydorge (1630), en Francia, y Daniel Schwenter, en Alemania. Este último, profesor de hebreo, lenguas orientales y matemáticas, añadió gran cantidad de material compilado por él mismo. Su obra póstuma apareció en 1636 con el título *Deliciae Physico-Mathematicae oder Mathematische und Philosophische Erquickstunden,* y la reedición de ella en 1651-1653 fue por algún tiempo la obra más completa en su género.

Mientras tanto había aparecido en Italia en 1641-1642 la obra en dos volúmenes bajo el complicado título *Apiaria Universae Philosophiae Mathematicae, in quibus paradoxa et nova pleraque machinamenta exhibentur,* escrita por el jesuita Mario Bettini. Fue seguida en 1660 por un tercer volumen *Recreationum Mathematicarum Apiaria Novissima...*

En Inglaterra, William Leybourn publica en 1694 un libro a medio camino entre el texto y la recreación, con la intención de «apartar a la juventud de los vicios propios a los que es inclinada». Su título fue *Pleasure with Profit: Consisting of Recreations of Divers Kinds...*

La obra que realmente marca la pauta para los muchos autores que aparecerán en los siglos XVIII y XIX fue la de Jacques Ozanam, quien en 1694 publicó *Récréations Mathématiques et Physiques,* obra inspirada en las de Bachet, Leurechon, Mydorge y Schwenter, que fue revisada más tarde por el historiador de la matemática Montucle.

Al final del siglo XIX aparecen los cuatro volúmenes de Edouard Lucas, especialista en teoría de números, titulados *Récréations mathématiques* (1882-1894), que pasa a ser la obra clásica durante algún tiempo. Contemporáneo de Lucas es Lewis Carroll, el autor de *Alicia,* gran aficionado a los puzzles lógicos y juegos matemáticos, que publicó, entre otras cosas, *Pillow Problems* y *A Tangled Tale* (1885-1895).

En la primera mitad del siglo XX, los nombres más importantes en América son los de los dos Sam Loyd, padre e hijo, grandes especialistas en puzzles mecánicos, autores del famosísimo juego de los 15, que en su tiempo causó un furor parecido al del cubo de Rubik en nuestros días. En Alemania se destacan Hermann Schubert con sus *Zwölf*

Geduldpiele (1907-1909) en tres volúmenes, así como Wilhelm Ahrens con sus dos volúmenes *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* (1904-1920). En Inglaterra destacan Henry Dudeney (1917-1967) y sobre todo la gran obra de W. W. Rouse Ball, *Mathematical Recreations and Essays* (1892, primera edición), otro de los clásicos, con gran erudición histórica, en cuyas páginas puede apreciarse documentadamente, a través de las numerosas notas, el impacto de los juegos sobre los matemáticos y las matemáticas de todos los tiempos. El geómetra H. S. M. Coxeter revisó en 1938 la undécima edición. En Bélgica hay que destacar a Maurice Kraitchik, editor de la revista *Sphinx* y compilador de varios libros entre 1900 y 1942. En Holanda destaca también Fred Schuh, con su obra *Wonderlijke Problemen,* publicada en 1943.

A partir de los años cincuenta, Martin Gardner comenzó a publicar con gran éxito su artículo mensual en las páginas de *Scientific American,* y su nombre, gracias a la difusión de esa revista y a las compilaciones sucesivas de sus mejores artículos, ha llenado con enorme éxito el campo hasta finales de los años setenta. De las obras más recientes hay que destacar especialmente la de Berlekamp, Conway y Guy, titulada *Winning Ways,* en dos volúmenes, publicada en 1982, que por su amplitud, sistematización y profundidad alcanzará sin duda un gran éxito entre los aficionados más concienzudos.

MATEMÁTICAS Y FILOSOFÍA

La permamente conexión de la matemática con el pensamiento filosófico

En la historia del pensamiento humano ha habido una constante interacción entre sus vertientes filosófica y matemática. Los matemáticos cuyas reflexiones han tenido influencia sobre el progreso del pensamiento filosófico son numerosos. Como muestra se pueden citar los nombres de Pitágoras en el mundo antiguo, Descartes, Pascal y Leibniz, en el siglo XVII, el siglo de los genios en matemática; y Hilbert, Russelll, Whitehead, Wittgenstein, Weyl y Gödel, en nuestro siglo. Los movimientos filosóficos que han buscado su apoyo, su inspiración y hasta su modelo en el estilo y modo de proceder en la matemática son multitud.

Ante este fenómeno innegable se debe preguntar uno por las razones intrínsecas que puedan explicarlo. ¿Por qué se acerca el hombre-filósofo al hombre-matemático? El filósofo intenta comprender y desentrañar los muchos enigmas que el mundo real, su mundo interno y el mundo exterior le proponen. Pero la realidad se presenta demasiado enmarañada para tratar de abordarla tal cual es. El mundo de la matemática pretende ser una simplificación, como el armazón interno, de unos cuantos aspectos importantes del mundo real. Es un croquis parcial del mundo, hecho por el hombre a su medida. Es natural que el filósofo de todos los tiempos, de forma más o menos consciente, ante su imposibilidad de penetrar directamente en la maraña de la realidad, haya considerado certeramente la matemática un primer campo de operaciones extraordinariamente valioso en su camino hacia zonas más ricas de la realidad. Tal fue la actitud de los pitagóricos, transmitida con su influyente estilo peculiar por Platón y retomada en diversas ocasiones por los filósofos a lo largo de los siglos hasta nuestros días. Ese talante de pensamiento es lo que hace aparecer aquellos filósofos antiguos tan «contemporáneos» ante nuestros ojos. Más ajustado sería decir que el estilo de pensamiento contemporáneo conserva con bastante fidelidad muchos de los rasgos del pitagorismo inicial.

Pero hay otros aspectos interesantes en la matemática que atraen de modo natural al filósofo. La dinámica interna del pensamiento matemático, la lógica de su estructura, simple, tersa, sobria, clara, hacen de él un modelo de reflexión fiable que suscita el consenso de todos. Los filósofos interesados en aclarar los misterios del conocimiento humano han visto en él un campo ideal de trabajo donde poner a prueba sus hipótesis y teorías.

Por otra parte, en la matemática aparecen muchos aspectos generales del conocimiento desligados de otras componentes, de naturaleza sensorial, volitiva..., lo que hace su estudio más simple.

Incluso, más recientemente, los psicólogos interesados por los aspectos relacionados con el estudio de la creatividad humana, y también quienes estudian la inteligencia artificial, han acudido a la matemática por razón de su carácter paradigmático en los temas de su interés.

La matemática es, pues, para el filósofo, por diversos motivos, un campo útil en sus propias exploraciones. Pero también el matemático tiene sus propias razones bien poderosas para aproximarse a la filosofía.

Desde los pitagóricos, los matemáticos se han interesado profundamente por lo que en el fondo significa su propia actividad, planteándose un sinfín de preguntas inquietantes. ¿De dónde surgen las estructuras matemáticas? ¿Hay matemática en las cosas? ¿La hay de algún modo en el exterior del hombre? ¿Están las estructuras matemáticas solamente en la mente humana? ¿Cómo es la interacción mente-mundo para que de ella pueda surgir la matemática? ¿Cómo es que el mundo externo parece adaptarse a estructuras mentales que se han desarrollado como por su propio dinamismo, sin ninguna intencionalidad práctica? ¿Cómo explicar esa irrazonable efectividad de la matemática? Son muchas las preguntas que surgen de modo natural ante el matemático reflexivo que no queda satisfecho con el mero juego manipulativo –que por otra parte resulta apasionante– de sus sofisticadas técnicas.

Pero el más profundo elemento del pensamiento matemático es, sin duda, el reto principal con el que se ha enfrentado desde el inicio de su existencia: el señorío de los procesos infinitos de pensamiento. La matemática no sería más que una tautología –inmensa y creciente, eso sí, pero una tautología al fin y al cabo– de no ser por la presencia de diversos tipos de procesos infinitos. ¿Cómo explicar la posibilidad y el sentido de tales procesos? ¿Qué significa el infinito matemático en relación con la estructura de la mente humana? ¿Qué implicaciones tiene la presencia del infinito en la matemática?

Tal vez se podría ensayar una explicación con la siguiente orientación: En la apertura inicial de la mente al conocimiento intelectual, a cualquier conocimiento intelectual, está presente como horizonte, como condición de posibilidad de cualquier conocimiento concreto, el ser en su infinitud, en su inconcreción. En este horizonte debe destacarse el ser concreto, limitado, y este horizonte es lo que hace posible cualquier otro conocimiento. No nos lo planteamos como objeto. Es el fondo de nuestra visión cognoscitiva, y de no estar ahí, no habría nada cognoscible. La mente está abierta, por su propia naturaleza, a este horizonte. Es algo constitutivo de su forma de ser. El ser concreto y limitado se destaca en ella precisamente de modo negativo, mostrando su limitación, su modo de ser particular que niega el modo de ser de otros muchos, afirmando así implícitamente que el ser importante es el que no tiene modo. Es así como lo infinito está presente en el principio de todo quehacer matemático. Del uno al dos... y ya está ahí el infinito presente, y aun en el uno mismo, a través de la conciencia de que no lo llena todo, de que es repetible en cierto modo. Pero esta presencia, como horizonte, del infinito, no se deja atrapar como objeto por la mente matemática plenamente, sin dejar residuos.

No es, pues, de extrañar que el enfrentamiento con el infinito sea la gran fuente de fecundidad del pensamiento matemático, pero al mismo tiempo la causa de las frustraciones más profundas en aquellos que han pensado en algún momento en tenerlo aferrado entre los dedos. Los momentos más fecundos de la historia de la matemática han tenido lugar precisamente en los instantes de audacia hacia un nuevo tipo de comprensión del infinito: pitagóricos, descubrimiento del irracional, Zenón, cálculo infinitesimal, dominio de los procesos de paso al límite, series, integral... por Cauchy, Weierstrass, teoría de conjuntos de Cantor, teorema de Gödel..., teorías de conjuntos no cantorianas...

En el siglo XX ha tenido lugar el resultado más espectacular en lo que se refiere a las consecuencias de la presencia del infinito en la matemática: el teorema de Gödel. Durante este siglo, la matemática ha experimentado un crecimiento sin precedentes. Se han creado multitud de métodos eficaces para atacar problemas viejos y nuevos, como, por ejemplo, la teoría de distribuciones. Se han obtenido teorías enormemente fructíferas desde los puntos de vista más diversos, tanto desde la óptica de la matemática fundamental como de la matemática aplicada. Por poner un ejemplo, la teoría de sistemas dinámicos. Se han obtenido teoremas que vienen a culminar siglos de trabajo de la comunidad matemática, tales como el de la clasificación de los grupos simples finitos o como el teorema de Fermat.

Y, sin embargo, desde el punto de vista de la necesaria autocomprensión de lo que la actividad matemática es en realidad, ningún teorema ni teoría pueden ser comparados en profundidad e importancia para el pensamiento matemático con lo que representa el teorema de Gödel sobre la necesaria incompleción de cualquier sistema matemático. En este aspecto, el auténtico teorema del siglo XX, mucho más que el de Fermat o el de los cuatro colores, será, para la historia, el teorema de Gödel.

El teorema de Gödel es la respuesta tajante y frustradora al sueño que Hilbert expresaba en 1925, en su artículo famoso «Über das Unendliche»: «*En cierto sentido la matemática se ha convertido en una corte de arbitraje, un tribunal supremo para decidir cuestiones fundamentales sobre una base concreta en la que todos pueden concordar y donde cada afirmación sea controlable... Un ejemplo del tipo de cuestiones fundamentales que pueden ser tratadas de este modo es la tesis de que todo problema matemático es soluble. Todos nosotros estamos convencidos de que realmente es así. De hecho uno de los principales atractivos para atacar un problema matemático es que siempre oímos esta voz dentro de nosotros: Ahí está el problema, encuentra la contestación, siempre la puedes encontrar puramente pensando, pues en matemática no hay ningún* ignorabimus».

Hilbert trató de realizar este sueño de cerciorarse del «no ignoraremos» a través del proceso de formalización, es decir, tratando de entender la matemática como un sistema formal, una especie de juego de símbolos, como las fichas de ajedrez, en un principio desprovistos por sí mismos de significado, que lo adquieren a través de las convenciones iniciales de los postulados o axiomas del sistema. Estos objetos se manipulan a través de las reglas de manejo que sus definiciones introducen y a través de las reglas de implicación lógica en las que todos convenimos. Así van resultando los teoremas del sistema. Se trataría entonces de asegurarse de que cualquier proposición que se pueda plantear en el sistema, con sentido dentro del mismo, podría ser demostrada o refutada, es decir, su negación demostrada.

En su artículo «Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los *Principia Mathematica* y sistemas emparentados», en 1931, Kurt Gödel acababa con la esperanza de Hilbert. En cualquier sistema formal en el que se pueda desarrollar la aritmética existen proposiciones legítimas del sistema que son indecidibles, es decir, ni su afirmación ni su negación son demostrables. Y una de ellas es la que afirma la consistencia del sistema, es decir, la imposibilidad de que en él aparezcan contradicciones.

No trataremos de perseguir aquí en profundidad las implicaciones profundas que el teorema de Gödel ha causado sobre la concepción de la matemática. Solamente quisiera presentar unos pocos testimonios, a modo de confesiones, de matemáticos que se hacen eco del impacto que la nueva visión ha producido en ellos.

Bertrand Russell afirmaba en 1901 que «el edificio de las verdades matemáticas se mantiene inconmovible e inexpugnable ante todos los proyectiles de la duda cínica».

En 1924 ya había cambiado considerablemente de opinión. Para él, la lógica y la matemática, al igual que, por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell, «son aceptadas debido a la verdad observada de algunas de sus consecuencias lógicas». En 1959, en la descripción de su itinerario filosófico, afirma: «La espléndida certeza que siempre había esperado encontrar en la matemática se perdió en un laberinto desconcertante».

El mismo Carnap, de la corriente neopositivista, al que en 1930 se podía oír ponderar la matemática como «la más cierta de todas las ciencias», señala en 1958 como una de las analogías principales entre física y matemática «la imposibilidad de la certeza absoluta».

Hermann Weyl, uno de los matemáticos más profundos de nuestro siglo, se percató, incluso antes de que Gödel publicara su contribución sobre los fundamentos, de que la matemática era «irremisiblemente falible». Y en 1949 presenta lo que para él debe ser la adecuada interpretación de la matemática como ciencia: *«Ningún Hilbert será capaz de asegurar la consistencia para siempre; hemos de estar satisfechos de que un sistema axiomático simple de matemáticas haya superado hasta el presente el test de nuestros elaborados experimentos matemáticos... Una matemática genuinamente realista debería concebirse, en parangón con la física, como una rama de la interpretación teorética del único mundo real y debería adoptar la misma actitud sobria y cautelosa que manifiesta la física hacia las extensiones hipotéticas de sus fundamentos».*

John von Neumann afirma asimismo en 1947 que *«la matemática clásica, aunque nunca más se pudiera estar absolutamente seguro de su fiabilidad... se sostiene sobre un fundamento al menos tan firme como, por ejemplo, la existencia del electrón. En consecuencia, si se está dispuesto a aceptar las ciencias, se puede aceptar también el sistema de la matemática clásica».* Y confiesa también cómo experimentó el mismo itinerario mental común a tantos matemáticos del siglo XX: «Yo mismo reconozco con qué humillante facilidad cambiaron mis puntos de vista respecto de la verdad absoluta de la matemática... y cómo cambiaron tres veces sucesivas».

Quine, uno de los lógicos matemáticos más importantes del siglo XX, afirmaba ya en 1958, desde su perspectiva, lo siguiente: *«Lo más razonable es considerar la teoría de conjuntos, y la matemática en general, como consideramos las porciones teóricas de las ciencias naturales: en cuanto que contienen verdades o hipótesis que han de ser vindicadas menos por la pura luz de la razón que por la contribución indirecta y sistemática que hacen a la organización de los datos empíricos en las ciencias naturales».*

En 1956, Imre Lakatos introduce en la matemática los conceptos filosóficos sobre la ciencia de Karl Popper. Un resultado práctico de sus investigaciones fue el siguiente programa. Lo primero que hay que hacer es dejarse en matemáticas de sentimentalismos apegados a las verdades absolutas de los pitagóricos y platónicos: *«¿Por qué no admitir honestamente la falibilidad matemática y tratar de defender la dignidad del conocimiento falible frente al escepticismo cínico más bien que tratar de engañarnos a nosotros mismos creyendo que seremos capaces de arreglar invisiblemente el último jirón en el tejido de nuestras* "últimas" *intuiciones?».*

Como se ve, de acuerdo con la visión de aquellos que más han pensado en este último siglo sobre la naturaleza profunda del quehacer matemático, hay que entender la matemática como un proceso tentativo de acercamiento a la realidad que no se puede soñar en realizar de un golpe ni completamente. No tratamos de verdades inmutables ni infalibles. La matemática es una actividad del hombre, vieja como la música y la poesía, y que, como ellas, persigue una cierta armonía y belleza, esas que puede ciertamente proporcionar la estructura mental ágil, limpia y elegante de las construcciones matemáticas. La causa profunda de esta incompleción de la matemática es la presencia en ella de los procesos infinitos. Una presencia a la que la matemática no puede ni debe renunciar. Lo nuestro es lo infinito, sí, pero acompañado por la conciencia de la falibilidad de nuestros procesos de acercamiento a él y del empeño de corrección de nuestros errores cuando estos sean reconocidos.

Como hemos tenido ocasión de comprobar, especialmente a través de estas consideraciones relativas al infinito matemático, el pensamiento filosófico y el matemático, ciertamente dos pilares de nuestra cultura, se encuentran intensamente entreverados. Vamos a considerar a continuación algunas de las relaciones del quehacer matemático con otro aspecto importante de nuestra cultura como es el arte.

MATEMÁTICAS Y ARTE

El quehacer matemático y el arte

Las relaciones entre las matemáticas y el arte son múltiples. Muchos son los artistas que han extraído su inspiración de las matemáticas, y muchos han sido los que se han apoyado en ellas para construir y analizar estructuras artísticas, musicales, poéticas, arquitectónicas, etc. Dejando a un lado tales reflexiones, que nos podrían llevar muy lejos, trataremos ahora de concentrarnos en la consideración de la matemática misma como arte.

La afirmación de la naturaleza artística de la matemática puede sonar extraña en muchos oídos. Si arte es la producción por parte del hombre de un objeto bello, espero que tal afirmación resulte justificada al término de las notas que siguen. Para los pitagóricos, la armonía, uno de los ingredientes de la belleza, va unida al número en la constitución ontológica de todo el universo. Aristóteles mismo se expresa así en su *Metafísica* (Libro XII, cap. III, 9): *«Las formas que mejor expresan la belleza son el orden, la simetría, la precisión. Y las ciencias matemáticas son las que se ocupan de ellas especialmente».*

Son muchos los testimonios que confirman la existencia de un verdadero placer estético en la creación y contemplación matemática. Así se expresa H. Poincaré en *El valor de la ciencia*: «*Más allá de la belleza sensible, coloreada y sonora, debida al centelleo de las apariencias, única que el bárbaro conoce, la ciencia nos revela una belleza superior, una belleza inteligible, únicamente accesible, diría Platón, "a los ojos del alma", debida al orden armonioso de las partes, a la correspondencia de las relaciones entre ellas, a la euritmia de las proporciones, a las formas y a los números. El trabajo del científico que descubre las analogías entre dos organismos, las semejanzas entre dos grupos de fenómenos cualitativamente diferentes, el isomorfismo de dos teorías matemáticas es semejante al del artista*».

Tal vez uno de los testimonios más elocuentes de esta afirmación sea el diario personal de Gauss, escrito para él mismo especialmente en la etapa anterior a sus veinte años, período de muchos de sus grandes descubrimientos, en el que va anotando, con un laconismo lleno de fuerza y entusiasmo, sus observaciones sobre el universo matemático que se va desvelando ante sus ojos asombrados.

Pero este mismo placer estético en la contemplación matemática se da, en menor grado naturalmente, en todos aquellos a quienes se les presentan adecuadamente los hechos y métodos más salientes de la matemática elemental. Por supuesto que el goce estético de la matemática se encuentra en el mundo de la armonía intelectual, y así su percepción requiere una preparación inicial tanto mayor cuanto más elevado sea el objeto que se presenta. Por otra parte, así como el placer que puede proporcionar la pintura y la música, dirigidas a nuestros sentidos, al menos de modo inmediato, es perceptible hasta cierto grado con una contemplación más o menos pasiva, el placer estético de la matemática exige sin duda un grado de participación activa mucho más intenso. En el mundo de la matemática, con el fin de gozar del objeto bello que se presenta, es necesario crearlo o recrearlo, de tal modo que el goce estético aquí presente es comparable más bien con el de hacer música, cantar, danzar, pintar, fabular...

Analicemos un poco más a fondo el origen de esta belleza matemática desde una perspectiva clásica. La belleza en general ha recibido muchas definiciones. San Alberto Magno definió la belleza en el objeto como *splendor formae,* el resplandor del núcleo fundamental del ser, su unidad (armonía interna), su verdad (es decir su inteligibilidad y adecuación consigo mismo y con el mundo en su entorno), su bondad (su capacidad de llenar sus tendencias propias y las de los seres a su alrededor). Estas cualidades deben resplandecer de modo que sean accesibles y deleitables sin áspero trabajo.

Otra definición clásica de la belleza es la de santo Tomás de Aquino: *Pulchra sunt quae visa placent.* Bello es aquello que resplandece luminoso en su propio ser de modo que a quien lo contempla le proporciona el sosiego y la facilidad de una percepción perfecta. Esto es la contemplación estética. Bello es aquello que se manifiesta de tal forma que produce una actividad armoniosa y compenetrada de las capacidades anímicas del hombre.

No se puede tampoco pretender describir la belleza matemática con un simple trazo. Me limitaré a señalar unos cuantos elementos de belleza que, a mi parecer, constituyen componentes bastante típicas en la actividad matemática.

Un tipo de belleza matemática consiste en el orden intelectual que ante hechos aparentemente inconexos comienza a aparecer, como un paisaje que, desde lo alto de la montaña, se devela de una bruma que lo cubría. Todo el objeto contemplado aparece en conexión y la unidad lo invade. Objetos aparentemente diversos que surgen en contextos diferentes resultan ser el mismo o estar ligados por una estructura armoniosa. La contemplación fácil de esta unidad es sin duda una de las fuentes de gozo estético presente en la contemplación de muchos hechos matemáticos.

Otro tipo de goce matemático consiste en la realización de una ampliación de perspectivas con la que de una visión parcial se llega a la contemplación total de un objeto mucho más esplendoroso, en el que nuestro cuadro inicial queda englobado ocupando su lugar justo. En la exposición actual de la teoría de los números naturales, enteros, racionales, reales, complejos, se resume toda una aventura apasionante del espíritu humano que, a través de más de sesenta siglos de historia escrita, ha tenido sus callejones aparentemente sin salida, sus idas y venidas, sus paradojas.

Otro elemento estético presente muchas veces en la creación matemática consiste en la posibilidad de una contemplación descansada e inmediata de una verdad profunda, inesperada y llena de implicaciones. Como ejemplo de la matemática elemental pueden citarse alguna de las muchas demostraciones gráficas del teorema de Pitágoras que casi no requieren más que posar la mirada sobre ellas.

Naturalmente que los diferentes hechos matemáticos presentan muy diversos grados de belleza. Muchos no contienen ningún elemento bello. Es indudable que el que una proposición matemática sea cierta no implica que sea bella. Que 2^32 + 1 = 641 × 6700417 es una verdad matemática interesante por motivos históricos, pero carente de gran belleza intrínseca. Existen teoremas claramente feos. Muchas teorías, en su nacimiento penoso y reptante, han resultado en un principio confusas y desprovistas de unidad y belleza. El cálculo infinitesimal de los tiempos de Newton y Leibniz constituye probablemente uno de los logros más importantes y útiles de la ciencia moderna, pero el grado de confusión y fealdad en que en un principio se encontraba contribuyó intensamente a que su expansión y aceptación fuesen mucho más lentas de lo que la teoría y sus aplicaciones merecían.

¿Qué características debe presentar un hecho matemático para que se pueda calificar de bello? La belleza matemática parece incluir cualidades tales como seriedad, generalidad, profundidad, inevitabilidad, economía de pensamiento, transparencia, sobriedad, adecuación... La seriedad se manifiesta en las ideas que pone en conexión, que normalmente dan lugar, en su desarrollo, a una buena porción del campo matemático en que tal hecho se encuentra, ya sea porque el método que lo crea es la clave que ilumina dicho campo, ya sea porque el hecho en cuestión es el germen mismo de todo ese cuerpo matemático. La generalidad se ha de dar con una cierta mesura. La generalización por sí misma no es en muchos casos más que el producto de una manía, sin gran valor. Pero es cierto que un hecho demasiado concreto no despierta una gran admiración. Los matemáticos suelen calificar un método de «elegante» para indicar el tipo de sobriedad, economía de medios y transparencia que a veces se encuentra en la demostración de tal o cual teorema o hecho matemático. El proceso diagonal de Cantor, el método de dualidad en geometría proyectiva son ejemplos característicos de esta cualidad.

Allí donde hay belleza matemática, ésta no se agota y su contemplación nunca cesa de producir ese sentimiento de satisfacción, adecuación y acabamiento que una obra arquitectónica perfecta produce en el ánimo de quien la contempla.

La cualidad artística de la matemática se manifiesta asimismo en el proceso de su creación, que participa mucho de las características del proceso creativo en cualquier otro arte.

Existe un magnífico estudio psicológico de J. Hadamard, gran matemático él mismo, sobre el proceso creativo en matemáticas: *La psicología de la invención en el campo matemático.* Otro de los clásicos en este tema es una famosa conferencia pronunciada por Poincaré ante la Sociedad Francesa de Psicología titulada *La invención matemática.* Quien no haya tenido alguna experiencia creativa en matemáticas no podrá menos de sentirse asombrado ante las observaciones de Poincaré sobre el proceso matemático. A juzgar por el papel que desempeñan la intuición, la inspiración, el trabajo y el descanso, y aun el sueño, o el ensueño, uno lo vive como si asistiera a la composición de una sinfonía musical. Y en este sentimiento de dádiva repentina que la creación matemática comporta a menudo coinciden muchos matemáticos famosos, como atestigua el mismo estudio de Hadamard. Por eso puede afirmar Poincaré con toda razón: «*Puede extrañar el ver apelar a la sensibilidad a propósito de demostraciones matemáticas que, parece, no pueden interesar más que a la inteligencia. Esto sería olvidar el sentimiento de belleza matemática, de la armonía de los números y de las formas, de la elegancia matemática. Todos los verdaderos matemáticos conocen este sentimiento estético real. Y ciertamente esto pertenece a la sensibilidad. Ahora bien, ¿cuáles son los entes matemáticos a los que atribuimos estas características de belleza y elegancia susceptibles de desarrollar en nosotros un sentimiento de emoción estética? Son aquellos cuyos elementos están dispuestos armoniosamente, de forma que la mente pueda sin esfuerzo abrazar todo el conjunto penetrando en sus detalles. Esta armonía es a la vez una satisfacción para nuestras necesidades estéticas y una ayuda para la mente, a la que sostiene y guía. Y al mismo tiempo, al colocar ante nuestros ojos un conjunto bien ordenado, nos hace presentir una ley matemática... Así pues, es esta sensibilidad estética especial la que desempeña el papel de criba delicada de la que hablé antes. Esto permite comprender suficientemente por qué quien no la posee no será nunca un verdadero creador*».

El que la matemática participe, efectivamente, de la condición de creación artística no da, por supuesto, carta blanca a los matemáticos para entregarse a un esteticismo estéril. La calidad artística de la matemática es como una dádiva con la que se encuentran quienes se dedican a esta actividad que es, al mismo tiempo y en grado muy intenso, ciencia y técnica. A este propósito resultan muy acertadas las sensatas observaciones de uno de los mejores matemáticos de este siglo, creador él mismo de un sinfín de campos matemáticos diversos. Así dice John von Neumann en su artículo «El matemático»: «*A medida que una disciplina matemática se separa más y más de su fuente empírica o aún más si está inspirada en ideas que provienen de la realidad de un modo sólo indirecto, como de segunda o tercera mano, está más cercada de graves peligros. Se va haciendo más y más esteticismo puro, se convierte más y más en un puro arte por el arte. Esto no es necesariamente malo si el campo en cuestión está rodeado de otros campos relacionados con él que tengan todavía conexiones empíricas más cercanas, o si la disciplina en cuestión está bajo la influencia de hombres dotados de un gusto excepcionalmente bien desarrollado. Pero existe un grave peligro de que este campo venga a desarrollarse a lo largo de las líneas de menor resistencia; de que la corriente, tan lejos de su fuente, venga a disgregarse en una multitud de ramas insignificantes, y de que la disciplina venga a convertirse en una masa desordenada de detalles y complejidades. En otras palabras, a gran distancia de su fuente empírica, o bien después de mucha incubación abstracta, un campo matemático está en peligro de degeneración*».

BIBLIOGRAFÍA

- BOURBAKI, N., «L'architecture des Mathématiques», en LE LIONNAIS (ed.), *Les grandes courants de la pensée mathématique,* Cahiers du Sud, 1948; págs. 35-47.
- DAVIS, P. J., y HERSH, R., *Experiencia matemática,* Labor-MEC, Barcelona, 1988.
- DAVIS, P. J., y HERSH, R., *El sueño de Descartes. El mundo según las matemáticas,* Labor-MEC, Barcelona, 1989.
- GÖDEL, K., «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme», *Monatshefte für Mathematik und Physik,* n.° 38, 1931; páginas 173-198.
- HADAMARD, J., *The Psychology of Invention in the Mathematical Field,* Princeton University Press, Princeton, 1945.
- HILBERT, D., «Über das Unendliche», *Mathematische Annalen,* n.° 95, 1925; págs. 161-190.
- KAC, M.; ROTA, G-C., y SCHWARTZ, J. T., *Discrete Thoughts. Essays on Mathematics, Science, and Philosophy,* Birkhäuser, Boston, 1986.

- LAKATOS, I., *Matemáticas, ciencia y epistemología,* Alianza, Madrid, 1981.
- NEUMANN, J. von, «The Mathematician», en R. B.HEYWOOD (ed.), *The Works of Mind,* University of Chicago Press, Chicago, 1947.
- POINCARÉ, H., «La creación matemática», en M. KLINE (ed.), *Matemáticas en el mundo moderno,* Blume, Madrid, 1974; págs. 14-17.
- ROTA, G-C., «Mathematics and Philosophy: The Story of a Misunderstanding», *Humanistic Mathematics Network Newsletter,* n.° 6, mayo, 1991; págs. 49-55.
- SCHWARTZ, J. T., «The Pernicious Influence of Mathematics on Science», en KAC, M.; ROTA, G.-C., y SCHWARTZ, J. T., *Discrete Thoughts. Essays on Mathematics, Science, and Philosophy,* Birkhäuser, Boston, 1985; páginas 19-25.
- WHITEHEAD, A. N., *The Interpretation of Science. Selected Essays,* Bobbs-Merrill, Nueva York, 1961.
- WHITEHEAD, A. N., *Science and the Modern World,* Free Press, Nueva York, 1967.
- WITTGENSTEIN, L., *Tractatus logico-philosophicusm,* Annalen der Naturphilosphie, Ostwald, 1921.