

DETERMINISMO, CAOS, AZAR E INCERTIDUMBRE

FRANCISCO JAVIER GIRÓN GONZÁLEZ-TORRE
Real Academia de Ciencias

INTRODUCCIÓN

No es nuestro propósito, dadas las limitaciones de un ensayo de este tipo, desarrollar la teoría de cada uno de los términos que aparecen en el título, ya que cada uno de ellos podría dar lugar, por sí solo, a una monografía. Queremos, sobre todo, ilustrar la relación que existe entre todos ellos y marcar las estrechas fronteras que existen entre estos cuatro conceptos.

Laplace, casi al principio de su obra *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* (1814) comenta, en lo que parece una apología del determinismo:

[...] Si concebimos una inteligencia que en un instante determinado abarca todas las relaciones entre todos los entes del universo —una inteligencia lo suficientemente amplia que permitiera someter estos datos al análisis— ésta podría establecer las posiciones respectivas, el movimiento y las propiedades generales de todos estos entes, desde los mayores cuerpos del universo al menor de los átomos; para ella nada sería incierto y el futuro así como el pasado estarían presentes ante sus ojos.

Con esta frase Laplace resume la idea de determinismo en la necesidad del conocimiento perfecto de las leyes naturales y de las condiciones iniciales; lo que, a menudo, se ha tomado como una afirmación de la concepción puramente determinista que Laplace tenía del universo. Sin embargo, más adelante en la misma obra comenta: «La teoría de la probabilidad debería ser elevada al rango de los asuntos más importantes del conocimiento humano»; que no son, precisamente, las palabras de un determinista acérrimo. No debemos olvidar que Laplace fue el autor que sentó las bases matemáticas del moderno cálculo de probabilidades con la publicación de su *Teoría analítica de las probabilidades* (1814).

Casi cien años más tarde, Poincaré, hablando del azar, comenta en su libro *Ciencia y Método* (1908): «Una pequeña causa, que apenas percibimos, determina un gran

efecto que no pasa desapercibido, y entonces decimos que el efecto se debe al azar. Si pudiéramos conocer con exactitud las leyes de la naturaleza y la situación del universo en el instante inicial, podríamos predecir exactamente la situación del mismo universo en un instante posterior. Pero, incluso en el caso de que las leyes naturales no tuviesen secretos, sólo podríamos conocer las condiciones iniciales *de modo aproximado*. Si eso nos permitiese predecir la situación posterior *con el mismo grado de aproximación*, no haría falta más, diríamos que el fenómeno se predijo y que está regido por las leyes. Pero no siempre sucede así; puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan diferencias muy grandes en el fenómeno último; un pequeño error en las primeras se convertiría en uno enorme en el último. Se hace imposible predecir y tenemos un fenómeno fortuito».

Con estos comentarios, Poincaré se adelantó unos setenta años a la aparición de una de las disciplinas que ha experimentado un mayor auge en las últimas décadas y que, según sus defensores, promete convertirse en uno de los hitos científicos del siglo XX. Hablamos, naturalmente, de la teoría del caos.

El ejemplo siguiente, conocido como el de la *mesa de billar*, nos proporciona una pista sobre cuándo, o en qué condiciones, un sistema determinista puede tener un comportamiento caótico.

Ejemplo de sistema no caótico

Supongamos una mesa de billar cuadrada —el que sea cuadrada, en vez de rectangular no tiene ninguna importancia para el desarrollo del ejemplo—. Desde la esquina inferior izquierda se lanza una bola en dirección hacia el lado derecho formando un cierto ángulo, con una cierta velocidad fija. Se supone que no hay rozamiento y que la bola rebota según las leyes de la reflexión.

La figura 1.1 muestra las trayectorias de dos bolas cuyos ángulos de lanzamiento difieren muy poco (una mi-

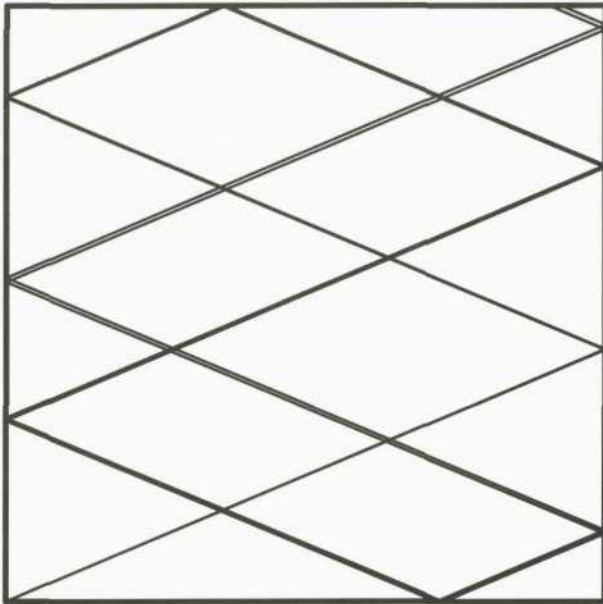


Fig. 1.1.—Mesa de billar. El ángulo inicial entre las trayectorias de las dos bolas es de 0.001 radianes. Las trayectorias son prácticamente indistinguibles.



Fig. 1.2.—Evolución en el tiempo de la distancia angular entre las posiciones de las dos bolas. Se puede observar el carácter lineal de esta distancia.

lésima de radián). Al cabo del tiempo las dos trayectorias se van separando lentamente de modo que la distancia angular entre ellas aumenta de forma lineal, tal como se aprecia en la figura 1.2, y la posición de las bolas se puede predecir en cualquier instante de tiempo futuro con toda precisión.

Supongamos ahora que hay un obstáculo, por ejemplo, en el centro de la mesa, tal como se representa en la figura 1.3, mediante un círculo, donde la bola rebota cada vez que alcance su circunferencia. Lo que ocurre, cuando se tropieza con el obstáculo, es que el ángulo de rebote es el triple del ángulo de incidencia, con lo que las trayectorias de las dos bolas se comportan de la forma que ilustra la figura 1.3, es decir, de un modo caótico. Las trayectorias divergen rápidamente y la predicción de su posición, a largo plazo, se hace prácticamente imposible.

Ejemplo de sistema caótico

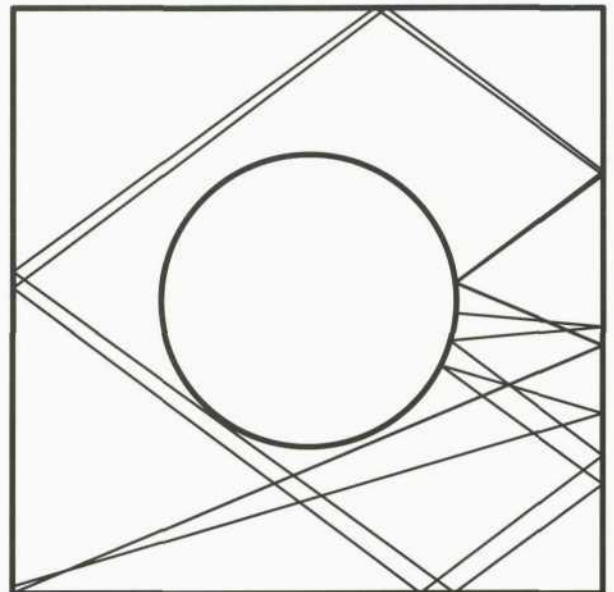


Fig. 1.3.—Mesa de billar con un obstáculo. El ángulo inicial entre las trayectorias de las dos bolas es de 0.001 radianes. Las trayectorias divergen rápidamente.

Además, el comportamiento caótico anterior se produce independientemente del tamaño y de la forma del obstáculo aunque, como parece intuitivo, el tiempo que tarda en producirse la divergencia entre las trayectorias —y, por ende, el comportamiento irregular o caótico—, será mayor cuanto menor y menos irregular sea el obstáculo. La figura 1.4 muestra el comportamiento no lineal de la distancia angular entre las dos trayectorias.

Este ejemplo es característico del comportamiento de un sistema dinámico que evoluciona a lo largo del tiempo, *lineal* si no hay obstáculo y en este caso es posible predecirlo con exactitud, y *no lineal* caso de que haya un obstáculo, en el cual no es posible hacer predicciones a largo plazo.

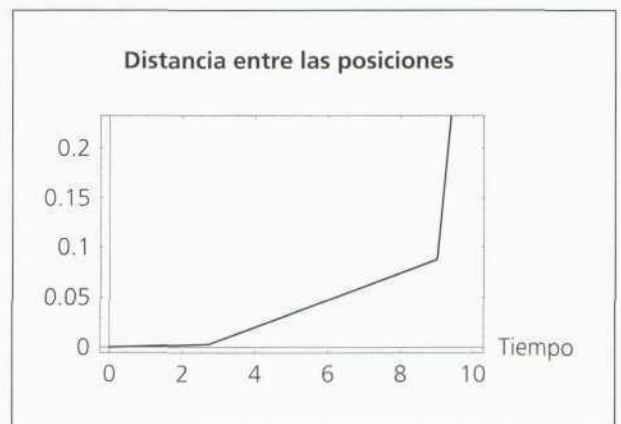


Fig. 1.4.—Evolución en el tiempo de la distancia angular entre las posiciones de las dos bolas. Se puede observar el carácter no lineal de esta distancia.

CAOS DETERMINISTA

En esta sección no pretendemos desarrollar la teoría del caos determinista —mejor diríamos de la teoría de los sistemas dinámicos no lineales— ejemplificada por la mesa de billar, sino comentar algunos aspectos del mismo relacionados, sobre todo, con la aleatoriedad, a través del concepto de medida invariante, mediante algunos ejemplos.

Brevemente y de modo informal, que no obstante no evita el que utilicemos ciertos tecnicismos, podemos definir un sistema caótico como un sistema dinámico *no lineal* —lo que constituye un ingrediente básico para garantizar la presencia del caos— tal que, si se parte de condiciones iniciales localizadas en una cierta región, todas las trayectorias que se generan están uniformemente acotadas; pero, de tal modo que, aunque al principio están muy próximas, con el tiempo unas *divergen de otras de modo exponencial* y, sin embargo, todas las trayectorias poseen las mismas *propiedades estadísticas*. De modo que una trayectoria generada por un sistema determinista caótico se asemeja a la realización de un *cierto proceso estocástico o serie temporal*. Vemos así que ciertas formas de determinismo pueden originar comportamientos caóticos que, a su vez, se asemejan a procesos aleatorios.

Los aspectos importantes asociados a la presencia del caos determinista son:

- La no linealidad del sistema.
- La pérdida de precisión, de carácter exponencial, en la predicción.
- La imposibilidad de predecir a largo plazo.
- El saber cómo se comportan las trayectorias.
- El conocer las propiedades estadísticas de las trayectorias, caso de que presenten alguna regularidad de tipo estadístico.

Un método sencillo de generar o simular sistemas dinámicos no lineales es mediante la iteración sucesiva de una función no lineal $f: S \rightarrow S$, partiendo de un punto inicial $x_0 \in S$, es decir, generando la sucesión $x_0, x_1, \dots, x_t, \dots$, donde

$$x_{t+1} = f(x_t) \text{ o, de modo equivalente } x_{t+1} = f^{(t+1)}(x_0).$$

La trayectoria, que depende del valor inicial x_0 , se obtiene uniendo los puntos de la sucesión $((1, x_1), \dots, (t, x_t), \dots)$.

Un ejemplo que ilustra la definición anterior es el siguiente, conocido como modelo de la tienda de campaña. En la figura 2.1 se aprecia el comportamiento caótico de la trayectoria.

Ejemplo 2.1: Modelo de «Tienda de campaña»

$$x_{t+1} = f(x_t) = \begin{cases} x_t / \omega & \text{para } 0 \leq x_t \leq \omega \\ (1 - x_t) / (1 - \omega) & \text{para } \omega \leq x_t \leq 1 \end{cases}$$

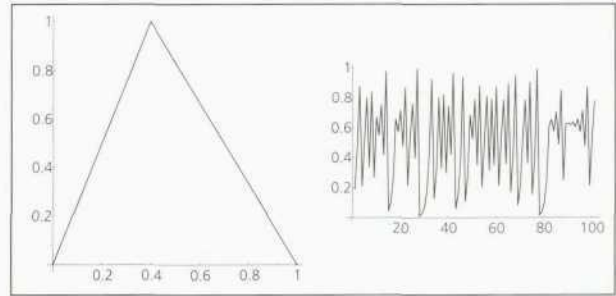


Fig. 2.1.— Gráfico de la tienda de campaña y trayectoria generada por el modelo de tienda de campaña para $\omega = .40$ y $x_0 = .19$.

La sensibilidad del modelo a las condiciones iniciales queda ilustrada por el gráfico de la figura 2.2.

No solamente las tres trayectorias presentan un comportamiento irregular o caótico sino que divergen muy rápidamente unas de otras al variar muy poco el valor inicial x_0 lo que, a largo plazo, invalida la predicción por muy preciso que sea este valor inicial. Pero, por otra parte, el análisis estadístico de las trayectorias demuestra que, a pesar de su carácter puramente determinista, se comportan como realizaciones del *mismo proceso estocástico*, por lo que, por otra parte, se pueden hacer predicciones probabilísticas. De modo que podemos decir que ciertas formas de caos determinístico devienen en fenómenos aleatorios.

Con mayor precisión, podemos afirmar que las trayectorias generadas por el modelo de tienda de campaña tienen las mismas propiedades estadísticas —función espectral empírica y función de autocorrelación— que el proceso autorregresivo de orden uno $AR(1)$

$$y_{t+1} = (2\omega - 1)y_t + \varepsilon_{t+1},$$

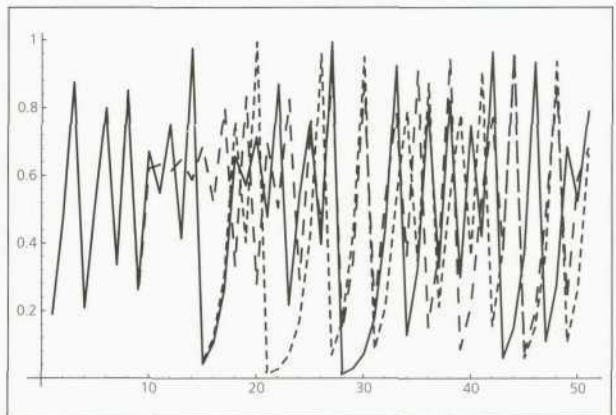


Fig. 2.2.— Tres trayectorias generadas por (2.2), para $\omega = .40$ y para tres valores iniciales: a) $x_0 = .19$, b) $x_0 = .1901$, c) $x_0 = .190001$.

donde los errores $\{\varepsilon_t\}$ son i.i.d. De modo que si $\omega = 1/2$, las trayectorias generadas por el modelo de tienda de campaña se comportan como un ruido blanco.

Para $\omega = 1/2$, y para casi todas las condiciones iniciales x_0 , se verifica que

$$\frac{\#\{x_t, 1 \leq t \leq T; x_t \in [a, b]\}}{T} \rightarrow b - a$$

es decir, a largo plazo, la serie temporal originada por una realización del modelo de tienda de campaña, cuando $\omega = 1/2$, oscila en el intervalo $[0, 1]$ según una distribución uniforme, que es la denominada *medida invariante* del modelo.

La figura 2.3, que solamente muestra la sucesión de cien puntos generada por el modelo de tienda de campaña cuando $\omega = .5 > \omega_\infty$ y $x_0 = 0.19$, ilustra el párrafo anterior en el sentido de que, dentro de la banda (a, b) , cuya anchura es 0.2, la proporción de puntos que están dentro de ella es aproximadamente 0.2 y que además esta proporción no depende de los valores a y b siempre que la anchura del intervalo sea 0.2.

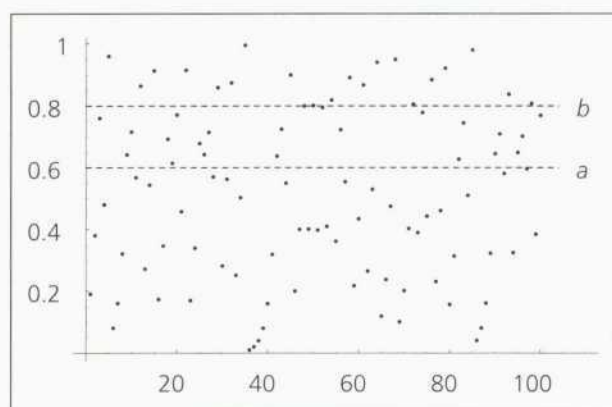


Fig. 2.3.— Sucesión generada por el modelo de tienda de campaña cuando $\omega = .5 > \omega_\infty$ y $x_0 = .19$.

La figura 2.4 muestra el histograma correspondiente a la serie de 10.000 valores de x_t que, de nuevo, ilustra la uniformidad de la medida invariante.

A diferencia de otros modelos dinámicos no lineales, como el logístico, el modelo (2.2) *no* produce trayectorias periódicas para casi ningún valor del parámetro ω .

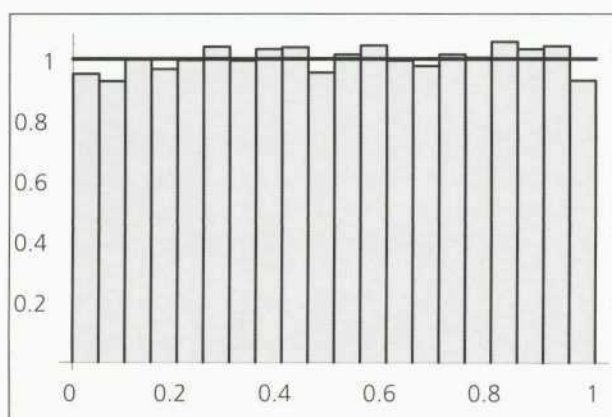


Fig. 2.4.— Histograma correspondiente a la serie de 10.000 valores de x_t , que ilustra la uniformidad de la medida invariante.

La pérdida de precisión en la predicción, partiendo de un estado inicial $x_0 \pm \varepsilon$, crece exponencialmente a medida que el valor de t crece de modo que, tras cierto tiempo, lo único que se sabe de x_t es que está en $[0, 1]$; esto implica capacidad *potencial* de predecir con certeza *sólo si* x_0 se puede medir con precisión infinita.

El segundo ejemplo de sistema caótico es el conocido modelo logístico, del que únicamente ilustramos su comportamiento caótico en la figura 2.5 para el valor del parámetro $\omega = 3.75$. Su importancia para nosotros se verá al final de la sección siguiente, donde se da la expresión de la medida invariante del mismo para $\omega = 4$.

Ejemplo 2.2: Modelo logístico

$$x_{t+1} = f(x_t) = wx_t(1 - x_t)$$

$$x_t \in [0, 1] \quad w \in [0, 4]$$

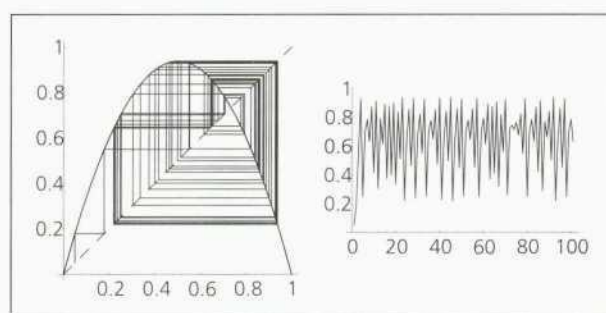


Fig. 2.5.— Gráfico de comportamiento caótico de las trayectorias del modelo logístico cuando $\omega = 3.75 > \omega_\infty$ y $x_0 = 0.05$.

Nota. Al número $\omega_\infty = 3.569945557 \dots$ se le conoce con el nombre de *constante de Feigenbaum*, en honor a su descubridor M. Feigenbaum en 1975, y establece el valor de la constante ω a partir del cual el comportamiento del modelo logístico es caótico.

DEL DETERMINISMO AL AZAR, PASANDO POR EL CAOS

Los dos ejemplos siguientes ilustran, de modo fehaciente, la relación entre el determinismo, el caos, el azar y la incertidumbre, ya anticipado por Poincaré.

En el primer ejemplo nos referimos a la teoría matemática del lanzamiento de monedas. ¿Por qué decimos que una moneda es aleatoria?

Está claro que las monedas *no* son aleatorias; con esto, solemos referirnos a que, cuando éstas se lanzan, no podemos prever su resultado.

Cuando se lanza una moneda, ésta tiene una cierta velocidad inicial y un cierto espín que es lo que, de acuerdo con la mecánica clásica, determina el cómo va a caer. No hay nada aleatorio en este proceso. J. B. Keller y P. Diaconis, entre otros, estudiaron este problema y llegaron a la conclusión de que lo que realmente ocurre es que el

plano en que se representan las dos variables, la velocidad inicial y el espín de la moneda, queda particionado en regiones, de modo que si los valores de las variables están en una región la moneda cae tal como se lanzó y si están en la región contigua cae al contrario y así, de modo análogo y alternativamente, ocurre con todas las regiones.

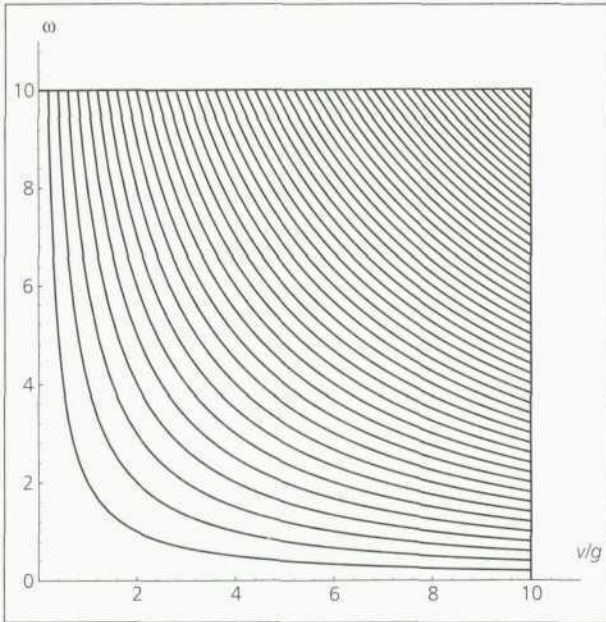


Fig. 3.1.— Fronteras hiperbólicas que separan caras de cruces, donde v representa la velocidad inicial, g es la constante de gravitación y ω es el número de revoluciones por segundo.

Las regiones resultantes, tal como muestra la figura 3.1, tienen contornos con forma de hipérbolas y, a medida que aumentan la velocidad y el espín, las regiones se aproximan más y más, de modo que pequeños cambios en las condiciones iniciales determinan que el resultado del lanzamiento sea cara o cruz. Este análisis explica el porqué una moneda es aleatoria y el porqué, aunque se conozcan con muchísima precisión las condiciones iniciales, el resultado final va a ser aleatorio, es decir, no se puede predecir. Situación análoga a la de los modelos deterministas no lineales que, bajo ciertas condiciones, generan caos.

Otro aspecto muy importante que revela el análisis precedente es que si el número de revoluciones por segundo es pequeño, aproximadamente 15, como cuando se lanza una moneda a una altura de unos 30 cm, entonces los resultados sucesivos del lanzamiento de la moneda están correlados. Esta correlación es del orden de 0,1, lo que supone una correlación nada despreciable, que podría usarse para jugar con ventaja. Como cabe esperar, la correlación disminuye a medida que aumentan los valores de ambas variables, de modo que los resultados de sucesivos lanzamientos tienden a ser independientes.

Otro problema interesante relacionado con los juegos de azar—que, como es bien sabido, históricamente constituyen los orígenes del cálculo de probabilidades— es el de

determinar cuántas veces es necesario barajar un mazo de cartas para que su orden se pueda considerar aleatorio. La respuesta es sorprendente y es *siete*. Sin embargo, la solución de este problema entraña el utilizar herramientas matemáticas muy sofisticadas como son los caminos aleatorios sobre grupos simétricos, la convolución de distribuciones de probabilidad y el análisis de Fourier no conmutativo.

El haber traído a colación estos ejemplos se ha hecho con el fin de ilustrar el porqué el razonamiento matemático, e incluso las partes más teóricas de la matemática, pueden desentrañar o, cuando menos, arrojar luz sobre problemas cotidianos, de aspecto sencillo, y que son fácilmente comprensibles.

El ejemplo siguiente ilustra el papel de la *probabilidad personal* o subjetiva, en una situación puramente determinista y que, sorprendentemente, sirve para justificar el punto de vista *necesario* de la probabilidad que es el que comúnmente se utiliza en los cursos elementales de cálculo de probabilidades cuando postulamos, muchas veces de modo poco convincente, la existencia de supuestas *simetrías* en problemas de dados, urnas y bolas.

Este ejemplo ya se encuentra en la segunda edición del *Calcul des Probabilités* de Poincaré (1912) y parece ser que ha sido el origen de la aplicación de la teoría de la probabilidad a cuestiones de la Física.

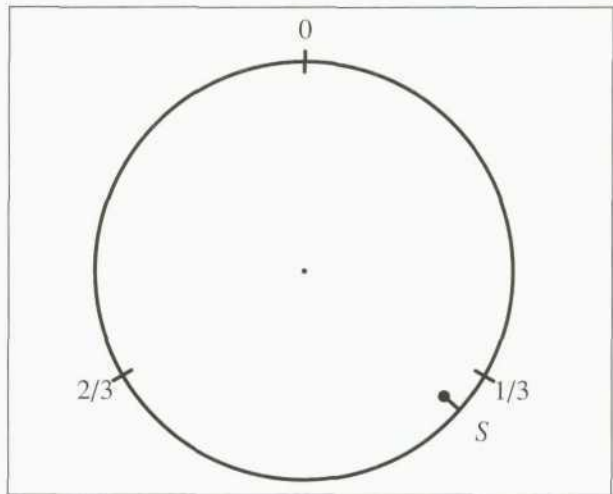


Fig. 3.2.— Representación esquemática de la rueda de Poincaré.

Supóngase que a una rueda de una bicicleta bien engrasada se le da un espín vigoroso y se la fotografía al cabo de 10 segundos. ¿Qué se puede decir de la posición angular S de alguna señal de la periferia de la rueda, como, por ejemplo, la válvula?

Si la velocidad angular inicial de la rueda es de V_0 vueltas por segundo y se desprecia el rozamiento, y S se mide en fracciones de vuelta, de modo que tome valores en el intervalo $[0,1]$, entonces

$$S = 10V_0 \pmod{1};$$

es decir, tras un lapso de 10 segundos, S es la parte fraccionaria de $10V_0$.

¿Cuál es la probabilidad de que, por ejemplo, S esté entre $1/3$ y $2/3$? Si se conoce con exactitud la velocidad inicial V_0 , la pregunta no tiene sentido, ya que no hay nada de aleatorio en S . Si, por ejemplo, $V_0 = 5.4321$, entonces $S = 0.321$, que no está entre $1/3$ y $2/3$.

Pero, de ordinario, hay incertidumbre en V_0 . Si se intenta que el espín de la rueda sea aproximadamente de 10 revoluciones por segundo, por mucho que se haya conseguido un alto grado de habilidad en este menester, siempre habrá alguna incertidumbre en el valor de V_0 en el momento de soltar la rueda.

Esta incertidumbre se puede reflejar por alguna densidad de probabilidad tal como las que se representan en la figura 3.3, e incluso por otras que tengan mayor dispersión. El área de la región sombreada es pues la probabilidad de que S esté entre $1/3$ y $2/3$.

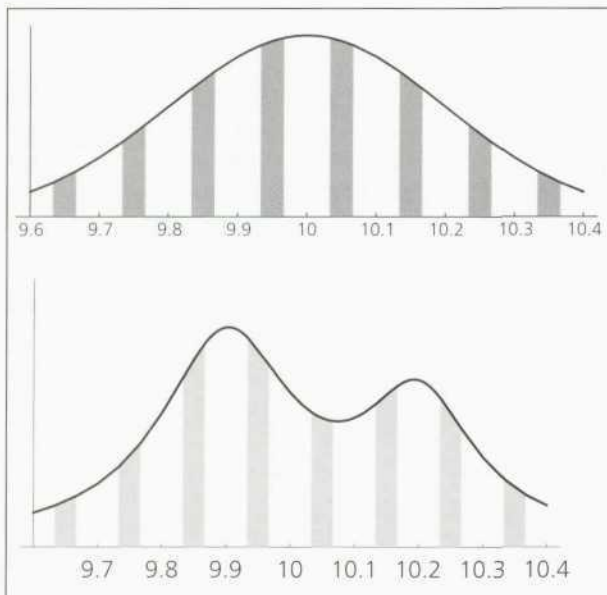


Fig. 3.3.— Densidades de probabilidad de la velocidad angular inicial, V_0 , de la rueda (en revoluciones por segundo). Ambas representan mucha incertidumbre sobre el valor de V_0 .

De la figura se desprende que la probabilidad de que S esté entre $1/3$ y $2/3$, que corresponde al área sombreada, es aproximadamente $1/3$ y que, con mayor generalidad, S tiene una distribución aproximadamente uniforme en el intervalo $[0,1]$. En particular, personas con opiniones muy diferentes sobre V_0 , es decir, con funciones de densidad para V_0 que sean muy distintas, pueden tener funciones de densidad casi idénticas para S con la única condición de que sus opiniones sobre V_0 sean suficientemente imprecisas.

Es esencial darse cuenta de que la distribución uniforme de S es solamente aproximada y que se deduce de ciertas hipótesis. Algunas son físicas, aunque bajo una gran diversidad de condiciones físicas se obtendrían resultados análogos; y otras son personalistas, es decir, se refieren a

la opinión que tiene la persona sobre la velocidad inicial V_0 . La conclusión no es válida para aquellas personas que están muy seguras de cuál es la segunda cifra decimal de V_0 , como ocurriría si esa persona hubiera desarrollado una habilidad extrema o si el modo de aplicar el espín a la rueda se realizase con un aparato especial, tal como ilustra la figura 3.4. En este caso, la probabilidad de que S esté entre $1/3$ y $2/3$ es aproximadamente 0.175, en vez de $1/3$.

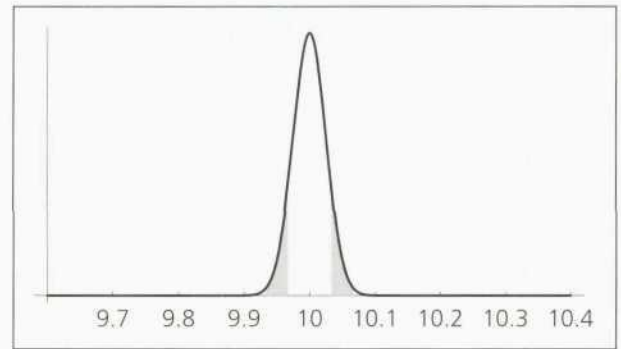


Fig. 3.4.— Densidad de probabilidad de la velocidad angular inicial, V_0 , de la rueda (en revoluciones por segundo), que representa mucha precisión o poca incertidumbre sobre V_0 .

La convergencia de muchas opiniones diversas sobre algo, mas no de todas —en este caso, la velocidad inicial de la rueda—, hacia una conclusión similar —la de que S se distribuya uniformemente— es un fenómeno de la mayor importancia y, representa una explicación muy razonable, al igual que ocurría en el caso del lanzamiento de una moneda, del punto de vista *necesario* de la probabilidad, que es la que se utiliza generalmente en los juegos de azar.

Los dos ejemplos considerados se pueden generalizar de modo que las ideas intuitivas que tenemos sobre la asignación de probabilidades a dados, ruletas y otros mecanismos de azar se pueden deducir a partir de argumentos similares.

En opinión de Savage (1973), es el espíritu de este ejemplo el que introduce la probabilidad en la mecánica estadística clásica. Los sistemas dinámicos de que trata esta rama de la Física son tautológicamente tan deterministas como la rueda de Poincaré; pero, como en este ejemplo, incluso una pequeña duda acerca de las condiciones iniciales da lugar, al cabo de un cierto tiempo relativamente corto, a las conocidas distribuciones de los parámetros macroscópicos de la mecánica estadística. La gran complejidad de los sistemas mecánicos que contienen muchas partículas es la puerta de entrada a la aplicación de la teoría de la probabilidad a tales sistemas, lo cual parece correcto; pero, precisamente funciona porque es muy difícil conocer las condiciones iniciales con precisión y porque lo poco que se pueda conocer de la posición detallada del sistema en cualquier instante dado se difumina con inusitada rapidez.

En los dos ejemplos considerados es la incertidumbre sobre los valores iniciales del modelo físico lo que hace que

parezca aleatorio el resultado de lanzar una moneda y la posición de la válvula, respectivamente.

Curiosamente, en ambos casos la distribución límite es uniforme: discreta en el caso de la moneda y continua en el de la rueda de Poincaré. Estos resultados no se pueden extrapolar a otros ejemplos ya que, en general, el comportamiento ergódico o límite viene descrito, como ya hemos comentado, por la *medida invariante*, que no es necesariamente uniforme. Así, para el modelo logístico, $x_{t+1} = 4x_t(1-x_t)$, la medida invariante resulta ser la distribución arco-seno o la beta (0.5,0.5).

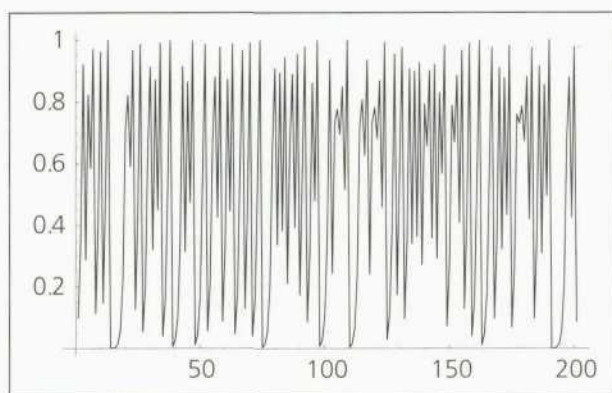


Fig. 3.5.— Trayectoria, para $T = 200$ y para el valor inicial $x_0 = 0.1$, generada por el modelo logístico caótico $x_{t+1} = 4x_t(1-x_t)$.

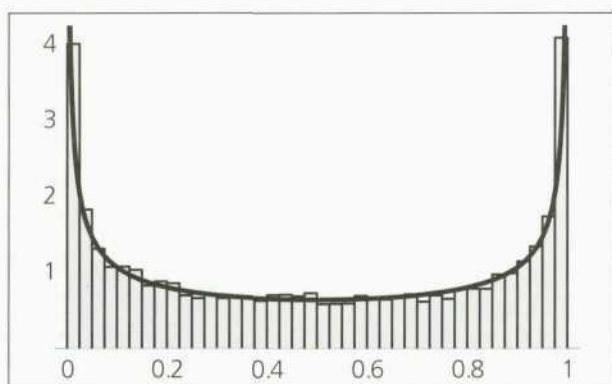


Figura 3.6.— Histograma correspondiente a la serie de 10.000 valores de x_t , generada por el modelo logístico $x_{t+1} = 4x_t(1-x_t)$. Superpuesta está la densidad de la medida invariante: la distribución arco-seno o Beta(1/2, 1/2).

Obsérvese, en la figura 3.5, cómo las trayectorias visitan los valores extremos 0 y 1 con mucha mayor frecuencia que los valores centrales próximos al 0.5, lo que queda reflejado claramente en el histograma de la figura 3.6.

Nos encontramos de nuevo, en estos ejemplos, con la imposibilidad de predecir con exactitud, tal como ocurría en los sistemas dinámicos no lineales antes considerados, en los que el comportamiento de las series por ellos generadas se vuelve caótico para ciertos valores del parámetro y su límite viene determinado por el teorema ergódico. En estas circunstancias, sólo podemos hacer predicciones probabilísticas.

LOS MÉTODOS DE MONTE CARLO

Un aspecto muy interesante de la relación entre el determinismo y el azar nos lo proporcionan los llamados métodos de Monte Carlo. El que se puedan calcular cantidades deterministas de modo aproximado, como el valor de una integral definida múltiple, o el valor aproximado de un número perfectamente conocido como, por ejemplo, el número π mediante el simple recurso a la simulación de números aleatorios, llama poderosamente la atención.

Pero, ¿existen números aleatorios en la realidad?, ¿cómo se puede saber si un conjunto de números es realmente aleatorio, o simplemente se comporta como tal? La respuesta a estas preguntas no es sencilla, a pesar de que hay muchos procedimientos para generar números pseudoaleatorios y un arsenal de contrastes estadísticos de aleatoriedad.

La génesis de los métodos de Monte Carlo se debió, en primer lugar, a la imposibilidad de obtener soluciones analíticas de ciertos sistemas estocásticos complejos y, sobre todo, a la aparición de los primeros ordenadores digitales a finales de los años cuarenta.

Durante estas últimas décadas, para realizar simulaciones por el llamado método de Monte Carlo, los estadísticos han venido utilizando algoritmos de generación de números pseudoaleatorios que, en esencia, no son otra cosa que funciones iterativas no lineales que muestran un comportamiento caótico. La mayoría de estos algoritmos utilizan congruencias lineales y su código, inmerso en el compilador, no suele ser accesible, de modo que la aleatoriedad de los números que producen ha de contrastarse mediante tests estadísticos. No obstante, la idea de estos métodos es la de reproducir el ideal estadístico de la independencia a través del determinismo. Generalmente, estos métodos se basan en congruencias lineales de la forma

$$x_{t+1} = ax_t + b \pmod{m}$$

para diversos valores enteros de a , b y m y elección arbitraria del valor inicial x_0 .

Debido a la creciente importancia que los métodos de simulación o de Monte Carlo tienen hoy día para el estudio de modelos complejos que no pueden analizarse de modo analítico conviene, aunque sólo sea de paso, hacer una breve reseña histórica de los procedimientos para obtener números pseudoaleatorios como son las tablas de números aleatorios y los generadores de números pseudoaleatorios y también de los problemas que plantean.

Cuando yo era estudiante todavía se utilizaban las tablas de números aleatorios. Curiosamente muchas de ellas se obtuvieron a partir de números perfectamente determinados, como las de Fisher y Yates (1943), construidas con las cifras de los lugares 15 y 19 de las tablas de logaritmos de 20 cifras decimales de Thompson. Otras se construyeron

a partir de procedimientos, aparentemente *más aleatorios*, como las de Kendall y Babington Smith (1940) que se basaban en una variante de la rueda de Poincaré.

Como detalle anecdótico comentaré que en 1954, en nuestro país, Royo y Ferrer construyeron una tabla de 250.000 dígitos aleatorios basada en los resultados de la Lotería Nacional. Está claro que estos procedimientos, aparte de ser poco útiles, no garantizan la aleatoriedad de sus dígitos. Los sistemas físicos de carácter analógico para generarlos tampoco parecen ofrecer el ideal estadístico que uno espera.

El primer procedimiento ideado para ser aplicado a un ordenador digital se debió al gran matemático John von Neumann y consistía en elevar al cuadrado un número grande, extraer las cifras centrales del número resultante y volver a elevarlo al cuadrado y proceder así sucesivamente. La sucesión de dígitos resultante se comportaba de un modo razonablemente aleatorio aunque se producían ciclos de carácter repetitivo relativamente cortos, que invalidaban muchas de las simulaciones.

La primera generación de ordenadores personales IBM XT disponía de un generador de números pseudoaleatorios para el intérprete de BASIC que tenía serios problemas de correlación, como muestra la figura 4.1, e incapaz de pasar los tests estadísticos de aleatoriedad más simples.

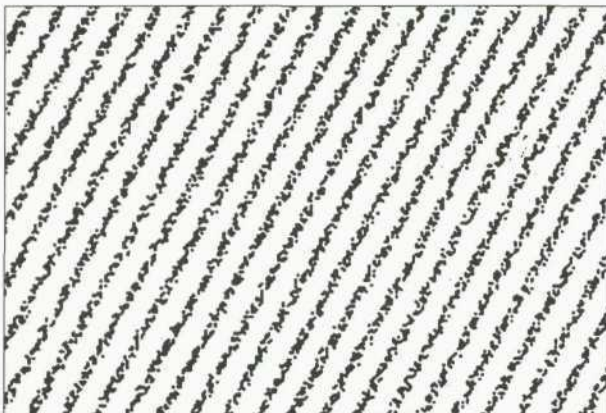


Fig. 4.1.— El primer generador de números pseudoaleatorios del MS BASIC. Gráfico de 10.000 puntos de coordenadas (rnd^{2n}, rnd^{2n+1}) , donde rnd es la función generadora de números aleatorios del Basic de Microsoft.

Los generadores de números pseudoaleatorios de la siguiente generación, como la versión actual del Turbo PASCAL, probablemente basados en aritmética módulo 2^p , producen secuencias que pueden presentar anomalías tan sutiles que la mayoría de los tests estadísticos no suelen detectarlas. Sin embargo, la figura siguiente muestra que existe una patología que sólo se presenta visualmente si en la pantalla se elige el número de pixels como una potencia de dos; de otro modo, la evidente anomalía pasa totalmente desapercibida.

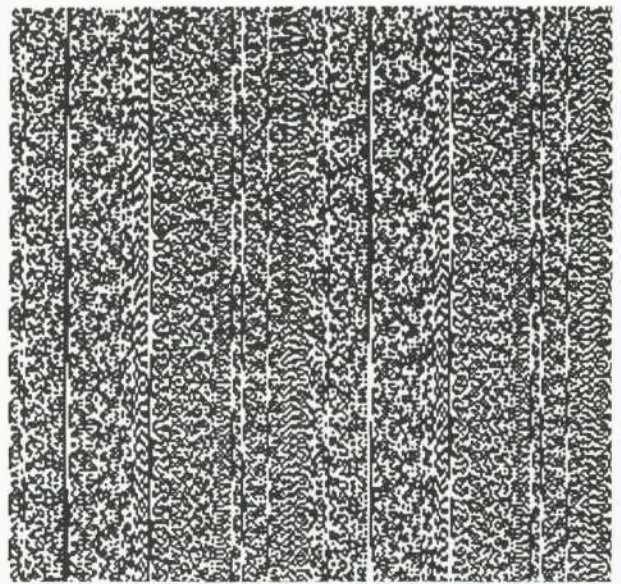


Fig. 4.2.— El último generador de números pseudoaleatorios del TURBO PASCAL. Gráfica de una sucesión de pares de números aleatorios consecutivos representados en una pantalla de 256×240 pixels.

El comportamiento de estos u otros algoritmos similares plantea serios e importantes problemas, ya que debido al enorme crecimiento de la velocidad de cálculo de los ordenadores, que permiten simular modelos de asombrosa complejidad, se van a usar cada vez más los procedimientos de simulación. De modo que disponer de buenos generadores de números pseudoaleatorios es una necesidad real. Pero, ¿cómo podemos contrastar la *aleatoriedad* de estos algoritmos? ¿Disponemos de algún algoritmo o método de generación de números pseudoaleatorios oficialmente sancionado; es decir, de una referencia?

¿Qué ocurriría si todas las simulaciones producidas por el método de Monte Carlo en el siglo venidero estuvieran basadas en ese estándar y alguien descubriese que hay un fallo terrible?

Nos encontramos, pues, en un callejón sin salida aparente. Es el precio que hay que pagar para convertir el determinismo en caos estocástico. No obstante, la búsqueda de algoritmos que producen secuencias de números que mejor representen la aleatoriedad continúa.

Uno de los métodos más recientes es el llamado generador de 32 bits mínimo estándar $x_n = f^n(x_0)$, donde

$$f(x) = 16807x \pmod{2147483647}$$

Este generador de números aleatorios ha recibido las bendiciones de Donald Knuth quien —aparte de haber hecho a la comunidad científica ese regalo maravilloso que es el language tipográfico TEX— es la autoridad indiscutible en la materia y sus autores afirman que es *demostrablemente aleatorio*, sin que esté muy claro lo que eso significa.

El reciente CDROM de números aleatorios de Marsaglia representa actualmente *lo último* en la metodología de generación de números pseudoaleatorios. El disco, distribuido por la *Florida State University* a un precio simbólico, incluye además la batería de tests de aleatoriedad de Diehard (1995).

EL CAMINO DE VUELTA: DE LA ALEATORIEDAD AL DETERMINISMO, SIN PASAR POR EL CAOS

Hemos visto cómo algunos fenómenos puramente deterministas devienen en caos, y cómo frecuentemente este comportamiento caótico posee aspectos aleatorios caracterizados por su comportamiento ergódico a través de la medida invariante. No parece pues descabellado preguntarse si este proceso se puede invertir, de manera que se puedan aplicar ideas probabilísticas, que son las que regulan los fenómenos aleatorios, a resolver problemas determinísticos complejos, lo que nos lleva a plantearnos las siguientes cuestiones.

¿Puede la teoría de la probabilidad ayudar a resolver problemas puramente deterministas? En caso afirmativo, ¿cuál es la puerta de entrada de la aleatoriedad en los problemas deterministas?, ¿a qué coste se produce?, ¿cuáles son las ventajas?

La respuesta a las preguntas anteriores es que no solamente la teoría de la probabilidad, sino más concretamente la teoría de los algoritmos probabilísticos, ayuda a resolver problemas puramente deterministas sino que, en muchas ocasiones, es la *única manera de hacerlo*. El cómo [hacerlo] suele ser, generalmente, mediante la aplicación de los métodos de simulación o de Monte Carlo.

El precio que hay que pagar por resolver estos problemas es que los resultados de la simulación tienen una precisión limitada, pero en la mayoría de los casos suele ser más que suficiente desde el punto de vista práctico.

Las ventajas que presentan estos métodos es su coste computacional relativamente bajo y la facilidad de su implementación.

La relación entre los métodos deterministas y los probabilísticos se ilustra muy bien con los tres ejemplos que siguen.

Ejemplo 5.1: Cálculo aproximado del número π por simulación

Aunque el problema de estimar el número π no tiene ningún interés práctico, ahora que es posible determinar π con decenas de miles de dígitos de precisión en pocos segundos, la estimación de π por el método de Monte Carlo es ilustrativa del proceder de estos métodos.

La figura 5.1 ilustra la manera de proceder del método. El área bajo el círculo, dentro del cuadrado unidad, es exactamente $\pi/4$. Una manera de *estimarla* es simular n pares de números aleatorios independientes del intervalo

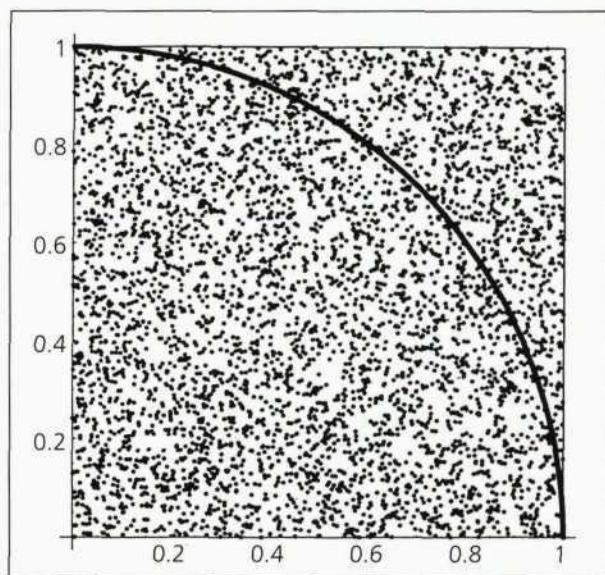


Fig. 5.1.— Ilustración del método de Monte Carlo para el cálculo aproximado de $\pi/4$. La muestra de puntos aleatorios es de tamaño 5.000.

unidad $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, siendo n un número grande, y calcular la proporción de aquellos que están en el interior del sector circular, es decir, de aquellos que cumplen la condición $u_i^2 + v_i^2 < 1$.

El valor *estimado* de $\pi/4$, con esta muestra, fue de 0.7882, de modo que la estimación de π sería 3.1528 que comparado con el valor de π con cuatro decimales, que es 3.1416, difiere aproximadamente en una centésima.

Ejemplo 5.2: Cálculo de la probabilidad de un suceso

El segundo ejemplo es más interesante, pues soluciona un problema combinatorio muy complejo que consiste en calcular la probabilidad de que en un sorteo de la lotería primitiva, una vez ordenados los seis números resultantes del sorteo, haya al menos dos números consecutivos.

El cálculo exacto de esta probabilidad requiere determinar el número total de casos favorables en los que se produce el suceso y dividirlo por el total de casos posibles que es el número combinatorio

$$\binom{49}{6} = 13983816$$

La determinación del número de casos favorables es un problema combinatorio bastante difícil. Sin embargo, si recurrimos a la simulación del sorteo un número de veces muy elevado, podemos obtener dicha probabilidad de modo aproximado. En una simulación de 10 000 sorteos, se obtuvo que en 4923 casos se produjo el suceso, de modo que la *estimación* de la probabilidad del suceso es 0.4923.

Como en el ejemplo anterior, la precisión de esta estimación se comentará más adelante.

Ejemplo 5.3: Estimación de una proporción en un sondeo de opinión

El último ejemplo se refiere a las encuestas de opinión, de sobra conocidas por todos y que, no obstante, el ciudadano medio —es decir, el hombre de la calle—, todavía las ve como algo sorprendente y misterioso.

Si queremos saber, por ejemplo, el tanto por ciento de personas en el Estado español que están a favor de la subida de un 10% en el precio del tabaco para el año 1999, conocemos el modo de cómo obtener una respuesta útil con un coste muy inferior al de realizar un censo completo de la población, simplemente recurriendo a las técnicas del muestreo estadístico.

Lo más importante de la situación descrita es que *no hay* en ella nada de carácter probabilístico. Está claro que si queremos una respuesta *exacta* a la pregunta, la única solución es recurrir a entrevistar a todo el censo poblacional. Sin embargo, una respuesta útil no ha de ser necesariamente exacta ya que una idea aproximada del verdadero porcentaje, con un error de más menos un dos por ciento, es realmente útil para saber si la medida va a ser popular o no.

La teoría de muestras nos dice que entrevistando a lo sumo a 4147 personas, *elegidas al azar*, podemos estar casi seguros (con una confianza del 99%) de que el porcentaje que resulte de la muestra no diferirá del verdadero en más de un dos por ciento. Y lo que llama poderosamente la atención es que ese número *no* depende del tamaño de la población encuestada; da lo mismo que sean 38 millones de españoles que 1000 millones de chinos.

Lo realmente importante es que podemos interpretar la técnica clásica del muestreo estadístico como un algoritmo probabilístico que sustituye a los algoritmos de enumeración completa. En efecto, si imaginamos una base de datos, del tamaño de la población censada, donde cada dato es un 1 o un 0 según se conteste afirmativa o negativamente a la pregunta anterior, la manera de determinar la proporción de 1's es diseñar un simple algoritmo de enumeración que lea toda la base de datos, sume sus componentes y divida este resultado por el tamaño de la base de datos. El algoritmo probabilístico elegiría al azar 4147 elementos de la base de datos, los sumaría y el resultado lo dividiría por 4147. ¡Mucho más rápido y más barato!

Pero en muchas ocasiones ni siquiera se conoce el tamaño de la población ni, por consiguiente, la manera de obtener una muestra aleatoria de ella. De nuevo, los algoritmos probabilísticos ayudan a resolver estos problemas.

Un aspecto muy importante en la aplicación de los métodos de Monte Carlo es el de determinar la precisión de las estimaciones. Como estos métodos se basan en el cálculo de probabilidades, las afirmaciones que podamos dar sobre las estimaciones han de ser necesariamente probabilísticas, es decir, que sólo podremos afirmar que las es-

timaciones difieren de los valores *reales* [sic] que se quieren estimar en una cantidad pequeña con una cierta probabilidad, o mejor dicho confianza, predeterminada, que se supondrá alta, es decir, próxima a 1, si realmente queremos tener confianza en las estimaciones.

La *precisión o error* e de las estimaciones depende del *tamaño de la muestra* simulada n , de la *confianza* que queremos tener en esa estimación, que se mide por un número próximo a la unidad $\beta = 1 - \alpha$, que se suele interpretar como una probabilidad y, por último, del valor p que se pretende estimar.

Si se trata de estimar una proporción conocida o aproximadamente conocida $p \in (0,1)$, la fórmula que proporciona la precisión de la estimación e en función del tamaño muestral n y del nivel de confianza $1-\alpha$ es

$$e = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el percentil $1-\alpha/2$ de la distribución normal tipificada.

La fórmula se obtiene a partir de dos de los resultados teóricos más importantes del *Cálculo de Probabilidades* que son la *ley de los grandes números* y el *teorema central del límite*.

En muchas ocasiones no se conoce p , ni siquiera de forma aproximada, como ocurre con frecuencia en los *sondeos de opinión* y, en estos casos se utiliza como fórmula

$$e = \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}$$

que es una cota superior de la fórmula anterior.

La precisión de las estimaciones y la confianza están ligadas al tamaño muestral por la fórmula anterior, y éste se determina por la ecuación

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 p(1-p)}{e^2} \leq \frac{z_{\alpha/2}^2}{4e^2}$$

cuyo último término da una cota superior del mismo cuando no se conoce el valor de la proporción p que se va a estimar.

Si aplicamos la fórmula anterior al ejemplo 5.1, obtenemos que la precisión de la estimación de $\pi/4$ es 0.011 y, por consiguiente, la de π es 0.044, con una confianza de 0.95.

La precisión de la estimación de la probabilidad del ejemplo 5.2 de la lotería primitiva es 0.0098, con una confianza de 0.95.

El tamaño muestral del ejemplo 5.3, 4147, se calculó usando la cota superior de la fórmula (5.3), con una confianza de 0.99. Obsérvese que si la confianza se reduce al 0.95, como en los dos ejemplos anteriores, el tamaño muestral sería solamente de 2401.

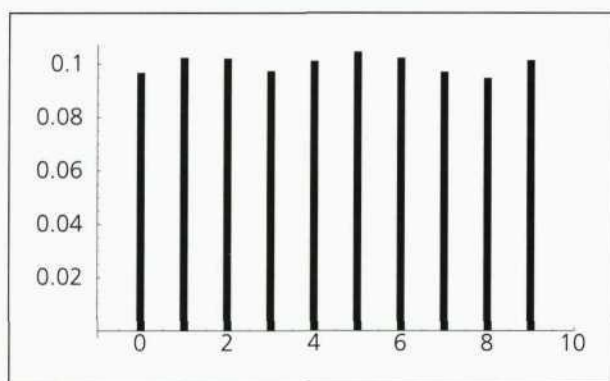


Fig. 6.2.— Diagrama de barras correspondiente a una muestra aleatoria de tamaño 10.000 de los dígitos del 0 al 9, obtenida mediante simulación.

En la mayoría de las situaciones reales, sin embargo, la incertidumbre suele ser del segundo tipo y no se puede eliminar del todo. En estos casos, ésta [la incertidumbre] se puede reducir a través de experimentos estadísticos, es decir, modelos probabilísticos que relacionan los resultados inciertos con otros observables, mediante la utilización de técnicas estadísticas.

Para muchos estadísticos la distinción entre los dos tipos de incertidumbre no es necesaria, pues *ésta* siempre se expresa o se mide en una escala probabilística, es decir, mediante una medida de probabilidad, y *éstas* [las probabilidades de los sucesos inciertos] se combinan de acuerdo con las reglas del cálculo de probabilidades.

Este tratamiento de la incertidumbre constituye una buena parte de la *Ciencia Estadística*, demasiado extensa para tratarla aquí, ni siquiera de forma somera.