Algunas contribuciones de Jacques-Louis Lions a la Teoría del Control. Perspectivas.

E. Zuazua

Universidad Autónoma de Madrid

enrique.zuazua@uam.es

16 Octubre 03

LA OBRA CIENTÍFICA DE J. L. LIONS Y SU INFLUENCIA EN ESPAÑA

El siglo XX ha concluido dejándonos como parte de su rico legado un sinfín de contribuciones matemáticas de gran belleza y profundidad.

La Matemática Aplicada es parte de esa rica herencia y está indisolublemente ligada a nombres como Hilbert, von Neumann, Courant, Lax...

... y sin duda

Jacques-Louis LIONS

J. L. Lions, desde su Cátedra en el Collège de France cultivó la disciplina del Control. En ello plasmó su punto de vista multidisciplinar, prospectivo, ...

J. L. Lions cultivó el Control no como una disciplina aparte sino íntimamente a las otras que había recorrido a lo largo de su brillante carrera:

- Análisis Matemático,
- Ecuaciones en Derivadas Parciales,
- Análisis Numérico,
- Aplicaciones al ámbito de las Ciencias y la Tecnología.

J. L. Lions sabía que "el control era la "prueba de fuego"" pues

ES IMPOSIBLE CONTROLAR UN SISTEMA SIN ENTENDERLO.

J. L. Lions a partir de los años 80'
se preocupa de la "controlabilidad":

Conducir un sistema de un
estado inicial a un estado
final prescrito.

Su punto de vista, radicalmente
innovador, produjo una cataracta de
métodos y resultados, muchos de los
cuales deberían ser objeto de varias
conferencias.

Pero el desarrollo de la disciplina
impulsado por J. L. Lions tuvo
inconfundible impronta la de una
disciplina que se abre, dejando, a
medida que se desarrolla, un sinfín
de problemas profundos abiertos que
constituyen un genuino fractal del
conocimiento.

Kalman, 1960

$$\begin{cases} x' + Ax = Bu & 0 < t < T \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x = x(t) \in \mathbb{R}^N$$

$$u = u(t) \in \mathbb{R}^M$$

$$M < N \; !$$

El sistema es controlable sii

$$\text{rango} \underbrace{[B, AB, \ldots, A^{N-1}B]}_{\mathcal{W}_{N \times MN}} = N.$$

En particular, un sistema de N componentes puede llegar a controlarse con un sólo control $(M = 1)$ si el modo en que éste interviene en el sistema se elige de manera adecuada.

EFECTO DOMINO !!

Hubo intentos, en general fallidos, de extender este resultado a

sistemas en dimensión ∞

$\equiv$

modelos de la Mecánica de Medios Continuos.

El marco natural era el del formalismo de los semigrupos.

Pero este marco es excesivamente genérico para captar las propiedades finas de los sistemas desde el punto de vista del control.

J. L. Lions que había invertido buena parte de sus años más productivos en el desarrollo del Análisis Funcional aplicado a las EDP lo sabía.

no bastaba con:

* Nociones de soluciones muy débiles (transposición)
* Propiedades finas de interpolación.
* Métodos de compacidad, energía, monotonía, ...
* Dualidad en problemas de optimización.

J. L. Lions había hecho aportaciones decisivas en todas y cada una de estos campos.

Pero sabía que eso no era suficiente: la unicidad y regularidad de las soluciones débiles de Navier-Stokes 3-d no pudo resolverse y sigue siendo hoy un reto de magnitud aún por esclarecer.

J.L. Lions 85' →

HUM (Hilbert Uniqueness Method)

von Neumann lecture, SIAM,

SIAM Review, 1988.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0<x<1, \ t>0 \\ u(0,t) = 0, & 0<t<1 \\ u(1,t) = v(t), & 0<t<T \to \text{CONTROL} \\ u(x,0) = u_0(x); \ u_t(x,0) = u_1(x), & 0<x<1. \end{cases}$$

Control de las vibraciones de una cuerda como prototipo de problema de control de estructuras, acústica, electromagnetismo, control cuántico, ...

Podemos encontrar $v = v(t)$ de modo que la solución que arranca de (u_0, u_1) se pare en tiempo $t = T$:

$$u(T) \equiv u_t(T) \equiv 0 \ ?$$

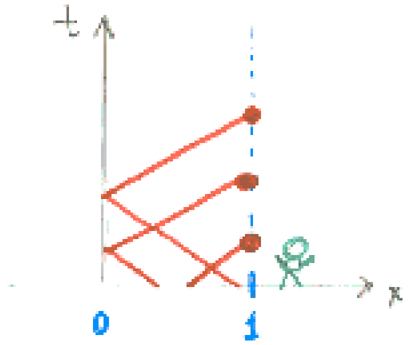
La respuesta: Es a la vez más fácil y completamente resolver el problema de la observación.

$$\begin{cases} \varphi_{tt}-\varphi_{xx}=0, & 0<x<1, \quad 0<t<T \\ \varphi(0,t)=\varphi(1,t)=0, & 0<t<T \\ \varphi(x,0)=\varphi_0(x), \ \varphi_t(x,0)=\varphi_1(x), & 0<x<1. \end{cases}$$

$$\|\varphi_0\|^2_{H^1_0(0,1)}+\|\varphi_1\|^2_{L^2(0,1)}\leq C\int_0^T|\varphi_x(1,t)|^2dt.$$

La respuesta es:

Esta desigualdad de observabilidad es cierta si $T\geq 2$!



¿Por qué esta desigualdad responde al problema?

$$J(\varphi_0,\varphi_1)=\frac{1}{2}\int_0^T|\varphi_x(1,t)|^2dt-\int_0^1(\varphi_0 u_1-\varphi_1 u_0)dx$$

$$J: H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)\to\mathbb{R}$$

J es un funcional:

* definido en un espacio de Hilbert;
* continuo,
* convexo

y gracias a la desigualdad de observabilidad

ES COERCIVA!

$(\hat{\varphi}_0,\hat{\varphi}_1)$ = minimizador de J.

$$v=\frac{\partial\hat{\varphi}(1,t)}{\partial x}$$

el control de norma mínima.

Esta metodología supuso una verdadera revolución en el campo.

La metodología de J.L. Lions era la extensión natural del resultado de Kalman en dimensión finita.

$$\dot{x} + Ax = Bu$$

$$\to \quad -\dot{\varphi} + A^t \varphi = 0$$

$$\|\varphi_0\|^2 \leq C \int_0^T |B^t \varphi|^2 dt \ ?$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{rango}\left[B^t, B^t A^t, \dots B^t (A^t)^{N-1}\right] = N$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{rango}\left[B, AB, \dots A^{N-1} B\right] = N$$

= condición de Kalman!

Direcciones en la que la metodología se expandió:

* Análisis microlocal para la obtención de desigualdades de observabilidad en problemas multi-d
* Desigualdades de Carleman, multiplicadores.
* Estabilización.
* Puntos Fijos y problemas no lineales.
* Series de Fourier no armónicas.
* Análisis espectral.
* Propiedades finas de continuación única,
* Homogeneización / medios heterogéneos.
* Simulación numérica:
  - Métodos multi-malla
  - Elementos finitos mixtos...

y desarrollos importantes paralelos en el contexto de:

* Modelos de placas,
* Ecuación del calor,
* Ecuaciones de Navier-Stokes,
* Sistema de elasticidad
* Ecuación de Schrödinger, KdV
* Reducción del ruido
* Control mediante mecanismos inteligentes
* Interacción fluido-estructura...

En particular los trabajos de Coron, Fursikov & Imanuvilov confirmaron una conjetura de J. L. Lions (Málaga 90')

La dinámica compleja de las ecuaciones de Navier-Stokes ayuda a mejorar sus propiedades de controlabilidad.

En los sistemas complejos, altamente inestables es muy difícil realizar la operación de control efectivo del sistema. Pero desde un punto de vista matemático estos sistemas un gran abanico de propiedades de control a explorar.

Control molecular mediante tecnología laser!

Un problema abierto:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0, & 0<x<1, \; 0<t<T \\ u(0,t) = 0, & 0<t<T \\ u(1,t) = v(t), & 0<t<T \\ u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x), & 0<x<1. \end{cases}$$

Se puede controlar en un tiempo uniforme independiente del tamaño de los datos iniciales.

Por el momento sólo sabemos que puede hacerse en tiempo

$$T \sim 2 + \log\left(1 + \|(u_0, u_1)\|\right)$$

→ ELASTICIDAD NO LINEAL . . .

Order form

COCV: A tribute to Jacques-Louis Lions

Title	Qty	Unit Price	Postage	Total Price
Tome 1 (520 p. - ISBN: 2-86883-602-0)	....	60 €	+ 5 €	....
Tome 2 (500 p. - ISBN: 2-86883-600-7)	....	60 €	+ 5 €	....
Tome 1 + Tome 2	....	110 €	+ 8 €	....

COCV: 2002 - Vol. 7

ISSN print edition: 1292-8119 • ISSN electronic edition: 1262-3377

Subscription	Qty	Unit Price	Total Price
Institutions (print + online edition)			
France + EU (VAT included)	....	160 €	....
Rest of the World	....	160 €	....
Individuals (only online edition)			
France + EU (VAT included)	....	36 €	....
Rest of the World	....	36 €	....
		Total	....

Payment: ☐ Bill me ☐ Check

☐ Charge my credit card: ☐ Visa ☐ Eurocard ☐ American Express

Card No ________________ Valid until ________

NAME

LIBRARY/INSTITUTION

STREET

CITY/ZIP-CODE

COUNTRY

E-MAIL

DATE/SIGNATURE

EDP SCIENCES

Available from EDP Sciences

17 av. du Hoggar • B.P. 112 • P.A. de Courtaboeuf

91944 Les Ulis Cedex A • France

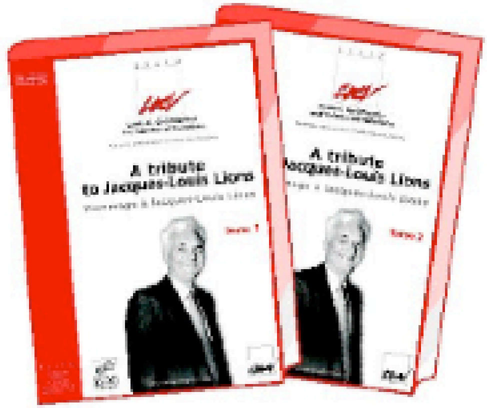
Tel.: 33 (0)1 69 18 75 75 • Fax: 33 (0)1 69 86 06 78

subscribers@edpsciences.org • **www.edpsciences.org**

or through your subscription agency

ESAIM
EUROPEAN SERIES IN APPLIED AND INDUSTRIAL MATHEMATICS

SMAI



This special volume of ESAIM: COCV is dedicated to the memory of Jacques-Louis Lions who was a pioneer in contemporary Applied Mathematics, and who profoundly influenced many researchers in the areas of Control, Optimisation, and the Calculus of Variations, among others. This volume contains a number of research papers as well as a biography of Jacques-Louis Lions.

The premature loss of Jacques-Louis Lions in Spring 2001 has saddened the mathematics community and created a void that will remain open in years to come. A great mathematician, master and friend is gone, and with him an exciting era of scientific discoveries. With this collection of articles ESAIM: COCV aims to express the gratitude of the mathematics community to Lions for his unforgettable and pivotal contributions, both from the mathematical and human points of view.

COCV

Control Optimisation and Calculus of Variations

ESAIM: COCV
A tribute to Jacques-Louis Lions
Tome 1

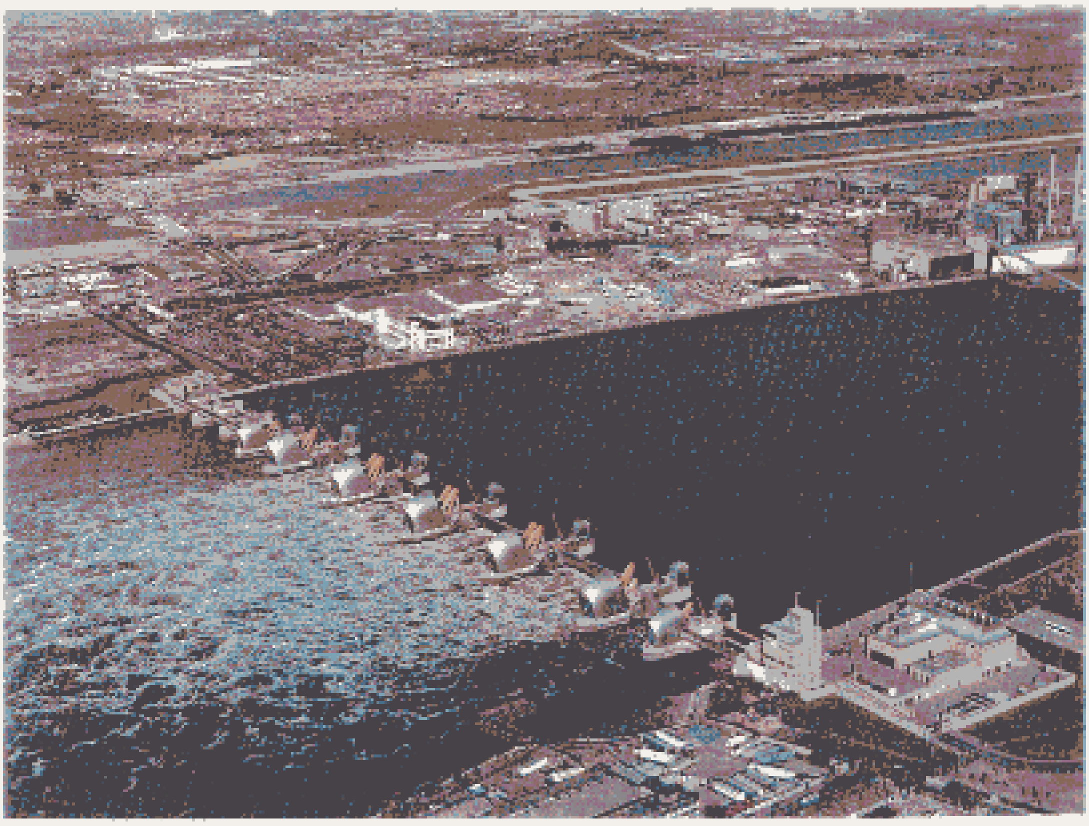
Contents:

ESAIM: COCV
A tribute to Jacques-Louis Lions
Tome 2

Contents:

The Future

One of the many effects of a warming climate is believed to be a more rapidly rising sea level, brought about by thermal expansion of the oceans and melting of glaciers and polar ice.



During the last few years there have been increasingly insistent warnings from climatologists, oceanographers and other scientists that human activities, particularly in the advanced industrial nations, will cause a gradual warming of the earth's atmosphere. Evidence for this effect is difficult to detect at present and it is even more difficult to make an accurate forecast of how quickly the warming will take place. Nevertheless, concerted scientific arguments were convincing enough to persuade the governments of 132 nations to take part in the second World Climate Conference held in November 1990. After the conference a statement was issued committing all the participating nations to take active and constructive steps in global response . . . to reduce the man-made causes of climate warming.