

Algunas contribuciones de
Jacques-Louis Lions = La
Teoría del Control. Perspectivas.

E. Zuazua

Universidad Autónoma de Madrid

enrique.zuazua@uam.es

16 Octubre 03

LA OBRA CIENTÍFICA DE J. L. LIONS
Y SU INFLUENCIA EN ESPAÑA

El siglo XX ha concluido dejándonos como parte de su rico legado un surtido de contribuciones matemáticas de gran belleza y profundidad.

La Matemática Aplicada es parte de esa rica herencia y está indisolublemente ligada a nombres como Hilbert, von Neumann, Courant, Lax ...

... y sin duda

Jacques-Louis Lions

J. L. Lions, desde su catedra en el Collège de France cultivó la disciplina del Control. En ello plasmó su punto de vista multidisciplinar, prospectivo, ...

J. L. Lions cultivó el Control no como una disciplina aparte sino íntimamente a las otras que había recorrido a lo largo de su brillante carrera:

- Análisis Matemático,
- Ecuaciones en Derivadas Parciales,
- Análisis Numérico,
- Aplicaciones al ámbito de las Ciencias y la Tecnología.

J. L. Lions sabía que "el control era la "prueba de fuego" " pues

ES IMPOSIBLE CONTROLAR UN SISTEMA SIN ENTENDERLO.

J. L. Lions a partir de los años 80' se preocupó de la "controlabilidad":

Conducir un sistema de un estado inicial a un estado final prescrito.

Su punto de vista, radicalmente innovador, produjo una catarsis de métodos y resultados, muchos de los cuales debieron ser objeto de varias conferencias.

Pero el desarrollo de la disciplina impulsado por J. L. Lions tuvo **inconfundible impronta** la de una disciplina que se abre, dejando, a medida que se desarrolla, un sinfín de problemas profundos abiertos que constituyen un genuino fractal del conocimiento.

Kalman, 1960

$$\begin{cases} x' + Ax = Bu & 0 < t < T \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x = x(t) \in \mathbb{R}^N$$

$$u = u(t) \in \mathbb{R}^M$$

$$M < N !$$

El sistema es controlable si:

$$\text{rang} [\underbrace{B, AB, \dots, A^{N-1}B}_{\substack{NM \\ N \times MN}}] = N.$$

En particular, un sistema de N componentes puede llegar a controlarse con un sólo control ($M=1$) si el modo en que éste interviene en el sistema se elige de manera adecuada.

EFFECTO DOMINO !!

Hubo intentos, en general fallidos,
de extender este resultado a

sistemas en dimensión ∞

\equiv
modelos de Mecánica de
Medios Continuos.

El marco natural era el del
formalismo de los semigrupos.

Pero este marco es excesivamente
genérico para captar los propie-
dades finas de los sistemas desde
el punto de vista del control.

J.L. Lions que había invertido buena
parte de sus años más productivos en
el desarrollo del Análisis Funcional
aplicado a los EDP lo sabía.

No bastaba con:

- * Nociones de soluciones muy débiles (transposición)
- * Propiedades fines de interpolación.
- * Métodos de compacidad, energético, monotonía, ...
- * Dificultad en problemas de optimización.

J. L. Lions había hecho aportaciones decisivas en todos y cada uno de estos campos.

Pero sabía que eso no era suficiente: la unicidad y regularidad de las soluciones débiles de Navier-Stokes 3-d no pudo resolverse y sigue siendo hoy un reto de magnitud aún por esclarecer.

J.L. Lions 85' →

HUM (Hilbert Uniqueness Method)

von Neumann lecture, SIAM,

SIAM Review, 1988.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & 0 < t < T \\ u(1, t) = v(t), & 0 < t < T \rightarrow \text{CONTROL} \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Control de las vibraciones de una cuerda como prototipo de problemas de control de estructuras, acústico, electromagnético, control acústico, ...

Podemos encontrar $v = v(t)$ de modo que la solución que emerge de (u_0, u_1) se pare en tiempo $t = T$:

$$u(T) \equiv u_t(T) \equiv 0 ?$$

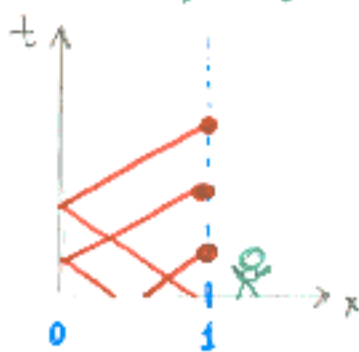
La respuesta: Es a lo vez más fácil y completamente resolver el problema de la observación.

$$\begin{cases} \Psi_{tt} - \Psi_{xx} = 0, & 0 < x < 1, & 0 < t < T \\ \Psi(0, t) = \Psi(1, t) = 0, & & 0 < t < T \\ \Psi(x, 0) = \Psi_0(x), & \Psi_t(x, 0) = \Psi_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

$$\|\Psi_0\|_{H_0^1(0,1)}^2 + \|\Psi_1\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C \int_0^T |\Psi_x(1, t)|^2 dt.$$

La respuesta es:

Esta desigualdad de observabilidad es cierta si $T \geq 2$!



¿Por qué esta desigualdad responde al problema?

$$J(\psi_0, \psi_1) = \frac{1}{2} \int_0^T |\psi_x(t, x)|^2 dt - \int_0^1 (\psi_0 u_1 - \psi_1 u_0) dx$$

$$J: H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$$

J es un funcional:

- * definido en un espacio de Hilbert;
- * continuo,
- * convexo

y gracias a la desigualdad de observabilidad
ES COERCIVO!

$(\hat{\psi}_0, \hat{\psi}_1)$ = minimizador de J .

$$v = \frac{\partial \hat{\psi}(1, t)}{\partial x}$$

el control de norma mínima.

Esta metodología supuso una verdadera revolución en el campo.

La metodología de J.L. Lions era la extensión natural del resultado de Kolman en dimensión finita.

$$\dot{x} + Ax = Bu$$

$$\rightarrow -\dot{\psi} + A^t \psi = 0$$

$$\|\psi_0\|^2 \leq C \int_0^T |B^t \psi|^2 dt ?$$

$$\Leftrightarrow \text{rango} [B^t, B^t A^t, \dots, B^t (A^t)^{N-1}] = N$$

$$\Leftrightarrow \text{rango} [B, AB, \dots, A^{N-1} B] = N$$

= condición de Kolman !

Direcciones en la que la metodología se expandió:

- * Análisis microlocal para la obtención de desigualdades de observabilidad en problemas multi-d
- * Desigualdades de Carleman, multiplicadores.
- * Estabilización.
- * Puntos Fijos y problemas no lineales.
- * Serie de Fourier no armónicas.
- * Análisis espectral.
- * Propiedades finas de continuación única,
- * Homogeneización / medios heterogéneos.
- * Simulación numérica:
 - Métodos multi-escala
 - Elementos finitos mixtos...

Y desarrollo importantes modelos en el contexto de:

- * Modelos de placas,
- * Ecuación del calor,
- * Ecuaciones de Navier-Stokes,
- * Sistema de elasticidad
- * Ecuación de Schrödinger, KdV
- * Reducción del ruido
- * Control mediante mecanismos inteligentes
- * Interacción fluido-estructura...

En particular los trabajos de Coron, Fursikov & Imanuvilov confirmaron una conjetura de J. L. Lions (16/ago 90')

La dinámica compleja de las ecuaciones de Navier-Stokes ayuda a mejorar sus propiedades de controlabilidad.

En los sistemas complejos, el control molecular es muy difícil realizar la operación de control específico del sistema. Pero desde un punto de vista matemático estos sistemas un gran abanico de propiedades de control a explorar.

Control molecular mediante tecnología laser!

Un problema abierto:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0, & 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u(0, t) = 0, & 0 < t < T \\ u(1, t) = v(t), & 0 < t < T \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Se puede controlar en un tiempo uniforme independiente del tamaño de los datos iniciales.

Por el momento solo sabemos que puede hacerse en tiempo

$$T \sim 2 + \log(1 + \|(u_0, u_1)\|)$$

→ ESTABILIDAD NO UNIFORME...

Order form

COCV: A tribute to JACQUES-LOUIS LIONS

Titre	DR	Langues	Expans	TotalEuros
Tome 1	00 €		+ 5 €	
Tome 2	00 €		+ 5 €	
900 p. - ISBN: 2-60800-000-7				
Tome 1 + Tome 2	110 €		+ 8 €	

COCV: 2002 - Vol.7
 ISSN print edition: 1202-8119 • ISSN electronic edition: 1252-3377

Statut/destination	DR	Lang.Orig.	TotalEuros
Indiv.Lions: prêt + online edition		100 €	
COCV + EU journal		100 €	
For the Ward			
Indivisible only: online edition		38 €	
France + EU journal			
For the Ward		38 €	
TOTAL			

Payment: Bill me Check

Charge my credit card: Visa Eurocard American Express
 Card No. _____ Valid until _____

NAME _____

LABOUR/INSTITUTION _____

STREET _____

CITY/STATE/ZIP _____

COUNTRY _____

E-MAIL _____

CARD SIGNATURE _____

Available from **EDP Sciences**
 17 av. du Hoggar • B.P. 112 • P.O. ce Centre-aust
 91944 Les Ulis Cedex A • FRANCE
 Tél.: 33 (0)1 69 18 75 75 • Fax: 33 (0)1 69 01 05 79
 edpsciences@edpsciences.org • www.edpsciences.org
EDP SCIENCES or through your subscription agency



ESAIM
 EUROPEAN
 SCIENCE
 SOCIETY
 IN APPLIED
 AND INDUSTRIAL
 MATHEMATICS



The special volume of **ESAIM: COCV** is dedicated to the memory of Jacques-Louis Lions who was a pioneer in contemporary Applied Mathematics, and who profoundly influenced many researchers in the areas of Control, Optimization, and the Calculus of Variations among others. This volume contains a number of research papers as well as a biography of Jacques-Louis Lions.

The premature loss of Jacques-Louis Lions in Spring 2001 has saddened the mathematical community and created a void that will remain open in years to come. A great mathematician, researcher and friend is gone, and with him an exciting era of scientific discoveries. With this collection of articles **ESAIM: COCV** aims to express the gratitude of the mathematics community to Lions for his irreplaceable and pivotal contributions, both from the mathematical and human points of view.

Control Optimization and Calculus of Variations
COCV

ESAIM: GQCV A TRIBUTE TO JACQUES-LOUIS LIONS

Contents:

- Homogenization of nonlinear in body periodic structure (J. Allaire, G. Dal Maso & S. Scapellato)
- Mail and concrete wall analysis for plane stress-strain: asymptotic expansions (F. Alouges, T. Roubin and S. Serfaty)
- Some regularity results for metric crystals (I. Anagnostis, M. Aronson and E. Pasoli)
- Well-posedness for systems: resonating electromagnetic wavefront propagation (H. T. Barts and A. Engel)
- State modeling of linear systems with a single (in) normal problem (G. Baros, R. Dauteray and A. Faurio)
- The quantized Langevin system: Regularity of solutions, structural controllability and boundary value continuation (M. L. Bardi and J. Lasserre)
- Growth exponents of systems: quadratic parabolic equations (A. Barrocas and J. P. Marco)
- Some applications of asymptotic theory of differential systems (A. Barrocas)
- Uniform estimates for the parabolic Schrödinger-Laplace equation (F. Barthelemy and G. Ciarlet)
- Uniqueness of generalized solutions to nonlinear elliptic equations with a lower order term and sign bound (M. L. Bardi, M. F. Baroni, A. Marcati, F. Malucelli and M. Piccoli)
- Central momentum transporters for the Navier-Stokes system (M. Basso and M. Pivovarov)
- Central multipass transporters with parabolic transition (F. Basso and M. Pivovarov)
- Error estimates for the numerical approximation of nonlinear elliptic control systems with delay: many state equations (F. Basso)
- Quasi-stationary distributions for finite-dimensional SDEs (A. Cavallone and F. Santambrogio)
- The equivalence of controlled Lagrangian and controlled Hamiltonian systems (G. Cavigliani, M. Dorini, M. E. Lodi, J. P. Marco and G. A. Pavoni)
- The critical Sobolev exponent: stability of the elliptic coefficient (1+1) in H^1 observation of a 2-D elliptic equation (G. Cavigliani and F. Santambrogio)
- Entropy boundary layers in steady states (L.-Y. Chen, L. Desjardis, L. Golse and E. Golse)
- Non autonomous 3D Navier-Stokes system with a sharp good attractor and some singular points (V. V. Chirilus-Brukner and M. Voss)
- Fourier approach to homogenization problems (G. Ciora and M. Ciarlet)

GQCV

ESAIM: GQCV A TRIBUTE TO JACQUES-LOUIS LIONS

Contents:

- Local uniqueness of a 3-D spin diffusion equation (M. Cappelletti, M. Cappelletti, M. Cappelletti)
- Which sequences of ideas are admissible for asymptotic homogenization with Neumann boundary conditions? (A. Chouhrouh and F. Zanetti)
- Asymptotic behaviour of stochastic queue size for the bistable (S, D, P) model (On a variant of Stein's inequality for SFG in stochastic variational (L, D, O, S, P) and C. Willem)
- Exact controllability by impulsion for nonlinear heat equations with discontinuous conductivity (J. D. Dondos, A. Goussis and J. P. Pique)
- Anytime optimal control problems for heat (A. P. I. and J. P. I.)
- Linear programming interpretations of Fisher's information principle (L. C. Evans and D. G. Luenberger)
- On the structure of linear state space control (M. Dorini)
- Boundary problems: discrete-continuous analysis (F. Dagnac and G. Varet)
- Bounding horizon optimal control for infinite dimensional systems (F. Du and K. Renardy)
- Regularity in kinetic simulations via averaging (F. E. Alvarez and A. Poincaré)
- The domain decomposition: the numerical world of the Maxwell system (J. E. Lagnier and G. Leugering)
- Regularity du problème de Navier-Stokes pour l'équation d'Euler 3D (S. Lerner)
- Boundedness of the Riesz-Bessel kernel semi-discretization of the beam equation (L. Leon and E. Zuazua)
- A local inf-convolution (J. L. Lions, J. M. Morel and J. P. Pique)
- Existence and numerical algorithms for a class of non-convex data assimilation problems (S. Marichal and V. Sverko)
- Homogenization of the compressible Navier-Stokes equations in a porous medium (M. Marzocchi)
- Control of two-dimensional flow (D. Rosca)
- Quasi-stationary distributions for a stochastic diffusion (F. M. Alvarez)
- Inertia from a finite pair (K. J. P. O'Hara)
- On the structure of layers for regularly perturbed equations in the case of unbounded energy (E. Sauter and J. P. Marco)
- Asymmetric molecular kinetic theory (M. Saitoh)
- A new boundary condition for well-posedness approximation of parabolic elliptic convex partial differential equations: "corner round" based conditions (F. Santambrogio, D. V. Ross and A. T. Pinar)
- On a two-dimensional equation in 3-D (R. Dauteray and M. Ciarlet)

The Future

One of the many effects of a warming climate is believed to be a more rapidly rising sea level, brought about by thermal expansion of the oceans and melting of glaciers and polar ice.



During the last few years there have been increasingly insistent warnings from climatologists, oceanographers and other scientists that human activities, particularly in the advanced industrial nations, will cause a gradual warming of the earth's atmosphere. Evidence for this effect is difficult to detect at present and it is even more difficult to make an accurate forecast of how quickly the warming will take place. Nevertheless,

concerted scientific arguments were convincing enough to persuade the governments of 132 nations to take part in the second World Climate Conference held in November 1990. After the conference a statement was issued committing all the participating nations to take active and constructive steps in global response . . . to reduce the man-made causes of climate warming.