DECISIONES SATISFACIENTES («SATISFICING»)

Sixto Ríos García y Sixto Ríos-Insua

Recibido: 14 enero 1981

This paper presents a new criterion for decision problems under risk and under uncertainty in the line of «satisficing», introduced by H. Simon to explain a realistic behaviour of human being.

1. Introducción

Un nuevo enfoque de la teoría de la decisión, que permite la solución de problemas complejos planteados por la Investigación Operativa se debe al premio Nobel Prof. H. Simon (1). Sus conceptos iniciales han sido seguidos y profundizados por R. Radner (2), J. Marschack (3) y su escuela.

Una idea de la aceptación actual de esta metodología de criterios satisfacientes se tiene en los trabajos de Mesarovic, que la adopta en su libro sobre «sistemas jerarquizados» (4) y en el libro reciente del I. I. A. S. A. en que se aplica a la partición de grandes problemas de decisión en subproblemas (5).

Se trata en los citados «criterios satisfacientes» (satisfactorios) de dar respuesta a importantes problemas llamados de «racionalidad limitada» en que el enfoque de optimación bayesiano, o no bayesiano, no constituyen modelos apropiados. Con esto, entre otras consecuencias, se supera la eterna discusión de bayesianos y no bayesia-

---

(1) H. A. SIMON: «Models of Man». John Wiley, 1954.

(2) R. RADNER: «Satisficing». *Journ. of Math. Econ.*, 1975, pp. 253-262.

(3) MARSCHAK-RADNER: «Economic Theory of Teams» (Yale Univ. Press, 1972).

(4) «Theory of Hierarchical Multilevel Systems». Ac. Press, 1970.

(5) J. DIRICKX: «System Analysis by Multilevel Methods». John Wiley, 1979.

nos mostrándoles un nuevo campo de trabajo, en que sus discusiones son insignificantes.

En esta nota, tras hacer una breve exposición de ideas generales y fundamento de estos métodos, que se han desarrollado especialmente en el caso de ambiente de incertidumbre, veremos que tanto en el caso de riesgo como en el de incertidumbre, el método de optimación introducido como criterio $R - \varepsilon$ por S. Ríos García (6) se puede transformar de modo natural en un «método satisfaciente».

Como dice Radner (7), resulta claro que los especialistas están lejos de obtener «soluciones óptimas» a problemas concretos como: «1) el funcionamiento de una red de detallistas bajo condiciones generales de demanda incierta, 2) ganar una partida de ajedrez, 3) administrar un departamento de matemáticas».

Un buen ejemplo aclaratorio indicado por Radner es el del juego de ajedrez. Con el enfoque clásico de optimación de la utilidad de Von Neumann y el criterio maximin, se obtiene un teorema de existencia; pero, como dice Von Neumann, refiriéndose a la determinación de la estrategia óptima «gives no practically usable method to determine the true one».

En cambio los métodos de satisfacción tratan de imitar el comportamiento de los «buenos jugadores» cuya dificultad principal al buscar una estrategia está en que tienen una información incompleta de la enorme cantidad de alternativas o estrategias que se le ofrecen.

El modelo de «individuo racional», que acepta los axiomas clásicos de racionalidad y mediante una serie de hipótesis relativas a un conocimiento perfecto de los estados del ambiente, acciones posibles, consecuencias, un sistema estable de preferencias y una capacidad de imaginación y cálculo que le permite obtener para el conjunto de cursos de acción, aquellas alternativas que le dan el óptimo, parece que no puede llegar a soluciones realmente prácticas en problemas como los antes citados.

Más realista es suponer una «racionalidad limitada» (Simon), cuyas características son: incertidumbre respecto a las consecuencias de cada alternativa, información incompleta respecto del conjunto de alternativas, imposibilidad por parte del individuo de captar y proce-

---

(6) S. Ríos García: Algunos problemas de decisión y la noción de utilidad asociada». *Metra*, vol. 4, 1965.

(7) Loc. cit.

sar la complejidad y la información que existe. Una diferencia fundamental se centra en los objetivos que se asignan al decisor que en la nueva teoría dejan de ser de optimación para convertirse en «satisfacción» (8), es decir, «alcanzar un cierto nivel de aspiración».

De un modo amplio podemos decir que la diferencia entre ambos tipos de modelos reside, pues, en que en los clásicos de optimación se simplifica la situación real de una manera drástica hasta llegar a un grado de simplicidad que el decisor puede tratar optimizando. Mientras en el modelo de satisfacción se retiene mucho más detalle de la situación real y el criterio es no pretender el óptimo sino simplemente alcanzar un nivel satisfactorio.

2. Modelo de Mesarovic

Este modelo, que ha dado lugar a importantes aplicaciones en la teoría de sistemas jerarquizados, está inspirado directamente en los trabajos de H. Simon.

Se considera $D = (X, \Omega, g)$ un problema de decisión en que dos conjuntos X, Ω son arbitrarios: $x \in X$ (*conjunto de decisión*) y $\omega \in \Omega$ (*conjunto de incertidumbre*), y $g(x, \omega)$ es una *función objetivo* $g(x, \omega)$: $X \times \Omega \longrightarrow V$ que representa la valoración de la consecuencia de la decisión x, cuando el estado de la naturaleza es ω.

Se supone que V es un conjunto parcialmente ordenado por $\gtrsim$ y en particular puede ser $V = R$, $V = R^n$, ...

El problema de satisfacción supone que está dada una *función de tolerancia o nivel de aspiración* $\tau(\omega)$: $\Omega \longrightarrow V$ (que representa una valoración que el decisor considera que si se alcanza debe aceptar la correspondiente decisión) y dado un conjunto X de decisiones $x \in X$, se trata de encontrar las $x \in X$, tales que $g(x, \omega) \gtrsim \tau(\omega)$, para todo $\omega \in \Omega$. Tales decisiones se llaman *satisfacientes* con el nivel de aspiración $\tau(\omega)$.

El conjunto de decisiones satisfacientes de D es:

$$S_\tau(D) = \{ x \in X: \quad g(x, \omega) \gtrsim \tau(\omega), \quad \forall\, \omega \in \Omega \}$$

(8) En inglés se ha adoptado la palabra escocesa «satisficing», que reemplaza a «satisfying». En español podría decirse «satisfaciente» en vez de «satisfactorio», que es lo que hacemos en este trabajo.

Por ejemplo, si suponemos el cuadro

	ω_1	ω_2	ω_3
x_1	3	4	5
x_2	2	6	8
x_3	1	4	5

en que $g(x_1, \omega_1) = 3$, etc., y el *nivel de aspiración*

$$\tau(\omega_1) = 2, \quad \tau(\omega_2) = 3, \quad \tau(\omega_3) = 4,$$

el conjunto de decisiones satisfacientes es $\{x_1, x_2\}$.

El conjunto $X - S_\tau(D)$ está formado por las decisiones x *no satisfacientes*, es decir, tales que

$$\exists\, \omega' \in \Omega : g(x, \omega') < \tau(\omega)$$

Dado un subconjunto $X_1 \subset X$, puede no existir un nivel de aspiración $\tau(\omega)$, tal que toda $x \in X_1$ sea satisfaciente y toda $x \in X - X_1$ sea no satisfaciente.

Sea:

	ω_1	ω_2	ω_3
x_1	2	1	3
x_2	3	2	1
x_3	4	3	5

No existe τ tal que $X_1 = \{x_1, x_2\}$ sea un conjunto satisfaciente para X. En efecto, debe ser

$$\tau(\omega_1) \leq 2, \quad \tau(\omega_2) \leq 1, \quad \tau(\omega_3) \leq 1,$$

luego $\{x_3\}$ es también satisfaciente.

Se ve aquí que si consideramos como nuevo orden $\gtrsim_\tau$ el que resulta de considerar dos clases de equivalencia: la formada por los elementos $x \in S_\tau(D)$ y la formada por los elementos $x' \in X - S_\tau(D)$ y para todo par $x \in S_\tau(D)$, $x' \in X - S_\tau(D)$, poner $x \gtrsim_\tau x'$, tenemos que el criterio satisfaciente respecto a $\tau(\omega)$ conduce a un orden $\gtrsim_\tau$, que introduce una estructura lineal binaria que se llama *orden satisfaciente.* Está claro que puede ser $x \sim_\tau x'$ y ser

$$g(x, \omega) < g(x', \omega) \ \forall \omega$$

Desde el punto de vista matemático las diferencias que se observan entre métodos de optimación y de satisfacción son:

Métodos de optimación:

1.º Se introduce un concepto de preferencias en el conjunto de decisiones mediante un preorden parcial o completo.

2.º Se buscan los elementos máximos o maximales.

3.º Las decisiones correspondientes son las óptimas u optimales.

Métodos de satisfacción:

1.º Se introduce un orden de preferencia en el conjunto de valoración de las consecuencias de las decisiones que permite comparar cada elemento de V con el elemento fijo de V que se llama nivel de aspiración.

2.º Se obtiene una estructura binaria, una de cuyas clases está formada por los elementos satisfacientes y la otra por los no satisfacientes.

3.º Las decisiones correspondientes a los elementos satisfacientes son las satisfacientes.

Está claro que también en los métodos de optimación se puede llegar a una estructura de orden binaria incluyendo en una clase los elementos equivalentes al óptimo y en otra los demás (suponiendo un orden completo). Se observa que la diferencia está en que en los métodos de satisfacción se llega a esta estructura directamente al introducir el nivel de aspiración.

Una caracterización axiomática del criterio de satisfacción viene dada por los axiomas siguientes debidos a Takahara-Nakano-Kijima (9):

Sea un problema de decisión D = (X, Ω, g).

A.1. Existe un orden lineal $\gtrsim_l$ sobre X.

A.2. (X, $\gtrsim_l$) es una estructura binaria. Es decir, todo $x \in$ X es maximal o minimal respecto a $\gtrsim_l$.

---

(9) «Characterization of the Satisfactory Decision Principle». *Journ. of the Op. Res. Soc. of Japan,* vol. 21, 1978, p. 347.

A.3. Si $S(X, \Omega, g)$ es el conjunto de soluciones de $D = (X, \Omega, g)$, para cada

$$x \in S(X, \Omega, g) \quad \text{y} \quad g' = g/(X - \{x\}) \times \Omega)$$

es

$$S((X - \{x\}), \Omega, g') \subset S(X, \Omega, g).$$

A.4. Si para todo $\omega \in \Omega$ es $g(x, \omega) \geqslant g(x', \omega)$, es $x \gtrsim_I x'$.

A.5. Para cada $x \in X$ y cada subconjunto S de la clase de equivalencia $E(x)$ del elemento x, es $\wedge S(\omega) \gtrsim_I x$, siendo

$$\wedge S(\omega) = \inf_{x \in S} g(x, \omega)$$

Se demuestra que si se verifican estos axiomas existe un nivel de aspiración $\tau(\omega)$ de modo que el conjunto $X = X' \cup (X - X')$ en que para todo $x \in X'$ es $g(x, \omega) \geqslant \tau(\omega)$, y para todo $x \in X - X'$ existe $\omega' \in \Omega$ tal que $g(x, \omega') < \tau(\omega')$, es decir, X' es el conjunto de las decisiones satisfacientes respecto al nivel de aspiración $\tau(\omega)$, siendo $X - X' \neq \varnothing$.

3. Criterio de satisfacción en situaciones de riesgo

Suponemos un problema de decisión $D = (A, Y, g(a_i, \eta))$ en que A es un conjunto contable de acciones:

$$a_i \in A, \quad (i = 1, 2, \ldots, m \ldots),$$

Y es el conjunto de estados, y

$$g(a_i, \eta); \quad A \times R \longrightarrow R$$

representa la valoración de la consecuencia de la decisión a_i y el estado η.

Suponemos una situación en riesgo, es decir, que conocemos la función de distribución $P(\eta \leqslant y) = F(y)$, y también la de $g_i(\eta) = g(a_i, \eta)$.

Fijado el *nivel de aspiración* τ (constante) y el riesgo ε, sea $R_\varepsilon(a_i)$ el máximo de los números H_i tales que

$$P\,[g_i(\eta) \geq H_i] \geq 1 - \varepsilon$$

Si para a_i es:

$$R_\varepsilon(a_i) \geq \tau$$

diremos que a_i es una *decisión satisfaciente* respecto al *nivel de aspiración* τ y el riesgo ε.

Las relaciones precedentes expresan que el significado intuitivo del criterio es que para ε pequeño resulta «prácticamente seguro» que

$$g_i(\eta) \geq \tau.$$

Si es $A = A' \cup (A - A')$ en que para todo $a_i \in A'$ es a_i satisfaciente (τ, ε) y para todo $a_i \notin A'$, $a_i \in A$ no es a_i satisfaciente diremos que es A' el *conjunto de decisiones satisfacientes* (τ, ε).

De un modo más general, podemos suponer que el decisor fija un nivel de aspiración $\tau(y)$ no constante, sino dependiente del estado del ambiente y.

Fijado ε podemos ver si para a_i se verifica

$$P\,[g_i(\eta) \geq \tau(\eta)] \geq 1 - \varepsilon$$

En caso afirmativo decimos que a_i es *satisfaciente* $(\tau(y), \varepsilon)$, es decir, respecto al nivel de aspiración $\tau(y)$ y el riesgo ε.

Es fácil ver con un ejemplo que fijado $A' \subset A$ no necesariamente existen $(\tau(y), \varepsilon)$ tales que A' es el conjunto satisfaciente $(\tau(y), \varepsilon)$.

Ejemplo.—Sea el problema de decisión

	y_1	y_2	y_3
a_1	3	4	5
a_2	8	2	6
a_3	2	5	4

y supongamos que la distribución de estados es

$$\begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}80 & 0{,}16 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

Si fijamos $\tau(y) = 3$ y $\varepsilon = 0{,}01$ la única decisión satisfacientes es a_1. Si fijamos $\tau(y) = 4$ y $\varepsilon = 0{,}05$ son satisfacientes a_1 y a_3. Si se fija $\tau(y_1) = 2{,}8$, $\tau(y_2) = 3$, $\tau(y_3) = 3{,}8$, $\varepsilon = 0{,}01$, es satisfaciente a_1.

4. Problema de la cartera

Se trata de distribuir una unidad de capital entre posibles inversiones $A_1, A_2, \ldots, A_n$, en que si $t_i \geqslant 0$ es la proporción asignada a la inversión en A_i, sea

$$\sum_1^n t_i = 1.$$

Si $\xi_1, \ldots, \xi_n$ son las rentabilidades aleatorias de $A_1, \ldots, A_n$ el problema es obtener $(t_1, \ldots, t_n)$ de modo que

$$\xi = \sum_1^n t_i \xi_i$$

tenga un valor satisfaciente (τ, ε).

Si se suponen conocidas las distribuciones de ξ_i y se puede determinar la de

$$\xi = \sum_1^n t_i \xi_i,$$

se tratará de fijado ε (coeficiente de riesgo) y τ (nivel de aspiración), determinar $(t_1, \ldots, t_n)$ tales que

$$t_i \geq 0, \qquad \sum_1^n t_i = 1, \qquad \mathrm{P}\left[\sum_1^n t_i \xi_i \geq \tau\right] \geq 1 - \varepsilon$$

Si en particular se supone que ξ_i es normal $\mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i)$, la variable

$$\frac{\xi - \sum_1^n t_i \mu_i}{(\Sigma\, t_i t_j \sigma_{ij})^{1/2}}$$

será N (0, 1), de modo que fijado ε se puede determinar λ_ε tal que

$$P\left[\frac{\xi - \sum_1^n t_i \mu_i}{(\Sigma t_i t_j \sigma_{ij})^{1/2}} \geq \lambda_\varepsilon\right] \geq 1 - \varepsilon$$

o bien

$$P\left[\xi \geq \sum_1^n t_i \mu_i + \lambda_\varepsilon (\Sigma t_i t_j \sigma_{ij})^{1/2}\right] \geq 1 - \varepsilon,$$

es decir, bastaría para tener una cartera satisfaciente (τ, ε) que $(t_1, \ldots, t_n)$ verifique:

$$t_i \geq 0, \quad \sum_1^n t_i = 1, \quad \Sigma t_i \mu_i + \lambda_\varepsilon (\Sigma t_i t_j \sigma_{ij})^{1/2} \geq \tau$$

lo cual conduce a un problema de programación no lineal.

5. Criterio de satisfacción para situaciones de decisión en incertidumbre

I. Supongamos el caso de que a cada decisión a_i y a cada estado ω_h le corresponde una consecuencia aleatoria $g_{ih}(\eta)$. Cada una de éstas viene definida por una función:

$$g_{ih}(\eta) : A \times \Omega \times R \longrightarrow R \qquad \begin{array}{l}(i = 1, 2, \ldots)\\(h = 1, 2, \ldots, m)\end{array}$$

siendo conocida la distribución de η: dada por

$$P[\eta \leq y] = F(y)$$

pero habiendo completa incertidumbre respecto a los estados:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$$

Supongamos que el decisor fija ε (coeficiente de riesgo) y τ nivel de aspiración. Diremos que a_i es satisfaciente si todas las g_{ih} ($h = 1, \ldots, m$) son satisfacientes con la definición precedente. Esta definición garantiza que para a_i es:

$$P\,[g_{ih}(\eta) \geq \tau] \geq 1 - \varepsilon$$

(para todo $h = 1, \ldots, m$). Es decir, para cualquier estado que resulta se obtienen valores para g_{ih} que es «prácticamente seguro» que superan el nivel de aspiración τ.

II. Obsérvese la relación de este método con el que hemos llamado de optimación R — ε (11).

En el método de optimación R — ε determinamos para cada i el máximo $R_\varepsilon(g_{ih})$ tal que

$$P\,[g_{ih}(\eta) \geq R_\varepsilon(g_{ih})] \geq 1 - \varepsilon$$

y tomamos

$$R_\varepsilon^*(a_i) = \min_h R_\varepsilon(g_{ih})$$

y después determinamos a^* tal que

$$R_\varepsilon^*(a^*) = \max_i R_\varepsilon^*(a_i)$$

Este método se convierte en el maximin tradicional si se supone que $\varepsilon = 0$.

6. Métodos de estimación satisfacientes

Planteamos un problema de estimación como un problema de decisión en que se ha fijado una función de pérdida y se trata de obtener todas las decisiones o estimadores que conducen a una pérdida inferior a una cantidad fijada con una probabilidad próxima a 1. Se tiene un nuevo enfoque a desarrollar en línea con los métodos de decisión satisfacientes.

Veamos un ejemplo:

---

(10) Loc. cit.

(11) Loc. cit.

Supongamos una distribución normal N (μ, σ) en que el parámetro μ es desconociado, pero fijo, y que se quiere mediante un estimador

$$d(x_1, \ldots x_n) = \sum_1^n c_i\, x_i \quad \left(c_i \geq 0,\ \sum_1^n c_i = 1\right)$$

ver qué valores del parámetro μ son compatibles con obtener una probabilidad $\geqslant 1 - \varepsilon$ de que la pérdida sea inferior a un nivel τ.

Sabemos que

$$\sum_1^n c_i\,(x_i - \mu)$$

tiene la distribución

$$N\,(0, \sigma\,\sqrt{\Sigma\, c_i^2}),$$

luego

$$\frac{d\,(x_i) - \mu}{\sigma\,\sqrt{\Sigma\, c_i^2}}$$

es N (0, 1).

Por tanto, fijado ε, si tenemos una función de pérdida cuadrática $(d\,(x_i) - \mu)^2$, debemos buscar para qué valores de μ es

$$P\,[\,|\, d\,(x_i) - \mu\,|^2 \leq \tau\,] \geq 1 - \varepsilon$$

Si λ'_ε es tal que

$$P\left[\,\left|\,\frac{d\,(x_i) - \mu}{\sigma\,\sqrt{\Sigma\, c_i^2}}\,\right| \leq \lambda'_\varepsilon\right] \geq 1 - \varepsilon$$

resulta que si los c_i verifican la condición

$$\sqrt{\tau} \geq \lambda'_\varepsilon\, \sigma\, \sqrt{\Sigma\, c_i^2},$$

todos los valores μ tales que

$$d\,(x_i) - \lambda'_\varepsilon\, \sigma\, \sqrt{\Sigma\, c_i^2} \leq \mu \leq d\,(x_i) + \lambda'_\varepsilon\, \sigma\, \sqrt{\Sigma\, c_i^2}$$

se considerarán satisfacientes al nivel (τ, ε).

En particular si $d(x) = \bar{x}$, queda el intervalo de confianza tradicional

$$\bar{x} - \lambda'_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \lambda'_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

que se interpreta como *conjunto satisfaciente* para μ al nivel (τ, ε), si

$$\sqrt{\tau} \geq \lambda'_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

Vemos así en definitiva, que, con este procedimiento, la comparación de estimadores satisfaciente de la media μ de una población normal, al introducir como función de pérdida una función cuadrática conduce a comparar las amplitudes de los correspondientes intervalos de confianza.

De una manera más general, dada la función de densidad $f(x/\theta)$ y la función de pérdida $L(\theta, d(X))$ en que $d(X)$ es la función de decisión o estimador y θ el parámetro desconocido, pero fijo; para cada $\theta \in \Theta$ es $L(\theta, d(\xi))$ una variable aleatoria cuya distribución es conocida al serlo la de ξ, y $R_\varepsilon [L(\theta, d(\xi))/\theta]$ será el mínimo número H tal que

$$P[L(\theta, d(\xi)) \leq H] \geq 1 - \varepsilon$$

Obtenida una muestra X y el correspondiente valor $d(X)$, los valores θ compatibles con la anterior desigualdad para

$$R_\varepsilon [L(\theta, d(X))/\theta] = \tau$$

forman el conjunto *estimador satisfaciente* de θ al nivel (τ, ε).

El ejemplo señalado prueba que este concepto es aplicable en situaciones concretas.

7. Estimador minimax $R - \varepsilon$

Es interesante comparar con el siguiente estimador minimax $R - \varepsilon$. Si para cada $d(x)$ de un conjunto D de estimadores determinamos

$$\sup_{\theta \in \Theta} R_\varepsilon [L(\theta, d(x))/\theta]$$

y ahora determinamos $d^*(x)$ tal que

$$\sup_{\theta \in \Theta} R_\varepsilon [L(\theta, d^*(x))/\theta] = \inf_{d(x) \in D} \sup_{\theta \in \Theta} R_\varepsilon [L(\theta, d(x))/\theta]$$

llamaremos a $d^*(x)$ (si existe) *estimador minimax* $R - \varepsilon$.

8. Estimadores satisfacientes en el caso de θ variable aleatoria

Si suponemos que se puede determinar para un parámetro θ, el estimador $d(x_i)$, y la distribución a «posteriori» $P[L(\theta, d(x_i))/d(x_i)]$ correspondiente a la función de pérdida $L(\theta, d(x_i))$, se podrá determinar el mínimo número R_ε tal que

$$P[L(\theta, d(x_i)) \leq R_\varepsilon / d(x_i)] \geq 1 - \varepsilon,$$

De este modo obtenida una muestra $(x_1, \ldots, x_n)$ y el correspondiente valor $d(x_i)$, tenemos que el conjunto de valores de θ que verifican la anterior relación constituyen el conjunto estimador satisfaciente.

Veamos un ejemplo:

Sea

$$f(x/\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right]$$

de la que tenemos una muestra $(x_1, \ldots, x_n)$ y como estimador $\bar{x}$, y la función de densidad de θ sea:

$$\xi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\theta^2/2]$$

La distribución «a posteriori» de $(\theta/\bar{x})$ tiene como función de densidad

$$\varphi(\theta/\bar{x}) = \sqrt{\frac{1+n}{2\pi}} \exp\left[-\frac{n+1}{2}\left(\theta - \frac{n\bar{x}}{1+n}\right)^2\right]$$

Si tomamos como función de pérdida $L(\theta, \bar{x}) = (\theta - \bar{x})^2$, habrá que determinar para cada $\bar{x}$ el conjunto de valores θ tal que, fijado ε, sea

$$P\left[\,|\,\theta - \bar{x}\,|^2 \leq R_\varepsilon / \bar{x}\right] = 1 - \varepsilon$$

o sea

$$\int_{\bar{x}-\sqrt{R_\varepsilon}}^{\bar{x}+\sqrt{R_\varepsilon}} \sqrt{\frac{1+n}{2\pi}} \exp\left[-\frac{n+1}{2}\left(\theta - \frac{n\,\bar{x}}{1+n}\right)^2\right] d\,\theta = 1 - \varepsilon$$

y tal conjunto será considerado como el conjunto satisfaciente para θ.

9. Caso multidimensional

Con notación similar a la del § 3, supongamos un problema de decisión:

$$D = (A, Y, g\,(a, \eta_1, \ldots \eta_n))$$

en que Y es el conjunto de estados n dimensionales:

$$(\eta_1, \ldots \eta_n) \in Y \subset R^n,$$

$G = [g_1\,(a, \eta_1, \ldots, \eta_n), \ldots, g_m\,(a, \eta_1, \ldots, \eta_n)]$ representará la valoración multicriterio aleatoria $G\colon R^n \longrightarrow R^m$ (función vectorial de valor de la consecuencia del estado $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ y decisión a).

Supongamos una situación de decisión en riesgo, es decir, que es conocida la distribución de $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, a saber

$$P\,[\eta_1 \leq y_1, \ldots, \eta_n \leq y_n] = \Phi\,(y_1, \ldots, y_n)$$

y también la distribución

$$P\,[g_1 \leq x_1, \ldots, g_m \leq x_m] = F\,(x_1, \ldots, x_m),$$

Fijado el coeficiente de riesgo ε, y el nivel de aspiración

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m),$$

diremos que una decisión a es satisfaciente (τ, ε) si es

$$P\left[g_1(a, \eta_1, \ldots, \eta_n) \geq \tau_1, \ldots, g_m(a, \eta_1, \ldots, \eta_n) \geq \tau_m\right] \geq 1-\varepsilon \quad [1]$$

El caso en que la función de utilidad sea escalar se reduce al anterior y se observa que las superficies isoútiles juegan un papel importante, ya que la relación [1] se reduce a

$$P\left[g(a, \eta_1, \ldots, \eta_n) \geq \tau\right] \geq 1-\varepsilon$$

y nos dice que si la superficie isoútil es $g(a, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \tau$, la región

$$g(a, \eta_1, \ldots, \eta_n) \geq \tau$$

es satisfaciente para la decisión a.

10. Problemas abiertos

Son claras las analogías siguientes:

	Incertidumbre	Riesgo	Incertid-Riesgo
Optimación	Maximin	$R - \varepsilon$	Maximin
	(Milnor)	(Horra) (Cristobal)	(Rios)
Satisfacción	Takahara	(?)	(?)

A. Este esquema puede dar la pauta para llegar a una fundamentación axiomática de los métodos de satisfacción en riesgo aquí expuestos, apoyándose en los trabajos axiomáticos de Takahara-Nakano-Kijima (12), y los de J. de la Horra (13) y Cristóbal (14) para el maximin, $R-\varepsilon$ y de Ríos (15) para el maximin con riesgo e incertidumbre.

---

(12) Loc. cit.

(13) «Criterio $R-\varepsilon$ para juegos matemáticos». Tesis, Madrid, 1977.

(14) «Axiomatización del criterio $R-\varepsilon$ y problemas de decisión». Tesis, Zaragoza, 1977.

(15) S. Ríos: «Análisis de Decisiones». Madrid, 1976.

B. En la tesis de Cristóbal (16) se establece un criterio $R - \varepsilon$ de decisión a partir de la matriz de esperanzas de utilidad $E [w (\xi_{ij})]$ en vez de $R_\varepsilon [\xi_{ij}]$. Parece natural no mezclar la esperanza y establecer un nuevo criterio utilizando sólo el operador $R - \varepsilon$, análogamente a como se hace en el párrafo de este trabajo. Ver también el trabajo reciente de J. de la Horra (17). Obtener estimadores $R - \varepsilon$ maximin y $R - \varepsilon$ satisfacientes para las familias clásicas.

C. Otro enfoque del problema de decisión en riesgo con criterio satisfaciente que podría relacionarse con el precedente desarrollado en este trabajo, es el siguiente: Fijado el nivel de satisfacción τ, sea para cada a_i,

$$P [g_i (y) \geq \tau] \geq 1 - \varepsilon_i,$$

Diremos que a_i es satisfaciente si $\varepsilon_i \leq \varepsilon$ (fijado). Se trata de utilizar los resultados de Girón (18) para relacionar este método con el desarrollado en este trabajo.

D. Aquí no hemos tenido en cuenta los enfoques dinámicos de las ideas de H. Simon, cuyo desarrollo ha sido solamente iniciado por Radner, y otros. Sería interesante relacionar unos y otros.

E. Un trabajo interesante sería relacionar en el caso de utilidad vectorial lo que aquí se hace con métodos de la esperanza de utilidad (19). En particular tratar el problema de la cartera con multicriterios en la línea de lo expuesto en el § 9.

F. Los algoritmos de cálculo necesarios para el desarrollo de los métodos aquí indicados constituyen un campo de trabajo interesante. Se sugiere el interesante trabajo de R. Melendreras (20).

Nuestro agradecimiento a los profesores Fernández de Trocóniz y J. de la Horra por señalarnos algunas observaciones recogidas.

---

(16) Loc. cit.

(17) Existencia de reglas de decisión con mínimo riesgo $R - \varepsilon$.

(18) F. J. Girón: «Sobre la dualidad de los criterios de decisión». *Trabajos de Estadística e Investigación Operativa*, t. 25, 1975.

(19) Ver S. Ríos-Insua: «Decisiones con multicriterios». Tesis Doctoral, Madrid, 1980.

(20) R. Melendreras: «Un algoritmo para la solución del problema de selección de la cartera con el criterio $R - \varepsilon$». *Trabajos de Estadística e Investigación Operativa*, vol. 24, 1973.