Generalización de los polinomios de Bernouilli

por

José Babini

1.—Dada la sucesión de números φ_i ($i = 0, 1, 2, \ldots,$) con $\varphi_0 = 1$, llamaremos *polinomios bernoullianos de diferencia h* las expresiones

$$\varphi_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \varphi_r x^{(n-r,h} = (x+\varphi)^{(n)} \qquad [1]$$

de donde, evidentemente, $\varphi_n(0) = \varphi_n$.

Si con $e^{z\varphi(x)}$ indicamos simbólicamente la función generatriz de estos polinomios, tendremos

$$e^{z\varphi(x)} = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!} \varphi_n(x) = \sum_{r=0} \frac{z^r}{r!} \varphi_r \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!} x^{(n,h} = (1+zh)^{\frac{x}{h}} e^{z\varphi} \qquad [2]$$

donde con $e^{z\varphi}$ indicamos la función generatriz de los números φ_i.

Claro es que cuando $h = 0$, el factor del último miembro se convierte en su límite e^{zx}.

2.—Aplicando la fórmula del binomio de Vandermonde se llega a la siguiente expresión, como teorema de adición de estos polinomios:

$$\varphi_n(x+y) = \sum_{r+s+t=n} \frac{n!}{r!\,s!\,t!} \varphi_r x^{(s,h} y^{(t,h} = \left(\varphi(x)+y\right)^{(n)} = (\varphi+x+y)^{(n)} \qquad [3]$$

3.—La propiedad característica de estos polinomios es una consecuencia de la propiedad de las factoriales. En efecto, calculando la diferencia de esos polinomios para una diferencia h de la variable

$$\frac{\Delta \varphi_n(x)}{h} = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} \varphi_r \frac{\Delta x^{(n-r,h}}{h} = n \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \varphi_r x^{(n-1-r,h}$$

de donde

$$\frac{\Delta \varphi_n(x)}{h} = n\, \varphi_{n-1}(x) \tag{4}$$

y más general,

$$\frac{\Delta^r \varphi_n(x)}{r!\, h^r} = \binom{n}{r} \varphi_{n-r}(x).$$

Claro es que cuando $h = 0$, las fórmulas anteriores se convierten en

$$D\, \varphi_n(x) = n\, \varphi_{n-1}(x) \qquad ; \qquad \frac{D_r\, \varphi_n(x)}{r!} = \binom{n}{r} \varphi_{n-r}(x)$$

La condición [4] es característica para estos polinomios, pues, partiendo de esa ecuación y de las condiciones iniciales $\varphi_n(0) = \varphi_n$, se llega, por inducción completa, a la [1].

Por último es fácil ver que la función generatriz de los polinomios $\dfrac{\Delta \varphi_n(x)}{h}$ es $z\, e^{z \varphi(x)}$.

4.—Consideremos ahora, en cambio, los polinomios obtenidos calculando la diferencia de $\varphi_n(x)$ para una diferencia k de la variable. La función generatriz de los polinomios $\dfrac{\Delta \varphi_n(x)}{k}$ será

$$\frac{1}{k} \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!} \Delta \varphi_n(x) = e^{z \varphi(x)} \frac{(1 + z h)^{\frac{k}{h}} - 1}{k}$$

y si con $\psi_n(x)$ indicamos polinomios bernoullianos de diferencia h tales que

$$\frac{\Delta \psi_n(x)}{h} = \frac{\Delta \varphi_n(x)}{k} = n\, \psi_{n-1}(x) \tag{5}$$

tendremos que su función generatriz será tal que

$$e^{z \psi(x)} = e^{z \varphi(x)} \frac{(1 + z h)^{\frac{k}{h}} - 1}{k z} \tag{6}$$

Para $h = k$; $\varphi_n(x) = \psi_n(x)$, mientras que para $h \neq k$ las fórmulas [5] y [6] permiten obtener relaciones entre los $\varphi_n(x)$ y $\psi_n(x)$.

Así, de la [6] se obtiene

$$\psi_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \varphi_r(x) \frac{(k-h)^{(n-r,\, h}}{n-r+1}$$

de donde

$$\frac{\varphi_n(x)}{n!} = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \psi_1(x) & \dfrac{k-h}{2!} & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \dfrac{\psi_2(x)}{2!} & \dfrac{(k-h)^{(2,\, h}}{3!} & \dfrac{k-h}{2} & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dfrac{\psi_n(x)}{n!} & \dfrac{(k-h)^{(n,\, h}}{\underline{|n+1}} & \dfrac{(k-h)^{(n-1,\, h}}{n!} & \cdots\cdots & \dfrac{k-h}{2} \end{vmatrix} \qquad [7]$$

mientras que de la [4] y [5] se obtiene, aplicando la fórmula de las diferencias de Newton,

$$\varphi_n(x) = \frac{\Delta \varphi_{n+1}(x)}{(n+1)h} = \frac{1}{n+1} \frac{\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)}{h} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^{n} \frac{(h-k)^{(r,\, k}}{\underline{|r+1}} \frac{\Delta^{r+1} \varphi_{n+1}(x)}{k^{r+1}}$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(h-k)^{(r,\, k}}{\underline{|r+1}} \frac{\Delta^r \psi_n(x)}{k^r} \qquad [8]$$

5.—Si $\dfrac{k}{h}$ es un número racional positivo podremos escribir $\dfrac{k}{h} = \dfrac{p}{q}$, donde p y q son números naturales, y la [6] puede entonces expresarse

$$k e^{z\psi(x)} \frac{(1+zh)^{\frac{k}{h}q} - 1}{(1+zh)^{\frac{k}{h}} - 1} = h e^{z\varphi(x)} \frac{(1+zh)^p - 1}{1+zh-1}$$

Desarrollando cada cociente en sumas e igualando

$$k \sum_{r=0}^{q-1} \psi_n(x+kr) = h \sum_{r=0}^{p-1} \varphi_n(x+rh)$$

y teniendo en cuenta la [4],

$$k \sum_{r=0}^{q-1} \psi_n (x + r k) = h \sum_{r=0}^{p-1}{}' \varphi_n (x + r h) = \frac{\varphi_{n+1}(x + p h) - \varphi_{n+1}(x)}{n+1}$$

Mediante el cambio de variables $u = x + rk;$ $v = x + rh;$ $y = x + ph,$ las expresiones anteriores pueden escribirse

$$k \sum_{u=x}^{y-k} \psi_n (u) = h \sum_{v=x}^{y-h} \varphi_n (v) = \frac{\varphi_{n+1}(y) - \varphi_{n+1}(x)}{n+1} \qquad [9]$$

Fórmulas análogas se obtienen para $\frac{k}{h}$ racional negativo.

Claro es que si h o k son nulos, la sumatoria respectiva se convertirá en la integral definida del polinomio entre x e y.

Números de Bernoulli y de Rey Pastor generalizados

6.—Como los elementos de los polinomios $\varphi_n(x)$ son las factoriales, los polinomios elementales que satisfarán la [5] serán aquellos para los cuales $\psi_n(x) = x^{(nh}$ Indicaremos esos polinomios con $\bar{\varphi}_n(x)$, y sus coeficientes $\bar{\varphi}_n$ los denominaremos *números de Bernoulli y de Rey Pastor generalizados,* pues coinciden con esos números en los casos particulares $h = 0,$ $k = 1$ y $h = 1;$ $k = 0.$

La definición de esos polinomios será

$$\frac{\Delta x^{(n\,h}}{h} = \frac{\Delta \bar{\varphi}_n(x)}{k} \qquad [10]$$

y su función generatriz,

$$e^{z \bar{\varphi}(x)} = \frac{(1 + z h)^{\frac{x}{h}} z k}{(1 + z h)^{\frac{k}{h}} - 1}$$

deduciéndose otras expresiones para estos polinomios aplicando las fómulas [7], [8], [9].

De la definición resulta inmediatamente que cualquier polinomio bernoulliano puede expresarse linealmente en función de estos polinomios en la forma

$$\varphi_n (x) = \left(\bar{\varphi}(x) + \psi\right)^{(n)}$$

7.—De la definición [10] se deduce inmediatamente la siguiente relación, que permite obtener por recurrencia los números $\bar{\varphi}_n$:

$$0 = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \bar{\varphi}_r \frac{(k-h)^{(n-r,h}}{n-r+1} \qquad n > 0$$

y de los cuales los seis primeros son:

$$\bar{\varphi}_0 = 1 \ ; \quad \bar{\varphi}_1 = -\frac{k-h}{2} \ ; \quad \bar{\varphi}_2 = \frac{k^2-h^2}{6} \ ; \quad \bar{\varphi}_3 = -\frac{h(k^2-h^2)}{4}$$

$$\bar{\varphi}_4 = -\frac{(k^2-h^2)(k^2-19\,h^2)}{30} \ ; \quad \bar{\varphi}_5 = \frac{h(k^2-h^2)(k^2-9\,h^2)}{4}$$

Más general: si con $f(x)$ indicamos una función entera cualquiera, que podemos siempre suponer desarrollada en suma de factoriales de diferencia h, tendremos simbólicamente

$$\frac{\Delta f(x)}{h} = \frac{\Delta f(x+\bar{\varphi})}{k}$$

expresión más general a la que satisfacen los números $\bar{\varphi}_n$.

8.—De la definición [10] se deduce un teorema de simetria de los polinomios $\bar{\varphi}_n(x)$. En efecto, cambiando x por $(n-2)h-x$ en la expresión

$$n x^{(n-1,h} = \frac{\Delta \bar{\varphi}_n(x)}{k}$$

se obtiene

$$\frac{\Delta \bar{\varphi}_n\big((n-2)\,h-x\big)}{k} = -\frac{\Delta \bar{\varphi}_n\big((n-2)\,h+k-x\big)}{k} = n\big((n-2)\,h-x\big)^{(n-1,h} =$$

$$= n(-1)^{n-1} x^{(n-1,h} = -(-1)^n \frac{\Delta \bar{\varphi}_n(x)}{k}$$

$$\bar{\varphi}_n(x) = (-1)^n \bar{\varphi}_n\big((n-2)\,h+k-x\big) \qquad [11]$$

9.—Aplicando las fórmulas [9] a los polinomios $\bar{\varphi}_n(x)$ se obtienen fórmulas sumatorias, generalizaciones de la fórmula de Euler-Mac-Laurin. En efecto, de

$$k \sum_{u=x}^{y-x} u^{(n,h} = h \sum_{v=x}^{y-h} \bar{\varphi}_n(v) = \frac{\bar{\varphi}_{n+1}(y) - \bar{\varphi}_{n+1}(x)}{n+1}$$

se obtiene, si $f(x)$ es una función entera de grado m,

$$k \sum_{u=x}^{y-k} f(u) = h \sum_{v=x}^{y-h} f(v+\bar{\varphi}) = h \sum_{r=0}^{m} \sum_{v=x}^{y-h} \frac{\bar{\varphi}_r}{r!} \frac{\Delta^r f(v)}{h^r} =$$

$$= h \sum_{v=x}^{y-h} f(x) + \sum_{r=1}^{m} \frac{\bar{\varphi}_r}{r!} \frac{\Delta^{r-1}}{h^{r-1}} \sum_{v=x}^{y-h} \Delta f(v)$$

$$k \sum_{u=x}^{y-k} f(u) = h \sum_{v=x}^{y-h} f(v) + \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\bar{\varphi}_{r+1}}{\underline{r+1}} \frac{\Delta^r \left[f(y) - f(x)\right]}{h^r}$$

Si $f(x)$ no es una función entera, habrá que tener en cuenta un término complementario como resto.

Si, en cambio, partimos de la expresión

$$k \sum_{u=x}^{y-k} u^{(n,h} = \frac{\bar{\varphi}_{n+1}(y) - \bar{\varphi}_{n+1}(x)}{n+1} = \frac{k}{n+1} \sum_{u=x}^{y-k} \frac{\Delta u^{(n+1,h}}{h}$$

se llega a la expresión simbólica más simple:

$$k \sum_{u=x}^{y-k} \frac{\Delta f(u)}{h} = f(y+\bar{\varphi}) + f(x+\bar{\varphi})$$

10.—Todas las fórmulas de los parágrafos [6] a [9] nos permiten obtener propiedades y desarrollos conocidos de los polinomios de Bernoulli $B_n(x)$ y sus correlativos de Rey Pastor $A_n(x)$ (1) tomando como casos particulares $h = 0$, $k = 1$ y $h = 1$; $k = 0$, respectivamente.

De esas propiedades sólo mencionaremos la que se deduce, para estos últimos polinomios, de la [9]:

$$\int_x^{x+1} u^{(n} \, du = A_n(x)$$

que nos permitirá deducir fácilmente los ceros de estos polinomios $A_n(x)$.

En efecto, para $n > 0$, la función integrando en cada uno de los $n + 1$ intervalos $(p, p + 1)$ $(p = 1.\ 0,\ 1, \cdots, n - 1)$ mantiene su signo, que será el de $(-1)^{n-1-p}$. Por lo tanto, $A_n(x)$ cambia de signo para los $n + 1$ valores de $x = p$,

(1) *J. Rey Pastor*: Polinomios correlativos de los de Bernoulli. (En "Boletín del Seminario Matemático Argentino". Vol. I. Pág. 3. Buenos Aires, 1920.)

luego se anulará en n puntos, interiores a cada uno de los n intervalos $(-1,0)$; $(0,1)$; ... $(n-2,\ n-1)$.

Además, por la [11] esos n ceros se dispondrán simétricamente respecto al punto $\frac{n-2}{2}$.

Números de Euler generalizados

11.—Consideremos ahora dos polinomios bernoullianos, $\varphi_n(x)$ y $\psi_n(x)$ ligados por la condición

$$\frac{\Delta^{m-k}\varphi_n(x)}{\underline{|m-k}\cdot h^{m-k}} = \pm\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}\varepsilon_s^k\varphi_n\left(x+\varepsilon_s\right)$$

donde $\varepsilon_s^m = \pm 1$ y $1 \leqslant K \leqslant m$, tomándose los signos superiores o inferiores, según se trate de las raíces de $+1$ o de -1.

La relación entre sus funciones generatrices será

$$\frac{\Delta^{m-k} e^{z\psi(x)}}{\underline{|m-k}\ h^{m-k}} = \frac{z^{m-k}}{\underline{|m-k}} e^{z\psi(x)} = \pm\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}\varepsilon_s^k e^{z\varphi(x+\varepsilon_s)} =$$

$$= \pm\frac{e^{z\varphi(x)}}{m}\sum_{s=1}^{m}\varepsilon_s^k(1+zh)^{\frac{\varepsilon_s}{h}} = e^{z\varphi(x)}\,\omega_k\left(l.(1\,z+h)^{\frac{1}{h}}\right)$$

siendo $w_k(z)$ las *funciones cíclicas* de orden m.

Para eliminar las ε_s hagamos

$$\frac{\Delta^{m-k}\varphi_n(x)}{h^{m-k}\,\underline{|m-k}} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\varphi_{n-r}(x)\,C_r.$$

donde

$$C_r = \pm\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}\varepsilon_s^k\varepsilon_s^{(r,h} = \pm\frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m}\varepsilon_s^k\sum_{t=0}^{r}\varepsilon_s^t\frac{D^t O^{(r,h}}{t\,!} =$$

$$= \sum_{t=0}^{t\leq\frac{r+k-m}{m}}\frac{D^{mt+m-k}\,O^{(r,h}}{\underline{|mt+m-k}}\,(\pm 1)^t.$$

12.—Lo mismo que antes, consideremos el caso más elemental, tomando $\psi_n(x) = x^{(n,h}$. Designando los polinomios bernoullianos correspondientes con $\varphi_n(x)$, llamaremos los coeficientes φ_n *números de Euler generalizados,* pues tomando el signo superior $h = 0$ y $m = k = 2$; esos coeficientes son los conocidos números de Euler E_n.

La definición de esos polinomios será

$$\frac{\Delta^{m-k} x^{(n,h}}{h^{m-k} \lfloor m-k} = \pm \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} \varepsilon_s^k (x + \varepsilon_s + \overline{\varphi})^{(n)} =$$

$$= \sum_{t=0}^{t \leq \frac{n+k-m}{m}} \frac{D^{mt+m-k} (x + \overline{\varphi})^{(n)}}{\lfloor mt+m-k} (\pm 1)^t$$

y la función generatriz de los números generalizados de Euler será

$$e^{z\overline{\varphi}} = \frac{z^{m-k}}{\lfloor m-k\, \omega_k \left(\frac{l(1+zh)}{h} \right)}$$

Si además $f(x)$ es una función entera de grado n, tendremos como expresiones más generales a las que obedecen esos números:

$$\frac{\Delta^{m-k} f(x)}{h^{m-k} \lfloor m-k} = \pm \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} \varepsilon_s^k f(x + \varepsilon_s + \overline{\varphi}) =$$

$$= \sum_{t=0}^{t \leq \frac{n+k-m}{m}} \frac{D^{mt+m-k} f(x + \overline{\varphi})}{\lfloor mt+m-k} (\pm 1)^t$$

13.—De la definición puede deducirse la siguiente ecuación recurrente para el cálculo de los $\overline{\varphi}_n$,

$$0 = \sum_{t=0}^{t \leq \frac{n}{m}} \frac{D^{mt+m-k}\, \overline{\varphi}_{n+m-k}}{\lfloor mt+m-k} (\pm 1)^t =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n+m-k}{r} \overline{\varphi}_r \sum_{t=0}^{t \leq \frac{n}{m}} \frac{D^{mt+m-k}\, 0^{(n+m-k-r}}{\lfloor mt+m-k} h^{n-r-mt} (\pm 1)^t$$

que demuestra que esos números son de la forma

$$\overline{\varphi}_n = a\, h^n + b\, h^{n-m} + c\, h^{n-2m} + \ldots$$

13.—De acuerdo a esta última propiedad, cuando $h = 0$, caso en el que los números $\overline{\varphi}_n$ son los coeficientes del desarrollo en serie de la función recíproca de las funciones cíclicas ordinarias, tendremos $\overline{\varphi}_n = 0$ para $n \neq m'$ y para $n = m'$; $\overline{\varphi_0} = 1$ y

$$0 = \sum_{r=0}^{mn} \binom{mn + m - k}{mr} \overline{\varphi}_{mr} \, (\mp 1)^r \qquad n > 0$$

de donde

$$\overline{\varphi}_{mn} = (\mp 1)^n \, \underline{|mn} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{(2m-k)^{(m}} & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{(3m-k)^{(2m}} & \dfrac{1}{(2m-k)^{(m}} & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{(mn+m-k)^{(mn}} & \dfrac{1}{(mn-k)^{(m(n-1)}} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{(2m-k)^{(m}} \end{vmatrix}$$

que para el signo superior y $m = k = 2$ expresa los números de Euler E_{2n}.

14.—Si, en cambio, tomamos como otro caso particular $m = k = 2$, la función generatriz de los números de Euler generalizados será

$$e^{z\overline{\varphi}} = \frac{1}{Ch \dfrac{l(1+zh)}{n}} = \frac{2}{(1+zh)^{\frac{1}{n}} + (1+zh)^{-\frac{1}{n}}}$$

de donde $\overline{\varphi}_0 = 1$ y

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \overline{\varphi}_r \frac{1^{(n-r,h} + (-1)^{(n-r,h}}{2} = 0 \qquad n > 0$$

expresión recurrente que nos permite calcular $\overline{\varphi}_n$, y cuyos primeros valores son

$$\overline{\varphi}_1 = 0 \;\; ; \;\; \overline{\varphi}_2 = -1 \;\; ; \;\; \overline{\varphi}_3 = 3h \;\; ; \;\; \overline{\varphi}_4 = 5 - 11h^2 \;\; ; \;\; \overline{\varphi}_5 = -50h(1 - h^2)$$

que, para $h = 0$, coinciden con los números de Euler E_n.

En el caso particular $h = 1$, los valores de $\overline{\varphi}_n$ pueden ser dados directamente, pues en ese caso la generatriz es

$$e^{z\overline{\varphi}} = \frac{2}{1 + z + (1+z)^{-1}} = \frac{1+z}{1 + z + \dfrac{z^2}{2}} = \frac{1 - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{2}}{1 + \dfrac{z^4}{4}} =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2}\right) \sum_{n=0} \frac{z^{4n}}{4^n} (-1)^n$$

de donde

$$\frac{\overline{\varphi}_{4n}}{\lfloor 4n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\,; \quad \overline{\varphi}_{4n+1} = 0\,; \quad \frac{\overline{\varphi}_{4n+2}}{\lfloor 4n+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}\,; \quad \frac{\overline{\varphi}_{n+3}}{\lfloor 4n+3} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \quad [12]$$

15.—Los polinomios para $m = k = 2$ pueden aplicarse en algunas fórmulas sumatorias y de sumación de series oscilantes.

En efecto, podemos escribir la función generatriz de esos polinomios

$$e^{z\overline{\varphi}(x} = \frac{2\,(1+zh)^{\frac{x+1}{n}}}{(1+zh)^{\frac{2}{n}}+1} = 2\sum_{r=0}(1+zh)^{\frac{x+2r+1}{n}}(-1)^r$$

de donde podemos deducir la siguiente fórmula de sumación para la serie oscilante del primer miembro:

$$\sum_{r=0}(x+2r+1)^{(n,\,h}(-1)^r = \frac{1}{2}\,\overline{\varphi}_n(x)$$

De esta fórmula o directamente de la función generatriz se deduce también la siguiente sumatoria:

$$\sum_{r=0}^{p}(x+2r+1)^{(n,\,h}(-1)^r = \frac{\overline{\varphi}_n(x) + (-1)^p\,\overline{\varphi}_n(x+2_p+2)}{2}$$

Por lo tanto, si para abreviar indicamos con E'_n los números [12], llegamos a los siguientes casos particulares:

$h = 0$

$$\sum_{r=0}(x+2r+1)^n(-1)^r = \frac{1}{2}\,E_n(x)$$

$$\sum_{r=0}^{p}(x+2r+1)^n(-1)^r = \frac{E_n(x) + (-1)^p\,E_n(x+2p+2)}{2}$$

$h = 1$

$$\sum_{r=0}(x+2r+1)^{(n}(-1)^r = \frac{1}{2}\,E'_n(x)$$

$$\sum_{r=0}^{p}(x+2r+1)^{(n}(-1)^r = \frac{E'_n(x) + (-1)^p\,E'_n(x+2p+2)}{2}$$

Santa Fe, 1935.