Sobre los conjuntos acotados en los espacios vectoriales topológicos cocientes (*)

por

Manuel Valdivia Ureña

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. RICARDO SAN JUAN

INTRODUCCIÓN

Damos respuesta a una pregunta que se hace J. Horváth [1, página 274], de si dado un espacio vectorial topológico localmente convexo y de Hausdorff E, y un subespacio cerrado F de él, existirá, para cada conjunto acotado A de E/F, un conjunto acotado de E cuya imagen canónica contenga a A.

Damos las condiciones necesarias y suficientes para que dado un conjunto acotado A de E/F, exista un conjunto acotado de E tal que la clausura de su imagen canónica contenga A, y sacamos algunas consecuencias de esta caracterización.

* * *

Si E es un espacio vectorial topológico localmente convexo y de Hausdorff; F, un subespacio cerrado de E; E′ y (E/F)′, los duales topológicos de E y E/F, respectivamente; φ, la aplicación canónica de E en E/F, y F^0, el conjunto polar de F en E′, se tienen los siguientes resultados:

(*) Este trabajo pertenece a los realizados con una ayuda de la Junta para el Fomento de la Investigación en la Universidad.

TEOREMA 1.—*Para que dado un conjunto acotado cualquiera A de E/F exista un conjunto acotado B de E, tal que $\overline{\varphi(B)} \supset A$, es condición necesaria y suficiente que dado un tonel cualquiera S de F^0 con la topología inducida por $\sigma(E', E)$, exista un tonel T de E' con la topología $\sigma(E', E)$, de manera que $T \cap F^0 \subset S$.*

DEMOSTRACIÓN.—Si φ' es la aplicación traspuesta de φ y A es un conjunto acotado cualquiera de E/F, se tiene que A^0, polar de A en $(E/F)'$, será un tonel en $(E/F)'$ con la topología $\sigma((E/F)', E/F)$, y como φ' es un isomorfismo de $(E/F)'$ en F^0, para las topologías $\sigma((E/F)'; E/F)$ y la inducida en F^0 por $\sigma(E', E)$, respectivamente [1, pág. 263], resulta que $\varphi'(A^0)$ es un tonel en F^0 para la anterior topología.

Si existe un tonel T de E' para $\sigma(E', E)$ tal que $T \cap F^0 \subset \varphi'(A^0)$, el polar de T en E, T^0, será un conjunto acotado de E que verifica $\overline{\varphi(T^0)} \supset A$. En efecto, teniendo en cuenta [1, pág. 255]:

$$[\varphi(T^0)]^0 = \varphi'^{-1}(T) = \varphi'^{-1}(T \cap F^0) \subset \varphi'^{-1}(\varphi'(A^0)) = A^0,$$

luego

$$[\varphi(T^0)]^{00} \supset A^{00},$$

y como $\varphi(T^0)$ es convexo y equilibrado, se tiene que $[\varphi(T^0)]^{00} = \overline{\varphi(T^0)}$, y además, como $A^{00} \supset A$, resulta, finalmente,

$$\overline{\varphi(T^0)} \supset A.$$

Recíprocamente, si S es un tonel en F^0 con la topología inducida por $\sigma(E', E)$, $\varphi'^{-1}(S) = N$ será un tonel en $(E/F)'$ con la topología $\sigma((E/F)' E/F)$, luego N^0, polar de N en E/F, será un un conjunto acotado de E/F, por lo que existirá un conjunto acotado B de E tal que $\overline{\varphi(B)} \supset N^0$. De aquí, Si T es el conjunto polar de B en E', T será un tonel en E' para $\sigma(E', E)$, y de [1, pág. 255] se tiene que

$$[\varphi(B)]^0 = \varphi'^{-1}(T) = \varphi'^{-1}(T \cap F^0)$$

y como

$$[\varphi(B)]^{00} \supset \overline{\varphi(B)} \supset N^0,$$

resultará que

$$N^{00} = N \supset [\varphi(B)]^0 = \varphi'^{-1}(T \cap F^0),$$

luego

$$T \cap F^0 \subset \varphi'(N) = S \qquad \text{c. q. d.}$$

Corolario 1.1.—«Si dado un conjunto acotado cualquiera A de E/F existe un conjunto acotado B de E, tal que $\varphi(B) \supset A$, se tiene que dado un tonel cualquiera S de F^0 con la topología inducida por $\sigma(E', E)$, existe un un tonel T de E′ con la topología $\sigma(E', E)$, de manera que $T \cap F^0 \subset S$.»

Demostración.—Es una consecuencia inmediata del teorema 1 y de la relación $\overline{\varphi(B)} \supset \varphi(B) \supset A$.

A continuación vamos a dar un ejemplo de un espacio cociente E/F que posee un conjunto acotado A, de manera que no existe ningún conjunto acotado de E cuya imagen canónica contenga a A.

Ejemplo.—Sea H un espacio tonelado de Hausdorff que tenga un subespacio cerrado L que no sea tonelado [2, pág. 437].

Sea E el dual topológico de H con la topología $\sigma(E, H)$, y F el conjunto polar de L en E.

Entonces el espacio vectorial H es igual a E′, y el subespacio vectorial L, a F^0.

Como los conjuntos cerrados convexos de H son los mismos que los de E′ con la topología $\sigma(E', E)$, existirá un tonel S de F^0 que no será un entorno del origen en L, por lo que, al ser H tonelado, no existirá ningún tonel de H y, por lo tanto, ningún tonel de E′ con la topología $\sigma(E', E)$, tal que su intersección con F^0 esté contenida en S. Teniendo en cuenta, pues, el corolario anterior, debe existir un conjunto acotado A de E/F tal que no exista ningún conjunto acotado de E, cuya imagen por φ contenga A.

Este ejemplo responde a la duda de J. Horváth en [1, pág. 274].

Como consecuencia del teorema 1, podemos hacer una afirmación más fuerte sobre el ejemplo anterior, asegurando que existe un conjunto acotado A de E/F de manera que no existe ningún conjunto acotado B de E tal que $\overline{\varphi(B)} \supset A$.

Corolario 2.1.—«Si T es una $\mathfrak{S}$-topología sobre E′, siendo $\mathfrak{S}$ un recubrimiento de E formado por conjuntos acotados, y si F^0, con la *topología inducida por* $\mathcal{T}$ es tonelado, dado un conjunto acotado A de E/F existe un conjunto acotado B de E de manera que $\overline{\varphi(B)} \supset A$.»

Demostración.—Si S es un tonel en F^0 para la topología inducida por $\sigma(E', E)$, S será un tonel para la topología inducida por $\mathcal{T}$ y por lo tanto, será un entorno del origen para dicha topología, por lo que existirá un tonel T de E′ con la topología $\sigma(E', E)$, de manera que $T \cap F^0 \subset S$, c. q. d.

Corolario 3.1.—«Si E′ con la topología fuerte $\beta(E', E)$ es un espacio de Frechet, dado un conjunto acotado A de E/F existe un conjunto acotado B de E, de manera que $\overline{\varphi(B)} \supset A$.»

Demostración.—Es una consecuencia inmediata del corolario 2.1, ya que F^0 será un espacio de Frechet con la topología inducida por $\beta(E', E)$ y, por lo tanto, será tonelado.

Teorema 2.—*Para que dado un conjunto acotado cualquiera A de E/F exista un conjunto acotado B de E, tal que* $\overline{\varphi(B)} \supset A$, *es condición necesaria y suficiente que la aplicación traspuesta de la* φ, φ', *sea un morfismo estricto de* $(E/F)'$ *en* E' *para las topologías fuertes* $\beta((E/F)', E/F)$ *y* $\beta(E', E)$.

Demostración.—Si φ' es un morfismo estricto de $(E/F)'$ en E′ para las topologías $\beta((E/F)', E/F)$ y $\beta(E', E)$, dado un tonel S de F^0 para la topología inducida por $\sigma(E', E)$, $\varphi'^{-1}(S)$ será un tonel en $(E/F)'$ para la topología $\sigma((E/F)', E/F)$ y, por lo tanto, será un entorno del origen para $\beta((E/F)', E/F)$, luego S será un entorno del origen para la topología inducida en F^0 por

$\beta(E', E)$, lo que quiere decir que existe un tonel T de E' para la topología $\sigma(E', E)$ de manera que $T \cap F^0 \subset S$, por lo que, aplicando el teorema 1, dado un conjunto acotado A de E/F existe un conjunto acotado B de E de manera que $\overline{\varphi(B)} \supset A$.

Recíprocamente, supongamos que para cada conjunto acotado A de E/F existe un conjunto acotado B de E de manera que $\overline{\varphi(B)} \supset A$. Dado un tonel P de (E/F)' con la topología $\sigma((E/F)', E/F)$, $\varphi'(P)$ será un tonel en F^0 para la topología inducida por $\sigma(E', E)$ y por el teorema 1 existirá un tonel T de E' con la topología $\sigma(E', E)$ tal que $T \cap F^0 \subset \varphi'(P)$, y como φ' siempre es continua para las topologías $\beta((E/F)', E/F)$ y $\beta(E', E)$, podemos concluir que φ' es un morfismo estricto entre (E/F)' y E' para dichas topologías, c. q. d.

Obsérvese que si conocemos el hecho de que en general existan espacios cocientes E/F para los cuales no sea un morfismo estricto φ', para las topologías $\beta((E/F)', E/F)$ y $\beta(E', E)$ [1, pág. 271], podemos concluir que hay espacios E tales que existe algún acotado A de E/F, de manera que no existe ningún conjunto acotado de E, cuya imagen canónica contenga a A.

Teorema 3.— *Si $\mathcal{T}$ es una $\mathfrak{S}$-topología sobre E', siendo $\mathfrak{S}$ un recubrimiento de E formado por conjuntos acotados, y si F^0, con la topología inducida por $\mathcal{T}$ es tonelado, siendo además E semi-reflexivo, se tiene que E/F es semi-reflexivo. Se tiene también que $\mathcal{T}$ y $\beta(E', E)$ inducen sobre F^0 la misma topología.*

Demostración.—Por el corolario 2.1, dado un conjunto acotado y cerrado A cualquiera de E/F, existe un conjunto acotado B de de E, de manera que $\overline{\varphi(B)} \supset A$. Si M es la $\sigma(E, E')$-clausura de B, M será $\sigma(E, E')$-compacto, por ser E semi-reflexivo, luego $\varphi(M)$ es $\sigma((E/F, (E/F)')$-compacto, y como $\varphi(M) \supset \overline{\varphi(B)} \supset A$, A será relativamente compacto para la topología $\sigma((E/F, (E/F)')$, lo que nos indica que E/F es semi-reflexivo.

Además, al ser E/F semi-reflexivo, $\beta((E/F)', E/F)$ es la topología de Mackey sobre (E/F)', y como $\mathcal{T}$ es más fina que $\beta(E', F)$ y menos fina que $\sigma(E', E)$, la topología inicial sobre (E/E)' correspondiente a φ', considerada como aplicación de $(E/F)'$ en F^0 con la topología inducida por $\mathfrak{T}$ coincidirá con $\beta((E/F)', E/F)$, por lo que $\mathfrak{T}$ inducirá en F^0 la misma topología que $\beta(E', E)$.

Valencia, noviembre 1968.

Bibliografía

(1) Horváth, J.: *Topological Vector Spaces and Distributions*. Volume I. Addison-Wesley, 1966.

(2) Köthe, G.: *Topologische Lineare Räume*. Springer-Verlag. Berlin-Göttingen. Heidelberg, 1960.