Zur Einbettung des reellen Lorentzraumes in die Algebra der komplexen 4-Matrizen

por

Joseph Weier

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. RICARDO SAN JUAN

RESUMEN

El álgebra de Clifford sobre el espacio de Lorentz cuadridimensional y el álgebra de las 4-matrices complejas son isomorfas. Se estudian los isomorfismos naturales y otros distinguidos, existentes entre estas dos álgebras. En particular se consideran los vectores del espacio de Lorentz que corresponden a las matrices de Dirac clásicas.

Sei K der Vektorraum über den reellen Zahlen bestehend aus allen hermitischen komplexen 2-Matrizen. Sei L der reelle Lorentzraum. Seien σ_ν die üblichen Paulimatrizen und E die Einheitsmatrix. Es lassen sich dann alle Elemente X, Y, ... aus K eindeutig als

$$X = \sum x^\nu \sigma_\nu + x^4 E, \quad Y = \sum y^\nu \sigma_\nu + y^4 E, \ldots$$

darstellen. Sei

$$\{X, Y\} = \sum x^\nu y^\nu - x^4 y^4$$

das Skalarprodukt der Matrizen X, Y. Dann lässt sich L derart isomorph auf K abbilden, dass dem Skalarprodukt in L gerade das Skalarprodukt in K entspricht.

Der reelle Lorentzraum gestattet eine natürliche Einbettung in die Algebra der komplexen 4-Matrizen: Ist M der komplexe Lorentzraum und C (M) die Cliffordalgebra über M, so sind bekanntlich C (M) und die Algebra A der komplexen 4-Matrizen isomorph. Ist also ein Isomorphismus von C (M) auf A, so entspricht dem reellen Lorentzraum L ein additiver Vektorraum in A. Unten ist ein Isomorphismus angegeben, der bezüglich der Paulimatrizen als natürlich bezeichnet werden kann.

Sind $v_1, \ldots, v_4$ Vektoren aus L mit $v_j \cdot v_k = 0$ für $j \neq k$ und

$$(v_1)^2 = (v_2)^2 = (v_3)^2 = -(v_4)^2 = 1,$$

so ist $(v_1, \ldots, v_4)$ eine «Lorentzbasis» von L. Verallgemeinerte Lorentzbasen in der Cliffordalgebra C (M) über dem komplexen Lorentzraume M kann man dann als Quadrupel $(t_1, \ldots, t_4)$ von Tensoren $t_j \in$ C (M) erklären, für die

$$t_j \vee t_k + t_k \vee t_j = 0 \qquad \text{für} \qquad j \neq k$$

und $t_j \vee t_j = 1$ für $j = 1, 2, 3$ sowie $t_4 \vee t_4 = -1$ gilt. Dabei ist der Produktoperator in C (M) mit $\vee$ bezeichnet. Ist α ein Automorphismus in C (M), so bilden die Tensoren $\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_4)$ wieder eine Lorentzbasis.

Eine interessante Verallgemeinerung der Diracoperatoren haben unabhängig voneinander E. Kähler und D. Kastler (vergleiche etwa (1) bis (3)) angegeben: Der komplexe n-Raum V_n sei mit einem Skalarprodukt versehen Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine orthonormale Basis in V_n bezüglich dieses Skalarproduktes. Für $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ und jeden schiefsymmetrischen kontravarianten Tensor ω über V_n sei

$$\gamma_\alpha(\omega) = e_\alpha \wedge \omega + e_\alpha \cdot \omega.$$

Dann bestimmt γ_α einen linearen Operator in der Cliffordalgebra C (V_n) über V_n, den wir unten als KK-Operator bezeichnet haben. Für $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$ sei $\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2\,\delta_{\alpha\beta}$, wie unten bewiesen ist.

Elementar isomorph zur Cliffordalgebra C (M) ist die Algebra A der komplexen 4-Matrizen. Ein weniger elementarer Isomorphismus ergibt sich wie folgt. Für jeden schiefsymmetrischen kontravarianten Tensor ω über dem komplexen 2-Raum V_2 sei

$$\varphi_1(\omega) = e_1 \wedge \omega + e_1 \cdot \omega, \qquad \varphi_2(\omega) = e_2 \wedge \omega + e_2 \cdot \omega.$$
$$\varphi_3(\omega) = i\,(e_1 \wedge \omega - e_1 \cdot \omega), \qquad \varphi_4(\omega) = e_2 \wedge \omega - e_2 \cdot \omega.$$

Dann ist $\varphi_j \varphi_k + \varphi_k \varphi_j = 0$ für $j \neq k$, ferner

$$(\varphi_1)^2 = (\varphi_2)^2 = (\varphi_3)^2 = -(\varphi_4)^2 = 1.$$

Sei B die von den linearen Abbildungen φ_j erzeugte Algebra. Setzt man dann

$$\Psi(d_j) = \varphi_j,$$

und setzt man Ψ über C (M) linear fort, so bestimmt Ψ: C (M) $\rightarrow$ B einen Isomorphismus zwischen C (M) und B. Dabei seien e_1, e_2 die natürlichen Einheitsvektoren von V_2 und $d_j = (\delta_j^1, \ldots, \delta_j^4)$ die natürlichen Einheitsvektoren von M.

Die Matrizen, die zum Vektorraum Φ (L), es sei jetzt Φ der oben in Rede stehende natürliche Isomorphismus, gehören, mögen «Ortsmatrizen» heissen. Es entspricht dann jedem Punkt des reellen Lorentzraumes eine solche Ortsmatrix. Die zu $x = (x^1, \ldots, x^4)$ gehörige Ortsmatrix $\xi = \Phi(x)$ ist leicht anzugeben. Unterwirft man L einer Lorentztransformation λ, so geht ξ in die Ortsmatrix $\Phi \lambda \Phi^{-1}(\xi)$ über. Über die Gestalt dieser letzteren Matrix in Abhängigkeit von λ ist in der Literatur schon verschiedentlich diskutiert worden.

1. Paulitripel

Sind $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ komplexe 2-Matrizen mit $\sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = 2\,\delta_{jk}$, so bilden sie ein «Paulitripel». Ist $(R_{\alpha\beta})$ eine orthogonale 3-Matrix, und setzt man

$$\sigma'_j = R_{j\alpha}\,\sigma_\alpha,$$

so bilden auch die σ'_j ein Paulitripel: es ist

$$\begin{aligned} \sigma'_j \sigma'_k + \sigma'_k \sigma'_j &= (R_{j\alpha}\,\sigma_\alpha)(R_{k\beta}\,\sigma_\beta) + (R_{k\alpha}\,\sigma_\alpha)(R_{j\beta}\,\sigma_\beta) = \\ &= R_{j\alpha} R_{k\beta}\,\sigma_\alpha \sigma_\beta + (R_{k\alpha}\,\sigma_\alpha)(R_{j\beta}\,\sigma_\beta) = \\ &= R_{j\alpha} R_{k\beta}(\sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta \sigma_\alpha) = \\ &= R_{j\alpha} R_{k\beta}\,\delta_{\alpha\beta} = R_{j\alpha} R_{k\alpha} = \delta_{jk}, \end{aligned}$$

wie behauptet.

Bilden die Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ein Paulitripel, so verschwinden ihre Spuren.

Beweis. Sei der Index ν vorgegeben und μ ein Index $\neq \nu$. Dann ist

$$\sigma_\mu \sigma_\nu \sigma_\mu = - \sigma_\nu (\sigma_\mu \sigma_\mu) = - \sigma_\nu .$$

Für beliebige Matrizen A und B ist spur (A B) = spur (B A). Also

$$\begin{aligned} \operatorname{spur} (\sigma_\mu \sigma_\nu \sigma_\mu) &= \operatorname{spur} (\sigma_\mu (\sigma_\nu \sigma_\mu)) = \\ &= \operatorname{spur} ((\sigma_\nu \sigma_\mu) \sigma_\mu) = \\ &= \operatorname{spur} (\sigma_\nu (\sigma_\mu \sigma_\mu)) = \operatorname{spur} \sigma_\nu . \end{aligned}$$

Andererseits ist $\sigma_\mu \sigma_\nu \sigma_\mu = - \sigma_\nu$, daher

$$\operatorname{spur} (\sigma_\mu \sigma_\nu \sigma_\mu) = \operatorname{spur} (- \sigma_\nu) = - \operatorname{spur} \sigma_\nu ,$$

also spur $\sigma_\nu = 0$, wie behauptet.

Bilden die Matrizen σ_1, σ_2, σ_3 ein Paulitripel, so sind die Matrizen σ_1, σ_2, σ_3 und E, wo E die Einheitsmatrix, linear unabhängig.

Beweis. Mit $\sigma_0 = E$ bezeichnen wir die Matrizen $\sigma_0, \ldots, \sigma_3$ auch mit ($j = 0,1, ,2, 3$). Seien z_j komplexe Zehlen mit

$$\Sigma z_j \sigma_j = 0.$$

Durch Multiplikation mit σ_k folgt, dass $z_k + \Sigma_{j \neq k} \; z_j \sigma_j \sigma_k = 0$. Es genügt also zu zeigen:

$$\operatorname{spur} (\sigma_j \sigma_k) = 0.$$

Wenn einer der Indizes j, k gleich Null, ist der andere Index $\neq 0$. Es bleibt also ein σ_ν. Und spur $\sigma_\nu = 0$ ist bereits bewiesen. Also genügt es zu zeigen, dass

$$\operatorname{spur} (\sigma_\mu \sigma_\nu) = 0 \qquad \text{für} \qquad \mu \neq \nu .$$

Nun ist

$$\sigma_\mu (\sigma_\mu \sigma_\nu) \sigma_\mu = \sigma_\nu \sigma_\mu = - (\sigma_\mu \sigma_\nu).$$

Ferner ist

$$\operatorname{spur} [\sigma_\mu (\sigma_\mu \sigma_\nu \sigma_\mu)] = \operatorname{spur} [(\sigma_\mu \sigma_\nu \sigma_\mu) \sigma_\mu],$$

da allgemein spur (A B) = spur (B A) gilt. Also

$$\operatorname{spur} [\sigma_\mu (\sigma_\mu \sigma_\nu) \sigma_\mu] = \operatorname{spur} (\sigma_\mu \sigma_\nu).$$

Wegen $\sigma_\mu (\sigma_\mu \sigma_\nu) \sigma_\mu = -(\sigma_\mu \sigma_\nu)$ ist aber auch

$$\mathrm{spur}\,[\sigma_\mu (\sigma_\mu \sigma_\nu) \sigma_\mu] = -\,\mathrm{spur}\,(\sigma_\mu \sigma_\nu).$$

Somit spur $(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 0$, wie behauptet.

Für die *üblichen Paulitripel*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

findet man die lineare Unabhängigkeit der Matrizen σ_1, σ_2, σ_3, E gewöhnlich so bewiesen. Es genügt zu zeigen, dass sich jede komplexe 2-Matrix $A = (a_{jk})$ als Linearkombination von σ_1, σ_2, σ_3 und E darstellen lässt. Hierzu setzt man

$$x^1 = \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}), \quad x^2 = \frac{i}{1}(a_{12} - a_{21}),$$

$$x^3 = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}), \quad x^4 = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}).$$

Dann ist wie man leicht nachrechnet,

$$A = \Sigma\, x^\nu \sigma_\nu + x^4 E.$$

Eine Algebra Π heisst Cliffordalgebra, wenn in ihr Elemente $e_1, \ldots, e_n$ mit $e_j e_k + e_k e_j = 2\,\delta_{jk}$ und der Eigenschaft, die Algebra zu erzeugen, existieren. Im Falle der komplexen 2-Matrizen ist $n = 2$, man kann $e_1 = \sigma_1$ und $e_2 = \sigma_2$ setzen. Für die üblichen Paulimatrizen ist dann $i\,\sigma_3 = \sigma_1 \sigma_2$, so dass sich σ_3 und E durch σ_1 und σ_2 ausdrücken lassen.

2. Lorentzmetrik in der Algebra der Paulimatrizen

Sei K der Vektorraum über den reellen Zahlen bestehend aus allen hermitischen komplexen 2-Matrizen. Sind X, Y Elemente aus K, so wollen wir in K gemäss

$$(X, Y) = \mathrm{spur}\,(X\,Y)$$

ein Skalarprodukt definieren. Es ist dann

(1) $$(X, Y) = (Y, X),$$

(2) $$(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2).$$

Weiter ist

$$\text{spur}\,(X\,X) = \Sigma\,\Sigma\,X_{j\nu}\,X_{\nu j}.$$

Da X hermitisch ,ist $X_{j\nu} = \overline{X}_{\nu j}$. Also

$$\text{spur}\,(X\,X) = \Sigma\,\Sigma\,X_{j\nu}\,\overline{X}_{j\nu}$$

Mithin

(3) $$(X, X) > 0 \quad \text{für} \quad X \neq 0.$$

Die durch $(X, Y) = \text{spur}\,(X\,Y)$ bestimmte Metrik in K ist also positiv definit.

Jede Matrix X aux K lässt sich in genau einer Weise als

(4) $$X = \Sigma^3_{\nu=1}\,x^\nu\,\sigma_\nu + x^4\,F$$

darstellen. Ist X hermitisch, so sind die $x^1, \ldots, x^4$ reell. Wir wollen nun zeigen:

Mit $X = \Sigma\,x^\nu\,\sigma_\nu + x^4\,E$ *und* $Y = \Sigma\,y^\nu\,\sigma_\nu + y^4\,E$ *ist*

(5) $$(X, Y) = 2\,\Sigma^4_{\alpha=1}\,x^\alpha\,y^\alpha.$$

Beweis. Unter Verwendung der Vertauschungsrelation

$$\sigma_\mu\,\sigma_\nu + \sigma_\nu\,\sigma_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu}$$

ist

$$\begin{aligned} X\,Y &= (\Sigma\,x^\mu\,\sigma_\mu + x^4\,E)\,(\Sigma\,y^\nu\,\sigma_\nu + y^4\,E) = \\ &= \Sigma\,x^\mu\,y^\nu\,\sigma_\mu\,\sigma_\nu + \Sigma\,x^4\,y^\nu\,\sigma_\nu + \Sigma\,x^\mu\,y^4\,\sigma_\mu + x^4\,y^4\,E = \\ &= \Sigma\,x^\nu\,y^\nu\,(\sigma_\nu)^2 + \Sigma\,(x^4\,y^\nu + x^\nu\,y^4)\,\sigma_\nu + x^4\,y^4\,E. \end{aligned}$$

wegen $\text{spur}\,\sigma_\nu = 0$ daher

$$\text{spur}\,(X\,Y) = 2\,\Sigma\,x^\alpha\,y^\alpha,$$

wie behauptet.

Die Gleichung (5) legt es nahe, in K gemäss

$$(6) \qquad \{X, Y\} = \Sigma^3_{\nu=1} x^\nu y^\nu - x^4 y^4$$

eine Lorentzmetrik einzuführen. Bezeichnet L den reellen Lorentzraum, also den Vektorraum aller Quadrupel $(x^1, \ldots, x^4)$ reeller Zahlen x^ν, vermöge

$$x \cdot y = \Sigma^3_{\nu=1} x^\nu y^\nu - x^4 y^4$$

mie einem Skalarprodukt versehen, so bildet man üblicherweise L vermöge

$$(7) \qquad \varphi(x^1, \ldots, x^4) = \Sigma^3_{\nu=1} x^\nu \sigma_\nu + x^4 E$$

auf K ab. Ersichtlich bleibt bei der Abbildung φ: L $\rightarrow$ auch das Skalarprodukt erhalten, wenn man das Skalarprodukt in K durch (6) erklärt. Ist

$$\varphi(x) = \varphi(y) = \varphi(y^1, \ldots, y^4),$$

so ist

$$\Sigma^3_{\nu=1} (x^\nu - y^\nu)\, \sigma_\nu + (x^4 - y^4)\, E = 0.$$

Da die Matrizen σ_1, σ_2, σ_3, E linear unabhängig sind, ist also $x = y$, daher φ eine isomorphe Abbildung. Mit $\varphi(x) = A = (a_{jk})$ ist

$$a_{11} = x^4 + x^3, \quad a_{22} = x^4 - x^3, \quad a_{12} = x^1 - i x^2, \quad a_{21} = x^1 + i x^2.$$

Und $\varphi^{-1}(A)$ hat die Komponenten

$$x^1 = \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}), \quad x^2 = \frac{i}{2}(a_{12} - a_{21}),$$

$$x^3 = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \quad \text{und} \quad x^4 = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}).$$

Dass der Vektorraum K der hermitischen 2-Matrizen über den reellen Zahlen und der reelle Lorentzraum L, wenn man von der Metrik absieht, isomorph sind, ist trivial. Denn jede hermitische 2-Matrix bestimmt ein Quadrupel reeller Zahlen und umgekehrt.

3. Fortsetzung von Lorentztransformationen über die Cliffordalgebra

Sei L der reelle Lorentzraum und ω: L $\rightarrow$ L eine lineare Transformation mit $\omega(x) \cdot \omega(y) = x \cdot y$ für alle Vektoren x, y aus L. Dann heisst ω Lorentz-transformation. Ist $z = x + i\,y$ ein Vektor aus dem komplexen Lorentzraume M, so wird durch

$$\omega(z) = \omega(x) + i\,\omega(y)$$

die lineare Fortsetzung von ω über M bestimmt. Da jede Basis von L zugleich Basis von M ist, gibt es nur eine lineare Fortsetzung von ω über M. Mit $\omega(d_j) = \Sigma\, L^{\nu}{}_j\, d_\nu$, wobei $d_j = (\delta_j{}^1, \ldots, \delta_j{}^4)$ ist, hat die Matrix (L_{jk}) die bekannten Eigenschaften einer Lorentzmatrix. Sei $e_j = d_j$ für $j = 1, 2, 3$ und $e_4 = -i\,d_4$. Die Tensoren

$$e_\nu\ (\nu = 1, 2, 3, 4), \quad e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4,$$
$$i\,e_\mu \wedge e_\nu\ (\mu < \nu), \quad i\,e_\lambda \wedge e_\mu \wedge e_\nu\ (\lambda < \mu < \nu)$$

und 1 in dieser Reihenfolge mögen $E_1, E_2, \ldots, E_n$ heissen. Es schreibt sich dann jeder inhomogene schiefsymmetrische kontravariante Tensor s über dem komplexen Lorentzraume M eindeutig als $s = \Sigma\, s^\nu E_\nu$. Ist $t = \Sigma\, t^\nu E_\nu$ ein zweiter solcher Tensor, so ist das Cliffordprodukt $s \vee t$ von s und t der Tensor $\Sigma\, s^\alpha t^\beta E_\alpha \vee E_\beta$ mit folgender Multiplikationstafel der E_ν. Mit

$$E_\alpha = \zeta_\alpha\, e_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge e_{\alpha_a}$$

und

$$E_\beta = \zeta_\beta\, e_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge e_{\beta_b}$$

ist

$$E_\alpha \vee E_\beta = (-1)^q\, \zeta_\alpha\, \zeta_\beta\, e_{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_r}$$

wobei $\lambda_1 < \ldots < \lambda_r$ die paarweis verschiedenen unter den e_{α_ν}, e_{β_ν} sind und q die Anzahl der Inversionen in $(\alpha_1, \ldots, \alpha_a, \beta_1, \ldots, \beta_b)$ bedeutet. Die Cliffordalgebra über M sei weiterhin mit C (M) bezeichnet.

Formal gänzlich anders ist folgende Definition des Cliffordproduktes. Den, nicht trivialen, Beweis übergehen wir hier. Zunächst sei allgemein der komplexe n-Vektorraum V_n mit einem symmetrischen Skalarprodukt versehen. Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine orthonormale Basis von V_n. Bezüglich V_n sei die Bedeutung von s und t die gleiche wie oben bezüglich M. Dann ist zunächst

$$e_\alpha \vee t = e_\alpha \wedge t + e_\alpha \cdot t,$$

hierauf

$$(e_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e_{\lambda_r}) \vee t = (e_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e_{\lambda_{r-1}}) \vee (e_{\lambda_r} \vee t).$$

Im übrigen ist der $\vee$-Operator linear, also

$$s \vee (t_1 + t_2) = s \vee t_1 + s \vee t_2, \qquad (\alpha s) \vee t = \alpha (s \vee t) = s \vee (\alpha t).$$

Dadurch ist das $\vee$-Produkt überall definiert.

Ist wieder ω: L $\to$ L eine Lorentztransformation, so kann man wohl die durch

$$\Omega(s) = \Sigma s^\nu \Omega(E_\nu), \tag{1}$$

$$\Omega(e_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e_{\lambda_r}) = \omega(e_{\lambda_1}) \wedge \ldots \wedge \omega(e_{\lambda_r}) \tag{2}$$

bestimmte Abbildung Ω von C (M) in sich als die «natürliche Fortsetzung» von ω über C (M) bezeichnen.

Die natürliche Fortsetzung Ω der Lorentztransformation ω: $L \to L$ über die Cliffordalgebra C (M) über dem komplexen Lorentzraum M ist ein Isomorphismus von C (M) auf sich.

Zum Beweis wollen wir zunächts zeigen, dass

$$\Omega(e_j) \vee \Omega(e_k) = \Omega(e_j \vee e_k). \tag{3}$$

Für $j \neq k$ ist $e_j \vee e_k = e_j \wedge e_k$, nach der Erklärung von Ω weiter

$$\Omega(e_j \wedge e_k) = \omega(e_j) \wedge \omega(e_k),$$

wegen $\Omega(e_\nu) = \omega(e_\nu)$ daher die Behauptung richtig. Für $j = k$ ist $e_j \vee e_k = 1$ und $\Omega(1) = 1$. Für beliebige Vektoren a, b aus L ist

$$a \vee b = a \wedge b + a \cdot b,$$

wie man leicht bestätigt. Daher

$$\Omega(e_j) \vee \Omega(e_j) = \Omega(e_j) \cdot \Omega(e_j).$$

Andererseits ist

$$\Omega(e_j)\,\Omega(e_j) = \omega(e_j) \cdot \omega(e_j) = e_j \cdot e_j = 1,$$

also (1) auch in diesem Falle richtig.

Allgemein ergbit sich

$$\Omega(\mathrm{E}_\alpha) \vee \Omega(\mathrm{E}_\beta) = \Omega(\mathrm{E}_\alpha \vee \mathrm{E}_\beta) \tag{4}$$

wie folgt. Sei

$$\mathrm{E}_\alpha = \zeta_\alpha\, e_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge e_{\alpha_a} \quad \text{und} \quad \mathrm{E}_\beta = \zeta_\beta\, e_{\beta_1} \wedge \dots \wedge e_{\beta_b}.$$

Mit $\omega(e_j) = e'_j$ ist die linke Seite von (4) definitionsgemäss

$$\zeta_\alpha\, \zeta_\beta\, (e'_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge e'_{\alpha_a}) \vee (e'_{\beta_1} \wedge \dots \wedge e'_{\beta_b}).$$

Dieser Ausdruck wiederum ist gleich

$$(-1)^q\, \zeta_\alpha\, \zeta_\beta\, e'_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge e'_{\lambda_r}.$$

Dabei entstehe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ aus $(\alpha_1, \dots, \alpha_a, \beta_1, \dots, \beta_b)$, indem man alle doppelt vorkommenden Paare in $(\alpha_1, \dots, \alpha_a, \beta_1, \dots, \beta_b)$ streicht und die verbleibenden in natürliche Ordnung bringt. Der Index q ist die Anzahl der Inversionen in $(\alpha_1, \dots, \alpha_a, \beta_1, \dots, \beta_b)$. Andererseits ist

$$(e_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge e_{\alpha_a}) \vee (e_{\beta_1} \wedge \dots \wedge e_{\beta_b}) = (-1)^q\, e_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge e_{\lambda_r}.$$

Und definitionsgemäss ist

$$\Omega((-1)^q\, e_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge e_{\lambda_r}) = (-1)^q\, e'_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge e'_{\lambda_r},$$

womit (4) bewiesen ist.

Für die Transformation ω des reellen Lorentzraumes L ist trivialerweise

$$\omega(\zeta\, x) = \zeta\, \omega(x) = \bar{\zeta}\, \omega(x)$$

für alle $x \in L$ und alle reellen Zahlen ζ. Für die oben erklärte «natürliche» Fortsetzung Ω von ω gilt

$$\Omega(\xi s) = \xi \Omega(s)$$

für alle s aus C (M) und alle komplexen Zahlen ξ. Es ist also Ω *linear*. Durch

$$\Lambda(\xi s) = \bar{\xi} \Lambda(s)$$

würde eine *antilineare* Fortsetzung von ω entstehen. Ferner ist oben

$$\Omega(e_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e_{\lambda_r}) = \omega(e_{\lambda_1}) \wedge \ldots \wedge (e_{\lambda_r})$$

gesetzt. Und Ω erweist sich als Automorphismus von C (M). Es gibt sicher Lorentztransformationen ω, bei denen die Fortsetzung

$$\Delta(e_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e_{\lambda_r}) = \omega(e_{\lambda_r}) \wedge \ldots \wedge \omega(e_{\lambda_1})$$

zu einem *Antiautomorphismus* Δ von C (M) Veranlassung gibt.

Sind $x = (x^1, \ldots, x^4)$ und $y = (y^1, \ldots, y^4)$ Vektoren aus L oder M, so ist definitionsgemäss

$$x \cdot y = \Sigma^3_{\nu=1} x^\nu y^\nu - x^4 y^4.$$

Vektoren $a_1, \ldots, a_2$ aus L bilden eine *Lorentzbasis*, wenn $a_j \cdot a_k = 0$ für $j \neq k$ und

$$(a_1)^2 = (a_2)^2 = (a_3)^2 = -(a_4)^2 = 1$$

gilt. Man kann zeigen:

Die reellen Vektoren $a_1, \ldots, a_4$ *aus* L *bilden genau dann eine Lorentzbasis, wenn*

$$a_j \vee a_k + a_k \vee a_j = 0 \quad \textit{für} \quad j \neq k$$

und $a_j \vee a_j = 1$ *für* $j = 1, 2, 3$, $a_4 \vee a_4 = -1$ *gilt.*

Vermöge $b_j = a_j$, $j = 1, 2, 3$, und $b_4 = -i\, a_4$ entspricht der Lorentzbasis $(a_1, \ldots, a_4)$ eine «Diracbasis» $(b_1, \ldots, b_4)$. Wegen der Konstanz der Signatur gibt es im reellen Lorentzraume keine Diracbasen.

Ersichtlich kann man den Begriff der Lorentzbasis so verallgemeinern Elemente $A_1, \ldots, A_4$ aus C (M) derart, dass

$$A_j \vee A_k + A_k \vee A_j = 0 \qquad \text{für} \qquad j \neq k$$

für $j \neq k$ und

$$A_1 \vee A_1 = A_2 \vee A_2 = A_3 \vee A_3 = -A_4 \vee A_4 = 1$$

gilt, bilden eine verallgemeinerte Lorentzbasis von C (M). Entsprechend bilden die Elemente $B_1, \ldots, B_4$ aus C (M) eine verallgemeinerte Diracbasis, wenn

$$B_j \vee B_k + B_k \vee B_j = 2\,\delta_{jk}$$

für alle j, k.

Bilden die Tensoren A_j eine Lorentzbasis in der Cliffordalgebra $C(M)$ und ist φ ein Automorphismus von $C(M)$, so bilden auch die Tensoren

$$A'_j = \varphi(A_j)$$

eine Lorentzbasis in $C(M)$.

Beweis. Da φ Automorphismus, ist

$$A'_j \vee A'_k + A'_k \vee A'_j = \varphi(A_j \vee A_k + A_k \vee A_j).$$

Es verbleibt also nur zu zeigen, dass $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(-1) = -1$. Hierzu sei $\varphi(\omega) = 1$. Dann ist

$$\varphi(1) = \varphi(1) \vee \varphi(\omega) = \varphi(1 \vee \omega) = \varphi(\omega) = 1.$$

Hieraus folgen auch die beiden anderen Gleichungen.

4. Ausgezeichnete Basen in der Algebra der komplexen 4-Matrizen

Komplexe 4-Matrizen $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ mit $\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu}$ bilden ein «Diracquadrupel». Man bestätigt leicht, dass die Matrizen

$$\gamma_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -i\,\sigma_\nu \\ i\,\sigma_\nu & 0 \end{pmatrix}, \qquad \nu = 1, 2, 3, \qquad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

wobei wieder E die Einheitsmatrix, ein Diracquadrupel bilden: Bei beliebiger komplexer 2-Matrix A ist nämlich

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = 0$$

Im besonderen ist also $\gamma_\nu \gamma_4 + \gamma_4 \gamma_\nu = 0$ für $\nu = 1, 2, 3$. Verbleibt zu zeigen dass $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu}$ für $\mu, \nu = 1, 2, 3$. Das folgt aber leicht aus den Vertauschungsrelationen der σ_ν. Es ist nämlich

$$\begin{pmatrix} 0 & -i\,\sigma_\mu \\ i\,\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i\,\sigma_\nu \\ i\,\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\,\sigma_\nu \\ i\,\sigma_\nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i\,\sigma_\mu \\ i\,\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_\mu \sigma_\nu & 0 \\ 0 & \sigma_\mu \sigma_\nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_\nu \sigma_\mu & 0 \\ 0 & \sigma_\nu \sigma_\mu \end{pmatrix} = 2\,\delta_{\mu\nu}$$

für alle μ, ν.

Die Matrizen

$$\gamma_\nu,\ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4,\ i\gamma_\mu \gamma_\nu\ (\mu < \nu),\ i\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu\ (\lambda < \mu < \nu)$$

und 1 in dieser Reihenfolgen mögen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{16}$ heissen. Dann kann man zeigen: jede komplexe 4-Matrix A schreibt sich eindeutig als

$$A = \Sigma_{\nu=1}^{16}\, a^\nu\, \Gamma_\nu.$$

Ist A hermitisch, so sind die a^ν reell. Setzt man $\beta_\nu = \gamma_\nu$ für $\nu = 1, 2, 3$ und $\beta_4 = i\,\gamma_4$, so ist

$$(1) \qquad \beta_\mu\,\beta_\nu + \beta_\nu\,\beta_\mu = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu,$$

$$(2) \qquad (\beta_1)^2 = (\beta_2)^2 = (\beta_3)^2 = -(\beta_4)^2 = 1.$$

Übrigens ist $i\,\sigma_1$ aus β_1 nicht hermitisch, dagegen ist β_1 insgesamt hermitisch.

Sind λ_ν Matrizen derart, dass (1) und (2), wenn man dort β durch λ ersetzt, richtig ist, so heisse $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4)$ ein «Lorentzquadrupel». Es gilt dann:

Ist $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4)$ *ein Lorentzquadrupel und* (L_{jk}) *eine Lorentzmatrix, so ist auch* $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_4)$ *mit*

$$\lambda'_j = \Sigma\, L_{\nu j}\,\lambda_\nu$$

ein Lorentzquadrupel.

Beweis. Es ist

$$\lambda'_j\,\lambda'_j = (\Sigma\, L_{\alpha j}\,\lambda_\alpha)^2 = \Sigma\, L_{\alpha j}\,L_{\beta j}\,\lambda_\alpha\,\lambda_\beta =$$
$$= \Sigma_{\beta \neq \alpha}\, L_{\alpha j}\,L_{\beta j}\,\lambda_\alpha\,\lambda_\beta + \Sigma\, L_{\alpha j}\,L_{\alpha j}\,(\lambda_\alpha)^2.$$

Nun ist

$$\Sigma_{\alpha \neq \beta} = \Sigma_{\alpha < \beta} + \Sigma_{\alpha > \beta} = \Sigma_{\alpha < \beta} + \Sigma_{\beta > \alpha}\, L_{\beta j}\,L_{\alpha j}\,\lambda_\beta\,\lambda_\alpha =$$
$$= \Sigma_{\alpha < \beta}\, L_{\alpha j}\,L_{\beta j}\,(\lambda_\alpha\,\lambda_\beta + \lambda_\beta\,\lambda_\alpha) = 0.$$

daher

$$\lambda'_j\,\lambda'_j = \Sigma^3_{\alpha = 1}\,(L_{\alpha j})^2 - (L_{4j})^2,$$

woraus nach der Definition der Lorentzmatrizen

$$(\lambda'_1)^2 = (\lambda'_2)^2 = (\lambda'_3)^2 = -(\lambda'_4)^2 = 1$$

folgt.

Für $j \neq k$ ist

$$\lambda'_j\,\lambda'_k + \lambda'_k\,\lambda'_j = (\Sigma\, L_{\alpha j}\,\lambda_\alpha)(\Sigma\, L_{\beta k}\,\lambda_\beta) + (\Sigma\, L_{\alpha k}\,\lambda_\alpha)(\Sigma\, L_{\beta j}\,\lambda_\beta) =$$
$$= \Sigma\, L_{\alpha j}\,L_{\beta k}\,\lambda_\alpha\,\lambda_\beta + L_{\alpha k}\,L_{\beta j}\,\lambda_\alpha\,\lambda_\beta =$$
$$= \Sigma\, L_{\alpha j}\,L_{\beta k}\,\lambda_\alpha\,\lambda_\beta + \Sigma\, L_{\beta k}\,L_{\alpha j}\,\lambda_\beta\,\lambda_\alpha =$$
$$= \Sigma\, L_{\alpha j}\,L_{\beta k}\,(\lambda_\alpha\,\lambda_\beta + \lambda_\beta\,\lambda_\alpha) = \Sigma\, L_{\alpha j}\,L_{\alpha k},$$

woraus nach der Definition der Lorentzmatrizen die Behauptung folgt.

Es bilden auch die Matrizen $\alpha_\nu = \gamma_\nu$, $\nu = 1, 2, 3$, und

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} -E & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

ein Diracquadrupel. Die zu diesem Quadrupel gehörige Matrix

$$\alpha_5 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$$

ist $\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}$, wie man durch drei Matrizenmultiplikationen nachrechnet. Mithin: auch $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5)$ ist ein Diracquadrupel.

5. Einbettung des reellen Lorentzraumes in die Algebra der komplexen 4-Matrizen

Die e_ν und γ_ν, $\nu = 1, 2, 3, 4$, und die E_ν und Γ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, 16$, seien wie oben erklärt. Es sei wieder C (M) die Cliffordalgebra über dem Klomplexen Lorentzraume M und A die Algebra der komplexen 4-Matrizen. Durch

(1) $$\Phi(E_\nu) = \Gamma_\nu$$

wird dann C (M) isomorph auf A abgebildet. Wegen der Bedeutung der e_ν und γ_ν vermittelt Φ in gewissem Sinne einen natürlichen Isomorphismus zwischen C (M) und A. Die Abbildung Φ führt den Punkt $x = \Sigma\, x^\nu d_\nu$ des reellen Lorentzraumes L in die Matrix

(2) $$\Phi(x) = \Sigma\, x^\nu \beta_\nu$$

über. Dabei ist $\beta_\nu = \gamma_\nu$ für $\nu = 1, 2, 3$ und $\beta_4 = i\,\gamma_4$ wie im letzten Abschnitt erklärt. Da Φ linear, ist nämlich

$$\Phi(x) = \Sigma\, x^\nu \Phi(d_\nu),$$

also

$$\Phi(x) = \Sigma^3_{\nu=1} x^\nu \gamma_\nu + x_4 \Phi(d_4).$$

Andererseits ist $d_4 = i\, e_4$, also

$$\Phi(d_4) = \Phi(i\, e_4) = i\, \Phi(e_4) = i\, \gamma_4,$$

woraus (2) folgt.

Aus (2) und der Definition der β_ν folgt, dass $\Phi(x) = i \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ \Psi & 0 \end{pmatrix}$ mit

$$(3) \qquad \varphi = -\Sigma\, x^\nu \sigma_\nu + x^4\, \mathrm{E}, \quad \psi = +\Sigma\, x^\nu \sigma_\nu + x^4\, \mathrm{E}.$$

Nach (2) ist im besonderen

$$(4) \qquad \Phi(d_\nu) = \beta_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3, 4.$$

Die Matrizen $\Sigma\, x^\nu \beta_\nu$, wobei die x^ν reelle Zahlen sind, wollen wir auch als «Ortsmatrizen» bezeichnen.

Ist λ eine Lortentztransformation von L und (L_{jk}) die zu λ gehörige Lorentzmatrix, also

$$\lambda(d_j) = \Sigma\, \mathrm{L}_{\nu j}\, d_\nu,$$

ferner

$$(5) \qquad \Lambda = \Phi\, \lambda\, \Phi^{-1},$$

so gilt

$$(6) \qquad \Lambda(\beta_j) = = \Sigma\, \mathrm{L}_{\nu j}\, \beta_\nu.$$

Es ist nämlich

$$\Phi^{-1}(\beta_j) = d_j, \quad \lambda(d_j) = \Sigma\, \mathrm{L}_{\nu j}\, d_\nu, \quad \Phi(\Sigma\, \mathrm{L}_{\nu j}\, d_\nu) = \Sigma\, \mathrm{L}_{\nu j}\, \Phi(d_\nu) = \Sigma\, \mathrm{L}_{\nu j}\, \beta_\nu,$$

wie behauptet.

Nach der Erklärung von Λ ist

$$(7) \qquad \Phi(\lambda\, x) = \Lambda\, \Phi(x)$$

für alle Vektoren x aus L.

Die Ortsmatrizen bilden einen Vektorraum V über den reellen Zahlen. Das laufende Element $\xi = \Sigma\, x^\nu \beta_\nu$ aus V transformiert sich bei einer Lorentztransformation A gemäss

$$\Lambda(\xi) = \Sigma\, x^\nu\, \Lambda(\beta_\nu) =$$
$$= \Sigma\, x^\nu\, \mathrm{L}_{\alpha\nu}\, \beta_\alpha = \Sigma\,(\Sigma\, \mathrm{L}_{\alpha\nu}\, x^\nu)\, \beta_\alpha.$$

Es ist also

(8) $$\Lambda(\xi) = \Sigma\,(\Sigma\, L_{\nu\alpha}\, x^\nu)\, \beta_\alpha$$

Ohne Bezug auf den Lorentzraum L kann man Lorentztransformationen des Vektorraumes V der Ortsmatrizen so definieren. Sind

$$\xi = \Sigma\, x^\nu\, \beta_\nu \quad \text{und} \quad \eta = \Sigma\, y^\nu\, \beta_\nu$$

Elemente aus V, so sei die Zahl

$$\langle \xi, \eta \rangle = \Sigma^3_{\nu=1}\, x^\nu\, y^\nu - x^4\, y^4$$

ihr Skalarrodukt. Lorentztransformationen von V sind dann lineare Selbstabbildungen von V derart, dass

(9) $$\langle \Lambda(\xi), \Lambda(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$$

für alle Elemente ξ, η aus V gilt.

Mit

$$\beta'_j = \Sigma\, L_{\nu j}\, \beta_\nu = \Lambda(\beta_j)$$

ist t

$$\beta'_j \in \Phi(L) = V \quad \text{für} \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

6. Die tensoriellen K K-Operatoren

Der komplexe n-Raum V_n sei mit einem Skalarprodukt versehen. Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine orthonormale Basis bezüglich dieses Skalarproduktes. Ist dann x ein Vektor aus V und

$$\omega = \omega^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}\, e_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes e_{\lambda_r}$$

ein r-Tensor über V_n, so ist

$$x \cdot \omega = \omega^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}\, (x \cdot e_{\lambda_1})\, e_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes e_{\lambda_1}.$$

Es ist

$$e_{\lambda_1} \cdot (e_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e_{\lambda_r}) = e_{\lambda_2} \wedge \ldots \wedge e_{\lambda_r}.$$

In der Tat, die linke Seite ist gleich

$$e_{\lambda_1} \cdot (\delta^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} e_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes e_{\mu_r}) = \delta^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \delta_{\lambda_1 \mu_1} e_{\mu_2} \otimes \ldots \otimes e_{\mu_r}$$

$$= \delta^{\mu_2 \ldots \mu_r}_{\lambda_2 \ldots \lambda_r} e_{\mu_2} \otimes \ldots \otimes e_{\mu_r} = e_{\lambda_2} \wedge \ldots \wedge e_{\lambda_r},$$

wie behauptet.

Setzt man

(1) $$\gamma_\alpha(\omega) = e_\alpha \wedge \omega + e_\alpha \cdot \omega$$

für alle schiefsymmetrischen kontravarianten Tensoren ω *über* V_n, *so ist*

(2) $$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2\, \delta_{\alpha\beta}.$$

Beweis. Zunächst ist

$$\gamma_\alpha \gamma_\alpha(\omega) = \gamma_\alpha(e_\alpha \wedge \omega) - \gamma_\alpha(e_\alpha \cdot \omega) =$$
$$= e_\alpha \wedge (e_\alpha \wedge \omega) + e_\alpha \cdot (e_\alpha \wedge \omega) + e_\alpha \wedge (e_\alpha \cdot \omega) + e_\alpha \cdot (e_\alpha \cdot \omega).$$

Dem nachstehenden ersten Hilfssatze zufolge ist $e_\alpha \cdot (e_\alpha \cdot \omega) = 0$, nach dem zweiten Hilfssatz ist

$$e_\alpha \wedge (e_\alpha \cdot \omega) + e_\alpha \cdot (e_\alpha \wedge \omega) = \omega,$$

also $\gamma_\alpha \gamma_\alpha(\omega) = \omega$.

Sei jetzt $\alpha \neq \beta$. Dann ist

$$\gamma_\beta \gamma_\alpha(\omega) = e_\beta \wedge (e_\alpha \wedge \omega) + e_\beta \cdot (e_\alpha \wedge \omega) + e_\beta \wedge (e_\alpha \cdot \omega) + e_\beta \cdot (e_\alpha \cdot \omega),$$
$$\gamma_\alpha \gamma_\beta(\omega) = e_\alpha \wedge (e_\beta \wedge \omega) + e_\alpha \cdot (e_\beta \wedge \omega) + e_\alpha \wedge (e_\beta \cdot \omega) + e_\alpha \cdot (e_\beta \cdot \omega).$$

Nun ist

$$e_\beta \wedge (e_\alpha \wedge \omega) + e_\alpha \wedge (e_\beta \wedge \omega) = 0,$$

nach dem ersten Hilfssatz weiter

$$e_\beta \cdot (e_\alpha \cdot \omega) + e_\alpha \cdot (e_\beta \cdot \omega) = 0,$$

also

$$(\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha)(\omega) = e_\beta \cdot (e_\alpha \wedge \omega) + e_\beta \wedge (e_\alpha \cdot \omega) + e_\alpha \cdot (e_\beta \wedge \omega) + e_\alpha \wedge (e_\beta \cdot \omega).$$

Nach dem dritten Hilfssatz verschwindet die rechte Seite der letzten Gleichung.

Hilfssatz. Für jeden schiefsymmetrischen r-Tensor ω über V_n ist

$$e_\beta \cdot (e_\alpha \cdot \omega) + e_\alpha \cdot (e_\beta \cdot \omega) = 0. \tag{3}$$

Beweis. Mit

$$\omega = \omega^{\lambda_1 \dots \lambda_r} e_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes e_{\lambda_r}$$

ist

$$e_\alpha \cdot \omega = \omega^{\lambda_1 \dots \lambda_r} (e_\alpha \cdot e_{\lambda_1}) e_{\lambda_2} \otimes \dots \otimes e_{\lambda_r} = \omega^{\alpha \lambda_2 \dots \lambda_r} e_{\lambda_2} \otimes \dots \otimes e_{\lambda_r},$$

entsprechend

$$e_\beta \cdot (e_\alpha \cdot \omega) = \omega^{\alpha \beta \lambda_3 \dots \lambda_r} e_{\lambda_3} \otimes \dots \otimes e_{\lambda_r}.$$

Hieraus und aus der Schiefsymmetrie von ω folgt der Hilfssatz.

Hilfssatz. Für jeden schiefsymmetrischen r-Tensor ω über V_n ist

$$e_\alpha \wedge (e_\alpha \cdot \omega) + e_\alpha \cdot (e_\alpha \wedge \omega) = \omega. \tag{4}$$

Beweis. Man kann

$$\omega = e_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge e_{\lambda_r}$$

annehmen. Wir unterscheiden nun drei Fälle.

Es komme ersten α unter den λ_k vor. Sei $\alpha = \lambda_l$. Dann ist

$$\begin{aligned} e_\alpha \cdot \omega &= (-1)^{l-1} e_\alpha \cdot (e_{\lambda_l} \wedge e_{\lambda_1} \wedge \dots \hat{e}_{\lambda_l} \dots \wedge e_{\lambda_r}) \\ &= (-1)^{l-1} e_{\lambda_1} \wedge \dots \hat{e}_{\lambda_l} \dots \wedge e_{\lambda_r}, \end{aligned}$$

also

$$e_\alpha \wedge (e_\alpha \cdot \omega) = (-1)^{l-1} e_{\lambda_l} \wedge e_{\lambda_1} \wedge \dots \hat{e}_{\lambda_l} \dots \wedge e_{\lambda_r} = \omega.$$

Andererseits ist, da α unter den λ_k vorkommt, $e_\alpha \wedge \omega = 0$.

Zweitens komme α unter den λ_k ncht vor. Hier ist

$$e_\alpha \cdot \omega = e_\alpha \, \delta^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_r} \, e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_r}$$

$$= \delta^{\omega_1 \dots \omega_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_r} (e_\alpha \cdot e_{\mu_1}) \, e_{\mu_2} \otimes \dots \otimes e_{\mu_r},$$

Da die e_α paarweis orthogonal, ist $e_\alpha \cdot e_{\mu_1} = 0$, daher $e_\alpha \cdot \omega = 0$. Andererseits ist

$$e_\alpha \wedge \omega = e_\alpha \wedge e_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge e_{\lambda_r};$$

daher

$$e_\alpha \cdot (e_\alpha \wedge \omega) = \omega.$$

Hilfssatz. Für $\alpha \neq \beta$ ist

$$e_\beta \wedge (e_\alpha \cdot \omega) + e_\alpha \cdot (e_\beta \wedge \omega) = 0. \tag{5}$$

Beweis. Es genügt offenbar, den Hilfssatz für

$$\omega = e_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge e_{\lambda_r}$$

zu beweisen. Wir unterscheiden nun drei Fälle. Sei erstens $\alpha = \lambda_m$ und $\beta = \lambda_M$. Dann ist zunächst $e_\beta \wedge \omega = 0$. Weiter ist

$$e_\alpha \cdot \omega = \pm \, e_\alpha \cdot (e_{\lambda_m} \wedge e_{\lambda_1} \wedge \dots \hat{e}_{\lambda_m} \dots \wedge e_{\lambda_r})$$

$$= \pm \, e_{\lambda_1} \wedge \dots \hat{e}_{\lambda_m} \dots \wedge e_{\lambda_r}.$$

Also ist e_β in $e_\alpha \cdot \omega$ enthalten, daher $e_\beta \wedge (e_\alpha \cdot \omega) = 0$.

Zweitens sei $\alpha \neq \lambda_k$ und $\beta \neq \lambda_k$ für alle k. Dann ist e_α zu allen Vektoren aus ω orthogonal, also $e_\alpha \cdot \omega = 0$. Da e_α zu allen Vektoren aus $e_\beta \wedge \omega$ orthogonal, ist $e_\alpha \cdot (e_\beta \wedge \omega) = 0$.

Sei drittens $\alpha = \lambda_m$ und $\beta \neq \lambda_k$ für alle k. Hier ist

$$e_\alpha \cdot \omega = (-1)^{m-1} \, e_{\lambda_1} \wedge \dots \hat{e}_{\lambda_m} \dots \wedge e_{\lambda_r},$$

$$e_\beta \wedge (e_\alpha \cdot \omega) = (-1)^{m-1} \, e_\beta \wedge e_{\lambda_1} \wedge \dots \hat{e}_{\lambda_m} \dots \wedge e_{\lambda_r},$$

ferner

$$e_\alpha \cdot (e_\beta \wedge \omega) = e_\alpha \cdot (e_\beta \wedge e_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e_{\lambda_r})$$
$$= (-1)^m e_\alpha \cdot (e_{\lambda_m} \wedge e_\beta \wedge e_{\lambda_1} \wedge \ldots \hat{e}_{\lambda_m} \ldots \wedge e_{\lambda_r})$$
$$= (-1)^m e_\beta \wedge e_{\lambda_1} \wedge \ldots \hat{e}_{\lambda_m} \ldots \wedge e_{\lambda_r},$$

somit

$$e_\beta \wedge (e_\alpha \cdot \omega) + e_\alpha \cdot (e_\beta \wedge \omega) = 0,$$

wie behauptet.

Ist viertens $\alpha \neq \lambda_k$ für alle k und $\beta = \lambda_\alpha$, so ist e_α zu allen Vektoren aus ω orthogonal, also $e_\alpha \cdot \omega = 0$. Und es ist $e_\beta \wedge \omega = 0$.

Vertauscht man α und β, so folgt aus (5):

(5′)
$$e_\alpha \wedge (e_\beta \cdot \omega) + e_\beta \cdot (e_\alpha \wedge \omega) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta.$$

7. Tensorielle Darstellung komplexer 4-Matrizen

Die Cliffordalgebra C (M) über dem komplexen Lorentzraum ist zur Algebra A der komplexen 4-Matrizen isomorph. Ein, bezüglich der Paulimatrizen natürlicher, Isomorphismus ist oben erklärt. Eine andere Algebra, B, die wie A zu C (M) isomorph ist, ergibt sich wie folgt.

Der komplexe 2-Raum V_2 sei mit einem Skalarprodukt versehen. Seien G (V_2) die Grassmannalgebra über V_2 und e_1, e_2 aufeinander senkrechte Einheitsvektoren aus V_2. Dann wird G (V_2) von den Tensoren 1, e_1, e_2 und $e_1 \wedge e_2$ aufgespant t.

Für jeden schiefsymmetrischen kontravarianten Tensor ω über V_2 sei

$$\varphi_1(\omega) = e_1 \wedge \omega + e_1 \cdot \omega, \qquad \varphi_2(\omega) = e_2 \wedge \omega + e_2 \cdot \omega,$$
$$\varphi_3(\omega) = i\,(e_1 \wedge \omega - e_1 \cdot \omega), \qquad \varphi_4(\omega) = i\,(e_2 \wedge \omega - e_2 \cdot \omega).$$

Dann ist

$$\varphi_\mu \varphi_\nu + \varphi_\nu \varphi_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu}.$$

Beweis. Wie oben für allgemeines n statt für $n = 2$ bewiesen wurde, ist $\gamma_1 \gamma_1 = \gamma_2 \gamma_2 = 1$ und $\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2 \gamma_1 = 0$. Also

(1) $$\varphi_1 \varphi_1 = \varphi_2 \varphi_2 = 1, \qquad \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2 \varphi_1 = 0.$$

Sei

$$\rho_\alpha (\omega) = e_\alpha \wedge \omega - e_\alpha \cdot \omega.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \rho_\alpha \rho_\alpha (\omega) &= \rho_\alpha (e_\alpha \wedge \omega - e_\alpha \cdot \omega) = \\ &= e_\alpha \wedge e_\alpha \wedge \omega - e_\alpha \cdot (e_\alpha \wedge \omega) - e_\alpha \wedge (e_\alpha \cdot \omega) + e_\alpha \cdot (e_\alpha \cdot \omega). \end{aligned}$$

Im letzten Abschnitt wurde aber bewiesen:

$$e_\alpha \wedge (e_\alpha \cdot \omega) + e_\alpha \cdot (e_\alpha \wedge \omega) = \omega, \qquad e_\alpha \cdot (e_\alpha \cdot \omega) = 0.$$

Also ist $\rho_\alpha \rho_\alpha (\omega) = - \omega$, woraus

(2) $$\varphi_3 \varphi_3 = \varphi_4 \varphi_4 = 1$$

folgt. Weiter ist

$$\rho_2 \rho_1 (\omega) = e_2 \wedge (e_1 \wedge \omega) - e_2 \cdot (e_1 \wedge \omega) - e_2 \wedge (e_1 \cdot \omega) + e_2 \cdot (e_1 \cdot \omega),$$

also

$$\rho_1 \rho_2 (\omega) = e_1 \wedge (e_2 \wedge \omega) - e_1 \cdot (e_2 \wedge \omega) - e_1 \wedge (e_2 \cdot \omega) + e_1 \cdot (e_2 \cdot \omega).$$

Nach einem obigen Hilfssatz ist

$$e_2 \cdot (e_1 \cdot \omega) + e_1 \cdot (e_2 \cdot \omega) = 0,$$

also

$$\begin{aligned} (\rho_1 \rho_2 + \rho_2 \rho_1) \omega) = &- e_2 \cdot (e_1 \wedge \omega) - e_2 \wedge (e_1 \cdot \omega) - \\ &- e_1 \cdot (e_2 \wedge \omega) - e_1 \wedge (e_2 \cdot \omega). \end{aligned}$$

Nach dem dritten der obigen Hilfssätze verschwindet die rechte Seite. Also

(3) $$\varphi_3 \varphi_4 + \varphi_4 \varphi_3 = 0.$$

Verbleibt zu zeigen: mit

$$\gamma = e_\alpha \wedge \omega + e_\alpha \cdot \omega$$

und

$$\rho = e_\beta \wedge \omega - e_\beta \cdot \omega$$

ist

(4) $$\rho\gamma + \gamma\rho = 0$$

unabhängig von α und β.

Beweis von (4). Zunächst ist

$$\rho\gamma(\omega) = e_\beta \wedge (e_\alpha \wedge \omega) - e_\beta \cdot (e_\alpha \wedge \omega) + e_\beta \wedge (e_\alpha \cdot \omega) - e_\beta \cdot (e_\alpha \cdot \omega),$$
$$\gamma\rho(\omega) = e_\alpha \wedge (e_\beta \wedge \omega) + e_\alpha \cdot (e_\beta \wedge \omega) - e_\alpha \wedge (e_\beta \cdot \omega) - e_\alpha \cdot (e_\beta \cdot \omega),$$

nach einem obigen Hilfssatz also

$$(\rho\gamma + \gamma\rho)(\omega) = - e_\beta \cdot (e_\alpha \wedge \omega) + e_\beta \wedge (e_\alpha \cdot \omega) + \\ + e_\alpha \cdot (e_\beta \wedge \omega) - e_\alpha \wedge (e_\beta \cdot \omega).$$

Für $\alpha = \beta$ verschwindet die rechte Seite trivialerweise. Sei jetzt $\alpha \neq \beta$. Nach dem dritten der obigen Hilfssätze ist dann

$$e_\beta \wedge (e_\alpha \cdot \omega) + e_\alpha \cdot (e_\beta \wedge \omega) = 0$$

und

$$e_\beta \cdot (e_\alpha \wedge \omega) + e_\alpha \wedge (e_\beta \cdot \omega) = 0,$$

somit (4) richtig.

Die eingangs in Rede stehende Algebra B ist jetzt die von den φ_ν erzeugte Algebra. Wie oben mögen die γ_ν ein Diracquadrupel bilden. Durch die Zuordnung $\gamma_\nu \to \varphi_\nu$ entsteht dann ein Isomorphismus von A auf B.

Literatur

(1) Kähler, E.: *Innerer und äusserer Differentialkalkül* «Abh. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys. Tech.», 4 (1960), 1-32.
(2) — — *Der innere Differentialkalkül*, «Rend. Mat. e Appl.», 21 (1962), 425-523.
(3) Kastler, D.: *Introduction a l'électrodynamique quantique*. Paris, Dunod (1961), 297-322.