Análisis dimensional aplicado a la mecánica de los fluidos

por

Antonio Herranz García y Albino Arenas Gómez

Presentado por el académico numerario D. Julio Palacios

Abstract

Several problems of Mechanics of fluids, are solved by using Professor Palacios' Theory of Dimensional Analysis. By so doing, we arrive in all the cases considered, at a better solution than that obtained with the aid of the conventional Dimensional Analysis.

Resumen

Se resuelven varios problemas de mecánica de fluidos aplicando la teoría de Análisis dimensional del profesor Palacios, llegando, en todos los casos expuestos, a una mejor solución que la dada por el Análisis dimensional usual.

Introducción

De las consecuencias que D. Julio Palacios obtiene de su teoría de Análisis Dimensional (1), haremos uso de las dos siguientes:

Enunciado preciso del teorema de pi, al determinar exactamente el número de monomios pi independientes que aparecen en cada problema.

Método de la discriminación de las dimensiones del espacio.

Analizemos brevemente ambas cuestiones.

El enunciado del teorema de pi en su forma primitiva, tal como lo dio Buckingham, es el siguiente:

1.° «La forma más general de cualquier ecuación física completa: $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ es $F(\pi_1, \ldots, \pi_i) = 0$, donde los π_i son los monomios independientes de dimensión nula que pueden formarse con las n magnitudes consideradas.

2.° El número de estos monomios independientes es $i = n - q$, donde q es el número de unidades fundamentales necesarias para medir las n magnitudes.»

La vaguedad de este enunciado es evidente, puesto que no hay acuerdo entre los diversos autores sobre el número de unidades fundamentales q, quedando la cuestión al buen criterio de cada uno.

El nuevo enunciado del teorema de pi, que da el profesor Palacios, es:

1.° «La forma más general de toda ecuación $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ que sea consecuencia de una teoría cuyas leyes fundamentales sean relaciones de proporcionalidad entre potencias con exponentes fijos, es $F(\pi_1, \ldots, \pi_i) = 0$, donde los π_i son los monomios independientes de dimensión nula o monomios pi que pueden formarse con las magnitudes consideradas.

2.° El número de estos monomios independientes es $i = n - h$, donde h es la característica de la matriz formada con los exponentes dimensionales con relación a una base completa cualquiera.»

La teoría del profesor Palacios se basa en dos postulados fundamentales, de donde se deducen sin ambigüedad los criterios para establecer en cada caso un sistema de unidades coherentes y una base completa.

Con esto ha quedado determinado perfectamente el número i de monomios independientes adimensionales que pueden formarse con las magnitudes consideradas.

La segunda consecuencia es el «Método de la discriminación de las dimensiones del espacio». Consiste este método en reemplazar la base $(L\ M\ T)$ por otra que se obtiene considerando por separado tres componentes $L_x\ L_y\ L_z$ de la longitud, que junto con la masa M y el tiempo T dan una base de cinco magnitudes $(L_x\ L_y\ L_z\ M\ T)$.

Se deduce en la mencionada teoría el principio de homogeneidad para las fórmulas físicas, siendo los símbolos que figuran en las ecuaciones de dimensiones (L, M, ..., etc.) la relación entre las unidades de la correspondiente magnitud en dos sistemas coherentes cualesquiera.

La discriminación de las dimensiones según las tres direcciones espaciales, significa poder emplear distintas unidades de longitud en cada eje. Si se eligen las unidades fundamentales distintas en cada dirección, esto afectará a las unidades derivadas.

Si por ejemplo, se toma el sistema cm. g. s. en vertical, y m. g. s. en horizontal, el peso se medirá en dinas y el rozamiento en un plano horizontal en kilodinas (1.000 dinas), y las fórmulas dimensionales serán:

$$[P] = L_z\, M\, T^{-2} \qquad [F_r] = L_x\, M\, T^{-2}.$$

En ocasiones no tiene interés distinguir las tres dimensiones, y se toman dos L_{xy}, L_z o sólo una L.

Las tres direcciones elegidas como ejes no es preciso que sean *ortogonales*.

En los problemas expuestos a continuación hemos supuesto que estamos tratando con fluidos incompresibles.

Las magnitudes que intervienen son:

Densidad (ρ), peso específico ($\rho\, g$), fuerza (F), presión (p), velocidad (v), aceleración de la gravedad (g), coeficiente de viscosidad (μ), cuyas fórmulas dimensionales respecto de la base ($L\, M\, T$), son:

$$[\rho] = L^{-3} M\,; \quad [\rho\, g] = L^{-2} M\, T^{-2}\,; \quad [F] = L\, M\, T^{-2}\,; \quad [p] = L^{-1} M\, T^{-2}\,;$$
$$[v] = L\, T^{-1}\,; \quad [g] = L\, T^{-2}\,; \quad [\mu] = L^{-1} M\, T^{-1}.$$

Circulación de un fluido en régimen laminar por una tubería

Sea un tubo rectilíneo de longitud l y radio r, entre cuyos extremos se mantiene una diferencia de presión constante $\triangle\, p$, que hace circular el fluido. Supuesto el régimen laminar, calculemos la velocidad media v, una vez establecido el régimen permanente.

Las variables que intervienen en el fenómeno son: por parte del cilindro, el radio r y la longitud l; por parte del fluido, la velocidad media del fluido v (incógnita), y el coeficiente de viscosidad μ. No será preciso considerar la densidad, puesto que el movimiento es rectilíneo y permanente, y al no haber aceleraciones, la inercia no interviene. Tampoco se incluye el peso específico, puesto que las fuerzas exteriores son tan sólo las debidas a la diferencia de presión.

Variables: v, $\triangle p$, l, r y μ, cuyas fórmulas dimensionales respecto de la base ($L\ M\ T$) son conocidas.

El «análisis dimensional clásico» conduce a

$$v = \frac{r\,\Delta p}{\mu}\,\varphi\left(\frac{l}{r}\right) \qquad [1]$$

Veamos a qué solución se llega al discriminar las dimensiones del espacio.

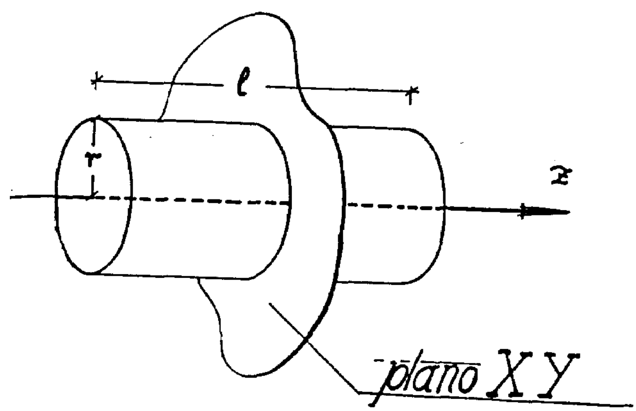

Fig. 1.—Modo de discriminar las dimensiones en el caso de un fluido circulando por un tubo cilíndrico.

Tomamos el eje del tubo como eje z. El fenómeno es simétrico en torno a este eje z, luego no nos interesa distinguir entre las otras dos dimensiones del espacio x e y.

Las fórmulas dimensionales respecto de la nueva base ($L_{xy}\ L_z\ M\ T$) serán, por tanto:

$$[v] = L_z T^{-1}; \quad [\triangle p] = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Superficie}} = \frac{L_z M T^{-2}}{L^2_{xy}} =$$

$$= L_{xy}^{-2}\ L_z M T^{-2}; \quad [r] = L_{xy}; \quad [l] = L_z.$$

Para calcular la fórmula dimensional de μ recurrimos a la ecuación $F = \mu\ S\ \frac{d\,v}{d\,n}$. En un fluido en movimiento, cada porción ejerce sobre las contiguas una fuerza tangencial proporcional al área de la superficie de separación y a la proyección del gradiente de la velocidad sobre la normal a dicha superficie:

$$[F] = M\, L_z\, T^{-2}; \quad [S] = L_{xy}\, L_z; \quad [v] = L_z\, T^{-1}; \quad [n] = L_{xy}.$$

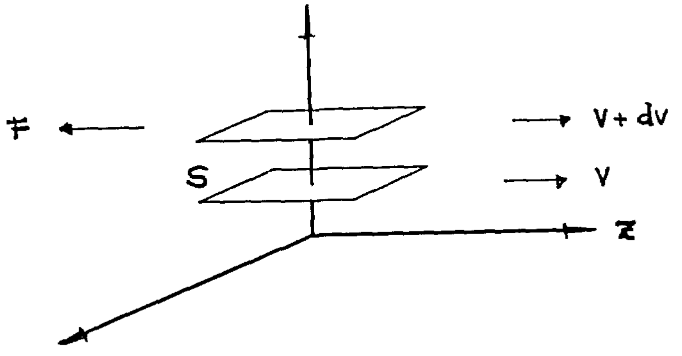

Fig. 2.—Como se discriminan las dimensiones de la viscosidad.

De donde

$$[\mu] = L_z^{-1}\, M\, T^{-1}.$$

Respecto a esta nueva base, $\frac{l}{r}$ ya no es de dimensión nula:

	v	Δp	r	l	μ
L_{xy}	0	-2	1	0	0
L_z	1	1	0	1	-1
M	0	1	0	0	1
T	-1	-2	0	0	-1

$$\begin{aligned} -2\,\epsilon_{\Delta p} + \epsilon_r &= 0 \\ \epsilon_v + \epsilon_{\Delta p} + \epsilon_l - \epsilon_\mu &= 0 \\ \epsilon_{\Delta p} + \epsilon_\mu &= 0 \\ -\epsilon_v - 2\,\epsilon_{\Delta p} - \epsilon_\mu &= 0 \end{aligned}$$

La característica es $h = 4$, luego se tienen $i = 5 - 4 = 1$ monomio pi, apareciendo en dicho monomio las variables con los exponentes ϵ solución del sistema.

Resulta:

$$\pi = \frac{\mu\, v\, l}{r^2\, \Delta_p},$$

y despejando la incógnita:

$$v = C \frac{r^2 \Delta p}{l \mu} \qquad [2]$$

La función arbitraria de un monomio, de [1], se reduce a una constante C numérica, con lo que se ha ganado en precisión.

El valor de C no lo da el Análisis dimensional. La teoría del fenómeno da $C = 1/8$.

Gasto por unidad de anchura en un canal rectangular infinitamente ancho

Este problema nos fue propuesto por el profesor M. Van Dyke, de la Universidad de Stanford (California). Nos incluía la solución clásica del Análisis Dimensional, añadiendo que con el método de la discriminación de las dimensiones del espacio, que propugna el profesor Palacios, no se llegaba a ninguna solución.

Veremos, sin embargo, que con la utilización correcta de este método, mejoraremos la solución obtenida por el profesor Van Dyke.

El enunciado de dicho problema es el siguiente:

Por un canal rectangular infinitamente ancho, e inclinado un ángulo α constante respecto de la horizontal, circula un fluido debido a la acción de su propio peso. Se pretende calcular el volumen del fluido que sale por el extremo del canal, por unidad de anchura y por unidad de tiempo, una vez establecido el régimen permanente y sabiendo que el fluido circula en régimen laminar.

Las variables que intervienen son: el volumen de fluido por unidad de anchura del canal y por unidad de tiempo (Q); la profundidad (a): el peso específico (pues el fluido circula debido a la acción de su propio peso) (ρg); el coeficiente de viscosidad (μ); el ángulo de inclinación del canal (α). La densidad ρ no influye, pues no hay aceleraciones en la masa fluida al ser el movimiento rectilíneo y permanente.

La solución a que llega el profesor Van Dyke es:

$$Q = \frac{\mu}{\rho} \varphi \left(\frac{\rho^2 g a^3}{\mu^2}, \alpha \right) \qquad [3]$$

Veamos ahora cómo debe aplicarse el método de la «discriminación de las dimensiones del espacio».

Elegimos el eje t en la dirección de la velocidad del fluido, el eje n en la dirección de la anchura del canal, y el eje b perpendicular a ambos.

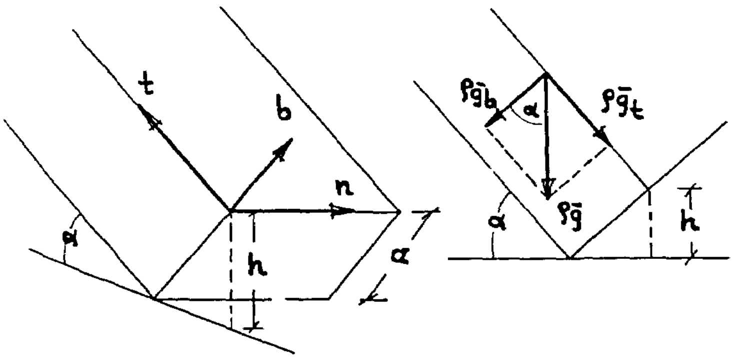

Fig. 3.—Eligiendo adecuadamente los ejes, desaparece la variable α.

En vez de tomar las variables $\rho\, g$ y α, podemos hacer la siguiente consideración: como de las dos componentes de $\rho\, g$: $(\rho\, g_t, \rho\, g_b)$, la que influye en la circulación del fluido es la $\rho\, g_t$, podemos por tanto tomar $\rho\, g_t$ en vez de $\rho\, g$, con lo cual desaparece la variable α.

Variables: Q, $\rho\, g_t$, a, μ.

$$[Q] = \frac{\text{Volumen}}{\text{Anchura} \times \text{tiempo}} = \frac{L_t\, L_n\, L_b}{L_n\, T} = L_t\, L_b\, T^{-1}$$

$$[\rho\, g_t] = [\rho] \cdot [g_t] = L_t^{-1}\, L_n^{-1}\, L_b^{-1}\, M \,.\, L_t\, T^{-2} = L_n^{-1}\, L_b^{-1}\, M\, T^{-2}$$

$$[a] = L_b$$

$$\left.\begin{array}{l} [F] = L_t\, M\, T^{-2} \\ [S] = L_t\, L_n \\ [v] = L_t\, T^{-1} \\ [n] = L_b \end{array}\right\} [\mu] = L_t^{-1}\, L_n^{-1}\, L_b\, M\, T^{-1}$$

	Q	$\rho\, g_t$	a	μ
L_t	1	0	0	—1
L_n	0	—1	0	—1
L_b	1	—1	1	1
M	0	1	0	1
T	—1	—2	0	—1

La característica es $h = 3$, luego habrá $i = 4 - 3 = 1$ monomio independiente, que resulta ser:

$$\pi = \frac{Q\,\mu}{\rho\, g_t\, a^3}$$

De donde, despejando la incógnita, Q:

$$Q = C\,\frac{\rho\, g_t\, a^3}{\mu} = C\,\frac{a^3\,\rho\, g \operatorname{sen}\alpha}{\mu} \qquad [4]$$

En donde sólo aparece indeterminado un factor numérico C, mientras que en la [3] (propuesta por el profesor Van Dyke) aparecía una función indeterminada dependiente de dos parámetros adimensionales. Por tanto, la solución [4], obtenida por nosotros, es más precisa.

La solución [4] se suele poner en función de la altura h, medida sobre la vertical, del fluido en el canal. Como $a = h \cos\alpha$, queda:

$$Q = \frac{h^3\,\rho\, g \cos^3\alpha \operatorname{sen}\alpha}{\mu}\,.\,C \qquad [5]$$

La imperfecta solución [3] obtenida por el profesor Van Dyke, es debida a que en este fenómeno introduce como variable la densidad ρ, lo cual es erróneo, ya que, al no haber aceleraciones en la masa fluida, no interviene como variable independiente.

Par que se ejerce sobre un cilindro en rotación sumergido en un fluido en reposo

Un cilindro vertical, de altura h y de radio r, gira sobre su eje con una velocidad angular ω constante, estando totalmente sumergido en un medio fluido indefinido, de viscosidad dinámica μ, que carece de movimiento propio. Se pretende calcular el momento del par de fuerzas C que el fluido ejerce sobre la superficie lateral del cilindro.

Una vez alcanzada la velocidad ω, no intervendrá la densidad ρ. Evidentemente, tampoco influye el peso específico $\rho\, g$. Por tanto, quedan como variables:

$$C,\ \mu,\ h,\ \omega,\ r.$$

Discriminemos las dimensiones del espacio. Elegimos el eje z coincidente con el eje de rotación. El fenómeno es simétrico en torno a este eje, luego la base dimensional será (L_{xy} L_z M T). La fuerza sobre la pared del cilindro es normal al eje; por tanto,

$$[F] = L_{xy} M T^{-2},$$

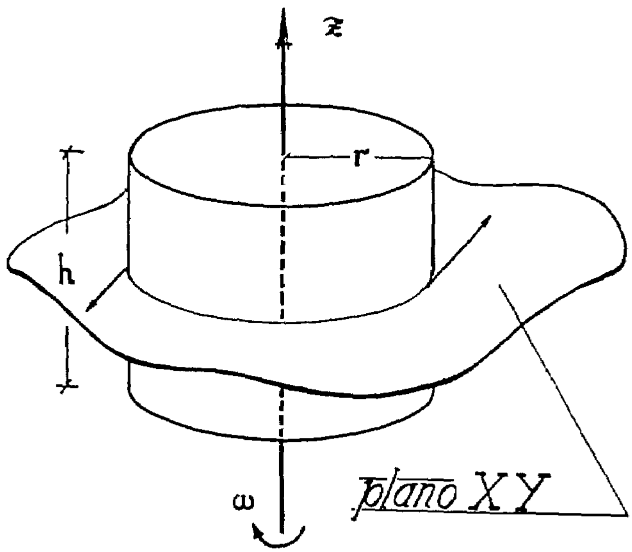

Fig. 4.—La discriminación de las magnitudes secundarias ha de obtenerse a partir de sus fórmulas de definición.

y el par:

$$[C] = [F] [l] = L^2_{xy} M T^{-2}. \qquad [6]$$

Es importante señalar que la fórmula dimensional de las magnitudes secundarias ha de obtenerse precisamente a partir de su fórmula de definición. El momento de un par de vectores se considera en teoría como un vector dirigido; en nuestro caso, según el eje z. Sin embargo, en sus dimensiones no hay que considerar la L_z.

Las restantes fórmulas dimensionales son:

$$[h] = L_z$$
$$[r] = L_{xy}$$
$$[\omega] = T^{-1}.$$

Considerando la interacción de capas cilíndricas de fluido, se halla $[\mu]$:

$$[F] = L_{xy}\, M\, T^{-2}$$
$$[s] = L_{xy}\, L_z$$
$$[v] = L_{xy}\, T^{-1}$$
$$[n] = L_{xy}$$

de donde

$$[\mu] = L_z^{-1}\, M\, T^{-1} \qquad [7]$$

	C	μ	h	ω	r
L_{xy}	2	0	0	0	1
L_z	0	−1	1	0	0
M	1	1	0	0	0
T	−2	−1	0	−1	0

$$h = 4; \quad i = 1; \quad \pi = \frac{C}{r^2 \mu\, \omega\, h}$$

$$C = k\, \mu\, \omega\, r^2\, h. \qquad [8]$$

Sin discriminar las dimensiones del espacio, se obtiene la solución más ambigua:

$$C = \mu\, \omega\, h^3\, \varphi\left(\frac{h}{r}\right) \qquad [9]$$

Par de fuerzas necesario para hacer girar un disco en un fluido

Nos proponemos calcular el momento del par de fuerzas C necesario para hacer girar sobre su eje un disco, sumergido en un fluido, a una velocidad angular ω.

No intervendrá el peso específico $\rho\, g$, ya que no se consideran acciones gravitatorias. Sin embargo, habrá que tener en cuenta la densidad ρ, pues hay aceleraciones en la masa del fluido.

Variables: C, D (diámetro del disco), ω, ρ, μ.

Las dimensiones de C, D, ω, ρ son iguales a las del caso anterior:

$$[C] = L^2_{xy}\, M\, T^{-2}$$
$$[D] = L_{xy}$$
$$[\omega] = T^{-1}$$
$$[\rho] = L^{-2}_{xy}\, L^{-1}_{z}\, M$$

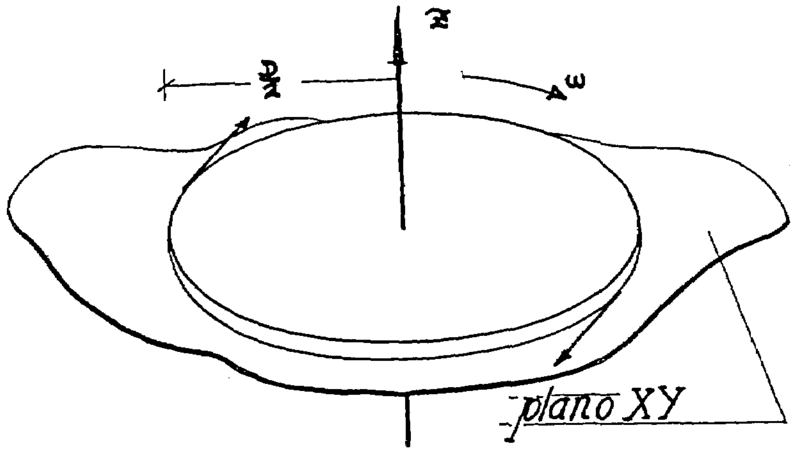

Fig. 5.—Sistema de referencia para un disco que gira en un fluido. En este caso sólo se discrimina la dirección normal al disco.

Pero cambia la de μ, pues la resistencia del líquido es con arreglo a capas paralelas al disco:

$$[F] = L_{xy}\, M\, T^{-2}$$
$$[s] = L^2_{xy}$$
$$[v] = L_{xy}\, T^{-1}$$
$$[n] = L_z$$

de donde:

$$[\mu] = L^{-2}_{xy}\, L_z\, M\, T^{-1}$$

	C	D	ω	ρ	μ
L_{xy}	2	1	0	—2	—2
L_z	0	0	0	—1	1
M	1	0	0	1	1
T	—2	0	—1	0	—1

$$h = 4\,; \quad i = 1\,; \quad \pi = \frac{C}{D^4 \sqrt{\mu \rho \omega^3}}$$

$$C = k \sqrt{\mu \rho \omega^3} \,.\, D^4 \qquad [10]$$

Con la base $(L\ M\ T)$ se encuentra

$$C = \sqrt{\frac{\mu^5}{\rho^3\ \omega}}\ \ \varphi\left(\frac{\mu}{D^2\ \rho\ \omega}\right) \qquad [11]$$

PRESIÓN EN EL SENO DE UN FLUIDO EN ROTACIÓN

Un fluido incompresible está encerrado en un cilindro vertical que gira alrededor de su eje, con velocidad angular ω constante.

Deseamos calcular la presión debida a la rotación en un punto del fluido, una vez establecido el régimen estacionario.

Variables: Presión (P_r), velocidad angular (ω), distancia al eje de giro (r), densidad ρ (debido a la inercia de la masa fluida), y la aeceleración de la gravedad (g).

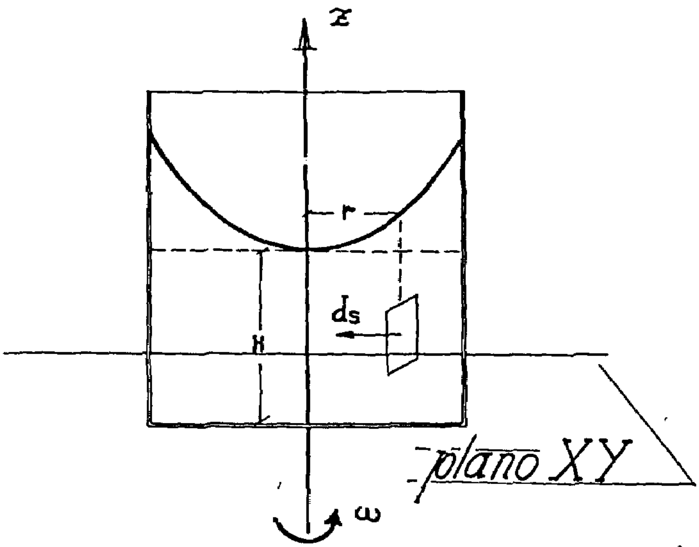

Fig. 6.—Elección de los ejes para la discriminación, y variables que intervienen en la sobrepresión debida a una rotación.

El giro del cilindro se transmite a la masa líquida merced a la viscosidad, pero transcurrido un cierto tiempo, el fluido se mueve como un sólido; no existen tensiones de cortadura y la viscosidad μ no interviene.

La solución clásica es

$$P_r = r\ \rho\ g\ \varphi\left(\frac{\omega^2\ r}{g}\right) \qquad [12]$$

Este resultado se mejora discriminando las dimensiones del espacio.

Para ello, tomamos el eje de rotación como eje z, y por la simetría del fenómeno en torno a este eje nos queda la nueva base

$$(L_{xy}\, L_z\, M\, T).$$

Las fórmulas dimensionales de las magnitudes que intervienen respecto a la base $(L_{xy}\, L_z\, M\, T)$ serán:

$$[\omega] = T^{-1}; \quad [r] = L_{xy}; \quad [g] = L_z\, T^{-2}; \quad [\rho] = L_{xy}^{-2}\, L_z^{-1}\, M,$$

y nos queda por calcular únicamente la de la presión P_r, para lo cual haremos las siguientes consideraciones.

Queremos calcular la presión debida a la rotación, por tanto la fuerza que figura en

$$\mathbf{d\,F = P\,d\,s} \qquad [13]$$

es la fuerza centrífuga. Su fórmula dimensional es

$$[F_c] = L_{xy}\, M\, T^{-2}$$

La superficie $d\,s$ que aparece en [13] será, pues, normal a la dirección de F_c, o sea, $[s] = L_{xy}\, L_z$. Por tanto, queda como fórmula dimensional de P_r la siguiente:

$$[P_r] = \frac{L_{xy}\, M\, T^{-2}}{L_{xy}\, L_z} = L_z^{-1}\, M\, T^{-2}$$

	P_r	ω	r	g	ρ
L_{xy}	0	0	1	0	-2
L_z	-1	0	0	1	-1
M	1	0	0	0	1
T	-2	-1	0	-2	0

$h = 4; \quad i = 1$

$$\pi = \frac{P_r}{\rho\, \omega^2\, r^2}; \qquad P_r = C\, \rho\, \omega^2\, r^2. \qquad [14]$$

Es de notar que, al resolver el sistema, el exponente de g resulta nulo; esto, aun cuando era previsible, pues se considera la presión debida a la rotación, lo da directamente el análisis dimensional.

La solución [14] es más aproximada que la [12], pues ha desaparecido la función arbitraria de $\frac{\omega^2 r}{g}$.

La teoría da para C el valor

$$C = \frac{1}{2}.$$

En un fluido en movimiento aparecen acciones de cortadura debidas a la viscosidad, que son la causa de que en cada punto exista un tensor de presiones. Tomando como ejes los propios del tensor, éste toma forma diagonal:

$$P = \begin{pmatrix} P_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & P_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & P_{zz} \end{pmatrix} \qquad [15]$$

Cuando no interviene μ, como en nuestro caso, en que no hay movimiento relativo de las distintas partes del fluido, resulta

$$P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = P,$$

y se dice que el tensor degenera en un escalar: la presión P. Así pues, la sobrepresión debida a la rotación es la misma en todas direacciones, y, sumándole la presión debida a la profundidad H, resulta la presión total:

$$P_t = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + \rho g H.$$

Hagamos notar, sin embargo, que aun cuando los elementos diagonales del tensor P sean numéricamente iguales, no tienen la misma fórmula dimensional. En efecto, de

$$\mathbf{d\,F} = \mathbf{P\,d\,s}$$

resulta:

$$\begin{aligned} d\,F_x &= P_{xx}\, d\,S_x \\ d\,F_y &= P_{yy}\, d\,S_y \\ d\,F_z &= P_{zz}\, d\,S_z. \end{aligned}$$

Las dimensiones de la fuerza son:

$$[d\,F_x] = [d\,F_y] = L_{xy}\,M\,T^{-2}$$
$$[d\,F_z] = L_z\,M\,T^{-2}$$

Las de las superficies, normales a ellas, serán por tanto:

$$[d\,S_x] = [d\,S_y] = L_{xy}\,L_z$$
$$[d\,S_z] = L^2_{xy}.$$

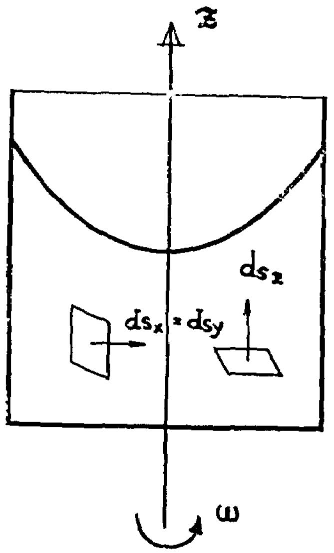

Fig. 7.—Al discriminar las dimensiones del espacio, la presión toma la forma de un tensor.

De donde las dimensiones de la presión son:

$$[P_{xx}] = \frac{[d\,F_x]}{[d\,S_x]} = \frac{L_{xy}\,M\,T^{-2}}{L_{xy}\,L_z} = L_z^{-1}\,M\,T^{-2}$$

$$[P_{yy}] = \frac{[d\,F_y]}{[d\,S_y]} = \frac{L_{xy}\,M\,T^{-2}}{L_{xy}\,L_z} = L_z^{-1}\,M\,T^{-2}$$

$$[P_{zz}] = \frac{[d\,F_z]}{[d\,S_z]} = \frac{L_z\,M\,T^{-2}}{L^2_{xy}} = L_{xy}^{-2}\,L_z\,M\,T^{-2}$$

es decir:

$$[P] = \begin{pmatrix} L_z^{-1}\,M\,T^{-2} & - & - \\ - & L_z^{-1}\,M\,T^{-2} & - \\ - & - & L_{xy}^{-2}\,L_z\,M\,T^{-2} \end{pmatrix}$$

Creemos que es la primera vez que se encuentra que una magnitud escalar deba considerarse como tensor al tener en cuenta sus dimensiones.

Por la simetría del problema resultan iguales $[P_{xx}]$ y $[P_{yy}]$; en otros problemas no lo serán. Por otra parte, haciendo un cambio de ejes, desaparece la forma diagonal y se pueden hallar las dimensiones de los nueve términos del tensor.

La viscosidad como tensor

a) *Velocidad por un canal rectangular.*

Consideremos un canal de sección rectangular por el que circula un fluido en régimen laminar. Nos proponemos cacular la velocidad media del fluido una vez establecido el régimen permanente.

Para mayor generalidad supondremos que también está cubierta la parte superior del canal, y que el fluido circula debido a una diferencia de presión $\triangle p$ entre sus extremos. (En el caso en que circule debido a la acción de su propio peso, bastará sustituir $\triangle p$ por $\rho g h$.)

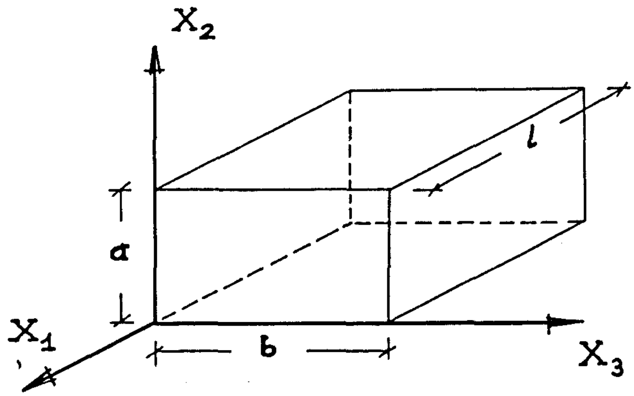

Fig. 8.—El fluido circula según el eje x_1, en régimen laminar.

Las variables que intervienen en este fenómeno son: la velocidad media del fluido v; la diferencia de presión $\triangle p$ entre sus extremos; las dimensiones del canal: longitud l, anchura b y altura a; y, por último, el coeficiente de viscosidad μ. No intervendrá la densidad ρ, pues el movimiento es rectilíneo y permanente. Tampoco interviene el peso específico $\rho\, g$, puesto que las fuerzas exteriores son debidas a la diferencia de presión.

Con la base L, M, T, se obtiene

$$v = \frac{l\,\Delta p}{\mu}\,\varphi_1\left(\frac{a}{l},\ \frac{b}{l}\right) \qquad [16]$$

Veamos cómo resolverlo con la base discriminada.

El eje x_1 le tomamos en la dirección del movimiento del fluido, el eje x_3 en la dirección de la anchura del canal y el eje x_2 perpendicular a ambos.

Las fórmulas dimensionales de v, $\triangle p$, l, b, a, respecto de la base $(L_1\, L_2\, L_3\, M\, T)$, serán:

$$[v] = L_1\, T^{-1}$$

$$[\triangle p] = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Sup.}} = \frac{L_1\, M\, T^{-2}}{L_2\, L_3} = L_1\, L_2^{-1}\, L_3^{-1}\, M\, T^{-2}$$

$$[l] = L_1 \qquad [b] = L_3 \qquad [a] = L_2.$$

La dificultad surge cuando se trata de hallar la fórmula dimensional del coeficiente de viscosidad μ respecto de esta base.

Para ello, partiendo de la definición de μ:

$$\mathbf{F} = \mu\, \mathbf{s}\, \frac{d\,v}{d\,n} \qquad [17]$$

no se sabe qué dimensión discriminada dar al gradiente de la velocidad $\frac{d\,v}{d\,n}$, pues su dirección varía de un punto a otro.

Para resolver esta cuestión, seguimos el camino señalado por el profesor Palacios en su libro «Análisis dimensional», que consiste en considerar la viscosidad como un tensor.

La ecuación [17] se puede escribir:

$$d\,\mathbf{f} = T\, \mathbf{d\,s},$$

es decir:

$$d\,f_i = T_{ij}\, d\,s_j\,; \qquad [18]$$

donde la superficie elemental $d\,s_j$ se toma normal a la dirección x_j.

Los componentes del tensor T son:

$$T_{ij} = \mu_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad [19]$$

Tomando dimensiones:

$$[d F_i] = L_i M T^{-2}; \quad [d s_j] = L_i L_k \quad (i, k \neq j)$$

de [18] resulta:

$$[T_{ij}] = L_k^{-1} M T^{-2}.$$

y como

$$\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] = \frac{L_i T^{-1}}{L_j},$$

sustituyendo en [19] se obtiene:

$$[\mu_{ij}] = L_i^{-1} L_j L_k^{-1} M T^{-1}. \quad [20]$$

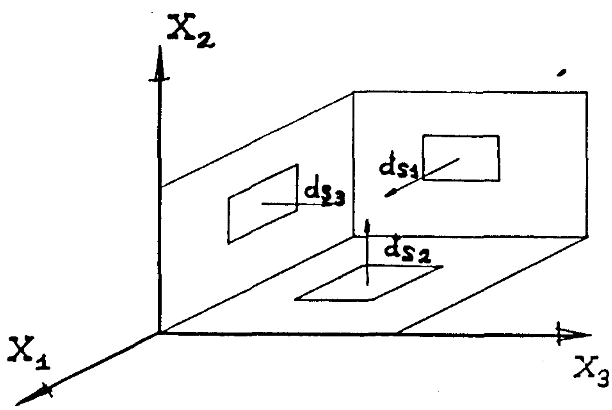

Fig. 9.—La viscosidad como tensor. Modo de obtener sus dimensiones discriminadas.

Según esto, tomando **d s**$_j$ como indica la figura, y como **d f** sólo tiene una componente, que es en la dirección del movimiento, las ecuaciones [18] se reducen a

$$d f_1 = T_{11} d s_1 + T_{12} d s_2 + T_{13} d s_3; \quad [21]$$

pero teniendo en cuenta que los elementos diagonales del tensor T dan las fuerzas normales, que no dependen de la viscosidad, prescindimos del término $T_{11}\, d\, s_1$, con lo que [21] se transforma en

$$d\, f'_1 = T_{12}\, d\, s_2 + T_{13}\, d\, s_3,$$

que de acuerdo con

$$T_{ij} = \mu_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

y teniendo en cuenta [20] nos conduce a

$$[\mu_{12}] = L_1^{-1}\, L_2 \quad L_3^{-1}\, M\, T^{-1}$$
$$[\mu_{13}] = L_1^{-1}\, L_2^{-1}\, L_3 \quad M\, T^{-1}$$

y ya se puede resolver el problema:

	v	Δ_p	l	b	a	μ_{12}	μ_{13}
L_1	1	1	1	0	0	-1	-1
L_2	0	-1	0	0	1	1	-1
L_3	0	-1	0	1	0	-1	1
M	0	1	0	0	0	1	1
T	-1	-2	0	0	0	-1	-1

$h = 5; \quad i = 2$

$$v = \frac{\Delta_p\, b^2}{\mu_{13}\, l}\, \varphi_2 \left(\frac{a^2\, \mu_{13}}{b^2\, \mu_{12}} \right) \qquad [22]$$

en la que hay un monomio menos que en la [16].

Si suponemos $a = b$, caso de un canal de sección cuadrada, la [16] se reduce a

$$v = \frac{l\, \Delta_p}{\mu}\, \varphi_1 \left(\frac{a}{l} \right) \qquad [23]$$

y la [22] a

$$v = \frac{\Delta_p\, a^2}{\mu_{13}\, l}\, \varphi_2 \left(\frac{\mu_{13}}{\mu_{12}} \right)$$

y como μ_{13} tiene el mismo valor numérico que μ_{12}, resulta:

$$v = C\, \frac{\Delta_p\, a^2}{\mu\, l}\,. \qquad [24]$$

La forma de la función φ_1 queda, pues, determinada en nuestro resultado.

b) *Canal con sección triangular.*

Sea un canal de sección triangular, siendo de 90° el diedro inferior. Supondremos iguales los dos lados que forman el ángulo recto. La sección es, pues, un triángulo rectángulo isósceles.

Supondremos cubierta la parte superior del canal y que el fluido circula debido a una diferencia de presiones Δp entre sus extremos (en el caso en que circule debido a la acción de su propio peso, bastará sustituir Δp por $\rho g h$). Suponemos que el fluido circula en régimen laminar, y deseamos calcular la velocidad media del fluido una vez establecido el régimen permanente.

Las variables que intervienen en el fenómeno son: la velocidad media v, la diferencia de presión Δp y las dimensiones del canal: longitud l, lados a, b, c del triángulo que forman la sección y, por último, la viscosidad μ del fluido.

Teniendo en cuenta que $a^2 = b^2 + c^2$, sólo dos son independientes. Tomamos b y c.

La solución clásica es:

$$v = \frac{c\,\Delta p}{\mu}\,\varphi_1\left(\frac{l}{c},\ \frac{b}{c}\right)$$

Según el enunciado, $b = c$, luego:

$$v = \frac{c\,\Delta p}{\mu}\,\varphi_1\left(\frac{l}{c}\right) \tag{25}$$

Si en vez de utilizar la base $(L\ M\ T)$ utilizamos $(L_1\ L_2\ L_3\ M\ T)$, correspondientes a haber discriminado las dimensiones del espacio, según la figura, las magnitudes tendrán las siguientes fórmulas dimensionales:

$$[v] = L_1\,T^{-1}; \quad [\Delta p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{L_1\,M\,T^{-2}}{L_2\,L_3} = L_1\,L_2^{-1}\,L_3^{-1}\,T^{-2}$$

$$[b] = L_2; \quad [c] = L_3.$$

Para hallar la fórmula dimensional del coeficiente de viscosidad μ respecto de la base $(L_1\ L_2\ L_3\ M\ T)$, nos encontramos con la misma dificultad que en el problema anterior (caso del *canal rectangu-*

lar), al hallar la dirección del gradiente de la velocidad, necesario para obtener la fórmula dimensional. Lo resolveremos como en el caso anterior, considerando el coeficiente de viscosidad μ como un tensor.

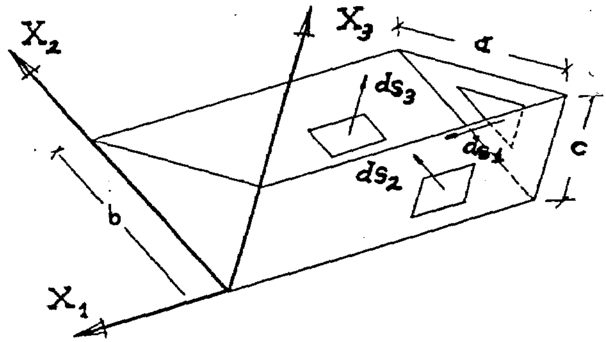

Fig. 10.—Cuando un fluido se mueve por un canal triangular, la viscosidad debe considerarse como un tensor.

Análogamente al caso anterior, **v** y **d F** sólo tienen la primera componente:

$$d\,F_1 = T_{11}\,d\,s_1 + T_{12}\,d\,s_2 + T_{13}\,d\,s_3$$

y prescindiendo de $T_{11}\,d\,s_1$, que da las acciones normales, llegamos a

$$d\,F'_1 = T_{12}\,d\,s_2 + T_{13}\,d\,s_3,$$

de donde

$$[\mu_{12}] = L_1^{-1}\,L_2\quad L_3^{-1}\,M\,T^{-1} \qquad [26]$$
$$[\mu_{13}] = L_1^{-1}\,L_2^{-1}\,L_3\quad M\,T^{-1} \qquad [27]$$

	v	Δ_p	l	b	c	μ_{12}	μ_{13}
L_1	1	1	1	0	0	−1	−1
L_2	0	−1	0	1	0	1	−1
L_3	0	−1	0	0	1	−1	1
M	0	1	0	0	0	1	1
T	−1	−2	0	0	0	−1	−1

$h = 5;\quad i = 2$

$$v = \frac{c^2\,\Delta_p}{\mu_{13}\,l}\,\varphi_2\left(\frac{b^2\,\mu_{13}}{c^2\,\mu_{12}}\right)$$

en el caso particular en que $b=c$, y, teniendo en cuenta que $\mu_{12} = \mu_{13}$, queda:

$$v = \frac{c^2 \Delta_p}{\mu l} C \qquad [28]$$

Comparando las soluciones [25] y [28], llegamos a una conclusión análoga a la del problema anterior: la presencia del factor de forma $\frac{l}{c}$ en la solución [25] implica que esta solución sólo tiene interés para comparar el comportamiento de canales de forma semejante, mientras que en la solución [28] la función indeterminada ha quedado reducida a una constante.

Referencia

(1) Julio Palacios: *Análisis dimensional.* Espasa-Calpe, S. A. Madrid (1964).

Instituto de Ciencias Físicas
Universidad de Madrid