L-Algebras, lógicas multivalentes y redes biónicas

por

Darío Maravall Casesnoves

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO D. RICARDO SAN JUAN LLOSÁ

La Lógica proposicional multivalente y la Biónica del sistema nervioso, me ha sugerido una estructura algebraica que he denominado L-Algebra, que engloba como un caso particular al Algebra de Boole, cuando la Lógica es bivalente. Puede ser desarrollada como una teoría abstracta, de la que la Lógica multivalente es una realización concreta, pero no la única, porque existen otros conjuntos matemáticos y naturales que son realizaciones concretas de la misma, como son las redes eléctricas provistas de interruptores y diodos, y las que he denominado redes biónicas.

Así como en L_2 y su isomorfa el Algebra de Boole juega un papel muy importante, la función característica (f. c.) de un conjunto A, en la L_3 y su L-Algebra isomorfa, lo juega la que he denominado función unidad de un conjunto: U (A) definida como:

$$U(A) = \frac{\text{f. c.}(A^0) + \text{f. c.}(A^-)}{2}$$

siendo A^0 y A^- el interior y la adherencia de A. Función que he utilizado en el caso de conjuntos lineales en mi memoria: «G-Topologías y Teoría de las Distribuciones» (*Rev. Matem. Hispano-Americana*, 1964), ejemplo de lo que allí denominamos función semicontinua en media, siendo precisamente la G-derivada de U (A) en los puntos frontera de A, la G-función o distribución delta de Dirac.

Mientras que en la teoría ordinaria de la integración, los conjuntos de medida nula (las fronteras) no intervienen, está construida sobre la base de una L_2 de puntos pertenecientes o no a un conjunto, por el contrario en la teoría de las Distribuciones las fronteras juegan un papel importante, está construida sobre la base de una L_3 de puntos interiores, frontera y exteriores, lo que establece un nexo entre G-Topologías y L-Algebras. Asimismo, mientras que en L_2 no hay definidas operaciones que transforman conjuntos en otros de menos dimensiones, por el contrario en L_3 se pueden definir operaciones que permitan dichas transformaciones, y emplear diagramas modificados de Venn, utilizando los cerrados de la Topología, con las operaciones de unión, intersección y clausura del complementario.

Definir un conjunto C es dar un criterio por el que se sabe si un elemento pertenece o no a él. Definidas unas operaciones (leyes de composición interna o externa, aplicaciones sobre otros conjuntos, etcétera) se crea un nuevo elemento. cuando se da nombre a un objeto que no pertenece a C, de modo que para C, completado con los nuevos elementos, siguen estando definidas las anteriores operaciones. En este aspecto las G-Topologías y las L-Algebras se comportan como generadores de nuevos objetos matemáticos.

1. L-RETÍCULOS Y L-ALGEBRAS

Sean $a, b, c, \ldots$, un conjunto C de funciones de no importa qué naturaleza, que pueden tomar valores reales de $-\infty$ a $+\infty$. Llamamos $\mathrm{M}(a, b, c, \ldots)$ a la función cuyo valor es igual al máximo de $a, b, c, \ldots$, y $m(a, b, c, \ldots)$ a la función, cuyo valor es igual al mínimo de $a, b, c, \ldots$

El conjunto C está parcialmente ordenado por la relación $\leqslant$, diremos $a \leqslant b$ cuando los valores que tome a sean siempre menores o iguales que los de b.

Las operaciones M y m gozan de las siguientes propiedades:

$$\mathrm{M}(a, b) = \mathrm{M}(b, a); \qquad m(a, b) = m(b, a) \tag{1}$$

(axioma de conmutabilidad)

$$\begin{gathered} \mathrm{M}[a, \mathrm{M}(b, c)] = \mathrm{M}[\mathrm{M}(a, b), c] = \mathrm{M}(a, b, c); \\ m[a, m(b, c)] = m[m(a, b), c] = m(a, b, c) \end{gathered} \tag{2}$$

(axiomas de asociatividad)

$$M[a, m(a, b)] = a; \qquad m[a, M(a, b)] = a \qquad [3]$$

(axiomas de absorción)

Axiomas que muestran que las operaciones M y m dotan a C de estructura de retículo, siendo la relación de orden $\leqslant$ porque:

$$a \leqslant b \longleftrightarrow m(a, b) = a; \qquad a \leqslant b \longleftrightarrow M(a, b) = b \qquad [4]$$

Se cumplen también las dos leyes distributivas:

$$\left.\begin{array}{l} m[a, M(b, c)] = M[m(a, b), m(a, c)] \\ M[a, m(b, c)] = m[M(a, b), M(a, c)] \end{array}\right\} \qquad [5]$$

Demostraremos la primera; supongamos $c \leqslant b$, en lo que no hay pérdida de generalidad debido a la simetría de las fórmulas [5] respecto a b y c, entonces si $b \leqslant a$, el primer miembro vale b, y el segundo miembro también vale b; si por el contrario es $a \leqslant b$, entonces el primer miembro vale a, y el segundo miembro también. Análogamente se demuestra la segunda [5].

Los axiomas [5] muestran que C con las operaciones M y m es un retículo distributivo.

Sea ahora — la operación que, antepuesta a una función a, consiste en cambiar de signo su valor, se cumple que:

$$-(-a) = a \qquad [6]$$

(propiedad involutiva) y que:

$$a \leqslant b \longleftrightarrow -b \leqslant -a \qquad [7]$$

que muestra que la operación — es un antiautomorfismo del retículo C.

Se cumple también que:

$$M(-a, -b) = -m(a, b); \qquad m(-a, -b) = -M(a, b) \qquad [8]$$

que coinciden con las fórmulas de Morgan.

Decimos que C con las operaciones M, m, — y la relación de orden $\leqslant$ (consecuencia de las dos operaciones primeras) es un L-retículo, y a la estructura algebraica de que está dotado la llamaremos una L-Algebra.

La anterior es una L-Algebra concreta, que nos sugiere la estructura de una L-Algebra abstracta, que la definimos así: dado un conjunto abstracto C $(a, b, c, \ldots)$ en el que hay definido: 1.°, dos leyes de composición interna $\cup$ y $\cap$, de modo que cualquiera que sean a, b, c cumplen los tres pares de axiomas de conmutabilidad, asociatividad y absorción:

$$a \cap b = b \cap a; \quad a \cup b = b \cup a; \quad a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c;$$
$$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c; \quad a \cap (a \cup b) = a; \quad a \cup (a \cap b) = a \qquad [9]$$

que dotan a C de estructura de retículo, con la relación de orden $\subset$, definida por:

$$a \subset b \longleftrightarrow a \cap b = a; \quad a \subset b \longleftrightarrow a \cup b = b \qquad [10]$$

y las dos leyes distributivas:

$$\left.\begin{array}{l} a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) \\ a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \end{array}\right\} \qquad [11]$$

2.°, una ley de composición externa: $\bar{\ }$ que cumple los dos axiomas:

$$\bar{\bar{a}} = a; \quad a \subset b \longleftrightarrow \bar{b} \subset \bar{a} \qquad [12]$$

(que le dan carácter de antiautomorfismo involutivo) decimos que C es un L-retículo, sobre el cual hay definida una L-Algebra. A C le llamamos también soporte del L-Algebra.

Desde luego un L-retículo es siempre distributivo, y en él se cumplen las fórmulas de Morgan:

$$\overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b}; \quad \overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b} \qquad [13]$$

porque como es sabido por la teoría general de retículos $a \cup b$ es la c. i. m. (cota inferior máxima) de a y b, y $a \cap b$ es la c. s. m. (cota superior mínima) de a y b. Por tanto, como:

$$a \cap b \subset a; \quad a \cap b \subset b \qquad [14]$$

es:

$$\overline{a \cap b} \supset \overline{a}; \qquad \overline{a \cap b} \supset \overline{b} \tag{15}$$

y si:

$$\overline{a} \cap \overline{b} \mp \overline{a} \cup \overline{b} \quad \text{es} \quad \overline{a \cap b} \supset \overline{a} \cup \overline{b} \tag{16}$$

y de esta última volviendo a aplicar $^{-}$ se obtiene:

$$a \cap b \subset \overline{\overline{a} \cup b} \tag{17}$$

pero como:

$$\overline{a} \cup b \supset \overline{a}; \qquad \overline{a} \cup b \supset \overline{b} \tag{18}$$

es:

$$\overline{a \cup b} \subset a; \qquad \overline{\overline{a} \cup \overline{b}} \subset b \tag{19}$$

y de aquí:

$$\overline{\overline{a} \cup b} \subset a \cap b \tag{20}$$

que está en contradicción con la [17], lo que demuestra la primera fórmula [13], sustituyendo a y b por a y b. Las fórmulas de Morgan se cumplen también para retículos no distributivos (no L-retículos) en los que hay definido un antiautomorfismo involutivo. Análogamente, se demuestra la segunda [13].

Se establece un isomorfismo entre la L-Algebra considerada al principio y la L-Algebra abstracta, haciendo corresponder a M, m, $\leqslant$, — los $\cup$, $\cap$, $\subset$, $^{-}$.

Suponemos ahora que, en el ejemplo considerado al principio, los valores de a, b, c, ..., están comprendidos entre -1 y 1, entonces M, m, $\leqslant$, —, con el mismo significado que allí, definen sobre el L-retículo C, una L-Algebra, pero ahora existen los elementos -1 y 1, que llamaremos cotas universales, que gozan de la propiedad de que cualquiera que sea a, es:

$$m(a, 1) = a; \quad M(a, 1) = 1; \quad m(a, -1) = -1;$$
$$M(a, -1) = a \qquad [21]$$

Diremos que C es un L-retículo cerrado, y al L-Algebra correspondiente la llamaremos L-Algebra cerrada.

Decimos entonces que una L-Algebra abstracta es cerrada, cuando en su L-retículo soporte (que llamaremos cerrado) se pueden definir dos cotas universales Φ y I, que satisfacen a los axiomas:

$$a \cup I = I; \quad a \cap I = a; \quad a \cup \Phi = a; \quad a \cap \Phi = \Phi \qquad [22]$$

en caso contrario diremos que se trata de una L-Algebra abierta y a su L-retículo soporte le llamaremos abierto.

Vamos a demostrar que si existe una de las dos cotas universales, existe la otra, y que $\bar{I} = \Phi$. En efecto, si existe la I en virtud de [13] y [22] se cumple:

$$\bar{a} \cup I = I = \bar{a} \cap \bar{I}; \quad \overline{a \cap \bar{I}} = a = \bar{a} \cup \bar{I} \qquad [23]$$

que muestran que $\Phi = \bar{I}$, en virtud de las dos [22]. Análogamente, se demostraría que si existe Φ, existe también I y que $\bar{\Phi} = I$.

Un L-retículo cerrado se llama complementario cuando se cumple que:

$$a \cap \bar{a} = \Phi; \quad a \cup \bar{a} = I \qquad [24]$$

una consecuencia de la otra, porque:

$$\overline{a \cap \bar{a}} = a \cup a = \bar{a} \cup a = \bar{\Phi} = I \qquad [25]$$

que deduce la segunda de la primera, y análogamente se puede deducir la primera de la segunda.

Una L-Algebra cerrada de L-retículo soporte complementario es evidentemente un Algebra de Boole, porque se cumplen todos los axiomas que definen a esta Algebra.

Resulta, pues, que los L-retículos o son cerrados o abiertos, lo que no pueden ser es cerrado por un solo extremo, es decir, tener una sola cota universal Por tanto, cuando en el conjunto C soporte de un L-retículo, está definida una sola cota universal, se puede crear un nuevo objeto matemático (no perteneciente a C) que es la otra cota universal complementaria, de modo que sobre C completado con este nuevo elemento, queda definida una L-Algebra.

En la axiomática clásica de los números naturales, no tiene cabida el ∞, ni tampoco en la de los números racionales. El conjunto de los números racionales positivos es un L-retículo respecto a las operaciones abstractas $\cup$, $\cap$, $\subset$, $^{-}$, concretadas en M, m, $\leqslant$, 1/ (máximo, mínimo, menor o igual que, e inverso de un número racional), la última es un antiautomorfismo involutivo. Ahora bien, dicho L-retículo tiene una cota universal Φ que es el 0, luego por el teorema que acabamos de demostrar, tiene también la cota universal complementaria I, que denominamos ∞, que surve así como un L-número racional (obsérvese que ∞ no es un L-número natural).

Obsérvese también que en mi memoria «G-Topologías y Teoría de las Distribuciones» (*Rev. Matem. Hispano-Americana*, 1964) he definido la forma de crear nuevos objetos matemáticos (G-elementos); pues bien, si consideramos la aplicación biyectiva f del conjunto de los números racionales mayores o iguales que 1, sobre el conjunto de los números racionales comprendidos entre 0 y 1, definida por el inverso del número racional, a las sucesiones divergentes del primer conjunto corresponden sucesiones convergentes a 0; en el segundo conjunto, por tanto, tinen G-límite, que es $f(0) = 1/0$, que designamos por ∞, el cual aparece así también como un G-número racional, pero no un G-número natural.

Como consecuencia de uno cualquiera de los dos párrafos anteriores, existe un ente mayor que todo número racional, por tanto mayor que todo número real, porque dado un número real cualquiera, existe un número racional mayor que él. A este ente le llamamos ∞ y a su opuesto $-\infty$. Respecto a los números naturales, ∞ goza de la propiedad de no tener antecedente ni siguiente, y a partir del mismo se puede construir la axiomática completa de los números transfinitos, como caso particular de L-retículo, ya que la mayor dificultad estriba en introducir el primer transfinito. Será el objeto de una segunda memoria titulada: «Teoría reticular de los números reales y de los números transfinitos».

2. L-polinomios

Al igual que en Topología los espacios métricos son un caso particular de los pseudométricos, en Algebra el Algebra de Boole es un caso particular de L-Algebra, y al igual que en Topología existen teoremas comunes a los espacios métricos y pseudométricos y otros específicos de los métricos, en Algebra existen leyes comunes a todas las L-Algebras y otras específicas del Algebra de Boole.

Vamos a desarrollar las leyes del Cálculo no booleano de las L-Algebras. Llamaremos L-polinomios a las funciones construidas con elementos del L-retículo soporte, enlazados por las operaciones $\cup$, $\cap$, $^-$, así que en una variable a serán los cuatro polinomios: a, $\bar{a}$, $a \cup \bar{a}$, $a \cap \bar{a}$.

Un L-polinomio con n variables puede llevarse a dos formas canónicas, aplicando sistemáticamente los axiomas del L-Algebra. Sea, por ejemplo, el L-polinomio:

$$[\overline{(a \cap \bar{b})} \cup \bar{c}] \cap \overline{(c \cap \bar{a})} \qquad [26]$$

Primeramente la operación $^-$ fuera de un paréntesis puede llevarse al interior por aplicación de [13], así es:

$$\overline{a \cap \bar{b}} = \bar{a} \cup \bar{\bar{b}} = \bar{a} \cup b; \qquad \overline{c \cup \bar{a}} = \bar{c} \cap \bar{\bar{a}} = \bar{c} \cap a \qquad [27]$$

y [26] es:

$$(\bar{a} \cup b \cup c) \cap (\bar{c} \cap a) \qquad [28]$$

Cuando hay un $\cap$ fuera de un paréntesis que encierra un $\cup$, puede introducirse dentro, aplicando la ley distributiva, [28] es:

$$(\bar{a} \cap \bar{c} \cap a) \cup (b \cap \bar{c} \cap a) \cup (\bar{c} \cap \bar{c} \cap a) \qquad [29]$$

por ser:

$$a \cap a = a; \qquad a \cup a = a \qquad [30]$$

cuando una letra se repite en un paréntesis, puede reducirse a una sola vez, [29] es:

$$(\bar{a} \cap c \cap a) \cup (b \cap \bar{c} \cap a) \cup (\bar{c} \cap a) \qquad [31]$$

que es una de las formas canónicas que llamaremos disyuntiva, la cual consiste en una serie de paréntesis en cuyo interior solamente hay $\cap$ (L-polinomios mínimos) enlazados por $\cup$.

Podemos hacer uso de las simplificaciones propias de los axiomas de absorción, que transforman [31] en:

$$(a \cap \bar{c} \cap a) \cup (\bar{c} \cap a) \qquad [32]$$

pero no de añadir factores como:

$$a \cup a = \mathrm{I}$$

propios del Algebra de Boole, que aplicados a un polinomio P, la primera por ejemplo lo convertiría en:

$$\mathrm{P} = \mathrm{P} \cap \mathrm{I} = \mathrm{P} \cap (a \cup a) = (\mathrm{P} \cap a) \cup (\mathrm{P} \cap a)$$

que aplicado a [32] lo transforma en:

$$(b \cap \bar{c} \cap a) \cup (\bar{c} \cap a \cap \bar{b}) \qquad [33]$$

Mientras que [26] y [32] son equivalentes en cualquier L-Algebra, el paso de [26] a [33] es exclusivo del Algebra de Boole.

Análogamente, puede llevarse todo L-polinomio a una forma canónica conjuntiva formada por paréntesis en cuyo interior únicamente hay $\cup$ (L-polinomios máximos) enlazados por $\cap$.

Como consecuencia de las fórmulas de Morgan [13] se sigue que toda forma canónica conjuntiva mediante la aplicación de la operación $^{-}$ se transforma en una forma canónica disyuntiva, y viceversa.

3. L-retículos absorbentes

Llamamos L-retículo absorbente al que goza de la propiedad de que dados dos elementos cualesquiera a y b, se verifica que:

$$a \cup b = a; \qquad a \cap b = b \qquad [34]$$

la segunda consecuencia de la primera, y viceversa, debido a los axiomas de absorción, porque de la primera se sigue que:

$$(a \cup b) \cap b = b = b \cap a \qquad [35]$$

y de la sekunda que:

$$(a \cap b) \cup a = a = b \cup a \qquad [36]$$

Un L-retículo absorbente es totalmente ordenado, y viceversa todo conjunto totalmente ordenado con $\cup$ y $\cap$, como M (máximo) y m (mínimo), y dotado de un antiautomorfismo involutivo es un L-retículo absorbente.

Llamamos punto fijo en un L-retículo a un elemento a, tal que $a = \bar{a}$, siendo:

$$a = b \longleftrightarrow \begin{cases} a \supset b \\ a \subset b \end{cases} \qquad [37]$$

Vamos a demostrar que en un L-retículo absorbente solamente hay un punto fijo a lo sumo. Supongamos que hubiera dos, a y b, como es totalmente ordenado sea $a \subset b$, entonces $\bar{b} \subset \bar{a}$, pero como $\bar{b} = b$, $\bar{a} = a$, se llega a un absurdo.

Supongamos que no exista ningún punto fijo, sean A y A′ los dos conjuntos del L-retículo absorbente, tal que $a \in A$ significa que $\bar{a} \subset a$, y $b \in A'$ significa que $b \subset b$, desde luego si $a \in A$, es $\bar{a} \in A'$, y todo elemento pertenece a A o a A′, porque no hay punto fijo. Sean entonces $a \in A$ y $\bar{a} \in A'$, si $b \subset a$ es tal que $b \in A$ será $b \in A'$, pero $a \subset \bar{b}$ debido al antiautomorfismo. Si a es tal que no hay ningún b que cumpla la anterior condición, es el mínimo de A, y entonces $\bar{a}$ es el máximo de A′, entre a y $\bar{a}$ no hay ningún elemento. Tanto en este caso como en el anterior todos los elementos de A son $\supset$ que los de A′.

En caso contrario, hay un b que cumple la anterior condición, y si no hay ningún c, tal que $b \subset c \subset c \subset b$, se sigue que b y b son el máximo y el mínimo de A′ y A, y si no, se repite indefinidamente el proceso(caso de no existir ningún máximo de A′ y mínimo de A), obteniéndose dos sucesiones indefinidas, creciente una y decreciente la otra: $\ldots \subset \bar{b} \subset \bar{c} \subset \ldots \subset c \subset b \subset \ldots$, sin límite común, porque entonces habría un punto fijo.

Si existe el máximo de A′ (el mínimo de A) existe el mínimo de A (el máximo de A′), que es el resultado de aplicar la operación $^-$ $a\ \bar{a}$ (a). Incluso podemos hacer $a = \bar{a}$, y llamamos a a punto fijo doble, aunque sean distintos a y $\bar{a}$, porque reticularmente son iguales. También cuando no existe el máximo de A y el mínimo de A′ (punto doble imaginario) podemos crearlos, y hacerlos iguales reticularmente, aunque para otras propiedades no lo sean, le llamaremos punto fijo imaginario al resultado de igualar el máximo y el mínimo imaginarios de A y A′.

Se sigue que en un L-retículo absorbente hay a lo sumo un punto fijo real, y existe siempre un punto fijo real, doble realo imaginario, o lo que es lo mismo en los tres últimos casos es isomorfo a un L-retículo de punto fijo real. Llamaremos L-retículo contraído al absorbente con punto fijo real, y contracción de un L-retículo absorbente al isomorfismo con uno contraído.

Ejemplo de L-retículo absorbente con punto fijo real, es el de los números racionales positivos, siendo $\cup$, $\cap$ y $^-$, M (máximo), m (mínimo) y 1/ (inverso del número racional) en el que el punto fijo real es 1. Ejemplo de L-retículo absorbente con punto fijo doble, es el formado por un número par de los primeros números naturales 0, 1, ..., $2n - 1$, siendo $\cup$, $\cap$ y $^-$: M, m, $2n - 1 -$ (complemento a $2n - 1$) el punto fijo doble es el que resulta de igualar n a $n - 1$. Ejemplo de L-retículo absorbente con punto fijo imaginario, es el de los números racionales positivos con $\cup$, $\cap$ y $^-$: M, m, 2/, cuyo punto fijo imaginario es el número real: $2/x = x$, o sea $x = \sqrt{2}$. Ejemplo de L-retículo absorbente con un punto fijo imaginario, que resulta de igualar reticularmente dos elementos imaginarios no iguales, es el formado por dos sucesiones de funciones continuas, creciente la una y decreciente la otra, que tienen como límites respectivos dos funciones semicontinuas inferior y superiormente, que son las funciones características de un intervalo abierto y cerrado, tales como las consideradas en la nota 1.ª de mi memoria «G-Topologías y Teoría de las Distribuciones».

Los dos conjuntos A y A′ tienen la misma potencia, porque se puede establecer entre ambos una aplicación biyectiva, que consiste en considerar como homólogos los elementos de A y A′ relacionados entre sí por la operación $^-$.

Hemos llegado a la siguiente clasificación de L-retículos absorbentes: 1.° con punto fijo real, 2.° con punto doble real, 3.° con punto fijo imaginario, 4.° con punto doble imaginario. Los tres últimos isomorfos mediante contracción al primero.

Llamaremos denso a un L-retículo absorbente, que goza de la propiedad de que entre dos elementos cualesquiera $b \subset a$, existe otro c, tal que $b \subset c \subset a$. En un reticulo de esta naturaleza no existe punto doble real, porque si lo hubiese, sea a, se tendría que $\bar{a} \subset a$, y existiría un b, tal que $\bar{a} \subset b \subset a$, luego $\bar{a} \subset \bar{b} \subset b \subset a$, lo que es absurdo ya que $\bar{a}$ es el máximo de A′. Por tanto, si un L-retículo absorbente denso se completa con sus puntos imaginarios, para que conserve el carácter de denso, los puntos imaginarios han de ser fijos (no dobles).

Si un conjunto totalmente ordenado, C, se parte en dos subconjuntos A′ y A, lo que significa que:

$$A' \cup A = C; \qquad A' \cap A = \Phi \qquad [38]$$

indicando para los conjuntos $\cup$ y $\cap$, unión e intersección, de modo que:

$$A' \subset A$$

lo que significa que:

$$a' \subset a, \qquad (\forall\, a \in A, \qquad \forall\, a' \in A') \qquad [39]$$

y se puede establecer una aplicación biyectiva f entre A′ y A, que invierta el orden, C es un L-reticulo absorbente. En efecto, ya que $a = f(a')$ es un antiautomorfismo involutivo, definido en C, y ser éste totalmente ordenado.

Dos puntos fijos imaginarios, x, y, respecto a dos antiautomorfismos involutivos $^-$ y $*$, se dice que son iguales si $A' = B'$, $A = B$, siendo A, A′ y B, B′, los pares de subconjuntos en que queda partido C por x, y. Por tanto, a cada aplicación biunívoca de A′ sobre A, que invierta el orden, corresponde un antiautomorfismo involutivo diferente, pero todos ellos tienen el mismo punto fijo.

Un punto fijo imaginario x es tal que $x \subset b$, si $b \in A$, y $x \supset b$, si $b \in A'$. Dos puntos fijos imaginarios, x, y, están ordenados en la forma $x \subset y$, si $A' \subset B'$ y $B \subset A$, indicando $\subset$ para los conjuntos: «contenido en». Un L-retículo absorbente completado con los puntos fijos imaginarios de todos sus antiautomorfismos involutivos lo llamaremos completo, y es también un L-retículo absorbente.

La importancia de la creación de los puntos fijos imaginarios x, y, z, ..., y su novedad matemática estriba en que se puede extender a los mismos algunas de las operaciones definidas con los elementos del L-retículo C.

En efecto, sea Γ una ley de composición externa que conserva el orden, y que sea una aplicación biunívoca de C sobre C (automorfismo), entonces si $a \subset b$, es $\Gamma(a) \subset \Gamma(b)$. Llamamos $\Gamma(x)$ al punto fijo del antiautomorfismo involutivo definido por $\Gamma(a)$ homólogo de $\Gamma(\bar{a})$, en el que los dos subconjuntos en que $\Gamma(x)$ parte a C son $\Gamma(A')$ y $\Gamma(A)$, ya que:

$$\Gamma(A') \subset \Gamma(A); \qquad \Gamma(A') \cap \Gamma(A) = \Phi; \qquad \Gamma(A') \cup \Gamma(A) = C \qquad [40]$$

la primera por conservar Γ el orden, la segunda por ser ambos conjuntos disjuntos ya que los antecedentes de $\Gamma(A)$ y $\Gamma(A')$ son los conjuntos disjuntos A y A'. La tercera por ser Γ una aplicación de C sobre C.

Pero si γ es una ley de composición externa que invierte el orden y es una aplicación biunívoca de C sobre C, de modo que si $a \subset b$, es $\gamma(a) \supset \gamma(b)$ (antiautomorfismo), entonces se define $\gamma(x)$, como el punto fijo del antiautomorfismo involutivo definido por $\gamma(a)$ homólogo de $\gamma(\bar{a})$, porque es:

$$\gamma(A) \subset \gamma(A'); \qquad \gamma(A) \cap \gamma(A') = \Phi; \qquad \gamma(A) \cup \gamma(A') = C \qquad [41]$$

que se demuestran de la misma manera que en el caso anterior.

Como consecuencia de lo anterior, el homólogo de un punto fijo imaginario x, en un antiautomorfismo involutivo *, de punto fijo distinto, es otro punto fijo imaginario x^*, porque * es un caso particular de ley γ.

Si L es una ley de composición interna, que conserva el orden, en el sentido de que:

$$\left.\begin{array}{l} a \subset c \\ b \subset d \end{array}\right\} \rightarrow a \mathrm{L} b \subset c \mathrm{L} d \qquad [42]$$

y es una aplicación del producto cartesiano del conjunto C por si mismo, sobre el mismo, tal que goza de la propiedad de que:

$$A' L B' \cup A L B = C \qquad [43]$$

como es:

$$A' L B' \subset A L B ; \qquad A' L B' \cap A L B = \Phi \qquad [44]$$

la primera consecuencia de [42], y la segunda por ser disjuntos los conjuntos $A' L B'$ y $A L B$, como consecuencia de la primera, se define $x L y$ como el punto fijo del antiautomorfismo involutivo definido como $\bar{a} L b^*$ homólogo de $a L b$, siendo a y b homólogos de a y b en los dos antiautomorfismos involutivos de puntos fijos imaginarios x e y.

Obsérvese que la condición [43] ha de cumplirse para que el último antiautomorfismo involutivo (el que define $x L y$) exista, es necesario que sea vacío el complementario respecto a C, del primer miembro de [43], o lo que es lo mismo que todo $a' L b$ ó $a L b'$ pertenezca a $A' L B'$ o a $A L B$.

Se define ya sin dificultad la multiplicación a la izquierda o a la derecha, de leyes γ, Γ, L, pudiéndose obtener leyes de composición interna en que en la llave de [42] se sustituya o uno o los dos $\subset$ por $\supset$.

Obsérvese que las leyes Γ forman grupo porque existe la unidad y la inversa, y el producto de dos leyes Γ es otra ley Γ. Las leyes γ no forman grupo porque el producto de dos leyes γ no es otra ley γ, sino una ley Γ, y en general el producto de leyes γ y Γ es otra ley γ o Γ, según que el número de factores γ que entre en el producto sea impar o par. El conjunto de leyes γ y Γ si forma grupo.

La propiedad uniforme de estas leyes u operaciones es consecuencia de que $\Gamma(x)$, $\gamma(x)$, $x L y$ son independientes del antiautomorfismo involutivo particular que define a x o y, depende únicamente de los subconjuntos A', A y B', B.

Las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de que pueden gozar las leyes anteriores para los elementos de C, se extienden automáticamente a los puntos fijos imaginarios, por ser consecuencia de su validez para los elementos de los subconjuntos de C, en que todo punto fijo imaginario parte a C.

El conjunto de los números reales positivos (negativos) puede definirse como el L-retículo absorbente y denso formado por el L-retículo, de la misma naturaleza, de los números racionales positivos (negativos) completado con los puntos fijos imaginarios de todos los antiautomorfismos involutivos definidos sobre el mismo, que son los números irracionales.

Lo mismo puede decirse del conjunto de los números reales, respecto al de los números racionales, es decir que la anterior definición subsiste si se suprime en ella el adjetivo positivos (negativos).

Las operaciones con números racionales (adición, multiplicación, etcétera) se extienden de esta manera a los números reales, porque es fácil demostrar que se cumple la [43], porque cumpliéndose la [44] la distancia entre A y A', o entre A' L B' y A L B es cero. Se puede construir una teoría reticular de los números reales, lo que será objeto de una segunda memoria con este título.

4. L-retículos y L-Algebras vectoriales

Dados n conjuntos $C_1\,(a_1, b_1, ...)$, $C_2\,(a_2, b_2, ...)$, ..., $C_n\,(a_n, b_n, ...)$, sea C el producto cartesiano de los n conjuntos $C_1 \ldots C_n$, o sea $C\,[(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n), ...]$; si C_i $(i = 1, ..., n)$ son L-retículos respecto a las operaciones $\cup_i, \cap_i, ^{-i}$, que eventualmente pueden algunas ser la misma, llamamos L-retículo vectorial al conjunto C, dotado de las operaciones $\cup, \cap, ^-$, siendo:

$$a \cup b = (a_1 \cup_1 b_1, ..., a_n \cup_n b_n); \qquad a \cap b = (a_1 \cap_1 b_1, ..., a_n \cap_n b_n);$$
$$\bar{a} = (\bar{a}_1{}^1, ..., \bar{a}_n{}^n) \qquad [45]$$

de modo que:

$$a \subset b \longleftrightarrow a_1 \subset b_1, ..., a_n \subset b_n \qquad [46]$$

y llamamos L-Algebra vectorial a la estructura algebraica de un L-retículo vectorial. A los C_i les llamamos L-retículos escalares y a C, producto de los n L-retículos escalares C_i.

Obsérvese que el producto de n L-retículos absorbentes escalares no es un L-retículo absorbente vectorial.

Como es sabido, los subespacios vectoriales de un espacio vectorial forman un retículo modular atómico y complementario. En la mayor parte de las Geometrías definidas sobre un subespacio vectorial E contenido en otro espacio vectorial F, es indistinto suponer a E aislado de F, que contenido en F, pero en mi memoria «Ensayo de Teoría unitaria de la Gravitación y del Electromagnetismo» (*Revista Matem. Hispano-Americana*, 1955) hemos desarrollado una Geometría intrínseca de E, aislado de F, y otra distinta, inducida en E por F. Pues bien, si ronsideramos los 2^n espacios vectoriales de 0 a n dimensiones, como entes independientes, forman un retículo distributivo atómico y complementario, o sea un Algebra de Boole, isomorfa al Algebra de los subconjuntos en número de 2^n que se pueden formar con los $n + 1$ primeros números naturales: 0,1, ..., n.

En efecto, estos espacios están integrados por vectores de una a n dimensiones, que podemos representar por n componentes, que toman dos valores que son Φ y a, significando Φ el conjunto vacío, y a una variable real que puede tomar cualquier valor de $-\infty$ a $+\infty$, incluido el cero, pero consideramos como distintas la componente vacía Φ de la nula 0. Estos espacios los podemos disponer como los números combinatorios:

$$\left.\begin{array}{c} (\Phi, \Phi, \ldots, \Phi) \\ (a, \Phi, \ldots, \Phi), (\Phi, a, \Phi, \ldots, \Phi), \ldots (\Phi, \Phi, \ldots, a) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a, a, \ldots, \Phi). \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\Phi, a, \ldots, a) \\ (a, a, \ldots, a) \end{array}\right\} \quad [47]$$

La primera fila es el espacio de 0 dimensiones; la segunda los n espacios de una dimensión; la tercera los $n(n-1)/2$ espacios de dos dimensiones; ...; la penúltima fila los n espacios de $n-1$ dimensión, y la última fila el de n dimensiones. Dos vectores los consideramos iguales cuando tienen las mismas componentes, por ejemplo los vectores nulos de dos espacios cualesquiera distintos de [47] son distintos, por no ser iguales 0 y Φ.

Los símbolos Φ y a, sujetos a las leyes:

$$\left.\begin{array}{c} \Phi \cup \Phi = \Phi; \quad \Phi \cap \Phi = \Phi; \quad \Phi \cup a = a; \quad \Phi \cap a = \Phi; \quad a \cup a = a; \\ a \cap a = a; \quad \bar{a} = \Phi \end{array}\right\} \quad [48]$$

forman un Algebra de Boole escalar. El producto de n Algebras de Boole escalares de la forma anterior, constituye un Algebra de Boole vectorial, sobre la cual están definidas las operaciones $\cup$, $\cap$ y $^{-}$, de modo que para cada componente se cumplen las [48]. Esta Algebra de Boole vectorial es isomorfa al Algebra de Boole escalar formada por los 2^n elementos de [47], isomorfa a su vez al Algebra de Boole de los 2^n subconjuntos de los $n + 1$ primeros números naturales: 0,1, ..., n, porque a cada subconjunto de éstos podemos hacer corresponder un elemento de [47], sustituyendo los números que forman parte del subconjunto por a, y los que no forman parte del subconjunto por Φ.

De forma que el complementario de un espacio de n dimensiones es otro de $n - m$ dimensiones, que resulta de sustituir en los vectores del primero las componentes vacías por no vacías y las no vacías por vacías.

La intersección de dos espacios vectoriales es otro espacio vectorial, formado por los vectores que tienen vacías las componentes que son vacías en uno cualquiera de los dos primeros.

La unión de dos espacios vectoriales es otro espacio vectorial formado por los vectores que tienen vacías las componentes que son vacías en los dos primeros a la vez. Pero hay que tener en cuenta que los vectores nulos de dos espacios distintos los consideramos distintos.

5. L-Algebras y Lógicas multivalentes

En la Lógica bivalente de proposiciones, éstas (a, b, c, ...) únicamente pueden tomar dos valores: verdadero (1) y falso (0), mientras que en la Lógica multivalente pueden tomar varios valores que van del 0 al 1. La suma y producto lógico de dos proposiciones a y b, representadas por $\cap$ y $\cup$, definidas como M (máximo) y m (mínimo) de a y b, dotan al conjunto C de las proposiciones de estructura de retículo distributivo. La negación de a: $\bar{a}$, cuyo valor numérico es:

$$V(\bar{a}) = 1 - V(a) \qquad [49]$$

dota a C de estructura de L-retículo, porque:

$$1 - M(a, b) = m(1 - a, 1 - b); \quad 1 - m(a, b) = M(1 - a, 1 - b) \qquad [50]$$

que coinciden con (8). Por otra parte, 0 y 1 se comportan como cotas universales Φ y I.

Por tanto, la Lógica proposicional multivalente tiene estructura de L-Algebra cerrada, y las proposiciones forman un L-retículo cerrado. En el caso particular de la Lógica bivalente, entonces la L-Algebra cerrada es una Algebra de Boole, y las proposiciones forman un retículo distributivo y complementario.

Por ejemplo, si nos fijamos en la Lógica trivalente (L_3) se verifican las dos matrices de verdad:

a	$\bar{a}$	$a \cup \bar{a}$	$a \cap \bar{a}$
0	1	1	0
1/2	1/2	1/2	1/2
1	0	1	0

Luego a partir de proposiciones simples con los tres valores de verdad, se pueden construir proposiciones compuestas bivalentes utilizando la forma disyuntiva de un L-polinomio (& 2) con los valores 0 y 1/2, si dentro de cada paréntesis interviene un $x \cap \bar{x}$, o la forma conjuntiva de un L-polinomio con los valores 1 y 1/2, si dentro de cada paréntesis interviene un $x \cup \bar{x}$. Por ejemplo, con proposiciones verdaderas, sin sentido y falsas, se pueden construir proposiciones bivalentes. Más adelante veremos la aplicación a la Electricidad.

Las operaciones de la Lógica bivalente: implicación y equivalencia, se definen en función de la suma y del producto lógico, y pueden de esta manera generalizarse a L_n, pero ésta es más rica que L_2, y permite nuevas operaciones. Por ejemplo, definimos la equivalencia $\longleftrightarrow$ siendo su valor:

$$V(a \longleftrightarrow b) = 1 - | V(a) - V(b) | \tag{51}$$

o sea, tanto mayor cuanto menor es la diferencia de valores entre a y b. Para la matriz de verdad encontramos:

a	1	1	1	1/2	1/2	1/2	0	0	0
b	1	1/2	0	1	1/2	0	1	1/2	0
$a \longleftrightarrow b$	1	1/2	0	1/2	1	1/2	0	1/2	1

[52]

mientras que definida la equivalencia como:

$$a \longleftrightarrow b = (\bar{a} \cup b) \cap (a \cup \bar{b})$$

al igual que en L_2, la matriz de verdad es distinta:

a	1	1	1	1/2	1/2	1/2	0	0	0
b	1	1/2	0	1	1/2	0	1	1/2	0
$(\bar{a} \cup b) \cap (a \cup \bar{b})$	1	1/2	0	1/2	1/2	1/2	0	1/2	1

que difiere de la anterior en la quinta columna. Nos parece más útil nuestra primera definición de equivalencia que la segunda.

Como es sabido, L_2 es isomorfa con el Algebra de los subconjuntos de un conjunto respecto a las operaciones de unión intersección y complementación. Los puntos son clasificados como perteneciente o no a un conjunto, y toda proposición es asimilable a un conjunto, siendo su valor de verdad (valencia) su función característica. Pues bien, L_3 es isomorfa al Algebra de los cerrados de la Topología respecto a la unión, intersección y clausura de la complementación, clasificándose los puntos en tres clases: interiores, frontera y exteriores. La última operación consiste en permutar entre sí los puntos interiores y exteriores, dejando invariantes los puntos fronteras, y el valor de verdad es la función unidad de un conjunto A: U (A) que defino:

$$U(A) = \frac{\text{f. c. } (A^0) + \text{f. c. } (A^-)}{2} \qquad [53]$$

siendo f. c. la función característica, A^0 y A^- el interior y la adherencia de A. En el caso de conjuntos de números reales, la [53] es una función que he denominado semicontinua en media, de la que he dado sucesiones de funciones continuas y derivables de la que es límite, siendo su 0-derivada en el interior y en el exterior nula, y en los puntos frontera su G-derivada es la delta de Dirac en dicho punto (véase mi memoria «G-Topologías y Teoría de las Distribuciones»).

Se pueden utilizar diagramas de Venn modificados en L_3, utilizando conjuntos cerrados, su unión, intersección y la clausura del complementario, como operaciones $\cup$, $\cap$ y $^-$. Se pueden obtener conjuntos lineales como, por ejemplo, $a \cap \tilde{a}$, cuya función unidad vale

1/2 sobre la frontera de a, y 0 en el resto, o recortar un conjunto lineal de otro superficial, como $a \cup \bar{a}$, cuya función unidad vale 1/2 sobre la frontera de a, y 1 en el resto. E incluso se pueden obtener puntos, como $a \cap \bar{a} \cap b \cap \bar{b}$, cuya función unidad vale 1/2 en los puntos de intersección de las fronteras de a y b, y cero en el resto. Análogamente se pueden practicar «agujeros» (cuya aplicación física existe) utilizando $a \cup a \cup b \cup b$, cuya función unidad vale 1/2 en las intersecciones de las fronteras de a y b, y cero en el resto.

6. La lógica trivalente de las redes eléctricas con diodos

La asociación en serie y en paralelo de conductores eléctricos, como es sabido, son equivalentes a las operaciones $\cup$ y $\cap$, pero si en una red eléctrica únicamente hay interruptores, que abren o cierran el circuito, es isomorfa a un Algebra de Boole con las dos alternativas de «todo o nada», pero si hay también diodos, los cuales permiten

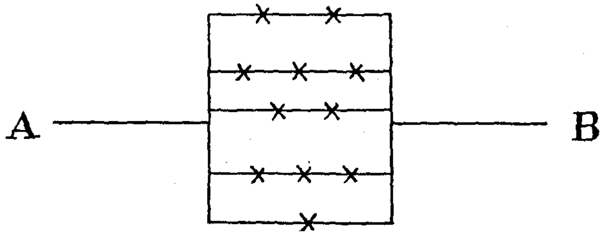

Fig. 1

el paso de la corriente eléctrica en un sentido, pero no en el otro, entonces hay cuatro posibilidades, que son: paso de la corriente de A a B y de B a A; paso de A a B, pero no de B a A; paso de B a A, pero no de A a B; y ningún paso de corriente, y entonces son las matrices de verdad de L_4 las que son equivalentes al problema físico.

En el caso de no existencia de diodos, como es sabido, se utilizan las leyes del Cálculo booleano, pero en el último caso considerado (existencia de diodos) no se puede utilizar el cálculo booleano, pero sí el de los L-polinomios (& 2), y toda red eléctrica es equivalente a una de las dos formas canónicas representadas en las figuras 1 y 2, isomorfas a las dos formas canónicas disyuntiva y conjuntiva de los L-polinomios.

Hay que destacar que si solamente hay interruptores y diodos, que permiten el paso de la corriente de A a B, pero no de B a A, entonces es L_3 la lógica de las redes eléctricas, y se pueden construir redes que cualquiera que sea el funcionamiento de interruptores y diodos permitan siempre el paso de la corriente de A a B, o siempre el no paso de la corriente, lo que equivale a la posibilidad de construcción de proposiciones compuestas bivalentes en L_3 (& 5).

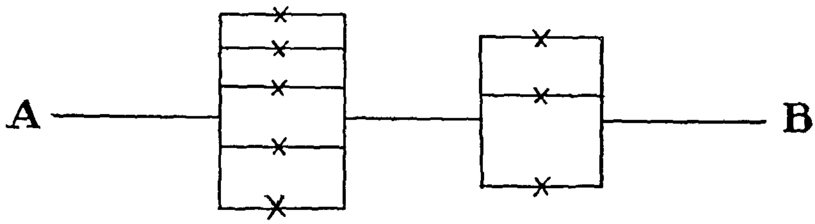

Fig. 2

Veamos cómo podemos hacer funcionar eléctricamente una proposición *a* (fig. 3); *i*, *j* son interruptores y *d* un diodo. Si *i* está cerrado, cualquiera que sea la posición de *j*, pasa corriente en los dos sentidos. Si *i* está abierto y *j* cerrado, pasa la corriente en el sentido

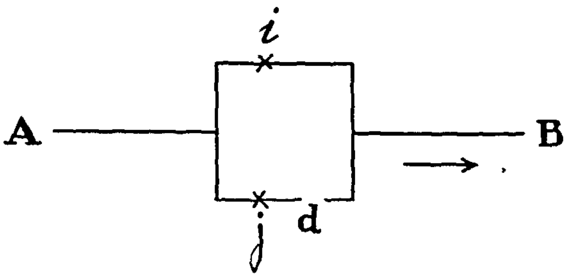

Fig. 3

de la flecha pero no en el contrario. Si *i* y *j* están abiertos no pasa la corriente en ningún sentido.

La negación de *a* equivale a sustituir *i* cerrado por *i* y *j* abiertos, *i* y *j* abierto por *i* cerrado y dejar las cosas como están cuando *i* está abierto y *j* cerrado.

7. Redes biónicas

Llamo circuito biónico a un objeto compuesto de otros simples, llamados: puntos de emisión, absorción, divergencia, convergencia, selectivos y conductores.

Punto de emisión es aquel que emite señales de no importa qué naturaleza, pero susceptibles de medida. Todo circuito biónico tiene un solo punto de emisión, que es el principio del circuito.

Punto de absorción es aquel que absorbe las señales que recibe. Todo circuito biónico tiene un solo punto de absorción, que es el final del circuito.

Conductor es el objeto que enlaza dos puntos y transmite señales de uno a otro.

Punto de divergencia es aquel en que un conductor se ramifica en dos o más, de modo que cada rama transmite la misma medida de señales que llegan al punto.

Punto de convergencia es aquel en que convergen dos o más conductores en uno solo, de modo que éste transmite señales, cuya medida es igual a la máxima de las transmitidas por los conductores convergentes.

Punto selectivo es un objeto situado sobre un conductor, que deja pasar señales en medida igual o inferior a las de las señales recibidas por el punto.

Dos o más puntos selectivos no separados por puntos de divergencia o convergencia se dice que están asociados en serie. Dos o más conductores que enlazan un punto de divergencia y uno de convergencia se dice que están asociados en paralelo.

Un circuito biónico es, pues, isomorfo a un retículo distributivo, siendo los elementos del retículo los homólogos de los puntos selectivos, y las operaciones $\cup$ y $\cap$ las homólogas de las asociaciones en paralelo y en serie. Las matrices de verdad de la Lógica multivalente isomorfa, calculan la medida de las señales absorbidas en el punto de absorción. Es aplicable el cálculo no booleano de los L-polinomios, y todo circuito biónico es equivalente a una forma canónica disyuntiva y a otra conjuntiva, al igual que los circuitos eléctricos (figs. 1 y 2).

Dos o más circuitos biónicos finalizando en el mismo punto de absorción, y sin ningún punto de emisión común, forman una red biónica.

La diferencia esencial entre circuitos eléctricos y biónicos estriba en que los primeros son sistemas de dos alternativas («todo o nada»), mientras que los últimos ofrecen más posibilidades y son más aptos para ensayarlos en la explicación del funcionamiento del sistema nervioso.

Con circuitos y con redes biónicas se pueden explicar fenómenos de umbral, de existencia de un umbral de funcionamiento y otro de ruptura, de modo que si la medida de las señales absorbidas es inferior a un cierto límite no funciona el órgano, y si es superior a un segundo límite se rompe el órgano.

Por otra parte, si las medidas de las señales emitidas por los puntos de emisión son variables aleatorias, y el funcionamiento de los puntos selectivos también lo es, la medida de las señales absorbidas es otra variable aleatoria. Incluso con la reunión de n circuitos booleanos de dos medidas de señales: a_i, 0, con probabilidades p_i, $1-p_i$, para el ísimo circuito, se puede formar una red biónica, en la que las medidas de las señales absorbidas es una variable aleatoria binomial, y si n es grande es prácticamente una variable normal.

Junio de 1964.