Sobre un sistema de geometría descriptiva del hiperespacio

por

Pedro M. González Quijano

En el número 18 de los *Comptes rendus* de la Academia de Ciencias de París, que corresponde a la sesión de 30 de octubre último, publica el académico señor d'Ocagne, el bien conocido autor de la Nomografía, una interesante nota sobre la representación plana del espacio, en la que trata de hacer derivar de un principio único los distintos modos de representación ordinariamente empleados que, por la forma como tradicionalmente se enseñan, parecen proceder de conceptos completamente distintos.

Este principio fundamental es formulado por el señor d'Ocagne en el siguiente párrafo:

«Constituyendo los puntos del espacio un sistema triplemente infinito, es decir, dependiente de tres parámetros, y los puntos del plano un sistema doblemente infinito, no es posible establecer una correspondencia unívoca entre los unos y los otros, ni, por consiguiente, obtener una representación simplemente puntual del espacio. Para realizar una representación plana del espacio, es absolutamente preciso hacer corresponder, de una manera unívoca, a cada punto de este espacio un elemento del plano dependiente de tres parámetros, y esto es teóricamente posible de una infinidad de maneras, pero prácticamente la elección debe limitarse entre elementos de trazado expedito y susceptible de construcciones sencillas, por las cuales puedan deducirse de los elementos representativos de puntos dados del espacio los de otros puntos ligados a los primeros por condiciones geométricas dadas. Esta consideración permite reducir muy sensiblemente el campo de las posibilidades a las que es dado recurrir.»

Esto sentado, el señor d'Ocagne hace observar que cualquier curva plana dependiente de tres parámetros podrá ser escogida para representar un punto del espacio, como hizo ya, por ejemplo, Cousinery, en

1828, con el círculo, llegando al sistema de representación por él denominado *geometría perspectiva*.

Más sencillo, al efecto, que cualquiera curva, será, sin embargo, un par de puntos; pero el par de puntos sobre el plano depende de cuatro parámetros; luego si el principio fundamental ha de quedar satisfecho, será preciso que una condición particular venga a reducirlos a tres. Esta condición podría ser, por ejemplo, que el par de puntos quedara alineado con un punto fijo, lo que se lograría en una doble perspectiva, en la que las dos proyecciones de cada punto deberán encontrarse en línea recta con el punto en que el plano de proyección es cortado por la recta que une los dos puntos de vista.

De esta representación, estudiada ya en general por Baudran en los *Nouvelles Annales*, en 1902, viene a deducir d'Ocagne la mayor parte de los sistemas usuales, que serían en definitiva casos particulares de aquél, y agrega a continuación:

«Los principios aquí aplicados serían susceptibles de extensión a la representación plana de un espacio de cuatro dimensiones. Dependiendo aquí cada punto de cuatro parámetros, deberá ocurrir lo mismo con su elemento representativo en el plano; este elemento podrá ser, pues, un par de puntos, no sujeto esta vez a ninguna condición particular. Habría sólo que establecer un modo de correspondencia unívoca entre este par representativo y el punto del espacio cuadrimensional definido por sus cuatro coordenadas x, y, z, t, lo que puede evidentemente hacerse de muchas maneras.»

Como ejemplo, menciona el señor d'Ocagne, para terminar, el modo de representación del punto (x, y, z, t) por los puntos m' y m, extremos de dos vectores, resultantes respectivamente de (x, y) y de (z, t) y cuyos orígenes se encontrarán: el del primero, en un punto fijo 0, y el del segundo, en el punto m'.

La nota que acabo de resumir, aunque con significación y alcance diferente, no deja de presentar algunas analogías, que nada tienen de extraño, con un artículo publicado por mí en 1894 (1) acerca de la representación plana del hiperespacio, artículo que contiene, a lo que creo, el primer ejemplo de una representación de esta especie. Publicado además en una revista cuyos números de aquella fecha sólo se encuentran hoy con gran dificultad, me parece interesante reproducirlo a continuación:

---

(1) «Representación gráfica de los lugares hipergeométricos». *Madrid Científico*, 30 de diciembre de 1894.

Representación gráfica de los lugares hipergeométricos

La geometría descriptiva enseña los medios de representar sobre el plano un punto cualquiera del espacio; en el sistema que de ordinario se sigue, el punto viene representado por dos proyecciones; pero como el par de puntos del plano encierra cuatro parámetros arbitrarios, mientras que el punto del espacio sólo encierra tres, las dos proyecciones no por drán ser completamente arbitrarias y, en efecto, la recta que las une debe ser perpendicular a la línea de tierra.

Otra sería la condición de compatibilidad si el sistema de representación fuera diferente, pero es fácil asegurar que existe en cualquier sistema. En efecto: sean $x, y, z,$ las coordenadas del punto del espacio; $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, las de los dos puntos que lo representan sobre el plano; estas últimas serán funciones determinadas de las primeras y se tendrá, po- consiguiente:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \varphi_1(x_1, y_1, z_1), \\ \alpha_2 &= \varphi_2(x_1, y_1, z_1), \\ \beta_1 &= \varphi_3(x_1, y_1, z_1), \\ \beta_2 &= \varphi_4(x_1, y_1, z_1). \end{aligned}$$

Eliminando x_1, y_1, z_1, entre estas cuatro ecuaciones, nos quedaría una ecuación de condición entre $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$.

No sucede lo mismo cuando lo que se trata de representar es un punto del hiperespacio; entonces su representación podrá hacerse por un par de puntos completamente arbitrario, porque el punto del hiperespacio y el par de puntos del plano tienen el mismo grado de indeterminación.

Entre los infinitos sistemas que pudieran seguirse, sólo expondremos en este artículo, y a la ligera, el más sencillo de todos, que se deriva inmediatamente del sistema de coordenadas rectangulares.

Sea A $(x_1, y_1, z_1, t_1,)$ el punto que se trata de representar.

Si por este punto se traza un plano paralelo al de las zt, dicho plano cortará al de las xy en un punto a, cuyas coordenadas serán (x_1, y_1, o, o); el punto a será la proyección del A sobre el plano (x, y). Del mismo modo podremos determinar otro punto a' (o, o, z_1, t_1), que será la proyección del A sobre el plano (z, t).

Recíprocamente, si se nos dan las dos proyecciones a y a', el punto A queda determinado, porque podemos conocer inmediatamente sus cuatro coordenadas; luego las dos proyecciones a y a' pueden representar al punto A, y para tenerlas sobre un mismo plano bastará llevar a coincidir con este plano los (x, y) y (z, t).

Para mayor sencillez, haremos que los ejes OY y OX caigan sobre los OZ y OT, respectivamente, de suerte que la parte positiva de los primeros corresponda a la negativa de los segundos (fig. 1.ª). Esto supuesto, si por el punto a trazamos una paralela a OZ, y por el punto a' una paralela a OX, el punto a_1 de intersección de estas dos rectas podrá considerarse como la proyección del punto A sobre el plano (x, z); análo-

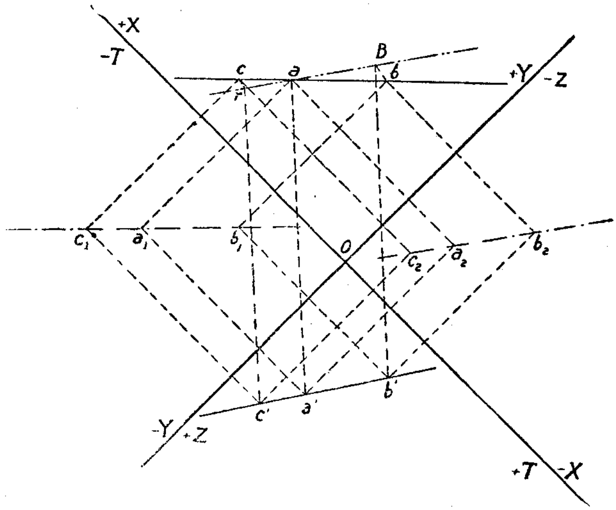


Fig. 1.ª

gamente el punto a_2 podrá ser considerado como la proyección de A sobre (y, t). Estas proyecciones auxiliares nos serán de gran utilidad en lo sucesivo.

Pasemos a representar la recta:

Una recta queda determinada por dos de sus puntos A(a, a') y B(b, b'); todos los demás puntos de la recta se proyectarán sobre las rectas ab y $a'\,b'$, respectivamente; pero la recíproca no es cierta, porque si

$$mx + ny + p = 0,$$
$$m'x + n'y + p' = 0,$$

son las ecuaciones de las dos rectas, todos los puntos del hiperespacio que las satisfagan se proyectarán sobre ab y $a'b'$, y dichas dos ecuaciones representan un plano.

Para determinar un punto de AB, podremos fijar arbitrariamente sobre ab, por ejemplo, la proyección c correspondiente; la otra se encontrará sobre $a'b'$, completamente determinada, y para hallarla observaremos que la proyección de AB sobre *(xz)* será la recta a_1b; luego, si trazamos por c la cc_1 paralela a OZ, y por c_1 la c_1c', paralela a OX, el punto c' será el pedido. Como comprobación, el punto c_2 deberá encontrarse sobre la recta a_2b_2.

De la construcción anterior se deduce que los segmentos ac y ab son proporcionales a los $a'c'$ y $a'b'$; esta observación permite prescindir en e trazado de la recta a_1b_1. En efecto: si por a trazamos la $a\beta$, paralela a $a'b$, y por b' la $b'\beta$, paralela a aa', y unimos el punto β de intersección con el b, bastará, para encontrar el punto c', trazar $c\gamma$ paralela a $b\beta$ y $\gamma c'$ paralela a aa'.

Si los puntos a' y b' coincidiesen, la proyección de la recta AB sobre *(zt)* sería el punto a'; AB sería perpendicular al plano *(zt)* y paralela al *(x).y*

Un plano queda determinado por tres puntos A(a, a'), B(b, b'), C(c, c') (fig. 2.ª), y conocidos éstos se puede encontrar, en general, una de las proyecciones de un punto del plano, si se nos da la otra. En efecto: sea m la proyección que se nos da: por este punto tracemos una recta cualquiera mn, que cortará en l y h a las ab y bc; los puntos L y H del plano se proyectarán sobre *(zt)* en los puntos l' y h', y como la proyección de m sobre *(zt)* deberá encontrarse sobre $l'h'$, el punto m' será el buscado.

Si a', b' y c' estuvieran en línea recta, esta recta sería la proyección sobre *(zt)* del plano ABC, el cual contendría una perpendicular a *(zt)* y paralela a *(xy)*.

Si a', b' y c' coincidiesen, el plano ABC se proyectará en este punto sobre el plano *(zt)*; será perpendicular a este plano y paralelo al *(z, y)*.

Veamos finalmente la representación del espacio.

Cuatro puntos A, B, C, D, determinan un espacio; en cada punto del plano *(xy)* o del *(z, t)* se proyectará, en el caso general, una recta de este espacio; para encontrarla, consideraremos sucesivamente al punto que se nos dé como perteneciente al plano ABC y al ABD, y los dos puntos así obtenidos determinarán la recta que se busca.

Si las proyecciones a', b', c', d', de los cuatro puntos A, B, C, D, están en línea recta, el espacio es perpendicular a *(zt)*.

Si coincidieran los cuatro puntos, no determinarían un espacio, por estar en un mismo plano.

Todas estas representaciones presentan el inconveniente de que las magnitudes absolutas de las figuras aparecen alteradas, salvo casos particularísimos. Este defecto es inherente a cualquier sistema, pues nace de la índole misma de la representación.

Para terminar, resolveremos el siguiente problema, que viene a subsanar el citado defecto:

Dados los puntos (a, a') *y* (b, b'), *hallar la distancia que los separa.*

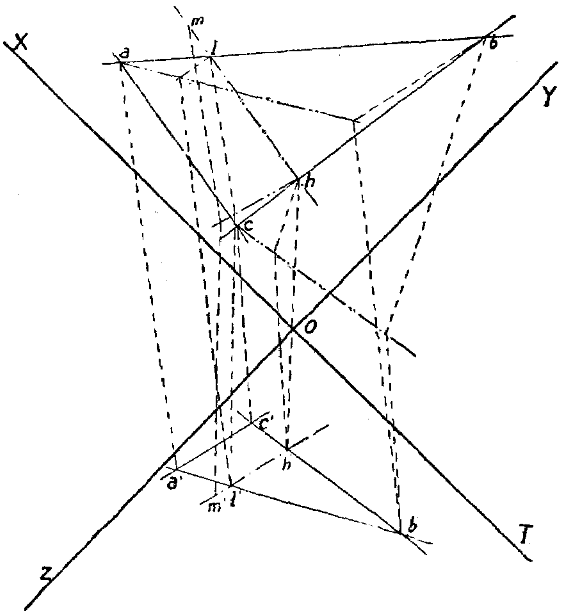


Fig. 2.ª

La distancia entre dos puntos cualesquiera del hiperespacio, sabemos que está representada por la expresión

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (t_1 - t_2)^2};$$

pero se tiene evidentemente

$$\overline{ab} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

$$\overline{a'b'} = \sqrt{(z_1 - z_2)^2 + (t_1 - t_2)^2};$$

luego

$$D = \sqrt{\overline{ab}^2 + \overline{a'b'}^2}.$$

Si, pues, construímos un triángulo rectángulo con ab y $a'\,b'$ como catetos, la hipotenusa de este triángulo será la distancia pedida.

***

El sistema de representación, que ligeramente se reseña en el artículo que acabamos de reproducir, no coincide con el propuesto por el señor D'Ocagne, sin que sea preciso entrar aquí en un examen detenido de sus diferencias esenciales; pero creemos que es, como antes decíamos, el primer ejemplo de representación plana del espacio de cuatro dimensiones; representación que, con mayores desarrollos, aparece ya en la obra de P. H. Schoute: *Mehrdimensionale Geometrie* (Erster Teil. Leipzig, 1902, págs. 84-125), publicada ocho años más tarde.

Con anterioridad a aquella fecha, sólo ha llegado a mi conocimiento un trabajo de Veronese publicado en 1882 en los *Atti del Reale Instituto veneto di scienze, lettere ed arti* (5, VIII, 981-1.025), que lleva por título «Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni»; pero en él sólo se trata de una proyección central del hiperespacio sobre el espacio de tres dimensiones (1).

***

Tanto en el sistema de representación propuesto por D'Ocagne, como en el indicado por mí y desarrollado por Schoute, existen como elementos esenciales en el plano de la representación dos ejes fijos, a los cuales se refieren las coordenadas del par de puntos. Estos elementos fijos, puntos, rectas o curvas de una u otra forma, son inevitables siempre que se trate de representar sobre el plano el espacio de tres dimensiones, puesto que las cuatro coordenadas han de estar ligadas entre sí por una ecuación, tal como

$$f(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2,) = 0,$$

que definirá una familia de curvas con dos parámetros, en correspondencia con los puntos del plano (2); pero al tratar de representar el hiperespacio, puede, en rigor, prescindirse de esta sujeción, dado que el par de puntos puede ser completamente arbitrario.

Sin embargo, si un par de puntos arbitrario sobre un plano representa siempre un espacio de cuatro dimensiones, la naturaleza geométrica de este espacio no quedará con eso sólo definida, sino, a lo sumo, para aquellas propiedades cuyo estudio corresponde al *Análisis situ*. Para una de-

---

(1) Al mismo orden de ideas pertenece el trabajo del mismo autor publicado en igual año en los *Mathematischen Annalen* (tomo XIX, págs. 161 234): «Behandlung der projectivischen Verhältnissen der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip der Proficirens und Schneidens».

(2) Las curvas pueden reducirse a rectas paralelas. Entonces el elemento fijo se reduce a un punto que se aleja al infinito.

terminación completa, sería necesario definir la distancia entre dos puntos, y con ello sería bastante para que todas las demás propiedades pudieran ser conocidas con absoluta precisión.

Ahora bien: si adoptamos como definición de distancia la misma que resulta del sistema de representación expuesto, podremos prescindir de ejes coordenados, y el hiperespacio definido será euclídeo, porque podrá hacerse coincidir con cualquiera de los que resulten de ejes coordenados escogidos arbitrariamente.

A pesar de esta indeterminación de los ejes, no hay que creer que queden igualmente indeterminados todos los elementos del hiperespacio, definido tal como acabamos de hacerlo. Algunos pueden, desde luego, distinguirse, y entre ellos, muy especialmente, el lugar de los puntos cuyas dos proyecciones coinciden, el cual se ve inmediatamente que es un plano que podemos suponer coincidente con el plano de la representación, semejante a él y con una relación de semejanza igual a $\sqrt{2}$.

Este plano, que podemos llamar *fundamental* o *axial*, porque alrededor de él se agrupan simétricamente todos los elementos del hiperespacio representado, podrá servir de elemento de referencia, con relación al cual es evidente que ocupan posiciones iguales los puntos representados por pares de puntos de igual distancia mutua. Todos estos puntos formarán un hipercilindro de eje plano, cuyo radio será la común distancia de dichos puntos al plano fundamental. Esta distancia será, como fácilmente se advierte, la de los puntos del par dividida por $\sqrt{2}$.

La representación de las líneas se reducirá, en general, a una correspondencia entre los puntos de dos líneas situadas en el plano de la representación. Como caso particular, estas dos líneas podrían coincidir o podría también una de ellas reducirse a un punto. Si las dos líneas coinciden, la correspondencia tendrá, en general, puntos dobles, reales o imaginarios, que estarán situados en el plano fundamental, el cual será cortado por la línea representada. Si una de las líneas se reduce a un punto, el plano fundamental no será cortado más que en el caso de que el punto se encuentre sobre la otra línea. Si la correspondencia se establece sobre líneas diferentes, la línea representada no cortará, en general, al plano fundamental, y sólo ocurrirá así cuando los puntos de intersección de las representaciones sean puntos correspondientes consigo mismos.

Una superficie vendrá representada por una correspondencia entre puntos del plano. En este caso, habrá, en general, puntos dobles, que serán los de intersección de la superficie con el plano fundamental. Podrá ocurrir que todos los puntos del plano, considerados como primera o segunda proyección, tengan como correspondientes puntos de una línea fija.

Entonces, a los puntos de esta línea, considerados como proyecciones de nombre contrario, corresponderán en el plano líneas sobre las cuales se encontrarán sus correspondientes; pero, en general, estas líneas no pasarán por aquellos puntos sino en casos singulares, y la intersección con el plano fundamental seguirá compuesta de puntos aislados (1).

También podrá ocurrir que todas estas líneas variables se confundan en una sola, y entonces la superficie vendrá representada por dos líneas primera y segunda, sobre las cuales se podrían escoger arbitrariamente las proyecciones del mismo nombre. Los puntos de intersección de estas líneas serían, evidentemente, entonces los puntos dobles representativos de la intersección de la superficie con el plano fundamental.

Las dos líneas podrían aún confundirse en una sola, de la cual todos los puntos serían puntos dobles, y la intersección entre la superficie y el plano fundamental será ahora esa misma línea.

Los lugares de tres dimensiones vendrán, a su vez, representados por una correspondencia entre los puntos del plano y las curvas de una familia de dos parámetros. Sobre cada curva habrá un punto doble, y la intersección con el plano fundamental será una línea. En el caso particular en que cada punto estuviera sobre su línea correspondiente, todos los puntos serían puntos dobles, y el plano fundamental estaría todo él contenido en el lugar considerado.

***

Si nos limitamos ahora a considerar las líneas rectas, las superficies planas y los espacios euclídeos, veremos en seguida que la recta estará, en general, representada por dos rectas, entre cuyos puntos se establece una cierta correspondencia. La recta, en efecto, vendrá determinada por dos de sus puntos A(a, a') y B(b, b'), y para que un tercer punto C(c, c') pertenezca a ella, será preciso que c esté sobre ab, c', sobre $a'b'$ y que c divida al intervalo ab en la misma relación que c' a $a'b'$. Sólo de este modo quedará satisfecha la condición fundamental para que los tres puntos A, B y C estén en línea recta, a saber:

$$AB + BC + CA = 0.$$

(1) En el caso particular en que la línea fija se reduzca a un punto, la proyección de nombre contrario quedará completamente indeterminada y la superficie se reducirá a un plano, que cortará en ese punto al plano fundamental.

Si para cada punto ($a_1 a_2$) de la recta se determina el punto medio a del segmento $a_1 a_2$, todos estos puntos a se encontrarán sobre una nueva recta ab, que sería la proyección de la recta del hiperespacio sobre el plano fundamental. Conocida esta proyección, fácil sería determinar tan-

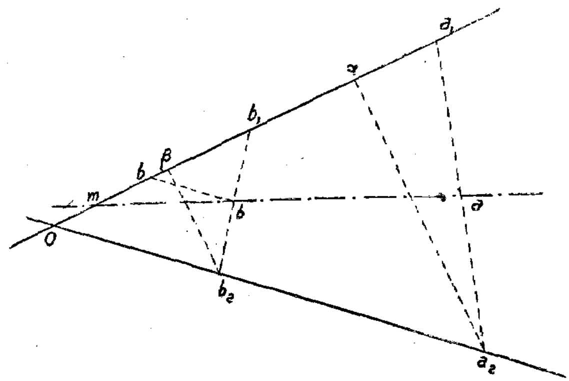


Fig. 3.ª

tos pares de puntos como se quiera pertenecientes a la recta considerada. Si b_1 es uno de los puntos del par, bastará tomar el b' medio del Ob_1 y

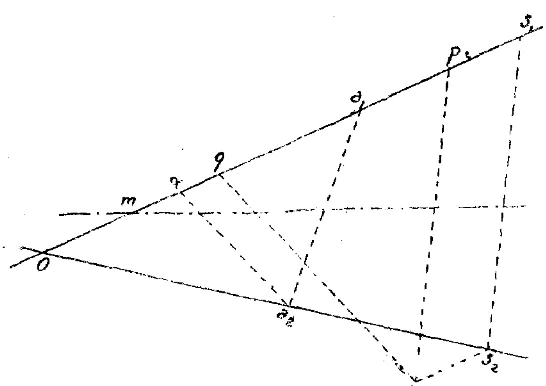


Fig. 4.ª

trazar por él $b'b$ paralela a Oa_2 hasta su encuentro en b con ba; uniendo en seguida b_1 y b, el segundo punto del par será el b_2, intersección de $b_1 b$ y de Oa_2.

En el caso en que la recta ab pase por el punto O, este punto será la intersección de la recta con el plano fundamental; todas las líneas de referencia $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, ..., serán paralelas, y la construcción se simplifica.

Cuando esto no ocurra, si tomamos $\overline{a_1\alpha} = \overline{b_1\beta} = \ldots = 2\overline{Om}$, serán las rectas αa_2, βb_2, ..., las que sean paralelas.

Esta observación permitirá determinar la línea de referencia que sea

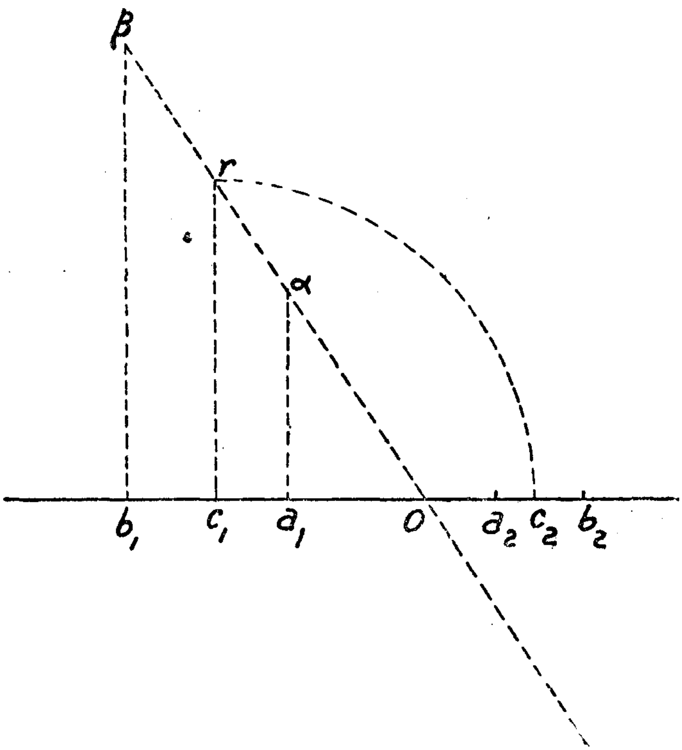


Fig. 5.ª

paralela a un dirección dada, lo que nos será útil en lo sucesivo.

Bastará tomar

$$\overline{pq} = 2\overline{Om},$$

qr paralela a αa_2, pr paralela a la dirección dada, y trazando en seguida rs_2 paralela a pq, el punto $(s_1 s_2)$ será el que cumpla con la condición impuesta.

Si las dos rectas a_1b_1 y a_2b_2 coinciden, la recta correspondiente del hiperespacio cortará, en general, al plano fundamental en un punto, cuya determinación es sencilla.

Trazando, en efecto, por a_1 y b_1 dos rectas paralelas cualesquiera, y tomando sobre ellas, respectivamente,

$$\overline{a_1\alpha} = \overline{a_1a_2} \quad \text{y} \quad \overline{b_1\beta} = \overline{b_1b_2},$$

la recta $\alpha\beta$ cortará a a_1a_2 en el punto O que se buscaba.

En este caso, dado el semipunto c_1, se encontrará c_2 trazando $c_1\gamma$ paralela a $b_1\beta$ y rebatiéndola en seguida sobre b_1b_2 (1).

Otro caso particular notable de representación de la recta será aquel en que todos los primeros semipuntos se confundan en uno solo. Los se-

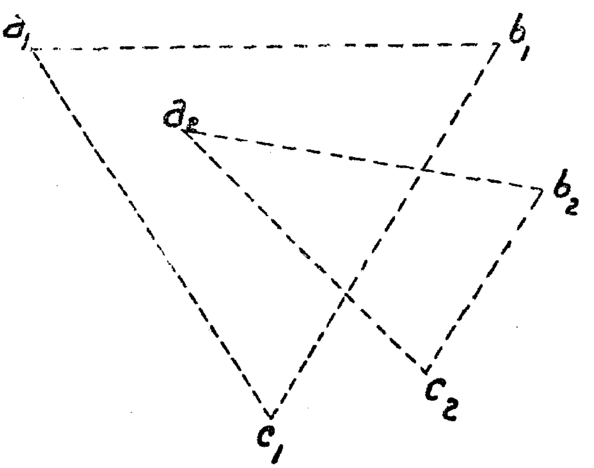


Fig. 6.ª

gundos estarán entonces sobre una recta, donde se los podrá elegir libremente, completándose el par con el semipunto obligado. La recta representada será entonces perpendicular al plano fundamental.

Si pasamos ahora a la representación del plano, nos bastará para determinarle con tres puntos (a_1a_2), (b_1b_2) y (c_1c_2).

El plano así determinado tendrá, en general, un punto común con el plano fundamental. Para encontrarlo, se podrá buscar, respectivamente, sobre b_1c_1 y b_2c_2 el par cuya línea de referencia sea paralela a a_1a_2. Sea $\alpha_1\alpha_2$ este par: las rectas $a_1\alpha_1$ y $a_2\alpha_2$ vendrán precisamente a cortarse en el punto buscado. Al mismo punto se vendría a parar, en general, si entre a_1c_1 y a_2c_2 se buscara la línea de referencia paralela a b_1b_2 o entre a_1b_1

(1) Si $\beta\alpha$ es paralela a $b_1 b_2$, la recta representada será paralela al plano fundamental, y los semipuntos correspondientes a un par, serán equidistantes.

y a_2b_2 la paralela a c_1c_2; pero podrá haber casos en que así no ocurra y entonces los tres puntos estarán sobre una misma recta, según la cual se cortarán el plano supuesto y el plano fundamental. Ambos estarán entonces contenidos en un mismo espacio.

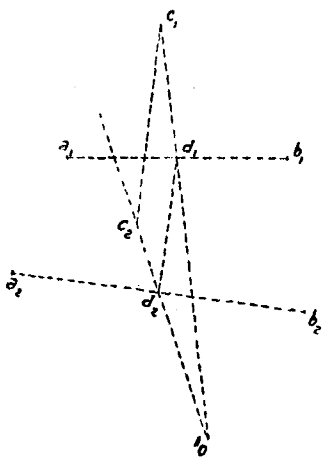


Fig. 7.ª

Si la intersección es un punto, bastarán otros dos puntos para que el plano quede determinado. Si se nos da, en efecto, un semipunto tal como c_1 y lo unimos con O, cortará a a_1b_1 en d_1, al cual corresponderá d_2 sobre a_2b_2, y trazando Od_2 y d_1d_2, la c_1c_2, paralela a d_1d_2, nos dará el semipunto buscado.

Esta misma construcción hace ver que a todo semipunto situado sobre la recta Od_1, corresponde otro semipunto situado sobre la recta Od_2. Tendremos así, entre los rayos del haz que tiene su vértice en O, una correspondencia homográfica en la que habrá, por lo general, dos rayos dobles.

Si en vez de ser un punto la intersección del plano supuesto con el plano fundamental, es una recta mn, bastará otro punto más (a_1a_2) para determinar el plano. Para determinar en este caso el semipunto c_2 que corresponde a c_1, se unirían a_1 y c_1, prolongando la recta a_1c_1 hasta O, y uniendo O con a_2 y trazando c_1c_2 paralela a a_1a_2, quedará resuelto el problema.

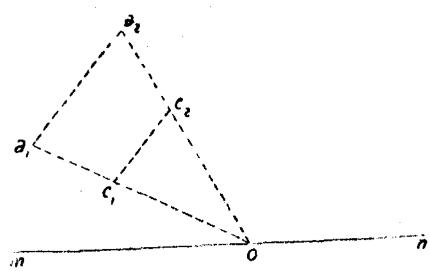


Fig. 8.ª

En posiciones particulares, el plano podrá estar representado por dos rectas R_1 y R_2, sobre las cuales puedan escogerse libremente los semipuntos correspondientes; podrían las dos rectas coincidir y podrían, por último, confundirse todos los semipuntos del mismo nombre en un solo punto, y entonces el de nombre contrario podría escogerse libremente en el plano de la representación, o confundirse cada semipunto con el de nombre contrario, y entonces el plano representado será el plano fundamental. En el primero de estos casos, el plano cortará al plano fundamental en el punto de intersección de las rectas R_1 y R_2; si las dos rectas fueran paralelas, los dos planos tendrán un punto del infinito común. En el

Año I. — Número, 20 céntimos—MADRID Y PROVINCIAS—Número, 20 céntimos. — Núm. 11.

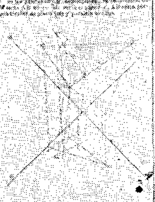
MADRID CIENTÍFICO

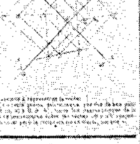
REVISTA GENERAL DE LA SEMANA

Domingo 30 Diciembre 1894.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

de los lugares biergeométricos.





LA CATALISIS

DESCARTES

CULTURA CIENTÍFICA EN ESPAÑA

Don Aciscio Fernández Vallín.

Domingo 30 Diciembre 1894.

REPRESENTACION GRÁFICA de los lugares hipergeométricos.

La Geometría descriptiva enseña los medios de representar sobre el plano un punto cualquiera del espacio; en el sistema que de ordinario se sigue, el punto viene representado por dos proyecciones; pero como el par de puntos del plano encierra cuatro parámetros arbitrarios, mientras que el punto del espacio sólo encierra tres, las dos proyecciones no podrán ser completamente arbitrarias, y, en efecto, la recta que las une debe ser perpendicular á la línea de tierra.

Otra sería la condición de compatibilidad si el sistema de representación fuera diferente, pero se puede asegurar que existe en cualquier sistema. En efecto, sean x, y, z, las coordenadas del punto del espacio, x_1, y_1 [illegible] de los dos puntos que le representan sobre el plano; estas últimas serán funciones determinadas de las primeras, y se tendrá por consiguiente:

[illegible]

Eliminando x, y, z, entre estas cuatro ecuaciones, nos quedará una ecuación de condición entre x_1, y_1, x_2, y_2.

No sucede lo mismo cuando se trata de representar el punto del hiperespacio; entonces, su representación podrá hacerse por un par de puntos completamente arbitrario, porque el punto del hiperespacio y el par de puntos del plano tienen el mismo grado de indeterminación.

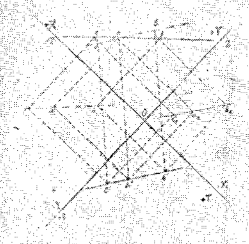
Entre los infinitos sistemas que pudieran seguirse sólo expondremos en este artículo, y á la ligera, el que resulta de [illegible] del sistema de coordenadas rectangulares.

Sea A (x, y, z, t) el punto que se trata de representar.

Si por este punto se traza un plano paralelo al de los $z t$, este plano cortará al de los $x y$ en un punto a, cuyas coordenadas serán (x, y); el punto a será la proyección de A sobre el plano $x y$. Del mismo modo podremos determinar el punto a' (z, t), que será la proyección de A sobre el plano (z, t).

Recíprocamente, si se dan las dos proyecciones a y a', el punto A quedará determinado, porque podemos conocer [illegible] sus cuatro coordenadas. Luego las dos proyecciones a y a' pueden hacer [illegible] al punto A, y para tenerlas sobre un mismo plano, bastará llevar á coincidir con este plano [illegible]

Para mayor sencillez, hay que [illegible] ejes OX y OX, caigan sobre los OZ y OT respectivamente, de modo que la parte positiva de los primeros [illegible] negativa de los segundos (fig. 1.ª). Esto supuesto, si por el punto a trazamos una paralela á OZ, y por el punto a' una paralela á OX, el punto a_1 de intersección de estas dos rectas [illegible] la proyección del punto A sobre el plano [illegible] el punto a_2 [illegible] la proyección de A sobre (y, t). Estos [illegible] nos serán de gran utilidad en lo sucesivo.



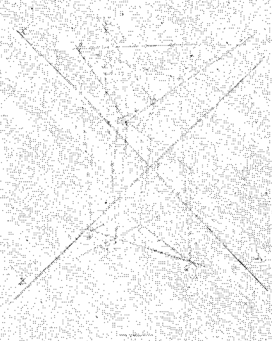
Pasemos á representar la recta.

La recta queda determinada por dos de sus puntos A (a, a') y B (b, b'); todos los demás puntos de la recta se proyectarán sobre las rectas ab y $a'b'$ respectivamente; pero la recíproca no es cierta, porque si [illegible] con las ecuaciones de las dos rectas, todos los puntos del hiperespacio [illegible] se proyectarán sobre las [illegible] y de las dos ecuaciones representan un plano.

Para determinar un punto de AB, podemos tomar arbitrariamente sobre ab, por ejemplo, la proyección c [illegible] se encontrará sobre $a'b'$ completamente determinada, y para hallarla observaremos que la proyección de AB sobre [illegible] es la recta [illegible] luego si trazamos por c la [illegible] paralela á OZ, y por [illegible] paralela á OX, el punto [illegible] será el pedido. Como comprobación, el punto c_1 deberá encontrarse sobre la recta $a_1 b_1$.

De la construcción anterior se deduce que los segmentos ac y cb son proporcionales á los $a'c'$ y $c'b'$; esta observación permite prescindir en el trazado de la recta $a_1 b_1$. En efecto, si por a trazamos la [illegible] paralela á ab, y por b' la [illegible] paralela á $a'b'$, y unimos el punto [illegible] de intersección con [illegible] bastará para encontrar el punto c' trazar [illegible] paralela á [illegible] y cc' paralela á [illegible]

Si los puntos a y b [illegible] la proyección de la recta AB sobre [illegible] sería el punto a; AB sería perpendicular al plano (xy) y paralela al (zt).



Un plano queda determinado por tres puntos A (a, a'), B (b, b'), C (c, c') [illegible] no puede ser arbitrario en general, una de las proyecciones de un punto del plano, [illegible] En efecto, sea a la proyección que se nos da, por este punto trazaremos una recta cualquiera que corte en [illegible] á las [illegible] los puntos [illegible] del plano se proyectarán sobre [illegible] en los puntos [illegible] y como el [illegible] deberá encontrarse sobre [illegible] el punto [illegible] será el buscado.

Si a, b y c están en línea recta, esta recta será la proyección sobre (xy) del plano ABC, el cual será entonces [illegible] perpendicular á (xy) y paralelo á (zt).

Si a', b' y c' coincidiesen, el plano ABC se proyectaría en este punto sobre el plano [illegible] será perpendicular á este plano y paralelo al [illegible]

Vamos finalmente á la representación del espacio.

Cuatro puntos A, B, C, D, determinan un espacio; en cada punto del plano [illegible] se proyectará en el caso general una recta de este espacio; para encontrarla consideraremos sucesivamente el punto que se nos dé, como perteneciente al plano ABC y al ABD, y los dos puntos así obtenidos determinarán la recta que se busca.

Si las proyecciones a' b' c' d' de los cuatro puntos A, B, C, D, están en línea recta, el espacio es perpendicular á (zt).

Si coincidieran, los cuatro puntos no determinarían un espacio, por estar en un mismo plano.

Todas estas representaciones presentan el inconveniente de que las magnitudes absolutas de las figuras aparecen alteradas, salvo casos particularísimos. Este defecto es inherente á cualquier sistema, pues nace de la índole misma de la representación.

Para terminar, resolveremos el siguiente problema, que viene á resumir el estudio de [illegible]

Dados los puntos [illegible] *hallar la distancia que los* [illegible]

[illegible]

Si, pues, [illegible] hipotenusa de [illegible] será la distancia pedida.

[illegible] Quiroga

Ingeniero de Caminos.

LA CASUALIDAD

Existen en todos los idiomas multitud de palabras cuya significación se siente mejor que se explica. Tal ocurre con el vocablo *casualidad*.

Un individuo lanza una moneda al aire. La moneda, al caer, rebota en el pavimento, salta de nuevo, rueda á veces á considerable distancia, y gana finalmente su posición definitiva de reposo. Ha motivado que se [illegible] un conjunto de causas desconocidas, tales como la impulsión de la mano que lanzó la moneda, el metal que constituye [illegible] elasticidad é inclinación del pavimento, y otras varias causas que [illegible] detallar. [illegible] la moneda indiferente á presentar cara ó cruz, la casualidad es quien determina la posición [illegible] de equilibrio. No entremos en [illegible] más ó menos metafísicas acerca del fenómeno apellidado, y vengamos á lo que en la práctica sucede. La práctica enseña que las caras [illegible] con igual frecuencia que las cruces. [illegible] los dos resultados, cara y cruz, son igualmente posibles en el [illegible] [illegible] en favor de [illegible] es un juego absolutamente equitativo. La [illegible] *matemática* de entrambos jugadores es absolutamente idéntica.

Basado en el juego referido [illegible] supongamos que en vez de operar con una sola moneda se opera con dos, [illegible] los jugadores. El [illegible] Juan, apuesta por las caras; el segundo, Pedro, por las cruces; el tercero, Antonio, por cara y cruz. Se arrojan las dos monedas [illegible] el juego equitativo si los tres jugadores arriesgan la misma postura? ¿Hay la misma probabilidad de que las dos monedas [illegible] de cara, las dos de cruz, ó una de cara y otra de cruz [illegible]

En estos términos el problema, la cuestión es por extremo sencilla. Todo se reduce á [illegible] las combinaciones posibles entre las caras y las cruces de las dos monedas. Puede ocurrir que la moneda A presente cara y la B cruz; que A dé cruz y B cara; que A y B den caras, y que ambas den cruces. Es, pues, probable que de cuatro partidas Juan gane una, Pedro otra, y Antonio dos. Este último, si el juego ha de ser equitativo, ha de arriesgar doble cantidad que los anteriores. Suponiendo [illegible] y arriesgase el mismo [illegible] que los otros, bien pronto quedaría [illegible] si rodara, por ejemplo, una moneda [illegible] de los jugadores lejos del alcance de [illegible] vista, estos [illegible] en primer lugar [illegible] en la moneda que cayó á los pies.

Si ésta dejaba ver [illegible] Pedro, que apostaba por las cruces, se despediría de su dinero, mientras Juan y Antonio buscaban [illegible] la otra moneda la ganancia. Si la primera [illegible] Juan [illegible] igualmente de su dinero [illegible] Pedro y Antonio [illegible] Antonio quedaría siempre [illegible] segundo caso, los dos planos se cortarán según una recta; córtanse según un punto en el tercero, y, por último, en el cuarto coinciden en toda su extensión.

Por último, si consideramos un espacio, necesitamos cuatro puntos para determinarle: tres de ellos determinarán un plano, cuya intersección con el plano fundamental se obtendrá sin dificultad en la forma ya explicada. Prescindiendo de uno de los puntos y combinando los otros dos con el restante, se tendrá otro plano, cuya intersección con el plano funda-

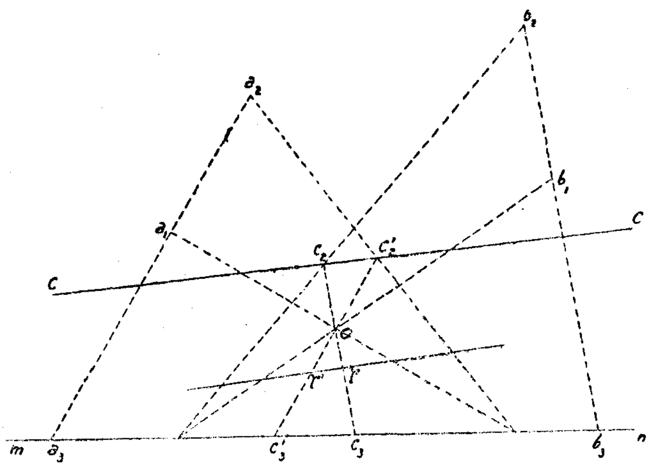


Fig. 9.ª

mental podrá igualmente determinarse. La recta que una los dos puntos así obtenidos, será la intersección del espacio con el plano fundamental; y bastarán ya otros dos puntos para que el espacio quede determinado.

Con estos datos, si se da el semipunto c_1 (1), se podrá determinar, para el plano definido por mn y (a_1a_2), el semipunto c_2, y para el plano definido por mn y (b_1b_2), el semipunto c'_2: la recta cc contendrá todos los segundos semipuntos del espacio que tienen a c_1 como primer semipunto.

Cuando el semipunto c_1 esté sobre la recta mn, la construcción anterior no es ya aplicable, porque los puntos c_2 y c'_2 se confunden con c_1; pero es fácil convencerse de que la recta cc no queda en este caso indeterminada. En efecto: cualquiera que sea el semipunto c_1, la recta cc, que contiene los c_2, tendrá siempre la misma dirección, pues si prolongamos c_2c_1 y c'_2c_1 hasta c_3 y c'_3, respectivamente, y lo mismo a_1a_2 y b_1b_2 hasta a_3 y b_3, se tendrá:

(1) En la figura el punto c_1 está señalado con una o.

$$\frac{c_1c'_2}{c_1c'_3}=\frac{a_1a_2}{a_1a_3},\quad \frac{c_1c_2}{c_1c_3}=\frac{b_1b_2}{b_1b_3}.$$

La recta correspondiente a cada semipunto situado sobre mn será, pues, la que, siendo paralela a cc, pase por dicho semipunto.

Puesto que a cada semipunto corresponde una recta y que todas estas rectas son paralelas, será preciso que, a cada recta cc, correspondan infinitos semipuntos. Todos ellos, sin embargo, estarán en una línea recta, que pasará por el punto de intersección de cc y mn. En efecto: se ve también inmediatamente en la figura que la relación de las distancias de c_1 a cc y a mn es constante.

En vez de tomar arbitrario un semipunto c_1, hubiéramos podido partir de un semipunto c_2, y las construcciones a que habríamos llegado serían en un todo análogas: las paralelas correspondientes tendrían, sin embargo, en general, otra dirección. Para determinarla, bastaría dividir los intervalos c_1c_3 y $c_1c'_3$ por puntos interiores $\gamma_1\gamma'_1$ tales que

$$\frac{\gamma c_1}{\gamma c_3}=\frac{c_2c_1}{c_1c_3},\quad \frac{\gamma' c_1}{\gamma' c'_3}=\frac{c_1c'_2}{c_1c'_3}.$$

Como caso particular, puede ocurrir que la recta mn se aleje al infini-

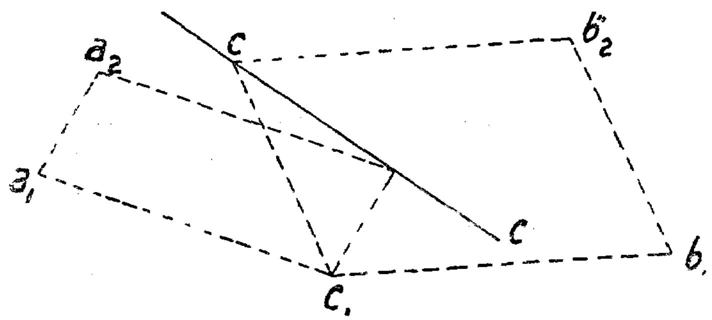


Fig. 10

to. El espacio será entonces paralelo al plano fundamental, y las construcciones anteriores se simplificarán considerablemente, como podrá verse en la figura. La recta cc tendrá la dirección de la resultante de los vectores a_1a_2 y b_2b_1. Igual dirección sería la encontrada, si escogiéramos arbitrariamente el semipunto c_2.

Además, cualquiera que sea el punto c_1, su distancia a su recta cc correspondiente es siempre ia misma; luego, en definitiva, el espacio en cuestión puede considerarse constituído por pares de rectas paralelas y de equidistancia constante. Cada uno de estos pares representará un plano, y todos estos planos serán paralelos entre sí y tendrán un punto en el infinito con el plano fundamental.

Puede ocurrir, por último, que el plano fundamental esté totalmente incluído en el espacio que se considera. Entonces bastará un solo punto para acabar de determinar el espacio. Sea, por ejemplo, a_1a_2. Si se nos da entonces un semipunto c_1, como se podrá considerar un punto cualquiera de la recta a_1c_1 como punto del plano fundamental, la recta c_1c_2 cumplirá con la condición de ser paralela a a_1a_2. Se ve, pues, que el conjunto de todos los pares cuyas líneas de referencia son paralelas a una dirección dada, representa un espacio euclídeo de tres dimensiones, y este modo de representación viene a ser, en definitiva, una especie de representación de Monge, aunque sin línea de tierra.

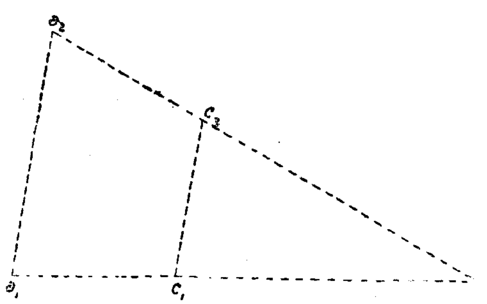


Fig. 11

Los principios que han servido de base para la representación bosquejada del espacio euclídeo de cuatro dimensiones serían igualmente aplicables a un número de dimensiones cualquiera. Cuando este número sea par e igual a $2n$, la representación se compondrá de n puntos completamente arbitrarios: cuando se trate de un espacio de $2n+1$ dimensiones, cada punto vendrá representado por $n+1$; pero de ellos, sólo n serán completamente arbitrarios; el restante deberá encontrarse sobre una cierta recta determinada por los otros n.

De manera análoga se podrían representar también los espacios no euclídeos (riemannianos o lobachefskianos) de cualquier número de dimensiones. Sólo habría que cambiar la definición de la distancia. Sobre un mismo espacio euclidiano se puede representar otro no euclídeo, conservando las rectas como rectas, los planos como planos, etc., con tal de escoger para distancia una cierta función de la expresión

$$\frac{2R^2 + (a^2 + b^2 - d^2)}{\sqrt{(R^2 \pm a^2)(R^2 \pm b^2)}},$$

en la que a y b son las distancias a un punto fijo del espacio euclídeo de los puntos del mismo espacio representantes de los puntos dados del espacio no euclídeo, d la distancia euclídea de los dos primeros puntos y R la constante característica del espacio que se considera.

El signo $+$ corresponderá al espacio de Riemann, el signo $-$ al de Lobachefski: en el primer caso, la representación es ilimitada, aunque el espacio es limitado; en el segundo, la representación es limitada e ilimitado el espacio.

Tomando el punto fijo O en el plano fundamental, que será en todos los casos el que contiene los puntos, cuyos representantes se confunden en uno solo, y llamando

$$a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n,$$
$$b_1, b_2, b_3 \ldots, b_n,$$

a los representantes de los puntos A y B, se tendría

$$a^2 = \overline{Oa}_1^2 + \overline{Oa}_2^2 + \overline{Oa}_3^2 + \ldots + \overline{Oa}_n^2,$$
$$b^2 = \overline{Ob}_1^2 + \overline{Ob}_2^2 + \overline{Ob}_3^2 + \ldots + Ob_n,$$
$$d^2 = \overline{a_1b}_1^2 + \overline{a_2b}_2^2 + \overline{a_3b}_3^2 + \ldots + a_nb_n,$$

y bastará sustituir estos valores en la expresión anterior, para que la distancia quede completamente determinada.

Otras expresiones de la distancia podrían permitir representaciones no menos interesantes (1); pero entrar en el estudio detallado de unas y otras nos llevaría demasiado lejos, y, desde luego, mucho más allá de los límites que nos habíamos impuesto para esta nota.

---

(1) Pueden consultarse mis conferencias: *El postulado de Euclides y las geometrías no euclídeas*. Revista de Obras públicas, 1920. números 2327, 2328, 2334 y 2336.