CIENCIAS EXACTAS.

RESOLUCION GENERAL DE LAS ECUACIONES NUMÉRICAS.

(Conclusion.)

CAPITULO VIII.

Complemento de los anteriores.—Notas y adiciones á la doctrina matemática en ellos expuesta.

C.—*Sobre la determinacion de las raices imaginarias.*

1.—Si el procedimiento de Gräffe para determinar las raices *reales* de una ecuacion aventaja en brevedad y sencillez á todos los demas procedimientos conocidos, clásicos en cierto modo, y más comunmente empleados con igual objeto, el mismo método, ampliado y perfeccionado por Encke, es el único que, por regla general, y sin tropezar con enormes dificultades de ejecucion, puede practicarse cuando de la investigacion de las raices *imaginarias* se trata.

Para hallar estas raices, tan *reales* como las con este nombre designadas, y no menos importantes, propónese en casi todos los tratados de Algebra, como preferible á cualquiera otro, el siguiente artificio, basado en la ingeniosa teoría y complicadísima práctica de la *eliminacion:* en la doctrina que ménos atractivo suele presentar cuando por vez primera se estudia aquella parte principalísima de la ciencia matemática.

En la ecuacion $f(x)=0$, se dice, póngase por x la doble expresion $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$; y nos resultará esta otra:

$$f(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) = \varphi(\alpha, \beta) \pm \beta\sqrt{-1} \,.\, \psi(\alpha, \beta) = 0$$

De la cual se desprenden inevitablemente estas dos:

$$\varphi(\alpha, \beta) = f(\alpha) - \frac{\beta^2}{2} f''(\alpha) + \frac{\beta^4}{2.3.4} f^{\mathrm{IV}}(\alpha) - \ldots\ldots = 0; \text{ y}$$

$$\psi(\alpha, \beta) = f'(\alpha) - \frac{\beta^2}{2.3} f'''(\alpha) + \frac{\beta^4}{2.3.4.5} f^{\mathrm{V}}(\alpha) - \ldots\ldots = 0.$$

Y los valores *reales* de α y de β, que simultáneamente satisfagan á estas dos ecuaciones, servirán para componer otros tantos pares de valores conjugados de x, *imaginarios*, y correspondientes á la ecuacion primitiva.

2.—En tan breves términos formulado, no parece que pueda haber otro método de investigacion más sencillo. Para penetrar la malicia que encierra, ó las dificultades de cálculo que le son inherentes, apliquémosle al ejemplo propuesto por Serret, en la pág. 367 del tomo I de su *Curso de Algebra superior:* ejemplo indudablemente rebuscado entre los más inocentes y sencillos: en su especie, casi pueril.

«Sea, pues, la ecuacion

$$x^4 - x + 1 = 0,$$

cuyas cuatro raices son imaginarias (*).

(*) Antes de afirmarlo, sería menester averiguarlo. Cuando la determinacion de las raices se verifica por el método de Encke, semejante investigacion preliminar es de todo punto innecesaria y excusada.

Si por x sustituimos en ella la expresion $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$ nos resultarán estas otras dos

$$(\beta^2 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2(\beta^2 - \alpha^2) - (4\alpha^4 + \alpha - 1) = 0; \text{ y}$$

$$\beta(4\alpha(\beta^2 - \alpha^2) + 1) = 0.$$

Prescindiendo en la segunda del factor β, dedúcese que:

$$\beta^2 - \alpha^2 = -\frac{1}{4\alpha}.$$

Y, por sustitucion del valor de $\beta^2 - \alpha^2$ en la anterior, conviértese ésta en la que sigue:

$$64\alpha^6 - 16\alpha^2 - 1 = 0.$$

Ó, suponiendo que $\alpha = {}^1/_2\sqrt{\alpha_1}$, en esta otra:

$$\alpha_1{}^3 - 4\alpha_1 - 1 = 0.$$

Para resolver esta última ecuacion, atribuyamos á la incógnita α_1 diversos valores particulares, calculemos los correspondientes del primer miembro, y formemos el adjunto cuadro:

α_1	$\alpha_1{}^3 - 4\alpha_1 - 1$
2	-1
3	$+16$
2.1	-0.139
2.2	$+0.848$
2.11	-0.046069
2.12	$+0.048128$

Del cual se deduce que la *única* raiz positiva, α_1, se halla comprendida entre los dos últimos números ensayados, 2.11 y 2.12.

Corrigiendo estos valores por el método ó regla de aproximacion de Newton, hallaríamos que la misma raiz está tambien comprendida entre los números, mucho ménos discrepantes uno de otro, 2.1149 y 2.1150.

Y, aplicando de nuevo el mismo procedimiento de correccion á estos últimos números, nos resultaría, aproximada la raiz hasta la 8.ª cifra decimal, que $\alpha_1 = 2.11490754$.

De este valor de α_1, por la fórmula $\alpha = {}^1/_2 \sqrt{\alpha_1}$, se infiere luégo que $\alpha = \pm\, 0.72713603$.

Y, con el doble valor de α, sustituido en la ecuacion que precede á la final, conclúyese tambien que:

$$\beta = \pm\, 0.43001425; \quad \text{y} \quad \beta = \pm\, 0.93409929.$$

Los cuatro valores de x, de dos en dos *conjugados*, serán, pues, éstos en conclusion:

$$x = +\, 0.72713603 \pm 0.43001425 \sqrt{-1}; \quad \text{y}$$

$$x = -\, 0.72713603 \pm 0.93409929 \sqrt{-1}.»$$

3.—Así, con leves variantes de forma, se expresa Serret, en la obra y página, poco ántes, mencionadas.

Pues bien: sin admitir como demostrado por de pronto lo que no lo está todavía en realidad; sin apelar, para verificar la eliminacion, á recursos ó artificios muy ingeniosos, sí, pero que no á todo el mundo le ocurren siempre, ni es posible que muchas veces le ocurran á nadie; sin perder el tiempo en tanteos, infructuosos y arbitrarios con suma frecuencia; y hasta sin acordarse para nada del método de aproximacion de Newton,—por la simple y como rutinaria aplicacion del método *general* en la precedente Memoria explicado, en cosa de *veinte minutos*, se resolverá la ecuacion propuesta, conforme á continuacion se indica:

$$(2^0)\quad x^4 - x + 1 = 0$$

$$(2^1)\quad x^4 + 2x^2 + x + 1 = 0$$

$$(2^2)\quad x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$(2^3)\quad x^4 + 4x^3 + 14x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$(2^4)\quad x^4 - 12x^3 + 222x^2 - 19x + 1 = 0$$

$$(2^5)\quad x^4 - 300x^3 + 48830x^2 - 83x + 1 = 0$$

$$(2^6)\quad x^4 - 7660x^3 + 2384319102x^2 - 90771x + 1 = 0.$$

Y hecho esto, de la última ecuacion, transformada de la (2^0), inmediatamente se deduce que

$$2^6 \log.g_0^2 \quad = 9.3773644; \quad \text{y} \quad g_0^2 = 1.4012685$$

$$2^6 \log.g_0^2\, g_1^2 = 0.0000000; \quad \text{y} \quad g_1^2 = 0.7136391$$

Y, de la primitiva, que

$$f_0 + f_1 = 0; \quad \text{y} \quad g_0^2 f_1 + g_1^2 f_0 = -1$$
$$f_0 = -f_1 = 1.4542719.$$

La ecuacion (2^0) se resuelve, en consecuencia, en las dos siguientes de *segundo grado:*

$$x^2 + 1.4542719\,x + 1.4012685 = 0; \quad \text{y}$$

$$x^2 - 1.4542719\,x + 0.7136391 = 0.$$

Cuyas raices son las mismas, poco ántes expresas, aunque aproximadas ahora, no hasta la 8.ª, sino solamente hasta la 7.ª cifra decimal. Pero hubiera bastado cambiar de tablas de logaritmos, y efectuar los anteriores cálculos con logaritmos de *ocho* ó *diez* cifras decimales, para obtener los valores de aquellas raices, con aproximacion á la verdad igual ó mayor que la obtenida por Serret. Lo cual ni vale casi la pena de mencionarse, ni en lo más mínimo invalida el mérito del segundo *método* de resolucion (*).

4.—Al procedimiento primero y más comun para determinar las raices imaginarias agregó Lagrange una modificacion, mucho más importante y curiosa en teoría que útil en la práctica.

Las dos ecuaciones $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ y $\psi(\alpha, \beta) = 0$ subsistirán siempre con el carácter de fundamentales; pero si á ellas se agrega la transformada de la primitiva, cuyas raices sean los *cuadrados de las diferencias* de las mismas raices que aquella ecuacion, $f(x) = 0$, contiene, los valores *reales* de β se deducirán resolviendo esta tercera ecuacion, y los de α buscando, por el procedimiento del *m. c. d.*, las raices comunes á las dos anteriores, despues de poner en ambas por β los valores que de la tercera se hubieren desprendido.

De la ecuacion de los *cuadrados de las diferencias* se deducirán los valores de β investigando los de las raices reales *negativas* que esta ecuacion contenga: porque á cada par de raices imaginarias de la primitiva, $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, corresponde una diferencia igual á $2\beta\sqrt{-1}$, cuyo *cuadrado* lo es á $-4\beta^2$, raiz de la transformada. Divididos, pues, por 4 los valores absolutos de las raices negativas de esta última ecua-

---

(*) Más rápida todavía que la resolucion de la ecuacion propuesta por Serret es la de aquella otra, citada en los preliminares de esta MEMORIA, y que Catalan propone como ejemplo de los ensayos infructuosos á que puede dar motivo la aplicacion irreflexiva del método para aislar las raices, denominado de las *diferencias:* método excelente, por sí solo, para perder ó malgastar el tiempo y la paciencia muchas veces.—La ecuacion á que aludimos es la siguiente:

$$(2^0) \quad x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Cuya transformada final es ésta:

$$(2^4) \quad x^4 - 20610\,x^3 + 106233747\,x^2 - 4738\,x + 1 = 0.$$

De la cual, por los mismos pasos que en el texto, se concluye que la (2^0) equivale á estas otras dos ecuaciones de segundo grado:

$$x^2 + 0.6994922\,x + 3.1742518 = 0; \quad \text{y}$$
$$x^2 - 0.6994922\,x + 0.3150349 = 0.$$

cion, bastará extraer la raiz cuadrada de los cocientes respectivos para hallar los de β, que, sucesivamente, deben sustituirse en las ecuaciones $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ y $\psi(\alpha, \beta) = 0$, para concluir los de α que les corresponden.

5.—Si para hallar las raices reales de la ecuacion primitiva, $f(x)=0$, fuese menester, como Lagrange en principio suponia, formar la ecuacion de los cuadrados de las diferencias de todas sus raices, indudablemente podría utilizarse la segunda ecuacion para determinar por el procedimiento referido las raices imaginarias, y completar así la solucion de la ecuacion propuesta. Pero como la formacion de la ecuacion auxiliar citada pide una *eliminacion* muy penosa de la incógnita x entre estas dos ecuaciones

$$f(x) = 0, \text{ y } f'(x) + \frac{y}{2} f''(x) + \frac{y^2}{2 \, . \, 3} f'''(x) + \ldots\ldots = 0,$$

en la segunda de las cuales representa la y la *diferencia* de dos valores cualesquiera de x, ó de dos raices de $f(x) = 0$, sólo en casos excepcionales muy sencillos se efectúa este trabajo preliminar, y sólo entonces podrá utilizarse la ingeniosa observacion hecha, y modificacion consiguiente en el método general, propuesta por Lagrange.

Y áun entónces habrá que proceder con cautela para determinar los verdaderos valores de β. Porque, si bien es cierto que á cada par de raices imaginarias conjugadas de la ecuacion $f(x) = 0$ corresponde en la de los cuadrados de las diferencias de sus raices una raiz real negativa, no siempre la proposicion recíproca es igualmente cierta, ó no siempre á cada raiz negativa de la segunda ecuacion corresponde un par de imaginarias en la primera. Por ejemplo: supongamos que la ecuacion $f(x) = 0$ posea, entre otras, tres raices: una real, α; y dos imaginarias, $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$. En la ecuacion de los cuadrados de las diferencias de sus raices existirían entónces estas tres raices, reales y negativas: $-4\beta^2$, $-\beta^2$ y $-\beta^2$: de las cuales tan sólo la primera corresponde al par imaginario que se trata de determinar. Resulta, pues, que á las dificultades de formacion y resolucion de la ecuacion auxiliar, derivada de la primitiva, hay que agregar la de discernir cuáles son las raices negativas de la una en correspondencia clara y directa con las imaginarias de la otra. Y, por lo tanto, lo que alguna vez pudiera ser ó considerarse como simplificacion del método general de análisis de la ecuacion propuesta, tambien pudiera alguna otra vez convertirse en causa de complicacion, ó de fastidiosa incertidumbre y de ambigüedad en los resultados obtenidos.

6.—Ingeniosa y digna de conocerse es la modificacion introducida en el método de Lagrange, para determinar las raices imaginarias de una ecuacion, por el matemático inglés W. Rutherford. Expliquémosla, valiéndonos para ello de un ejemplo muy sencillo, ó razonando en el caso ménos complicado que puede presentarse.

Consideremos, pues, la ecuacion general de tercer grado,

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0,$$

cuyas raices representaremos por r, una, y por $\alpha \pm \sqrt{-\gamma}$, las otras dos.

Si estas dos raices son imaginarias efectivamente, γ deberá considerarse como cantidad *positiva;* pero, si fuesen reales, bastaria suponer que el signo propio de γ era el *negativo.* De cualquier especie que sean, no prejuzgando nada sobre el signo de γ, siempre podrán representarse ambas raices en la forma referida.

De la ecuacion propuesta deduzcamos ahora otra, cuyas raices sean las de la primitiva, disminuidas de la cantidad α. Representando por y la nueva incógnita, la transformada de la primera ecuacion será la que sigue:

$$y^3 + (3\alpha + a) y^2 + (3\alpha^2 + 2a\alpha + b) y + (\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0.$$

Mas si las raices de la ecuacion propuesta supusimos ántes que eran r y $\alpha \pm \sqrt{-\gamma}$, las de su transformada deberán ser estas otras: $(r - \alpha)$ y $\pm \sqrt{-\gamma}$. Luego la segunda ecuacion equivaldrá á esta otra:

$$y^3 + (\alpha - r) y^2 + \gamma y + \gamma (\alpha - r) = 0.$$

De donde se deduce que

$$3\alpha + a = \alpha - r;$$

$$3\alpha^2 + 2a\alpha + b = \gamma; \text{ y}$$

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = \gamma(\alpha - r).$$

Ó, eliminando la γ entre las dos últimas ecuaciones de condicion, que

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + {}^1/_4(a^2 + b)\alpha + {}^1/_8(ab - c) = 0.$$

Y de esta ecuacion deduciremos el valor *real* de α; que nos servirá despues para hallar el de γ con auxilio de la segunda de las tres ecuaciones condicionales que preceden; y, finalmente, el de r, por medio de la primera. La resolucion completa de la ecuacion primitiva depende, pues, del conocimiento de una sola raiz real de la ecuacion auxiliar que se acaba de construir.

Si, por ejemplo, se nos diese la ecuacion

$$x^3 - 6x + 6 = 0,$$

concluiríamos de ella inmediatamente la que sigue:

$$\alpha^3 - 1.5\alpha - 0.75 = 0 \,\ldots..$$

La cual, resuelta por el método de Gräffe, ó por cualquiera otro, arrojaría este resultado:

$$\alpha = +1.423661.$$

De donde se deduce, por las fórmulas ó ecuaciones condicionales referidas, que

$$\sqrt{-\gamma} = \pm 0.283606\sqrt{-1}; \text{ y}$$

$$r = -2.847322.$$

La dificultad de hallar las raices *imaginarias* de la ecuacion propuesta queda así reducida á la de hallar los valores de las raices *reales* de otra ecuacion, en cierto modo, derivada ó transformada de la primitiva. Pero ¿de qué grado será esta segunda ecuacion auxiliar? ¿Y cómo sus coeficientes se componen con los coeficientes de la ecuacion primitiva?—Procuremos investigarlo, avanzando un paso más por el camino ya emprendido.

7.—De la ecuacion

$$x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0,$$

representando sus cuatro raices, reales ó imaginarias, por r_1, r_2 y $\alpha \pm \sqrt{-\gamma}$, se desprende la que sigue, cuyas raices son $(r_1 - \alpha)$, $(r_2 - \alpha)$ y $\pm\sqrt{-\gamma}$:

$$y^4 + (4\alpha + a)\,y^3 + (6\alpha^2 + 3a\alpha + b)\,y^2 +$$
$$(4\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c)\,y + (\alpha^4 + a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d) = 0.$$

Pero las mismas raices que esta ecuacion posee tambien la siguiente:

$$y^4 + (2\alpha - r_1 - r_2)\,y^3 + \{(\alpha - r_1)(\alpha - r_2) + \gamma\}\,y^2 +$$
$$(2\alpha - r_1 - r_2)\,\gamma . y + \gamma\,(\alpha - r_1)(\alpha - r_2) = 0.$$

Luego:

$$4\,\alpha + a = 2\,\alpha - r_1 - r_2\,;$$
$$6\,\alpha^2 + 3\,a\,\alpha + b = (\alpha - r_1)(\alpha - r_2) + \gamma;$$
$$4\,\alpha^3 + 3\,a\,\alpha^2 + 2\,b\,\alpha + c = (2\,\alpha - r_1 - r^2)\,\gamma; \quad \text{y}$$
$$\alpha^4 + a\,\alpha^3 + b\,\alpha^2 + c\,\alpha + d = (\alpha - r_1)(\alpha - r_2)\,\gamma.$$

Estas cuatro ecuaciones de condicion con cuatro incógnitas pueden reducirse á una sola ecuacion, con una sola incógnita, que, despues de resuelta y calculada, servirá para facilitar la solucion y cálculo de las demas. Eliminando, por ejemplo, las r_1, r_2 y γ, lo cual es muy sencillo, obtiénese para ecuacion final, ó *resolvente*, con la incógnita α, la que sigue:

$$\alpha^6 + \frac{3}{2} a.\alpha^5 + \frac{3a^2+2b}{4}.\alpha^4 +$$

$$\frac{a(a^2+4b)}{8}.\alpha^3 + \frac{a(2ab+c)+(b^2-4d)}{16}.\alpha^2 +$$

$$\frac{a(b^2+ac-4d)}{32}.\alpha + \frac{abc-a^2d-c^2}{64} = 0.$$

Para resolver una ecuacion de cuarto grado hay, pues, que hallar las raices *reales* de otra de sexto, cuyos coeficientes se derivan de los de la primitiva por procedimiento ó ley muy complicada. Cierto que esta ecuacion auxiliar, cuando la propuesta carece de segundo término, ó $a = 0$, se simplifica mucho y hasta se reduce al tercer grado; pero, si aquella primitiva ecuacion es completa, como lo será casi siempre, ó por regla general, para privarla de su segundo término habrá que transformarla previamente en otra, y efectuar con este objeto multitud de operaciones aritméticas. Lo que en un concepto se gane, se perderá, y habrá que rescatarlo á buen precio, en otro.

Y lo que, tratándose de las ecuaciones de 4.° grado, admite todavía algun remedio, ya no le admite, ni bueno ni malo, en las ecuaciones de los grados superiores. Por el procedimiento de Rutherford, lo mismo que por el de Lagrange, con el cual coincide en muchos puntos, la resolucion completa de la ecuacion de 5.° grado depende de la determinacion de las raices reales de otra de 10°; la de 6.° grado, de otra del 15°; la de 7.° de una del 21°; y así de las demas sucesivas. ¿Y es racional semejante manera de proceder? ¿ni comparable por asomo con el propuesto por Encke, y explicado en el Capítulo III de esta Memoria?—Decídalo ahora, con pleno conocimiento del asunto, el lector imparcial y reflexivo.

C'.—*Adicion á la nota precedente. Exposicion del método de* Horner *para hallar las raices reales de una ecuacion numérica.*

1.—Para hallar la raiz *real* de la ecuacion

$$x^3 - 1.5\,x - 0.75 = 0,$$

de cuyo prévio conocimiento depende el de las tres raices, real *una* é imaginarias las otras *dos*, de la ecuacion considerada en la pág. 473.

$$x^3 - 6\,x + 6 = 0,$$

Rutherford se vale del método de Horner, que bien pudiera ser completamente desconocido de nuestros muy contados lectores, á pesar de su mérito incuestionable y de sus 60 años de fecha, si sólo con los tratados elementales de Algebra, publicados en Francia, estuvieren familiarizados. Aunque el *nuevo* método, variante ingeniosa de los más antiguos de Lagrange y de Newton, sólo sea, como estos, aplicable á la determinacion de las raices reales de una ecuacion numérica, despues de aisladas ó de separadas unas de otras estas raices, ó de saber, por resultado de minucioso trabajo de análisis prévia, á cuántas ascienden en totalidad, cuántas son positivas y cuántas negativas, y entre qué límites, ó números consecutivos, ó muy poco diferentes uno de otro, se hallan distribuidas, oportuno nos parece definirle en este lugar y aplicarle á la resolucion de algun ejemplo, como complemento de lo expuesto en la anterior Memoria y adiciones que la acompañan. En Inglaterra el método de Horner es vulgarísimo; y, aunque por varios conceptos le consideremos inferior en mérito al de Gräffe, en algun caso pudiera mirarse como preferible al del matemático suizo, completado por Encke, por su sencillez teórica y eficacia notabilísima en la práctica.

En principio se reduce á lo siguiente.

2.—Dada una ecuacion numérica, $f(x) = 0$, y hallada la primera cifra, a, de cualquiera de sus raices reales y positivas, si por x sustituimos la expresion $a+y$, hallaremos otra ecuacion, $f(a+y)=f_1(y)=0$, del mismo grado que la primitiva, y cuyas raices serán las de ésta, disminuidas en la cantidad ó número a. Y, si entre a y $a+1$ no existía en la ecuacion $f(x)=0$ más que una sola raiz, en la $f(y)=0$ es evidente que sólo existirá otra, comprendida entre *cero* y la unidad del órden á que la a se refiera. Sustituyendo, pues, en la segunda ecuacion los números 0.0, 0.1, 0.2, ... 0.9 y 1.0, fácil será por tanteos averiguar entre cuáles dos consecutivos se halla comprendido el valor de y; y el menor de estos números, que en absoluto designaremos por b, representará la segunda cifra del valor de x, cuya primera designamos por a.

De la ecuacion $f_1(y)=0$, poniendo por y la expresion $b+z$, deduciremos luégo otra ecuacion, $f_1(b+z)=f_2(z)=0$, del mismo grado que las dos anteriores, y cuya incógnita z debe poseer un valor exclusivo, comprendido entre 0.0 y 1 del órden b, ó 0.00 y 0.1 del a.—Ensayando, pues, los diez números 0.00, 0.01, 0.02, ... , 0.09 y 0.1, hallaremos entre cuáles dos consecutivos se halla comprendido el valor de z; y el menor de estos números, en absoluto c, representará ó nos dará la tercera cifra de x.

Y continuando así indefinidamente esta misma serie de sustituciones, transformaciones, y ensayos ó tanteos, se hallarán cuantas otras cifras de la raiz buscada se consideren necesarias.

3.—Aclaremos esta regla, antes de indicar las varias simplificaciones que admite, y que propiamente constituyen el método de Horner, por medio de un ejemplo. Y el ejemplo será el poco ántes aducido.

Del exámen de la ecuacion

$$f(x)=x^3-1.5x-0.75=0$$

inmediatamente se infiere que el valor real de x se halla comprendido entre los números 1 y 2. Pongamos, pues, por x el binomio $y+1$, y resultará que

$$f_1(y)=y^3+3y^2+1.5y-1.25=0.$$

Esta segunda ecuacion debe tener una raiz comprendida entre 0.0 y 1; y nada más que una, si es verdad que la anterior sólo contiene otra, entre los números consecutivos mencionados, 1 y 2.—Ensayando, pues, los 0.0, 0.1, 0.2, 0.3,....., se concluye que el valor de y está realmente comprendido entre 0.4 y 0.5. Luego el de x lo estará entre 1.4 y 1.5; y la cifra 4 será, en consecuencia, la segunda de la raiz principal buscada.

En la ecuacion $f_1(y) = 0$ pongamos ahora por y el binomio $z + 0.4$; y hallaremos que

$$f_2(z) = z^3 + 4.2\,z^2 + 4.38\,z - 0.106 = 0.$$

Y como z, complemento del valor aproximado de y, igual á 0.4, debe hallarse comprendida entre 0.00 y 0.1, ensayando en la última ecuacion los números consecutivos 0.00, 0.01, 0.02, ..., concluiremos por encerrar el valor de z entre los límites mucho más próximos 0.02 y 0.03.—La cifra 2 será, por lo tanto, la tercera de x.

Y del propio modo, ó por sustituciones y transformaciones análogas, deduciríamos luégo que

$$f_3(u) = u^3 + 4.26\,u^2 + 4.5492\,u - 0.016712 = 0:$$

á cuya ecuacion corresponde un valor numérico de u, mayor que 0.003 y menor que 0.004.

Y, á continuacion tambien y como consecuencia de lo que precede, que

$$f_4(v) = v^3 + 4.269\,v^2 + 4.574787\,v - 0.003026033 = 0:$$

de la cual se deduce para v otro valor, comprendido entre 0.0006 y 0.0007.

Limitando á esto la serie de operaciones, conclúyese, en fin, que $x = 1.4236.....$

Adviértase ahora que los tres valores aproximados de z, u y v (0.02, 0.003 y 0.0006), que, en absoluto considerados, representan las tres últimas cifras de la raiz x, comciden respectivamente con los cocientes, limitados á las centésimas, milésimas y diezmilésimas, de 0.106 por 4.38; 0.016712 por 4.5492; y 0.003026033 por 4.574787: últimos términos, con los signos cambiados, de las ecuaciones $f_2=0$, $f_3=0$, y $f_4=0$, por los coeficientes que inmediatamente les preceden.

4.—Y que esto, por regla general, debe muy *aproximadamente* verificarse siempre así, fácilmente se concibe.

Pues si de la ecuacion

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots\ldots + Px^2 + Qx + R = 0,$$

por el procedimiento expuesto deducimos estas otras:

$$A_1\,y^n + B_1\,y^{n-1} + \ldots\ldots + P_1\,y^2 + Q_1\,y + R_1 = 0,$$
$$A_2\,z^n + B_2\,z^{n-1} + \ldots\ldots + P_2\,z^2 + Q_2\,z + R_2 = 0,$$
$$A_3\,u^n + B_3\,u^{n-1} + \ldots\ldots + P_3\,u^2 + Q_3\,u + R_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

desde el momento en que admitamos que las incógnitas auxiliares y, z, u, ..., representan cantidades muy pequeñas, comprendidas entre 0.0 y 1; 0.00 y 0.1; 0.000 y 0.01; ....., los términos de las ecuaciones donde respectivamente figuran elevadas al cuadrado, y potencias superiores á la segunda, podrán considerarse como despreciables; y los valores *aproximados* de las mismas incógnitas, limitados á una sola cifra, del órden inmediato inferior al de la anterior, y ya conocida, de x, se hallarán por division, casi mental, de $-R_1$, ó $-R_2$, ó $-R_3$, ... por Q_1, Q_2, Q_3 ..... Despues de todo, conforme pide la vulgarísima regla de aproximacion, propuesta por Newton.

5.—Por error material de cálculo, ó por fallar muy excepcionalmente la regla anterior, á las incógnitas z, u, v, ..., pudiéramos atribuir valores numéricos algo mayores ó menores de los que en realidad les corresponden. ¿De qué manera nos cercioraremos entónces de la equivocacion y lograremos sin demasiado esfuerzo remediarla?—Veámoslo en un ejemplo:

en el mismo de que nos hemos servido para la exposicion del método de que tratamos.

Si en la ecuacion

$$f_2(z) = z^3 + 4.2\,z^2 + 4.38\,z - 0.106 = 0,$$

suponemos que z es igual á $u + 0.03$, y no á $u + 0.02$, en vez de la poco ántes designada por $f_3(u) = 0$, hallaremos esta otra:

$$u^3 + 4.29\,u^2 + 4.6347\,u + 0.029207 = 0:$$

la cual no admite solucion *positiva.* Luego el valor hipotético de z, igual á 0.3, no admite verdadero incremento y debe considerarse como demasiado fuerte. Pero, formada ya la última ecuacion, si al cálculo de u aplicamos la regla acostumbrada $\left(u = -\frac{R_3}{Q_3}\right)$, y forzamos tambien en una unidad el cociente, hallaremos que $u = -0.007$; y x, por lo tanto, igual á $+1.423 (= 1 + y + z + u)$: lo mismo que, procediendo con mayor cautela, habíamos poco ántes encontrado. Y, si en la ecuacion anterior, por u ponemos $-0.007+v$, recaeremos sin variante alguna en la ecuacion $f_4(v) = 0$: con lo cual el error, ó inadvertencia cometida en el cálculo de z, queda por completo remediada.

Pues suponiendo que por z se hubiese sustituido en la ecuacion $f_2(z) = 0$ la expresion $u + 0.01$, de la ecuacion entónces resultante

$$u^3 + 4.23\,u^2 + 4.4643\,u - 0.061779 = 0,$$

deduciríamos para u un valor igual ó superior á 0.01: prueba de que el de z, adoptado como bueno, es en realidad pequeño.—Con mediana práctica en el asunto, y un poco de atencion, el calculador decidirá inmediatamente lo que le conviene y debe hacer, para salvar ésta y cualquiera otra dificultad por el estilo que en el curso de las operaciones pudiera presentársele, más bien por distraccion suya que por error ó deficiencia del método.

6.—De lo hasta ahora expuesto se deduce que el cálculo de las incógnitas auxiliares, y, z, u, ..., no presenta dificultad alguna, despues de halladas las ecuaciones $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, ..., que las contienen. Pero ¿cómo estas ecuaciones unas de otras pueden desprenderse fácilmente?

La designada por $f_1(y) = 0$, igual á $f(y+a) = 0$, sábese bien que equivale á esta otra:

$$f(a) + f'(a) \cdot y + f''(a) \cdot \frac{y^2}{2} + \ldots\ldots + f^n(a) \cdot \frac{y^n}{2.3\ldots\ldots n} = 0.$$

Y lo mismo que la f_1 de la f, se desprenden de la f_1 la f_2, de la f_2 la f_3, y así todas las demas consecutivas.

Pero si, con arreglo á la ley en la expresion anterior formulada, hubieran de construirse sucesivamente las diversas funciones, f_1, f_2, f_3 ....., el procedimiento de Horner, para hallar los valores de las raices reales de $f(x) = 0$, sería por extremo largo y penoso, y de muy menguada utilidad en la práctica. El arte consiste en pasar de una ecuacion auxiliar á otra, de la primera á la segunda, ó de la octava á la novena, sin esfuerzo de atencion, ó de un modo rutinario y casi mecánico, mediante una serie de operaciones numéricas muy sencillas, y constantemente las mismas.

7.—Para explicar y comprender cómo puede ser esto así, supongamos que

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + p_{n-1} x + p_n.$$

Si por x ponemos en esta expresion el binomio $a + y$, nos resultará que

$$f(a+y) = q_0 y^n + q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \ldots\ldots + q_{n-1} y + q_n.$$

Y si deshacemos lo hecho, poniendo en esta segunda ecuacion por y su igual $x - a$, hallaremos que tambien

$$f(x) = q_0 (x-a)^n + q_1 (x-a)^{n-1} + q_2 (x-a)^{n-2} + \ldots\ldots + q_{n-2} (x-a)^2 + q_{n-1} (x-a) + q_n.$$

Los coeficientes $p_0, p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ son dados ó conocidos en cada caso particular; y los q_0, q_1, q_2, ... q_n designan los que necesitamos conocer ó determinar, en funcion de los primeros, para pasar inmediatamente de la ecuacion primitiva, $f(x)=0$, á su transformada $f(a+y)=f_1(y)=0$.

Pues del exámen de la última ecuacion sin dificultad alguna se concluye: que el coeficiente q_n representa el resíduo de la division de $f(x)$ por $x-a$; el q_{n-1} el resíduo de la division del cociente entero, que al q_n corresponde, por $x-a$ parecidamente; el q_{n-2} el resíduo tambien de la division del segundo cociente entero por el mismo divisor constante $x-a$; y así todos los demás coeficientes q, hasta llegar retrogradando al primero q_0.

¿Y cuáles son, en funcion de los coeficientes conocidos, p, el primer cociente entero y el primer resíduo de la division de $f(x)$ por $x-a$?—Los que siguen.

Cociente:

$$
p_0 x^{n-1} + \left.\begin{matrix} p_0 a \\ +p_1 \end{matrix}\right| x^{n-2} + \left.\begin{matrix} p_0 a^2 \\ +p_1 a \\ +p_2 \end{matrix}\right| x^{n-3} + \dots\dots + \left.\begin{matrix} p_0 a^{n-2} \\ +p_1 a^{n-3} \\ +p_2 a^{n-4} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ +p_{n-2} \end{matrix}\right| x + \begin{matrix} p_0 a^{n-1} \\ +p_1 a^{n-2} \\ +p_2 a^{n-3} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ +p_{n-2} a \\ +p_{n-1} \end{matrix}
$$

Resíduo:

$$
p_0 a^n + p_1 a^{n-1} + p_2 a^{n-2} + \dots\dots + p_{n-1} a + p_n = q_n.
$$

Expresiones de cuyo exámen se deduce: que el resíduo es igual al último término del cociente, multiplicado por a, más el último término, p_n, de $f(x)$; que un coeficiente cualquiera del cociente, desde el segundo inclusive en adelante, se desprende del anterior por la misma ó análoga regla que el resíduo del último; y que el coeficiente del primer término coincide con el del primero de la funcion ó polinomio propuesto. La manera de hallar el valor de q_n, por multiplicaciones y adiciones sucesivas, y por regla general muy sencillas, queda con esto explicada; y como, á la par que el primer resíduo de la division de $f(x)$ por $x-a$, se habrá encontrado el cociente entero que le corresponde, repitiendo con este cociente las mismas operaciones que se hicieron con la funcion de donde procede, se hallarán el segundo resíduo, ó valor de q_{n-1}, y el nuevo cociente que ha de servirnos de base para encontrar por el mismo camino los demas cocientes y resíduos consecutivos.

8.—Sirva de ejemplo aclaratorio de cuanto se acaba de exponer, el siguiente:

$$f(x)=5\,x^4-3\,x^2-7.$$

Si por x ponemos en esta expresion el binomio $y+3$, resultará otra de la forma

$$f_1(y)=q_0\,y^4+q_1\,y^3+q_2\,y^2+q_3\,y+q_4.$$

Y para hallar el valor de q_4 (resíduo de la division de $f(x)$ por $x-3$) habrá que efectuar las siguientes operaciones:

$$p_0=5=p_0$$

$$p_0\,a+p_1=5\times 3+0=15=p'_1$$

$$(p_0\,a+p_1)\,a+p_2=15\times 3-3=42=p'_2$$

$$(p_0\,a^2+p_1\,a+p_2)\,a+p_3=42\times 3+0=126=p'_3$$

$$(p_0\,a^3+p_1\,a^2+p_2\,a+p_3)\,a+p_4=126\times 3-7=371=q_4.$$

El cociente entero de esta primera division es igual á

$$5\,x^3+15\,x^2+42\,x+126.$$

Y el resíduo de su division por $x-3$, ó el valor de q_3, se hallará análogamente de este modo:

$$p'_0 = 5 = p''_0$$

$$p'_0\,a + p'_1 = 5 \times 3 + 15 = 30 = p''_1$$

$$(p'_0\,a + p'_1)\,a + p'_2 = 30 \times 3 + 42 = 132 = p''_2$$

$$(p'_0\,a^2 + p'_1\,a + p'_2)\,a + p'_3 = 132 \times 3 + 126 = 522 = q_3.$$

Al resíduo q_3 corresponde el cociente entero

$$5\,x_2 + 30\,x + 132;$$

del cual se desprende el resíduo q_2, de su division por $x-3$, por resultado de las siguientes sencillísimas operaciones.

$$p''_0 = 5 = p'''_0$$

$$p''_0\,a + p''_1 = 5 \times 3 + 30 = 45 = p'''_1$$

$$(p''_0\,a + p''_1)\,a + p''_2 = 45 \times 3 + 132 = 267 = q_2.$$

Á este último resíduo acompaña el cociente entero

$$5\,x + 45;$$

que, dividido por $x - 3$, dará de resíduo, q_1, el número 60, segun á continuacion se indica:

$$p'''_0 = 5$$

$$p'''_0\,a + p'''_1 = 5 \times 3 + 45 = 60 = q_1.$$

Y el último resíduo, ó valor de q_0, será el coeficiente 5, que se reproduce en todas las divisiones consecutivas.

Luego

$$f_1(y) = 5\,y^4 + 60\,y^3 + 267\,y^2 + 522\,y + 371.$$

9.—Esto, que tal vez parezca largo y complicado todavía, resulta en realidad muy sencillo disponiendo las operaciones del siguiente sistemático modo:

(A)	5	+0	−3	+0	−7
		+15	+45	+126	+378
(B)	5	+15	+42	+126	(+371)
		+15	+90	+396	
(C)	5	+30	+132	(+522)	
		+15	+135		
(D)	5	+45	(+267)		
		+15			
(E)	(5)	(+60)			

En la línea horizontal (A) se han escrito los coeficientes de $f(x)$, considerada esta funcion como polinomio completo.

Debajo del segundo coeficiente hemos puesto el producto del primero por 3; y debajo, en la línea (B), la suma de este producto y de aquel segundo coeficiente.

Debajo del tercero figura el producto de la suma anterior, 15, por 3; y debajo la suma de este producto y del coeficiente á que se refiere.

Debajo del cuarto el producto de la suma anterior, 42, por 3; y debajo la suma análoga á las dos anteriores.

Y debajo del quinto el producto de la última suma, 126, por 3; y debajo, y entre paréntesis, la suma de este producto y del último coeficiente: suma igual al resíduo q_4, y con la cual no hay ya ninguna otra operacion que verificar.

De la línea horizontal (B), completada á la izquierda con el coeficiente 5, y en la cual debe considerarse como suprimido el término entre paréntesis de la derecha, se pasa á la (C) como de la (A) se pasó á la (B). Y de la (C) se desprende la (D), y de ésta la (E), repitiendo las operaciones elementales, prolijamente enumeradas y explicadas en el caso primero.—Todo ello es tan rudimentario y fácil de aprender, y de tan perfecta monotonía, como cualquier regla fundamental de la Aritmética.

10.—Volvamos á considerar la ecuacion

$$f(x) = x^3 - 1.5\,x - 0.75 = 0,$$

cuya raiz real única se halla comprendida entre los números **1** y **2**; y veamos cómo por el procedimiento anterior pueden deducirse sus transformadas sucesivas, funciones de $y, z, u, \ldots\ldots$, ántes ya consignadas.

Para pasar de la funcion $f(x)$ á la $f_1(y)$, hay que hallar, por de pronto, los resíduos de $f(x)$ por $x-1$; y los resíduos análogos, luégo, por el mismo divisor de cuantos cocientes enteros se fueren sucesivamente encontrando. Por la regla anterior, las operaciones que esto pide se hallan comprendidas en el estadito adjunto:

$$
\begin{array}{lcccc}
(A) & 1 & +0 & -1.5 & -0.75 \\
 & & +1 & +1 & -0.5 \\
\hline
(B) & 1 & +1 & -0.5 & (-1.25) \\
 & & +1 & +2 & \\
\hline
(C) & 1 & +2 & (+1.5) & \\
 & & +1 & & \\
\hline
(D) & (1) & (+3) & & \\
\end{array}
$$

$$f_1(y) = y^3 + 3\,y^2 + 1.5\,y - 1.25 = 0.$$

Despues de averiguar, por tanteo, que esta ecuacion tiene una raiz comprendida entre 0.4 y 0.5, se hallará la siguiente, simbólicamente representada por $f_2(z) = 0$, de este modo análogo, ó, en la forma, idéntico al anterior:

(*A*)	1	+3	+1.5	—1.25
		+0.4	+1.36	+1.144
(*B*)	1	+3.4	+2.86	(—0.106)
		+0.4	+1.52	
(*C*)	1	+3.8	(+4.38)	
		+0.4		
(*D*)	(1)	(+4.2)		

$$f_2(z) = z^3 + 4.2\, z^2 + 4.38 - 0.106 = 0.$$

El valor de z se halla en esta ecuacion comprendido entre 0.02 y 0.03 (cociente de $+0.106$ por 4.38); y, por lo tanto, para pasar á la siguiente, $f_3(u) = 0$, habrá que efectuar las operaciones, siempre arregladas á la pauta de las precedentes, que á continuacion se indican.

1	+4.2	+4.38	—0.106
	+0.02	+0.0844	+0.089288
1	+4:22	+4.4644	(—0.016712)
	+0.02	+0.0848	
1	+4.24	(+4.5492)	
	+0.02		
(1)	(+4.26)		

$$f_3(u) = u^3 + 4.26\, u^2 + 4.5492\, u - 0.016712 = 0.$$

Y así podria continuarse indefinidamente, aplicando la misma regla á la formacion de las diversas ecuaciones transformadas de la primitiva, hasta donde se creyese necesario prolongar la serie de operaciones indicadas.

11.—En la práctica el uso de los coeficientes, compuestos de gran número de cifras decimales, no es demasiado conveniente, y se evita, sin aumento de trabajo ni complicacion de ningun género, apelando á un recurso muy conocido y sencillo.

La ecuacion $f_1(y)=0$, en el supuesto de que la $f(x)=0$ sólo contenga una raiz real, comprendida entre los números a y $a+1$, debe contener otra, entre 0.0 y 1.0.—Pero si el segundo de sus coeficientes le multiplicamos por 10; el tercero por 100; por 1000 el cuarto; y así análoga y respectivamente los demas consecutivos, la nueva ecuacion resultante poseerá una raiz décupla de la $f_1=0$ primitiva; y, por lo tanto, contenida entre 0 y 10.

En el caso particular propuesto la ecuacion $f_1=0$, modificada, es la siguiente:

$$y^3+30\,y^2+150\,y-1250=0;$$

y en ella los ensayos ó tanteos necesarios para determinar los dos números consecutivos entre los cuales su raiz debe hallarse contenida se harán con los enteros 0, 1, 2 ..... hasta 9. Y el número inferior á su raiz expresará la segunda cifra del valor buscado de x.

Hallado este número, 4, á la transformada siguiente de $f(x)=0$, funcion de z, se pasará mediante las operaciones sencillísimas, con números enteros, que á continuacion se expresan:

1	+30	+150	−1250
	+ 4	+136	+1144
	+34	+286	(− 106)
	+ 4	+152	
	+38	(+438)	
	+ 4		
	(+42)		

Y aunque la ecuacion en z, con una raiz real comprendida entre 0.0 y 1.0, sea, en rigor, ésta:

$$z^3 + 42\,z^2 + 438\,z - 106 = 0,$$

prefiérese á ella la que sigue, de *raiz décupla:*

$$z^3 + 420\,z^2 + 43800\,z - 106000 = 0.$$

A la $f_3(u) = 0$, anteriormente deducida, ó á la que de la última ecuacion, funcion de z, podría deducirse, se sustituye, mentalmente casi, esta otra:

$$u^3 + 4260\,u^2 + 4549200\,u - 16712000 = 0;$$

la cual, como las precedentes de donde se ha derivado, debe contener una raiz comprendida entre 0 y 10: cuarta cifra del valor de x, prescindiendo del órden decimal á que pertenezca, muy fácil siempre de precisar.

Y de la última ecuacion, en fin, se desprenderían por el mismo método expuesto estas otras dos, necesarias para el cálculo de las cifras 5.ª y 6.ª de x, por division de sus últimos términos, tomados con signos contrarios, por los coeficientes de los que inmediatamente les preceden:

$$v^3 + 42690\,v^2 + 457478700\,v - 3026033000 = 0; \text{ y}$$

$$w^3 + 427080\,w^2 + 45799108800\,w - 279623744000 = 0.$$

12.—Los coeficientes de estas varias ecuaciones van sucesiva y muy rápidamente creciendo, hasta el punto de hacerse embarazoso su manejo, ó de complicarse cada vez más las operaciones numéricas que con ellos deben verificarse: lo cual limita ó dificulta la aplicacion del método de Horner, ó se opone en la práctica á la investigacion como indefinida de las raices incógnitas de la ecuacion propuesta. Llegados, sin embargo, á cierto punto, la operacion comenzada puede terminarse, ó pasando súbitamente del método de Horner al de

Newton, y hallando por una sola division otras tantas cifras casi de la raiz, como ya una en pos de otra, sucesiva y paulatinamente, se hubiesen encontrado; ó prolongando un poco más la aplicacion simplificada, ó abreviada, del primer método, ántes de recaer en el segundo. Expliquemos cómo esto puede verificarse, con pequeño incremento de trabajo sobre el ya efectuado desde un principio, en el mismo ejemplo á que en los párrafos anteriores nos hemos referido.

13.—De la ecuacion $f_4(v) = 0$ se ha concluido que v se halla comprendida entre los números 6 y 7; y, poniendo en ella por v la expresion $6 + w$, y multiplicando por 10 las raices de la ecuacion así resultante, se desprende la $f_5(w) = 0$, apropiada al cálculo de w. Pero esta misma ecuacion, $f_5(w) = 0$, obtenida por escalones, operando del modo sistemático referido sobre las ecuaciones análogas anteriores, se hubiera podido obtener tambien desde luégo, comenzando por transformar la $f(x)$ en otra, $F(x_1) = 0$, cuyas raices fueran 100000 veces mayores que las buscadas, y sustituyendo despues en ella por x_1 el binomio $142360 + w$. Luego su último término coincidirá con el valor de $F(a)$, en la fórmula de aproximacion newtoniana, y el coeficiente anterior con el de $F'(a)$, si en la ecuacion $F(x_1) = 0$, y en el polinomio derivado $F'(x_1)$ se pone por x_1 su valor aproximado a, igual á 142360. La correccion w se deducirá, en consecuencia, por la mencionada fórmula, $w = \frac{-F(a)}{F'(a)}$, prolongando la division hasta la segunda ó tercera cifra decimal del cociente, en este caso. Y con incertidumbre muy pequeña, aunque por de pronto inevitable, en la última cifra decimal, se hallará de este modo que

$$x_1 = 142366.105; \text{ ó } x = 1.42366105 \ldots..$$

14.—Pero en vez de reemplazar arrebatadamente la ecuacion $f_5(w) = 0$, ó

$$w^3 + 427080\,w^2 + 45799108800\,w - 279623744000 = 0,$$

por la

$$+ 45799108800\,w - 279623744000 = 0,$$

compuesta de sus dos últimos términos, considerando para ello como evanescentes los anteriores, conforme pide la aplicacion del método de Newton, y hemos ahora practicado para deducir el valor de w, hubiéramos podido proceder con alguna mayor lentitud y cautela, comenzando por omitir ó tildar, en el concepto referido, tan sólo el primer término. Y si, hecho esto, reemplazamos por tres ceros las tres últimas cifras de los coeficientes restantes, con la precaucion de forzar en una unidad la cuarta, cuando la tercera sea igual ó superior al número 5, y dividimos por 1000 el resultado, á la ecuacion $f_5(w) = 0$ habremos sustituido esta otra, mucho más sencilla:

$$427\, w_1^2 + 45799109\, w_1 - 279623744 = 0;$$

de la cual se deducirá para w_1 un valor igual casi al de w: idéntico, si nos atenemos á su primera cifra, sexta del valor buscado de x.

A la última ecuacion, cuya raiz w_1, necesariamente inferior á 10, se halla comprendida entre los números 6 y 7, apliquemos de nuevo, y sin variante alguna, el procedimiento de transformacion de Horner, poniendo en ella por w_1 el binomio $w_2 + 6$, y decuplando luego las raices del resultado; y hallaremos por de pronto que

$$427\, w_2^2 + 458042330\, w_2 - 481371800 = 0.$$

Ó, reemplazando por ceros las dos últimas cifras de los tres coeficientes, que

$$4\, w_3^2 + 4580423\, w_2 - 4813718 = 0.$$

El valor de w_3, que puede tambien considerarse como igual al de w_2, se halla comprendido entre los números 1 y 2. Luego, poniendo en la última ecuacion por w_3 el binomio $w_4 + 1$, y decuplando despues el valor de w_4, nos resultará esta otra:

$$4\, w_4^2 + 45804310\, w_4 - 23329100 = 0.$$

Y de esta ecuacion, suprimiendo las dos últimas cifras de los coeficientes, lo cual implica la supresion completa de su primer término, se infiere la que sigue:

$$+458043\,w_5 - 233291 = 0.$$

De la cual, por division abreviada de sus coeficientes, se deduce finalmente que $w_5 = 0{,}50932$.

El valor de la incógnita x, cuya primera cifra se determinó por tanteo; las cuatro siguientes, hasta la v inclusive, aplicando el método de Horner, sin abreviacion ó simplificacion alguna; las otras dos, w_1 y w_2, por el mismo método abreviado; y las seis últimas, w_5, por division de un número por otro, es en conclusion el siguiente, aproximado hasta la duodécima cifra decimal en este caso:

$$x = 1.423661050932.....$$

15.—Á las ecuaciones de grado superior al *tercero* el método de Horner se aplica del mismo modo que á éstas, en el ejemplo acabado de resolver, y con simplificaciones análogas. Despues de obtenidas unas cuantas cifras de la raiz buscada, y cuando los coeficientes de la última ecuacion, transformada de la primitiva, se hubiesen complicado, ó crecido en demasía, se tachará *una* cifra en el penúltimo, *dos* en el anterior á éste, *tres* en el precedente inmediato, y así en todos los demás colocados delante, ó á la izquierda, hasta el primero inclusive. Por efecto de esta supresion de cifras, sistemáticamente repetida, llegará un momento en que desaparecerán los términos primero y segundo; el tercero luégo; y el cuarto, y el quinto, y los demas consecutivos, poco á poco. Y cuando solo subsistan los dos últimos, la operacion se terminará por la regla de Newton: dividiendo el posterior, tomado con signo contrario, por el precedente, de la manera y hasta el punto referidos.

16.—Sirva, por si todavía fuese necesario, para ilustrar la doctrina en las precedentes últimas líneas condensada, el siguiente nuevo ejemplo, algo más complicado que el en los anteriores párrafos propuesto y resuelto.

Si se nos diese la ecuacion

$$x^4 - 2x^3 - 61x^2 + 150x - 89 = 0,$$

comenzaríamos por averiguar, por las reglas ordinarias del Álgebra, ó aplicando previamente á su análisis el teorema de Sturm, que sus cuatro raices son *reales: positivas* tres, y una *negativa;* y que la mayor de las tres se halla comprendida entre los números 9 y 8, y entre los 1 y 2 las dos menores; y la negativa entre -8 y -9. Y esto averiguado por cualquier medio, emprenderíamos la investigacion de la primera raiz poniendo en la ecuacion que se trata de resolver por x el binomio $x_1 + 7$. Prévias las operaciones numéricas sencillísimas que á continuacion se indican, y que minuciosamente se explicaron en los párrafos 8 y 9,

1	-2	-61	$+150$	-89
	$+7$	$+35$	-182	-224
1	$+5$	-26	-32	(-313)
	$+7$	$+84$	$+406$	
1	$+12$	$+58$	$(+374)$	
	$+7$	$+133$		
1	$+19$	$(+191)$		
	$+7$			
1	$(+26)$,			

y *decuplando* las raices de la transformada, se hallará el resultado siguiente:

$$x_1^4 + 260x_1^3 + 19100x_1^2 + 374000x_1 - 3130000 = 0.$$

Mediante algunos tanteos muy sencillos, de esta ecuacion se deduce que el valor de x_1 se encuentra comprendido entre los números 6 y 7. Si, pues, x_1 se supone igual á x_2+7 en la primera transformada de la ecuacion propuesta, encontraremos esta segunda, despues de decupladas sus raices:

$$x_2^4+2840\,x_2^3+2399600\,x_2^2+$$
$$632144000\,x_2-1409440000=0.$$

Y, por division mental de su último término por el coeficiente del anterior, y cambio del signo, inferiremos en el acto que el valor de x_2 supera al número 2 y es inferior al 3. Poniendo, en consecuencia, por x_2 el binomio x_3+2, y decuplando asimismo las raices de la nueva transformada, nos resultará que

$$x_3^4+28480\,x_3^3+241666400\,x_3^2+$$
$$641776512000\,x_3-1355308640000=0.$$

Y del exámen de esta ecuacion se deduce, á primera vista casi, que el valor de x_3 se halla tambien comprendido entre los números 2 y 3. Luego, poniendo por x_3 el binomio x_4+2, y prescindiendo de los ceros necesarios para decuplar las raices de la nueva ecuacion resultante, inferiremos, por el mismo procedimiento de transformacion aplicado en los casos anteriores, que

$$x_4^4+28488\,x_4^3+241837304\,x_4^2+$$
$$642743519392\,x_4-70788722544=0.$$

Con todo lo cual habremos determinado las cuatro primeras cifras de la raiz buscada ($x=7.622\ \ldots..$); á las cuales fácil sería, dividiendo el último término, con el signo cambiado, por el coeficiente del anterior, agregar de golpe otras cuatro.

Pero si, en este punto de la operacion, en vez de posponer un cero al coeficiente del segundo término de la ecuacion, cuya incógnita es la x_4; y dos, tres y cuatro ceros, respectivamente, á los consecutivos; suprimimos una cifra á la derecha del penúltimo término, dos á la del inmediato anterior, y tres á la del que á éste precede, y tachamos ademas el primero, obtendremos esta otra ecuacion, abreviada de la que debíamos realmente resolver:

$$28\,x_4^3 + 2418373\,x_4^2 + 64274351939\,x_4 - 70788722544 = 0.$$

De la cual se deduce por de pronto que x_4 se halla comprendida entre los números 1 y 2. Y poniendo luégo por x_4 el binomio $x_5 + 1$, y verificando análogas supresiones de cifras, en el resultado inmediato de la sustitucion, á las efectuadas en el caso precedente, que

$$+ 24185\,x_5^2 + 6427918877\,x_5 - 6511952204 = 0.$$

De esta ecuacion, cuya raiz x_5 se halla comprendida entre los números 1 y 2, se pasa por los trámites expuestos á la que sigue, sustituyendo en ella por x_5 el binomio $x_6 + 1$:

$$+ 242\,x_6^2 + 642796725\,x_6 - 84009142 = 0.$$

Y como el valor de x_6 es inferior á la unidad, suponiéndole igual á $x_7 + 0$, sin cálculo alguno se deduce inmediatamente que

$$2\,x_7^2 + 64279672\,x_7 - 84009142 = 0.$$

Entre los números 1 y 2 se advierte que el valor de x_7 se encuentra comprendido. Y, por lo tanto, si en vez de x_7 sustituimos en la última ecuacion el binomio $x_8 + 1$, concluiremos que

$$+ 64279676\,x_8 - 19729468 = 0.$$

De donde, por division abreviada, se desprende con suma rapidez que $x_8 = 0.3069317$, con incertidumbre de alguna unidad, en la última cifra.

El valor buscado de x será, pues, el que sigue:

$$x = +\ 7.622\,110\,130\,693\,17\ldots..$$

Y si, para comprobar su exactitud ó grado de aproximacion á la verdad, determinamos por el mismo procedimiento, y con independencia los unos de los otros, los valores de las otras tres raices de la ecuacion propuesta, hallaremos parecidamente que

$$\begin{aligned} x = &+ 1.390\,179\,663\,422\,28\ldots.. \\ &+ 1.042\,741\,427\,124\,49\ldots.. \\ &- 8.055\,031\,221\,239\,94\ldots.. \end{aligned}$$

La suma de los cuatro valores así encontrados es igual y de signo contrario al coeficiente del segundo término de la ecuacion propuesta: lo cual puede considerarse, si no como prueba irrefutable, como indicio suficiente de que en el curso de las operaciones numéricas, verificadas para obtenerlos, no se ha deslizado error alguno de cuantía.

17.—La investigacion de las dos raices positivas de la ecuacion

$$x^4 - 2\,x^3 - 61\,x^2 + 150\,x - 89 = 0,$$

comprendidas ambas entre los números enteros consecutivos 1 y 2, exige de parte del calculador una precaucion, tan sencilla como importante, no advertida todavía, y concerniente á la distincion ó separacion de aquellas raices.

Poniendo, en efecto, en la ecuacion de que se trata por la incógnita x el binomio $x_1 + 1$, despréndese desde luego la siguiente transformada suya:

$$x_1^4 + 20\,x_1^3 - 6100\,x_1^2 + 26000\,x_1 - 10000 = 0.$$

Y ¿es en este caso evidente que la nueva ecuacion sólo puede contener *una* raiz real y positiva, inferior al número 10, como en el §. 11, consecuencia del §. 2, se supuso?—De ningun modo. Si los dos valores de x, comprendidos entre los números 1 y 2, no discrepan uno de otro ni en una décima parte de la unidad, los de x_1, que deben servir para completarlos, limitados en su expresion numérica á una sola cifra, serán absolutamente iguales; y la ecuacion de donde procedan sólo admitirá una raiz comprendida entre 0 y 10. Pero, si la discrepancia fuese mayor, como en este caso sucede, los de x_1 diferirán en más de una unidad, y la ecuacion que ha de servirnos para determinarlos, admitirá dos raices distintas, hasta por sus primeras cifras, comprendidas ambas entre los límites referidos. En la duda, pues, y miéntras la separacion de los valores de x no se hubiese efectuado por completo, habrá que sustituir en las transformadas sucesivas de la ecuacion propuesta los números consecutivos 0, 1, 2 ..... 10, para deducir, por los cambios de signo de los resultados, la posicion y valores de las raices auxiliares, x_1, ó x_2, ó x_3, ..., necesarios para componer los de la incógnita principal x.—Procediendo con esta precaucion, hállase, en el ejemplo de que ahora se trata, que la incógnita auxiliar ó complementaria x_1 admite dos valores: uno, comprendido entre cero y la unidad; y otro, entre los números 3 y 4. Luego los valores de x lo estarán entre 1.0 y 1.1; y entre 1.3 y 1.4. Y si, esto averiguado, ponemos en la primera transformada por x_1 el binomio $x_2 + 0$, hallaremos la siguiente, apropiada á la determinacion exclusiva de la raiz menor:

$$x_2^4 + 200\,x_2^3 - 610000\,x_2^2 + 26000000\,x_2 - 100000000 = 0;$$

ó esta otra, que se referirá á la segunda raiz, si el binomio $x_2 + 3$:

$$x_2^4 + 320\,x_2^3 - 586600\,x_2^2 - 9952000\,x_2 + 137210000 = 0.$$

La primera de las cuales sólo admite ya una raiz positiva, inferior á 10, comprendida entre los números 4 y 5; y otra, poco mayor que 9, la segunda. Y, en consecuencia, la determinacion sucesiva de las demas cifras de ambas raices, por el método de Horner, no presenta desde este momento dificultad teórica de ningun género.

En suma: miéntras las raices *casi iguales* de la ecuacion propuesta no comiencen á separarse ó deslindarse unas de otras, las ecuaciones transformadas suyas sucesivas, cuyas incógnitas son la x_1, ó la x_2, ..., admitirán una sola raiz, inferior á 10, comun á todas aquellas raices, y fácil de precisar por tanteo. Pero, tan pronto como en una transformada se adviertan dos cambios de signo, producidos por la sustitucion en ella de los números 0, 1, 2 ..... 10, la separacion de las raices en dos distintos grupos queda efectuada; y el cálculo ulterior de las unas se verificará con independencia completa del de las demas. El principio es general; y, aplicado con discernimiento y constancia, producirá indefectiblemente la separacion de todas las raices que entre sí discrepen en cantidad algo mayor del límite de aproximacion á la verdad que nos hayamos propuesto obtener.

18.—En este carácter importante, como en otros varios, el método de Horner concuerda á la letra con el mucho más antiguo de Lagrange.

Recordemos, en efecto, que este celebérrimo matemático propuso, para determinar el valor de una raiz de la ecuacion $f(x) = 0$, comprendida entre los números a y $a+1$, sustituir por de pronto á la incógnita x el binomio $a + \frac{1}{y}$; y en la transformada, $f(a + \frac{1}{y}) = \varphi_1(y) = 0$, hallar luégo por tanteo el *único* valor positivo de y que debe satisfacerla: ó, procediendo por partes, los dos números enteros consecutivos entre los cuales la y estuviese comprendida. Encontrados estos números, b y $b+1$, en la ecuacion $\varphi_1(y) = 0$ prescribió poner por y el binomio $b + \frac{1}{z}$; y en la segunda transformada, $\varphi_1(b + \frac{1}{z}) = \varphi_2(z) = 0$, determinar parecidamente los dos números, c y $c+1$, que limitan el valor positivo, *único* tambien, de z. Y, por resultado de esta serie de operaciones, sencillísimas en teoría, prolongada hasta donde fuere ó se juzgase necesario, es claro que se concluirá por hallar el valor de x, expresado en *fraccion contínua*, y no *decimal*, como siguiendo el método de Horner.

Pero todo esto es en la hipótesis de que la ecuacion que tratamos de resolver contenga *una sola* raiz, entre a y $a+1$. Porque, si contuviese *dos*, alguna de las transformadas sucesivas, $\varphi_1(y)=0$, ó $\varphi_2(z)=0$, ó $\varphi_3(u)=0$, ... deberia contener otras dos; y, en la duda de cuál será la que las contenga, habrá que proceder al análisis de todas muy cuidadosamente, hasta dar con aquella donde el deslinde de las raices buscadas se efectúa, ó comienza á verificarse.

19.—Pero, aunque segun lo acabado de exponer, discrepen poquísimo en teoría los procedimientos de Lagrange y de Horner, no sucede lo mismo en la práctica. Porque en el de Lagrange el valor de una incógnita auxiliar cualquiera, $y, z, u, ...$, puede ser grande ó pequeño, y no hay regla segura, ni expedita, que sirva para determinarle: mientras que, con arreglo á los preceptos del matemático inglés, ya se ha visto en los anteriores párrafos cuán sencilla y acertadamente se determina. Ni en brevedad, ni en precision, ni en ningun otro concepto, aventajan al de Horner, que resume cuantas ventajas ofrecen los de sus célebres antecesores, el método de Newton, ineficaz hasta que ya la ecuacion está casi resuelta, ni el de Lagrange, muy trabajoso, y de lentitud desesperadora con frecuencia. El lector puede convencerse de ello fácilmente aplicando los tres métodos á la resolucion de la vulgarísima ecuacion siguiente, de las ménos complicadas que pueden proponerse:

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Por el de Horner, en cosa de dos á tres horas de tiempo, y con trabajo casi mecánico ó irreflexivo, se hallarán, con independencia unos de otros, los resultados siguientes:

$$\begin{aligned} x = &+1.356\,895\,867\,892\,209\,439\,..... \\ &+1.692\,021\,471\,630\,095\,875\,..... \\ &-3.048\,917\,339\,522\,305\,314\,..... \end{aligned}$$

Las simplificaciones del método no deben comenzar á introducirse hasta despues de encontrar, sin abreviacion alguna en el cálculo, las seis ó siete primeras cifras decimales de las tres raices. Las cifras que siguen se desprenderán luégo muy sencilla y rápidamente, conformándose con los preceptos anteriormente explicados, y en el §. 15 resumidos.