CIENCIAS EXACTAS.

RESOLUCION GENERAL DE LAS ECUACIONES NUMERICAS.

(Continuacion.)

CAPITULO IV.

Ampliacion de la teoría expuesta en el capítulo precedente al caso en que la ecuacion, de grado *par*, que se trata de resolver, contenga raíces reales é imaginarias.

§. 21.

Enúnciase de nuevo y se resuelve en términos generales el problema de los párrafos 16 *y* 17.

Cuanto se acaba de exponer concerniente á la descomposicion en n trinomios de segundo grado, de una ecuacion del grado $2n$, en el supuesto de ser todas sus raíces imaginarias, puede literalmente casi reproducirse, sin restriccion alguna preliminar.

Representemos, en efecto, por el trinomío $x^2 + fx + v$ uno de los componentes de la ecuacion; supongamos que, por cualquier procedimiento, se haya logrado ya determinar el valor de v; y propongámonos deducir el de f correspondiente.

Cualquiera que sea el valor de v, y, por lo tanto, cualesquiera que sean las dos raíces de la ecuacion propuesta, en el trinomio considerado comprendidas: —ambas *imaginarias*, si $v > {}^1/_4\, f^2$; *reales* las dos y del mismo signo, contrario al de f, si $v > 0$ y $< {}^1/_4\, f^2$; ó *reales* y de signos opuestos, si $v < 0$;— aquel trinomio podrá suponerse siempre descompuesto en dos binomios, de este modo:

$$x^2 + fx + v = (x + z\sqrt{v})\left(x + \frac{1}{z}\sqrt{v}\right).$$

De donde se deduce que

$$f = \sqrt{v}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Y, designando por a y b las dos raíces (§. 1) del trinomio, podremos escribir tambien estas otras igualdades:

$$z = \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad \frac{1}{z} = \sqrt{\frac{b}{a}}; \quad \text{y} \qquad v = ab.$$

Considerado en absoluto, ó prescindiendo de su signo, y con el solo objeto de simplificar un poco la notacion y escritura de las fórmulas que siguen, el producto ab le representaremos en adelante por g^2, ó por g el valor de $\sqrt{v}$.

Tras de estos preliminares, en la ecuacion general

$$x^{2n} + \alpha_1 x^{2n-1} + \alpha_2 x^{2n-2} + \ldots\ldots + \alpha_{2n-1}\, x + \alpha_{2n} = 0$$

pongamos sucesivamente por x sus dos valores, $-gz$ y $-gz^{-1}$, y obtendremos estos dos, en la apariencia, distintos resultados: (32)

$$g^{2n}z^{2n}-\alpha_1 g^{2n-1}z^{2n-1}+\alpha_2 g^{2n-2}z^{2n-2}-\ldots\ldots+\ldots\ldots$$
$$+\alpha_{2n-2}g^2z^2-\alpha_{2n-1}gz+\alpha_{2n}=0;\quad \text{y}$$

$$g^{2n}z^{-2n}-\alpha_1 g^{2n-1}z^{-2n+1}+\alpha_n g^{2n-2}z^{-2n+2}-\ldots\ldots+\ldots\ldots$$
$$+\alpha_{2n-2}g^2z^{-2}-\alpha_{2n-1}gz^{-1}+\alpha_{2n}=0.$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por $g^{-2n}z^{-n}$, y la segunda por $g^{-2n}z^{n}$, y combinando los dos resultados uno con otro, por vía de adicion y de sustraccion, obtiénense los dos siguientes (33):

$$(z^n+z^{-n})-\alpha_1 g^{-1}(z^{n-1}+z^{-n+1})+\alpha_2 g^{-2}(z^{n-2}+z^{-n+2})-\ldots+\ldots$$
$$+\alpha_{2n-2}g^{-2n+2}(z^{n-2}+z^{-n+2})-\alpha_{2n-1}g^{-2n+1}(z^{2n-1}+z^{-n+1})+$$
$$\alpha_{2n}g^{-2n}(z^n+z^{-n})=0;\ \text{y}$$

$$(z^n-z^{-n})-\alpha_1 g^{-1}(z^{n-1}-z^{-n+1})+\alpha_2 g^{-2}(z^{n-2}-z^{-n+2})-\ldots+\ldots$$
$$-\alpha_{2-n2}g^{-2n+2}(z^{n-2}-z^{-n+2})+\alpha_{2n-1}g^{-2n+1}(z^{2n-1}+z^{-n+1})-$$
$$\alpha_{2n}g^{-2n}(z^n-z^{-n})=0.$$

Y suponiendo ahora que

$$(34)\qquad\left.\begin{aligned}
1+\alpha_{2n}g^{-2n} &= \beta\\
\alpha_1+\alpha_{2n-1}g^{-2n+2} &= \beta_1\\
\alpha_2+\alpha_{2n-2}g^{-2n+4} &= \beta_2\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{n-1}+\alpha_{n+1}g^{-2} &= \beta_{n-1}\\
\alpha_n+\alpha_n &= \beta_n
\end{aligned}\right\}\ \text{y}\qquad
(35)\qquad\left.\begin{aligned}
1-\alpha_{2n}g^{-2n} &= \gamma\\
\alpha_1-\alpha_{2n-1}g^{-2n+2} &= \gamma_1\\
\alpha_2-\alpha_{2n-2}g^{-2n+4} &= \gamma_2\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{n-1}-\alpha_{n+1}g^{-2} &= \gamma_{n-1}
\end{aligned}\right\},$$

y aglomerando en uno solo cada dos términos equidistantes de los extremos, las ecuaciones (33) podrán escribirse de este modo: (36)

$$\beta(z^n+z^{-n})-\frac{\beta_1}{g}(z^{n-1}+z^{-n+1})+\frac{\beta_2}{g^2}(z^{n-2}+z^{-n+2})-\ldots+\ldots$$

$$\pm\frac{\beta_{n-1}}{g^{n-1}}(z+z^{-1})\mp\frac{\beta_n}{g^n}=0;\ \text{y}$$

$$\gamma(z^n-z^{-n})-\frac{\gamma_1}{g}(z^{n-1}-z^{-n+1})+\frac{\gamma_2}{g^2}(z^{n-2}-z^{-n+2})-\ldots+\ldots$$

$$\mp\frac{\gamma_{n-2}}{g^{n-2}}(z^2-z^{-2})\pm\frac{\gamma_{n-1}}{g^{n-1}}(z-z^{-1})=0.$$

Los binomios de la forma (z^n+z^{-n}), ó (z^n-z^{-n}), componentes de las ecuaciones anteriores, dependen unos de otros conforme indican las dos adjuntas relaciones algebráicas: (37)

$$z^n+z^{-n}=(z+z^{-1})(z^{n-1}+z^{-n+1})-(z^{n-2}+z^{-n+2}),\ \text{y}$$

$$\frac{z^n+z^{-n}}{z-z^{-1}}=(z+z^{-1})\left(\frac{z^{n-1}-z^{-n+1}}{z-z^{-1}}\right)-\left(\frac{z^{n-2}-z^{-n+2}}{z-z^{-1}}\right):$$

de las cuales, atribuyendo á n los valores sucesivos 0, 1, 2, 3... y recordando que

$$z^0+z^{-0}=2,\ \text{y}\quad z^1+z^{-1}=\frac{f}{g},$$

se deducen las siguientes expresiones particulares:

(38)

$$z^0 + z^{-0} = 2$$

$$z^1 + z^{-1} = \frac{f}{g}$$

$$z^2 + z^{-2} = \frac{f^2}{g^2} + 2$$

$$z^3 + z^{-3} = \frac{f^3}{g^3} - 3\frac{f}{g}$$

$$z^4 + z^{-4} = \frac{f^4}{g^4} - 4\frac{f^2}{g^2} + 2$$

....

(39)

$$\frac{z^0 - z^{-0}}{z - z^{-1}} = 0$$

$$\frac{z - z^{-1}}{z - z^{-1}} = 1$$

$$\frac{z^2 - z^{-2}}{z - z^{-1}} = \frac{f}{g}$$

$$\frac{z^3 - z^{-3}}{z - z^{-1}} = \frac{f^2}{g^2} - 1$$

$$\frac{z^4 - z^{-4}}{z - z^{-1}} = \frac{f^3}{g^3} - 2\frac{f}{g}$$

....

Las fórmulas generales, de donde proceden ó se derivan las expresiones precedentes, —de cuya exactitud, por otra parte, podemos cerciorarnos con auxilio de las ecuaciones condicionales (37),— son éstas: (40)

$$z^n + z^{-n} = \frac{f^n}{g^n} - M_1\frac{f^{n-2}}{g^{n-2}} + M_2\frac{f^{n-4}}{g^{n-4}} - M_3\frac{f^{n-6}}{g^{n-6}} + \dots\dots; \quad \text{y}$$

$$\frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}} = \frac{f^{n-1}}{g^{n-1}} - N_1\frac{f^{n-3}}{g^{n-3}} + N_2\frac{f^{n-5}}{g^{n-5}} - N_3\frac{f^{n-7}}{g^{n-7}} + \dots\dots:$$

en las cuales las letras M y N designan abreviadamente lo expuesto en el §. 17.

Con auxilio de estas dos últimas fórmulas, los binomios contenidos en las ecuaciones (36) pueden eliminarse, ó quedar reemplazados por polinomios de los grados n, $n-1$, $n-2$, ..., con respecto á la letra f. Y, verificada esta eliminacion, las dos ecuaciones últimamente citadas se transforman, sin variante alguna, en las que páginas más atrás designamos por (30) y (31), y detenidamente analizamos.

Ni puede ser de otro modo: por cuanto las (30) y (31) proceden de la ecuacion general, del grado $2n$, por la sustitucion sucesiva de $g(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ y de $g(\cos\varphi - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)$, en vez de x; y las (36) por la de $-gz$ y $-gz^{-1}$. Y como, si suponemos que

$$z = \cos\varphi + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

lo será tambien

$$z^{-1} = \cos\varphi - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi;$$

y como estos valores particulares de z y de z^{-1} satisfacen á las relaciones (37), las dos transformaciones de la ecuacion general coinciden en principio y no pueden discrepar esencialmente en los resultados ni en un ápice. A mayor abundamiento, y conforme en uno de los *Apéndices* á esta MEMORIA se demostrará, conviene advertir todavía que las fórmulas auxiliares (40) solo en la apariencia difieren de las que en el capítulo anterior nos sirvieron para expresar el $\cos n\varphi$ y la relacion $\frac{\mathrm{sen}\,n\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi}$, en funcion de las potencias enteras decrecientes de $\cos\varphi$.—Inútil es, en consecuencia, insistir un momento más sobre este punto.

§. 22.

Dificultades que pueden presentarse al descomponer una ecuacion en trinomios reales de segundo grado, cuando son asimismo reales sus binomios componentes de primero.

Cuando todas las raices de la ecuacion propuesta son *imaginarias*,

$$v = \sqrt{ab} = \sqrt{(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\alpha - \beta\sqrt{-1})} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = g;$$

y este valor de v sabemos ya cómo se encuentra ó determina. Y, cuando *reales*, la investigacion es análoga é igualmente sencilla. En ambos casos los diversos valores de v se deducen por la division, unos por otros, de los coeficientes de órden *impar* de la ecuacion final, transformada de la primitiva por la regla del §. 3.°, y extraccion de las raices aritméticas de los cocientes así obtenidos, cuyos *índices* coinciden con los exponentes de las potencias á que las raices de la ecuacion propuesta se hubieren en último término elevado. Esto supone que la propuesta es de grado *par*, $2n$ por ejemplo; pero, si no lo fuese, bastaría multiplicarla por el factor $(x+0)$, ó todos sus términos por x, para que, sin complicacion de ningun género, pasase del grado $2n-1$ al $2n$, al cual se aplican los razonamientos anteriores. Sean, pues, *reales* ó *imaginarias* todas las raices de una ecuacion, su distribucion en trinomios reales de segundo grado podrá siempre verificarse ateniéndose á las mismas reglas.

Obtenido un trinomio de la forma x^2+fx+v, la manera más sencilla de encontrar las dos raices, a y b, en él comprendidas, parece ser la siguiente.

1.° Si $v>0$ y $f<2\sqrt{v}$, suponiendo que $\dfrac{f}{2\sqrt{v}}=\cos\varphi$,

$$(41)\qquad \begin{cases} a=\sqrt{v}\,(-\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\varphi), \quad \text{y} \\ b=\sqrt{v}\,(-\cos\varphi-\sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\varphi). \end{cases}$$

2.° Si $v>0$ y $f>2\sqrt{v}$, suponiendo que $\dfrac{2\sqrt{v}}{f}=\operatorname{sen}\varphi$,

$$(42)\qquad a=-\sqrt{v}\,.\operatorname{tang}{}^1/_2\varphi; \quad \text{y } b=-\sqrt{v}\,.\cot{}^1/_2\varphi.$$

Y 3.° Si $v<0$, prescindiendo por de pronto del signo de v, y suponiendo que $\dfrac{2\sqrt{v}}{f}=\operatorname{tang}\varphi$,

$$(43)\qquad a=+\sqrt{v}\,.\operatorname{tang}{}^1/_2\varphi; \quad \text{y } b=-\sqrt{v}\,.\cot{}^1/_2\varphi.$$

Pero ¿cuál es el *signo* de v?

Cuando las dos raices a y b son imaginarias *conjugadas*, v es esencialmente *positivo;* pero, cuando *reales*, lo mismo puede ser positivo que negativo. Y como v se deduce, no de la ecuacion propuesta, sino de la transformada cuyas raíces, a^{2m} y b^{2m}, son, en el segundo supuesto, por necesidad *positivas*, y positivo por lo tanto su producto, ó el valor de v^{2m}, despues de extraer de este producto la raiz $2m$, falta determinar el signo de v: signo del cual dependen el cálculo nada breve y el valor de f, y, por consecuencia, tambien los valores de a y b.—La descomposicion en trinomios de segundo grado de la ecuacion propuesta, y, por lo tanto, su resolucion en factores de primero, cuando directamente no pueda esto verificarse, presenta por tal motivo cierta dificultad ó incertidumbre, que de algun modo conviene desvanecer ó eludir.

El más sencillo consiste en operar, hasta resolverla por completo en trinomios de segundo grado, no sobre la ecuacion primitiva, sino sobre su primera transformada (2^1), ó sobre aquella ecuacion cuyas raices sean los *cuadrados* de las mismas raices que se buscan. Porque si los trinomios de la primera son de la forma

$$x^2 + fx + v = (x + a)(x + b),$$

los de la segunda lo serán de esta otra:

$$x^2 + f_2 x + v_2 = (x + a^2)(x + b^2);$$

y si fuere, ó más fácil, ó más directo y preciso, hallar los valores de f_2 y v_2 que los de f y v, éstos se deducirían luégo de los anteriores por las siguientes sencillísimas fórmulas:

$$(44) \quad v = \pm\sqrt{v_2}; \ \text{y} \ f = \pm\sqrt{f_2 \pm 2\sqrt{v_2}}.$$

En el cálculo de f, $\sqrt{v_2}$ debe poseer el mismo signo que en el de v; y por este concepto no cabe incertidumbre ó ambigüedad en los resultados. Pero, concerniente á los signos de v y de f, que deben adoptarse para componer el trinomio x^2+fx+v, la ambigüedad subsiste por completo; y sólo por tanteos, largos y fastidiosos, puede disiparse en la práctica. Preferible, pues, al uso de las fórmulas (44), es el de las (42) y (43), aplicables á la investigacion de las raices, a^2 y b^2, comprendidas en el trinomio $x^2+f_2x+v_2$: porque, calculados estos valores, inmediatamente se deducirán los de a y b; y por simple sustitucion suya en la ecuacion propuesta, se advertirá luégo sin dificultad qué signos deben precederles para que puedan considerarse como verdaderas raices, ó valores legítimos de la incógnita x.

Respecto al signo de v_2 no cabe duda de que en todos los casos debe ser *positivo*.

Porque, si las raíces de la ecuacion primitiva fuesen imaginarias y de la forma $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, el trinomio real $x^2+f_2x+v_2$ coincidirá con este otro:

$$x^2+2g^2\cos 2\varphi\,.\,x+g^4;$$

en el cual

$$g^4=v_2=(\alpha^2+\beta^2)^2;\ \text{ y }\ \cos\varphi=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Si de la forma $\pm\beta\sqrt{-1}$, con el trinomio

$$x^2-2\beta^2x+\beta^4=(x-\beta^2)\,(x-\beta^2).$$

Y, si *reales*, el trinomio de la transformada equivaldrá al producto de estos dos factores:

$$(x+a^2)\times(x+b^2);$$

y v^2, igual entónces á $(ab)^2$, sería necesariamente *positivo*, cualquiera que fuere el signo de ab ó de v.

El segundo, muy excepcional, de los tres casos considerados, ó aquel en que la primera transformada de la ecuacion propuesta comprenda dos factores reales de la forma $(x-\beta^2)$, parece todavía de interpretacion un poco dudosa: porque, combinado uno de estos factores con cualquiera otro real de *primer* grado, el trinomio resultante de *segundo*, tendria su último término *negativo*. Pero si las v_2, obtenidas por el procedimiento latamente explicado, para hallar luégo los diversos valores de g^2 ó de v, se consideran como *positivas* todas, una habrá entre ellas que corresponderá al trinomio $x^2-2g^2x+g^4$; y la descomposicion de la primera transformada (2^1) en un cierto producto de trinomios de segundo grado, áun entónces será factible sin asomo de ambigüedad.

Por lo demas, conviene advertir que esta tan curiosa y nimia manera de analizar y descomponer en otras más sencillas, de segundo grado, la ecuacion propuesta, operando sobre su primera transformada, admite en la práctica muy raras aplicaciones. Porque si las raices de la primitiva son todas reales, —y áun cuando sólo en parte lo sean, como en otro capítulo veremos,— lo más directo y breve es determinar sus valores por el método general, ó emprender desde luégo la descomposicion de aquella ecuacion en factores de primer grado; y si en totalidad imaginarias, como han de ser *conjugadas*, en el signo de v no cabe incertidumbre, y la descomposicion inmediata en trinomios de segundo grado podrá tambien verificarse entónces sin dificultad teórica de ningun género. A esta descomposicion, aplicada, no á la ecuacion primitiva (2^0), sino á su transformada primera (2^1), sólo habrá que apelar cuando, por excepcion un poco extraña, las raices reales de aquella ecuacion, prescindiendo de sus signos, discrepen apénas unas de otras, y sea, por lo tanto, muy lento, ó tal vez ineficaz, el primer método de análisis (§. 3.º), y ambiguo el segundo, que se acaba de exponer, por desconocerse *á priori* el signo de v.

Y que nos hallamos en este caso excepcional lo advertiremos en los caractéres siguientes:

1.º En que los coeficientes de las transformadas sucesivas, cualquiera que sea la potencia á que las raices de la propuesta se eleven, son siempre *positivos:* prueba de que estas raices son todas *reales;* pues, si existiesen siquiera dos *imaginarias*, el coeficiente, $2\cos m\varphi$, del trinomio

$$x^2+2\cos m\varphi\,.\,x+g^{2m},$$

aumentando m indefinidamente, debería cambiar una ó varias veces de signo, é introducir una perturbacion en los signos del producto total de factores, de primero ó de segundo grado, componentes de las varias ecuaciones transformadas.

Y 2.º En que uno ó más coeficientes de estas transformadas sucesivas variarían con grandísima lentitud, sin aproximarse ó convergir hácia un *límite* determinado, ó sin que en su composicion, al pasar de la transformada de órden 2^m á la del 2^{2m}, dejasen de influir eficazmente los demás coeficientes de la última ecuacion, por la regla general (§. 3.º) obtenida ó derivada de la propuesta.

Concluyamos. Si en las transformadas sucesivas algun término cambia de signo, indicio evidente es de que la propuesta posee raices imaginarias; y si, tras de un coeficiente de magnitud y signo variables, figura otro, siempre *positivo* y de valor *limitado*, ó independiente de los coeficientes anteriores y posteriores en el paso de una transformada á otra, de órden superior, no es ménos cierto que de él podrán deducirse luégo uno ó más valores de v, esencialmente *positivos* tambien, por corresponder á doble número de raices de aquella especie, *conjugadas*. Duda sobre el signo de v no puede surgir, sino cuando esta cantidad se desprenda de algun coeficiente de la transformada final, constantemente precedido en las intermedias de otro positivo: duda que las anteriores reflexiones contribuirán á disipar ó esclarecer, cuando, por excepcion muy rara, y como por casualidad, se presentare.

§. 23.

Ampliase la regla de Newton, para la correccion de las raices aproximadas de una ecuacion numérica, á la correccion de los trinomios de segundo grado.

Si en vez de ser imaginarias las dos raices contenidas en el trinomio $x^2+f_0x+v_0$, fuesen reales, y si en vez de corregir por la regla ó fórmula de Newton los valores aproximados de estas raices, x_0 y x'_0, se considerase preferible corregir los de f_0 y v_0, procederíase del siguiente modo, análogo, y hasta idéntico casi, al explicado en el supuesto anterior, en el §. 14.—Cuanto en este capítulo vamos exponiendo no es, en efecto, más que un resúmen, y como reproduccion desde diverso punto de vista, de la materia comprendida en los dos anteriores.

En la ecuacion propuesta, $f(x)=0$, sustitúyanse sucesivamente por x sus dos valores aproximados

$$x=-g_0z_0, \text{ y } x'_0=-g_0z^{-1},$$

y se obtendrán estos dos distintos resultados numéricos:

$$[(-g_0z_0)^n]=A, \text{ y } [(-g_0z_0^{-1})^n]=B.$$

Y, multiplicando cada término de los polinomios A y B por el exponente de la x_0 ó x'_0, en él contenida, se deducirán tambien, y al propio tiempo casi, estos otros dos:

$$[n(-g_0z_0)^n]=p, \text{ y } [n(-g_0z_0^{-1})^n]=q.$$

La fórmula general de Newton

$$0=f(x_0+\Delta x_0)=f(x_0)+f'(x_0)\times\Delta x_0=$$

$$f(x_0)+xf'(x_0)\times\frac{\Delta x_0}{x_0}=[x_0{}^n]+[nx_0{}^n]\times\Delta\log x_0,$$

se convierte, en los anteriores supuestos, en las dos que siguen:

$$0=A+p\times\Delta\log x_0, \text{ y } 0=B+q\times\Delta\log x'_0.$$

Mas, por ser

$$x_0=-g_0z_0;\ \log x_0=\log(-g_0)+\log z_0; \text{ y}$$

$$\Delta\log x_0=\Delta\log g_0+\Delta\log z_0;$$

y

$$x'_0 = -g_0 z_0^{-1};\ \log x'_0 = \log(-g_0) - \log z_0;\ \text{y}$$

$$\Delta \log x'_0 = \Delta \log g_0 - \Delta \log z_0,$$

conclúyese que

$$A + p \times (\Delta \log g_0 + \Delta \log z_0) = 0;\ \text{y}$$

$$B + q \times (\Delta \log g_0 - \Delta \log z_0) = 0,$$

Y de estas últimas ecuaciones inmediatamente se desprende que

$$(45)\quad \begin{cases} \Delta \log g_0 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{q}\right), \text{ y} \\ \Delta \log z_0 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{A}{p} - \dfrac{B}{q}\right). \end{cases}$$

Supongamos ahora que las dos raices x_0 y x'_0 sean reales y del mismo signo, lo cual exige que $v_0 = g_0^2 > 0$, y $< {}^1/_4\, f_0^2$.

Por de pronto podremos escribir entónces las siguientes igualdades:

$$f_0 = (x_0 + x_0^{-1}) = g_0(z_0 + z_0^{-1});\ \text{y}$$

$$(46)\quad \begin{cases} \log f_0 = \log g_0 + \log(z_0 + z_0^{-1}),\ \text{ó} \\ \Delta \log f_0 = \Delta \log g_0 + \Delta \log(z_0 + z_0^{-1}). \end{cases}$$

Y si suponemos ademas, —en lo cual no hay dificultad ni inconveniente de ninguna especie,— que $\dfrac{2\sqrt{v_0}}{f_0} = \operatorname{sen} \varphi_0$, nos resultará, como al deducir las ecuaciones (42), que:

$$z_0 = \operatorname{tang} {}^1/_2\, \varphi_0,\ \text{y}\ z^{-1} = \cot {}^1/_2\, \varphi.$$

Y, por lo tanto:

$$\Delta \log(z_0 + z_0^{-1}) = \Delta \log \frac{2}{\operatorname{sen} \varphi_0} = -\Delta \log \operatorname{sen} \varphi_0 =$$

$$-\frac{\Delta \operatorname{sen} \varphi_0}{\operatorname{sen} \varphi_0} = -\frac{\cos \varphi_0}{\operatorname{sen} \varphi_0} \times \Delta \varphi_0; \text{ y}$$

$$\Delta \log z_0 = \Delta \log \operatorname{tang} {}^1/_2 \varphi_0 = \frac{\Delta \operatorname{tang} {}^1/_2 \varphi_0}{\operatorname{tang} {}^1/_2 \varphi_0} = \frac{\Delta \varphi_0}{\operatorname{sen} \varphi_0}$$

De donde, por la simple eliminacion de $\Delta \varphi_0$, se desprende esta otra relacion:

$$\Delta \log (z_0 + z_0^{-1}) = -\cos \varphi_0 \times \Delta \log z_0.$$

Y con esto, la primera de las ecuaciones (45) y la segunda de las (46) se convierten en las que siguen:

$$(47) \qquad 2 \times \Delta \log g_0 = \Delta \log v_0 = -M\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right); \text{ y}$$

$$(48) \quad \Delta \log f_0 = -\frac{M}{2}\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right) + \frac{M}{2} \cos \varphi_0 \left(\frac{A}{p} - \frac{B}{q}\right) =$$

$$-M\left(\frac{A}{p} \operatorname{sen}^2 {}^1/_2 \varphi_0 + \frac{B}{q} \cos^2 {}^1/_2 \varphi_0\right).$$

La letra M representa en estas últimas fórmulas el *módulo* de las tablas comunes, ó el número por que deben multiplicarse los logaritmos *neperianos* para convertirlos en *vulgares:* número por brevedad omitido en las líneas anteriores.

Pero, en vez de suponerlas del mismo signo, podemos atribuir signos opuestos á las dos raices reales x_0 y x'_0.

En este caso, que se verificará cuando v_0 sea menor que cero ($v_0 < 0$), podremos escribir por de pronto que

(49)
$$f_0 = x_0 + x'_0 = g_0 (z_0 - z_0^{-1}); \text{ ó}$$
$$\Delta \log f_0 = \Delta \log g_0 + \Delta \log (z_0 - z_0^{-1}).$$

Y si, prescindiendo del signo de v_0, suponemos que $\frac{2\sqrt{v_0}}{f_0} = \text{tang}\, \varphi_0$, nos resultará tambien que

$$z_0 = \cot {}^1/_2\, \varphi_0, \text{ y } z_0^{-1} = \text{tang}\, {}^1/_2\, \varphi_0$$

Y de aquí, procediendo del propio modo que en el caso anterior, llegaremos sucesivamente á los siguientes resultados:

$$\Delta \log (z_0 - z_0^{-1}) = \Delta \log . \cot \varphi_0 = \frac{-\Delta \varphi_0}{\text{sen}\, \varphi_0 \cos \varphi_0}; \text{ y}$$

$$\Delta \log z_0 = \Delta \log \cot {}^1/_2\, \varphi_0 = \frac{-\Delta \varphi_0}{\text{sen}\ \varphi_0}: \text{ ó}$$

$$\Delta \log (z_0 - z_0^{-1}) = \sec \varphi_0 \times \Delta \log z_0.$$

Y de esta última relacion, combinada con la segunda de las (49), y las dos (45), se desprende esta otra final, que es la buscada:

(50)
$$\Delta \log f_0 = -\frac{M}{2}\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right) - \frac{M}{2} \sec \varphi_0 \left(\frac{A}{p} - \frac{B}{q}\right) =$$
$$-\frac{M}{\cos \varphi_0}\left(\frac{A}{p} \cos^2 {}^1/_2\, \varphi_0 - \frac{B}{q} \text{sen}^2\, {}^1/_2\, \varphi_0\right).$$

La (47), referente á la correccion que debe aplicarse al logaritmo de v_0, vale lo mismo para el caso en que las dos raices reales del trinomio $x^2 + f_0 x + v_0$ tengan signos iguales, como contrarios ú opuestos.

La posibilidad de corregir los valores aproximados de f_0 y v_0, despues de conocidos los aproximados tambien de x_0 y x'_0, que del último trinomio se desprenden, queda con esto demostrada, y explicado á la vez el método que para calcular tales correcciones debe seguirse.

§. 24.

Aplicacion de lo expuesto á la resolucion de un ejemplo.

Ilustremos con un ejemplo el punto teórico más importante en este capítulo considerado: el referente á la dificultad ó anomalía de que, poseyendo la ecuacion propuesta raices reales exclusivamente, *convenga*, sin embargo, analizarla como si todas fuesen imaginarias, y operar, hasta resolverla por completo, sobre su primera transformada.

Sea, pues, esta ecuacion muy sencilla la que nos proponemos resolver:

$$(2^0) \quad x^4 - 2x^3 - 61x^2 + 150x - 89 = 0.$$

Su primera transformada, inmediata ó directamente deducida por la regla del (§. 3.º), es la que sigue:

$$(2^1) \quad x^4 + 126x^3 + 4143x^2 + 11642x + 7921 = 0.$$

Reemplazando ahora los coeficientes por sus logaritmos y aplicando luégo tres veces consecutivas, á la formacion de nuevas transformadas, la regla que se acaba de mencionar, obtendremos los resultados que á continuacion se expresan:

$$(2^1)\quad x^4 + 2.1003705\,x^3 + 3.6173149\,x^2 + 4.0660276\,x + 3.8987800 = 0$$

$$(2^2)\quad x^4 + 3.8802416\,x^3 + 7.1537083\,x^2 + 7.8444944\,x + 7.7975600 = 0$$

$$(2^3)\quad x^4 + 7.4641175\,x^3 + 14.3051403\,x^2 + 15.4911771\,x + 15.5951200 = 0$$

$$(2^4)\quad x^4 + 14.6472678\,x^3 + 28.6102787\,x^2 + 30.9037531\,x + 31.1902400 = 0$$

Del exámen de estas ecuaciones se desprenden dos consecuencias importantes.

1.ª Que las raices de la ecuacion (2^0) son todas reales; puesto que todos los coeficientes de sus diversas transformadas son *positivos*.

Y 2.ª Que desde la ecuacion (2^4) en adelante los coeficientes tercero y quinto, —de x^2 y x^0,— se deducen por simple *duplicacion* de los del mismo lugar ó nombre que les preceden, ó son independientes de los anteriores y posteriores de la última transformada obtenida; mas no los coeficientes segundo y cuarto, —de x^3 y x,— los cuales experimentan todavía grandes modificaciones, en el paso de una transformada á otra, por resultado de la influencia que en sus valores ejercen los de x^2, y de x^3 y x^0.

Si, pues, en el órden decreciente de magnitud *absoluta*, ó prescindiendo de los signos, representamos las cuatro raices de la ecuacion (2^0) por las letras a, b, c y d, resulta de lo acabado de advertir que en la ecuacion (2^4) los coeficientes de x^2 y x^0 representan los logaritmos de $a^{2^4}b^{2^4}$ y de $a^{2^4}b^{2^4}c^{2^4}d^{2^4}$; pero no los de a^{2^4}, ni de $a^{2^4}b^{2^4}c^{2^4}$, los de x^3 *y* x. La separacion de las raices es solo parcial y no total; y lo único que de la transformada (2^4) podemos desde luégo deducir son los valores de $a \times b$ y de $c \times d$: precisamente los que en los anteriores párrafos hemos designado por y_0^2 y y_1^2, ó, con mayor propiedad, por v_0 y v'_0.

En efecto:

$$2^4 \times \log ab \quad = 28.6102787; \text{ y}$$

$$2^4 \times \log abcd = 31.1902400.$$

De donde facilísimamente se concluye que

$$ab = v_0 = 61.396324; \text{ y } cd = v'_0 = 1.449598.$$

Si nos empeñásemos en obtener las cuatro raices de la ecuacion (2^0) por el procedimiento general, explicado y practicado en el Capítulo I, deberíamos continuar la serie de transformaciones de aquella ecuacion hasta dar con una derivada suya, cuyos coeficientes fuesen todos, como los de x^2 y x^0 en las (2^5), independientes por completo de los anteriores y posteriores en la transformada precedente.—¿Y cuál sería en este caso la transformada final?—La novena (2^9). Pero otros casos ó ejemplos análogos podrían presentarse en que la separacion completa de las raices exigiese todavía número mucho mayor de transformaciones sucesivas; por más que, agrupadas por *pares*, en el órden de magnitud decreciente, los productos binarios de aquellas raices pudieran determinarse con suma facilidad y prontitud. Importa, pues, áun cuando no sea nunca de necesidad absoluta, determinar los valores de las raices por un procedimiento algo más expedito que el general, en el presente y otros casos parecidos: y para esto sirve la descomposicion de la ecuacion propuesta en trinomios reales de segundo grado.

Pero, conocidos ya los valores de v_0 y v'_0, ¿será siempre factible determinar los de f_0 y f'_0 por las fórmulas adecuadas al objeto, insertas en el (§. 17)? ¿por las (a) y (b) del (§. 18) en este caso?—De ningun modo. Los valores de v_0 y v'_0, que acabamos de encontrar, como si se tratase del cálculo de los módulos de las raices imaginarias, pueden ser *positivos* ó *negativos;* y respecto á los verdaderos signos que debemos anteponerles estamos en la más completa ignorancia. Lo único que el signo del último término de la ecuacion (2°) nos revela es que *una* ó *tres* de sus raices son *negativas:* que si v_0 es positivo, v'_0 será negativo, y viceversa; y con esto sólo no sabemos lo bastante para proceder, con plena seguridad de acierto, á la investigacion de los valores de f_0 y f'_0.

Prescindamos, pues, de la ecuacion (2°), ya que en su resolucion tropezamos por todas partes con dificultades imprevistas y de índole extraña y como rebelde al análisis, y fijemos por un momento la atencion en la (2^1): resuelta la segunda, como resuelta puede considerarse tambien aquella de donde procede.

De la transformada (2^4) deduciremos los valores de v_2 y v'_2, *positivos ambos* con toda seguridad, como dedujimos los de v_0 y v'_0, de signo incierto y desconocido; por las fórmulas citadas del (§. 18), ó por el procedimiento explicado en el (§. 13), que es en este caso todavía más sencillo, calcularemos los de f_2 y f'_2: con lo cual la descomposicion en trinomios de segundo grado de la ecuacion (2^1) queda verificada; de estos trinomios, $x^2+f_2x+v_2$ y $x^2+f'_2x+v'_2$, por las fórmulas (42), se deducirán los valores de a^2, b^2, c^2 y d^2; y los de a, b, c y d se concluirán inmediatamente de estos últimos. La condicion de que la suma de estas cuatro *raices*, consideradas en el sentido vulgar algebráico, ha de ser igual en valor, pero de signo contrario, al coeficiente del segundo término de la ecuacion (2°), bastará muchas veces para determinar los signos de las cuatro; y, si esta condicion no fuese suficiente, la sustitucion en la ecuacion (2°) de los valores numéricos encontrados, indicará el sentido en que deben tomarse, y disipará cualquier duda que sobre este punto reinare todavía.

Compendiemos en el más breve espacio posible las diversas operaciones que para resolver la ecuacion (2°) deben por este procedimiento verificarse.

De la (2^4) se deduce que

$$2^3\times\log v_2=28.6102787;\ \text{y}\ 2^3\times\log v_2 v'_2=31.1902400.$$

Los valores de v_2 y v'_2, de estas ecuaciones resultantes, son los siguientes:

$$v_2 = 3769.5098; \text{ y } v'_2 = 2.1013345.$$

Y por las fórmulas (a) y (b) del (§. 18), ó por el método del (§. 13), se deduce luégo que

$$f_2 = 122.98009; \text{ y } f_2' = 3.019909.$$

Con esto, la ecuacion (2^1) se halla ya descompuesta en dos trinomios de segundo grado, cuya resolucion en factores de primero se verificará con auxilio de las fórmulas (42), segun á continuacion se indica:

Primer trinomio.		*Segundo trinomio.*	
$\frac{2\sqrt{v_2}}{f_2} = \text{sen}\varphi_2$		$\frac{2\sqrt{v'_2}}{f'_2} = \text{sen}\ \varphi_2$	
$\log v_2 =$	3.5762848	$\log v'_2 =$	0.3224952
$\log \sqrt{v_2} =$	1.7881424	$\log \sqrt{v'_2} =$	0.1612476
$\log 2 =$	0.3010300	$\log 2 =$	0.3010300
c.° $\log f_2 =$	$\bar{3}.9101652$	c.° $\log f'_2 =$	$\bar{1}.5200061$
$\log \text{sen}\ \varphi_2 =$	$\bar{1}.9993376$	$\log.\ \text{sen}\ \varphi'_2 =$	$\bar{1}.9822837$
$\varphi_2 =$	$86°50'11.''0$	$\varphi'_2 =$	$73°44'43.''6$
$^1/_2\, \varphi_2 =$	$43°25'\ 5.''5$	$^1/_2\, \varphi'_2 =$	$36°52'21.''8$
$\log.\ \text{tang}\ ^1/_2\, \varphi_2 =$	$\bar{1}.9760081$	$\log.\ \text{tang}\ ^1/_2\, \varphi'_2 =$	$\bar{1}.8751059$
$\log \sqrt{v_2} =$	1.7881424	$\log \sqrt{v'_2} =$	0.1612476
$\log a^2 =$	1.8121343	$\log c^2 =$	0.2861417
$\log b^2 =$	1.7641505	$\log d^2 =$	0.0363535

Y, encontrados ya los logaritmos de a^2, b^2, c^2 y d^2, ó resuelta la ecuacion (2^1), como resuelta puede, en efecto, considerarse la (2°). Avanzando un paso más, conclúyese finalmente que

$$\log a = 0.9060671 \qquad \log c = 0.1430708$$
$$\log b = 0.8820752 \qquad \log d = 0.0181767$$

$$a = 8.055030 \qquad c = 1.390179$$
$$b = 7.622110 \qquad d = 1.042742$$

¿Cuáles son los signos de estas cuatro raices?—Negativo el de la primera, ó mayor en absoluto; y positivo el de las otras tres: de otra manera no es posible que la suma de las cuatro sea igual al número $+2$, ó al coeficiente del segundo término de la ecuacion (2°), tomado con signo contrario, como debe serlo muy aproximadamente, si en el cálculo de estas raices no se ha cometido algun error de cuantía.

CAPITULO V.

Resolucion de la ecuacion numérica del grado $2n$, cuyas raices, reales é imaginarias, son desiguales, ó sensiblemente discrepantes unas de otras.

§. 25.

Enunciado del problema y condiciones previas á su resolucion.

Rigurosamente considerado el asunto, la solucion del problema que nos ocupa hállase implícitamente contenida en los capítulos anteriores; siendo menester únicamente para completarla é ilustrarla resumir y generalizar cuanto en las páginas precedentes, en diversos casos particulares y bajo de aspectos muy distintos, queda ya expuesto y muy al pormenor detallado.

Consideremos para ello el caso general de contener la ecuacion propuesta, que se trata de resolver, simultáneamente raices reales é imaginarias; pero con la doble restriccion, por de pronto, de que las raices de ambas especies sean *desiguales*, y de que, distribuidas las reales, por su órden de magnitud absoluta, en distintos *pares*, ningun módulo de las imaginarias se halle comprendido entre las dos raices componentes de cada *par*.—Luégo se examinarán y discutirán los casos excepcionales en que estas condiciones previas fallen ó no se verifiquen.

Multiplicando, si fuere menester, por x la ecuacion propuesta, su *grado* podrá representarse por $2n$, y será susceptible de resolverse ó descomponerse en n trinomios reales de segundo grado, de la forma $x^2 + fx + v$; y tambien en dos solos factores ó polinomios de la misma especie: uno, del grado $2p$, que contendrá todas las raices reales; y otro, del grado $2q$, todas las imaginarias.—Los valores de v son las verdaderas incógnitas del problema; pues, si por cualquier medio conseguimos determinarlos, los de f se deducirán luégo, sin dificultad teórica, por el procedimiento en los dos últimos capítulos latamente referido.

Téngase ahora muy presente que estos valores de v deben y pueden considerarse como *productos binarios* de dos raices reales, a y b; ó como cuadrados del módulo comun de dos imaginarias, *conjugadas*. Y si las raices de la primera especie, escritas por órden de magnitud decreciente, y distribuidas por *pares*, son éstas:

$$a_1 \text{ y } b_1, \quad a_2 \text{ y } b_2, \quad a_3 \text{ y } b_3, \; \ldots\ldots;$$

y las de la segunda, por el órden de magnitud de sus módulos y pares de conjugadas, estas otras:

$$g_1 (\cos \varphi_1 \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} \varphi_1), \quad g_2 (\cos \varphi_2 \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} \varphi_2), \; \ldots\ldots;$$

los diversos valores de v, correspondientes á los n trinomios de segundo grado, en que pretendemos descomponer la ecuacion primitiva, podrán representarse del siguiente modo:

$$v_1 = a_1 b_1; \quad v_2 = a_2 b_2; \; \ldots\ldots; \quad V_1 = g_1^2; \quad V_2 = g_2^2; \; \ldots\ldots$$

Y, si entre las magnitudes de estos valores de v establecemos, por ejemplo, la relacion ó dependencia

$$v_1 > V_1 > V_2 > v_2 > V_3 > \ldots\ldots,$$

conviene advertir que no sólo, por hipótesis, g_2^2 será mayor que el producto $a_2 b_2 (= v_2)$; sino g_2 mayor tambien que a_2 y que b_2; y no sólo g_3^2 menor que el mismo producto $a_2 b_2 (v_2 > V_3)$, sino menor que a_2 y que b_2. De esta manera ninguno de los módulos consecutivos, g_2 y g_3, se hallará comprendido entre dos raices reales, consecutivas tambien, a_2 y b_2: conforme piden las condiciones preliminares del problema, poco ántes enunciadas.

§. 26.

Resolucion del problema en dos distintos supuestos, ambos muy amplios ó generales.

(a)—Figurémonos ahora que la ecuacion propuesta procede del producto de otras dos ecuaciones, una que contenga todas sus raices reales, y la otra todas las imaginarias. La transformada, cuyas raices sean las potencias del grado m de las raices de la primitiva, podrá tambien considerarse como procedente de la multiplicacion de otras dos ecuaciones análogas: una, cuyas raices serán las potencias m de las raices reales que nos proponemos determinar; y, otra, las potencias del mismo grado de las imaginarias. Estas dos últimas ecuaciones, componentes de la final, y respectivamente de los grados $2p$ y $2q$, á condicion de ser $2p + 2q = 2n$, pueden representarse como sigue, en virtud de todo lo expuesto en los lugares oportunos de los dos primeros capítulos: (51)

$$x^{2p} + P_1 x^{2p-1} + P_2 x^{2p-2} + P_3 x^{2p-3} + P_4 x^{2p-4} + \ldots\ldots = 0, \text{ y}$$

$$x^{2q} + Q_1 x^{2q-1} + Q_2 x^{2q-2} + Q_3 x^{2q-3} + Q_4 x^{2q-4} + \ldots\ldots = 0:$$

en las cuales debe entenderse que

$$\left.\begin{array}{l}
P_1=[a_1^{m}]=a_1^{m}+b_1^{m}+a_2^{m}+b_2^{m}+\ldots\ldots \\
P_2=[a_1^{m}\,b_1^{m}]=a_1^{m}\,b_1^{m}+a_1^{m}\,a_2^{m}+\ldots\ldots \\
P_3=[a_1^{m}\,b_1^{m}\,a_2^{m}]=a_1^{m}\,b_1^{m}\,a_2^{m}+a^{m}\,b_1^{m}\,b_2^{m}+\ldots\ldots \\
P_4=[a_1^{m}\,b_1^{m}\,a_2^{m}\,b_2^{m}]=a_1^{m}\,b_1^{m}\,a_2^{m}\,b_2^{m}+\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}, \text{ y}$$

$$\left.\begin{array}{l}
Q_1=[f'_{m}] \\
Q_2=[g_1^{2m}]+[f'_{m}\,f''_{m}] \\
Q_3=[g_1^{2m}\,f'_{m}]+[f'_{m}\,f''_{m}\,f'''_{m}] \\
Q_4=[g_1^{2m}\,g_2^{2m}]+[g_1^{2m}\,f''_{m}\,f'''_{m}]+[f'_{m}\,f''_{m}\,f'''_{m}\,f^{\mathrm{IV}}_{m}] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}$$

Y multiplicándolas una por otra, é igualando á *cero* su producto, obtendremos la transformada de la ecuacion primera, ó la ecuacion cuyas raices son las potencias m de las mismas raices de aquella que tratamos de resolver. Esta ecuacion, derivada de la primitiva por la regla general del §. 3, y en cuyo exámen debemos ocuparnos, es la siguiente (52):

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
x^{2n}+P_1 & x^{2n-1}+\;P_2 & x^{2n-2}+\;P_3 & x^{2n-3}+\;P_4 & x^{2n-4}+\ldots=0. \\
\quad\;\, +Q_1 & \qquad +P_1\,Q_1 & \qquad +P_2\,Q_1 & \qquad +P_3\,Q_1 & \\
 & \qquad +\;Q_2 & \qquad +P_1\,Q_2 & \qquad +P_2\,Q_2 & \\
 & & \qquad +\;Q_3 & \qquad +P_1\,Q_3 & \\
 & & & \qquad +\;Q_4 &
\end{array}$$

Pero, ántes de pasar más adelante, advirtamos ó recordemos tres cosas.

Primera: que el signo [.....] lo es de *suma* de las cantidades que compendia ó simboliza, combinadas entre sí y repetidas de cuantas maneras distintas sea factible verificarlo.

Segunda: que el producto de estas cantidades simbólicas se efectúa como el de las ordinarias comprendidas dentro del corchete ó paréntesis, en términos, por ejemplo, de que

$$P_3\,Q_1 = [a_1^{\mathrm{m}}\,b_1^{\mathrm{m}}\,a_2^{\mathrm{m}}\,f'_{\mathrm{m}}];$$

$$P_2\,Q_2 = [a_1^{\mathrm{m}}\,b_1^{\mathrm{m}}\,g_1^{2\mathrm{m}}] + [a_1^{\mathrm{m}}\,b_1^{\mathrm{m}}\,f'_{\mathrm{m}}\,f''_{\mathrm{m}}]; \ldots\ldots$$

Y, tercera: que entre los símbolos f y g existe la relacion $f_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{k})} = 2\,g_{\mathrm{k}}^{\ \mathrm{m}} \times \cos m\,\varphi_{\mathrm{k}}$: en la cual la letra k indica, en ambos miembros, un número de órden, ó el *par* de raices imaginarias á que las f y g se refieren.

Prévias estas advertencias, veamos si la ecuacion (52), muy complicada en la forma, admite algunas notables simplificaciones.

En el coeficiente de su tercer término $(P_2 + P_1\,Q_1 + Q_2)$ figura la suma $[f'_{\mathrm{m}}\,f''_{\mathrm{m}}]$, incomparablemente menor que la $[g_1^{2\mathrm{m}}]$, conforme aumenta el valor de m, por razones muy al por menor consignadas en el Capítulo II de esta *Memoria*, y que seria ocioso repetir.

En el del cuarto término de la misma ecuacion se advertiría ó concluiría tambien sin dificultad que, con relacion á la suma $[a_1^{\mathrm{m}}\,g_1^{2\mathrm{m}}]$, la $[a_1^{\mathrm{m}}\,f'_{\mathrm{m}}\,f''_{\mathrm{m}}]$ es de todo punto insignificante, lo mismo que la $[f'_{\mathrm{m}}\,f''_{\mathrm{m}}\,f'''_{\mathrm{m}}]$ con respecto á la $[g_1^{2\mathrm{m}}\,f''_{\mathrm{m}}]$.

Y en el coeficiente del quinto término podrán igualmente tildarse por insignificantes ó despreciables,. cuando m represente un número entero muy elevado, las sumas $[a_1^{\mathrm{m}}\,b_1^{\mathrm{m}}\,f'_{\mathrm{m}}\,f'_{\mathrm{m}}]$, $[a_1^{\mathrm{m}}\,f'_{\mathrm{m}}\,f''_{\mathrm{m}}\,f'''_{\mathrm{m}}]$, $[g_1^{2\mathrm{m}}\,f''_{\mathrm{m}}\,f'''_{\mathrm{m}}]$ y $[f'_{\mathrm{m}}\,f''_{\mathrm{m}}\,f'''_{\mathrm{m}}\,f^{\mathrm{IV}}_{\mathrm{m}}]$, en cotejo de las $[a_1^{\mathrm{m}}\,b_1^{\mathrm{m}}\,g_1^{2\mathrm{m}}]$, $[a_1^{\mathrm{m}}\,g_1^{2\mathrm{m}}\,f'_{\mathrm{m}}]$ y $[g_1^{2\mathrm{m}}\,g_2^{2\mathrm{m}}]$.

En vez de la (52) podremos, en consecuencia, escribir esta otra ecuacion, algo más sencilla ó reducida: (53)

$$x^{2n}+C_1x^{2n-1}+C_2x^{2n-2}+C_3x^{2n-3}+C_4x^{2n-4}+\ldots\ldots=0:$$

en la cual, (54)

$$C_1=[a_1{}^m]+[f'_m];$$

$$C_2=[a_1{}^m b_1{}^m]+[a_1{}^m f'_m]+[g_1{}^{2m}];$$

$$C_3=[a_1{}^m b_1{}^m a_2{}^m]+[a_1{}^m b_1{}^m f'_m]+[g_1{}^{2m} f'_m];$$

$$C_4=[a_1{}^m b_1{}^m a_2{}^m b_2{}^m]+[a_1{}^m b_1{}^m a_2{}^m f'_m]+[a_1{}^m b_1{}^m g_1{}^{2m}]+[g_1{}^{2m} g_2{}^{2m}];$$

....

....

En los coeficientes, C, de esta nueva ecuacion es evidente que las sumas [.....], compuestas de solas raices reales, como $[a_1{}^m\, b_1{}^m\, a_2{}^m]$; de solos módulos de imaginarias, como $[g_1{}^{2m}\, g_2{}^{2m}]$; ó de raices reales combinadas con módulos de imaginarias, como $[a_1{}^m\, b_1{}^m\, g_1{}^{2m}]$, propenden, conforme m aumenta indefinidamente, á confundirse con sus primeros términos: por hipótesis, los mayores. Pero las sumas en cuya composicion figura alguna f, por la variabilidad en magnitud y signo de estas cantidades, no es fácil, en principio, saber hacia dónde convergen, ó de qué modo influyen sobre las demas y sobre el valor final del coeficiente á que corresponden.—La duda, sin embargo, se desvanece si exclusivamente nos fijamos en los coeficientes de órden ó lugar *impar*, tercero, quinto, etc., etc., de la expresada ecuacion (53).

Por ejemplo, el coeficiente, C_2, del tercer término propende á confundirse con esta otra expresion más sencilla:

$$a_1{}^m\, b_1{}^m+[a_1{}^m\, f'_m]+g_1{}^{2m}$$

Pero la suma $[a_1{}^m\, f'_m]$ es inferior á $2\,a_1{}^m\, g_1{}^m\,[\cos m\,\varphi_1]$; y esta última expresion, si $g_1{}^2>a_1 b_1$, y $g_1>a_1$, será despreciable con respecto á $g_1{}^{2m}$: ó con respecto á $a_1{}^m\, b_1{}^m$, si las relaciones contrarias de magnitud, entre g_1, y a_1 y b_1, se verifican. Luego aquel coeficiente puede, en el *límite*, ó cuando m sea muy grande, considerarse reducido á $a_1^m\, b_1^m$ ó á g_1^{2m}: á v_1^m ó á V_1^m.

Pues el coeficiente del quinto término se presta á una reduccion ó simplificacion parecida.

Por de pronto aquel coeficiente puede ser escrito como sigue:

$$a_1^m\, b_1^m \times a_2^m\, b_2^m + a_1^m\, b_1^m \times g_1^{2m} + g_1^{2m} \times g_2^{2m}$$
$$+ [a_1^m\, b_1^m\, a_2^m\, f'_m] + [a_1^m\, g_1^{2m}\, f'_m].$$

Y como entre los dos pares de raices reales (a_1 y b_1) y (a_2 y b_2), y los dos módulos, g_1 y g_2, no pueden establecerse más condiciones, compatibles con las preliminares del problema (§. 25), que éstas: (55)

$$a_1^m\, b_1^m > a_2^m\, b_2^m > g_1^{2m} > g_2^{2m}, \text{ y } a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > g_1 > g_2;$$

$$a_1^m\, b_1^m > g_1^{2m} > g_2^{2m} > a_2^m\, b_2^m, \text{ y } a_1 > b_1 > g_1 > g_2 > a_2 > b_2;$$

$$a_1^m\, b_1^m > g_1^{2m} > a_2^m\, b_2^m > g_2^{2m}, \text{ y } a_1 > b_1 > g_1 > a_2 > b_2 > g_2; \text{ y}$$

$$g_1^{2m} > g_2^{2m} > a_1^m\, b_1^m > a_2^m\, b_2^m, \text{ y } g_1 > g_2 > a_1 > b_1 > a_2 > b_2,$$

resulta que, segun los casos, aquel coeficiente, dividido por $a_1^m\, b_1^m \times a_2^m\, b_2^m$, ó por $a_1^m\, b_1^m \times g_1^{2m}$, ó por $g_1^{2m} \times g_2^{2m}$, propenderá en el *límite* hacia la unidad. Luego el coeficiente, sin modificacion alguna previa, propende, ó hacia el límite $v_1^m\, v_2^m$, ó el $v_1^m\, V_1^m$, ó el $V_1^m\, V_2^m$: en suma, hacia el producto de los dos valores de v, de magnitud absoluta mayor, elevado á la potencia m.

El espíritu de la demostracion es de tal índole, que si la ecuacion (53) la suponemos procedente de la propuesta, resuelta en trinomios de segundo grado, de la forma x^2+fx+v; y si el término v le suponemos procedente tambien de la combinacion, por *pares*, ordenados por su magnitud, de raices reales, ó de dos imaginarias conjugadas, concluiremos de todo lo dicho que, cuando m sea muy grande,—aproximadamente cuándo menos:

$$
(56)\left\{
\begin{array}{ll}
C_2 & = v_1{}^m \\
C_4 & = v_1{}^m v_2{}^m \\
C_6 & = v_1{}^m v_2{}^m v_3{}^m \\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
C_{2r} & = v_1{}^m v_2{}^m \dots\dots v_r{}^m \\
C_{2r+2} & = v_1{}^m v_2{}^m \dots\dots v_r{}^m v_{r+1}{}^m \\
C_{2r+4} & = v_1{}^m v_2{}^m \dots\dots v_r{}^m v_{r+1}{}^m v_{r+2}{}^m. \\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}
\right.
$$

En el caso, pues, que examinamos, general hasta *cierto punto*, ó en que la ecuacion propuesta contenga raices reales é imaginarias, *desiguales* todas, y relacionadas las reales con los módulos de las imaginarias en los términos bien explícitamente referidos (§. 25), los distintos valores de v, de los cuales dependen (Capítulo III) los de f, se deducirán utilizando los coeficientes de lugar *impar*, ó de las potencias *pares* de x, correspondientes á la última ecuacion transformada de la primitiva, por las mismas reglas, compendiadas en el grupo de relaciones (56), que las raices reales, ó los módulos de las imaginarias, se determinaban en los dos casos extremos y más sencillos, ó cuando la ecuacion propuesta sólo contenía raices de una ú otra especie.

(*b*)—Advirtamos ademas que si las $v_1, v_2, v_3, \dots\dots v_r, \dots\dots$, corresponden á distintos pares de raices imaginarias conjugadas, y la v_{r+1} á dos raices reales distintas, a y b, siendo $a > b$, no sólo los coeficientes $C_2, C_4, C_6 \dots\dots C_{2r}$ propenderán hacia determinados *límites*, conforme la potencia m á que sucesivamente se van elevando las raices de la ecuacion propuesta aumente, sino que de análoga propiedad disfrutará el coeficiente C_{2r+1}.

Este coeficiente puede, en efecto, considerarse como deducido del anterior, combinando con él, por vía de multiplicacion y suma sucesivas, las dos raices reales a y b; y todas las demas de su especie, inferiores á ellas en magnitud, que la ecuacion propuesta contuviere; y cuantas imaginarias, de módulo asimismo inferior á las a y b, contenga todavía: elevadas todas á la potencia m. Y como en la suma de cuantos productos distintos, de $2r+1$ factores cada uno, pueden formarse con las $2n$ raices de la ecuacion propuesta, ó de su derivada final, será el predominante con exceso el primero de los ahora considerados, resulta que el coeficiente C_{2r+1} propenderá, conforme m varíe y aumente, á confundirse con el $C_{2r} \times a^m$.—Por lo tanto, las potencias m de las dos raices reales a y b, y no sólo la de su producto v_{r+1}, se hallarán en este caso, como en el más sencillo que pudiera proponerse, ya considerado en el Capítulo I, dividiendo sucesivamente los coeficientes C_{2r+1} por C_{2r}, y C_{2r+2} por C_{2r+1}.

Pero, si en vez de representar v_{r+1} un producto de dos raices reales consecutivas, a y b, representase el cuadrado del módulo comun de dos imaginarias conjugadas, en la composicion del coeficiente C_{2r+1} figuraría un término igual á $C_{2r} \times 2\,g_{r+1}{}^m \cos m\,\varphi_{r+1}$: término, por regla general, de magnitud y signo variable; que predominará sobre todos los demas, cuando m sea muy grande y $\cos m\,\varphi$ muy poco discrepante de la unidad; y de cuyo signo, indeterminable *à priori*, dependerá entónces el de C_{2r+1}.

Y este mismo valor extremo, $2\,C_{2r} \times (v_{r+1})^{\frac{m}{2}}$, pero de signo invariable, sería tambien en el límite el del coeficiente C_{2r+1}, si las dos raices reales, a y b, fuesen iguales, en vez de diferenciarse sensiblemente, una de otra, como poco ántes supusimos.

Cuando la ecuacion del grado $2n$, que se trata de resolver, contenga raices reales é imaginarias, resulta, pues, de cuanto se acaba de exponer y discutir:

1.° Que los coeficientes de lugar *impar* de las transformadas sucesivas serán todos positivos, y propenderán á convertirse en potencias exactas de los diversos productos que con las distintas v pueden formarse.

2.° Que el coeficiente de lugar *par*, anterior al primer coeficiente de lugar impar en cuya composicion entre un producto de dos raices reales,—como el C_{2r+1}, anterior al C_{2r+2},—propenderá tambien á confundirse con una potencia exacta del producto de las v anteriores, multiplicado por la mayor de las dos raices a.

Y 3.° Que el mismo coeficiente de lugar *par*, seguido de otro impar, en cuya composicion figure un nuevo módulo de dos raices imaginarias, variará contínuamente en magnitud y en signo, sin tendencia ó propension á confundirse con ninguna potencia exacta de cantidades reales.—El cambio de signo en las transformadas sucesivas es indicio seguro, como ya tantas otras veces hemos repetido, de que la ecuacion propuesta contiene raices imaginarias.

§. 27.

Estudio de los casos excepcionales, no comprendidos en el párrafo anterior.

Examinemos ahora algunos de los varios casos excepcionales de que en totalidad prescindimos al principio del presente capítulo (§. 25), para simplificar la exposicion de este complicado asunto. Aunque el análisis y discusion de tales casos parezcan, por de pronto, incompletas y poco generales, advertiráse luégo sin esfuerzo que las mismas consideraciones y razonamientos pueden fácilmente ampliarse á cuantos otros casos y dificultades de índole análoga surgieren en la práctica. Más que á prever y discutir cuantas anomalías en la materia de que tratamos son imaginables, propenderán las siguientes advertencias y reflexiones, á familiarizar al lector con los principios del método que debe observar para interpretarlas recta y prontamente, donde y cuando quiera que se presenten.

(a)—Supongamos, en primer lugar, que la ecuacion propuesta tenga tres raices iguales á a, y otra simple, b; y que

$a > b$. En la composicion de aquella ecuacion primitiva figurará entónces necesariamente el producto

$$(x + a)^3 \times (x + b) =$$

$$x^4 + (3\,a + b)\,x^3 + (3\,a^2 + 3\,a\,b)\,x^2 + (3\,a^2\,b + a^3)\,x + a^2\,b;$$

y en la de la ecuacion, transformada, cuyas raices sean las potencias m de la primera, este otro:

$(x + a^m)^3 \times (x + b^m)$: cuyo *límite*, admitida la

desigualdad de valores de a y de b, es el siguiente:

$$(57) \qquad x^4 + 3\,a^m\,x^3 + 3\,a^{2m}\,x^2 + a^{3m}\,x + a^{3m}\,b^m.$$

Si las primeras v, desde la v_1 hasta la v_r, son independientes de estas dos raices a y b, el coeficiente C_{2r} podrá escribirse del siguiente modo, conforme lo en el caso general y párrafo precedente expuesto:

$$C_{2r} = v_1^m\,v_2^m\,v_3^m\,\ldots\ldots\,v_r^m.$$

Y, para pasar de este coeficiente á los sucesivos, ya dependientes de a y de b, bastará combinarle de todas las maneras posibles con la raiz triple a^m, y la simple b^m, primero; con los productos *binarios, ternarios* y *cuaternarios* de estas mismas raices, luégo; y conservar, por último, en las sumas de productos así resultantes, únicamente los términos como de *órden superior*, y que en cierto modo representan los *límites* hácia los cuales las mencionadas sumas propenden. Procediendo así, obtiénense sin dificultad los siguientes resultados: los mismos que se hubieran obtenido multiplicando el coeficiente C_{2r} por los coeficientes del anterior polinomio, á contar del segundo:

$$(58)\begin{cases} C_{2r+1} = C_{2r} \times 3\,a^{m}; \\ C_{2r+2} = C_{2r} \times 3\,a^{2m}; \\ C_{2r+3} = C_{2r} \times a^{3m}; \quad y \\ C_{2r+4} = C_{2r} \times a^{3m}\,b^{m}. \end{cases}$$

De donde se deduce que, (59)

$$\frac{C_{2r+1}}{C_{2r}} = 3a^{m};\ \frac{C_{2r+2}}{C_{2r+1}} = a^{m};\ \frac{C_{2r+3}}{C_{2r+2}} = \frac{1}{3}a^{m};\ y\ \frac{C_{2r+4}}{C_{2r+3}} = b^{m}.$$

Resultados que comprenden, sin ambigüedad de ningun género, los caractéres de *multiplicidad* de la raiz a, y las reglas á que debemos atenernos para determinar los valores de a y de b: reglas que en nada discrepan de las generales, anteriormente deducidas.

Ni se complica la cuestion, poco ni mucho, por suponer que a sea *menor* que b, en vez de suponerla mayor, como en un principio admitimos. Porque en esta segunda hipótesis reemplazarían, al polinomio (57) este otro:

$$(60) \qquad x^{4} + b^{m}\,x^{3} + 3\,a^{m}\,b^{m}\,x^{2} + 3\,a^{2m}\,b^{m}\,x + a^{3}\,b^{m};$$

á los coeficientes del cuadro (58) los que siguen, obtenidos por la combinacion de C_{2r} con los coeficientes del (60):

$$(61)\begin{cases} C_{2r+1} = C_{2r} \times b^{m}; \\ C_{2r+2} = C_{2r} \times 3\,a^{m}\,b^{m}; \\ C_{2r+3} = C_{2r} \times 3\,a^{2m}\,b^{m}; \quad y \\ C_{2r+4} = C_{2r} \times a^{3m}\,b^{m}; \end{cases}$$

y á los cocientes (59) los (62), igualmente notables por el órden en que se suceden y las relaciones de magnitud de las cantidades que representan:

$$(62)\ \frac{C_{2r+1}}{C_{2r}}=b^m;\quad \frac{C_{2r+2}}{C_{2r+1}}=3a^m;\quad \frac{C_{2r+3}}{C_{2r+2}}=a^m;\ \text{y}\ \frac{C_{2r+4}}{C_{2r+3}}=\frac{1}{3}a^m.$$

La existencia, pues, de raices *iguales* en la ecuacion propuesta, ni complica apénas la solucion general de la misma ecuacion, ni puede ser causa de notable ambigüedad ó duda al interpretar los distintos resultados que se obtuvieren, procediendo, por de pronto, como á ciegas en la investigacion de todas las raices.

(b)—Y, en segundo lugar, continuemos suponiendo que la ecuacion propuesta contenga una raiz real, g, igual al módulo de dos imaginarias conjugadas, *asociada* con otra, a, real tambien y menor que g: ó, en más sucintos términos, supongamos que en la composicion de la ecuacion primitiva figura este producto:

$$(x^2+fx+g^2)(x+g)(x+a),$$

ó el polinomio equivalente

$$x^4+(a+f+g)x^3+(ag+af+fg+g^2)x^2+(afg+ag^2+g^3)x+ag^3.$$

En la ecuacion final, transformada de la primera, entrará tambien como factor este otro polinomio: (63)

$$x^4+(a^m+f_m+g^m)x^3+(a^m g^m+a^m f_m+g^m f_m+g^{2m})x^2+$$
$$(a^m g^m f_m+a^m g^{2m}+g^{3m})x+a^m g^{3m}.$$

Y precisamente los coeficientes de este polinomio, á contar del segundo, son los que deben combinarse por vía de multiplicacion con el C_{2r} para hallar los coeficientes *límites* sucesivos de la ecuacion transformada que se busca. En efecto: si los valores de v, desde v_1 hasta v_r, son independientes de las cuatro raices,—dos imaginarias y dos reales,—á que ahora atendemos, del valor de C_{2r} se deducirán los de C_{2r+1}, C_{2r+2}, ..., multiplicando el primero, sucesivamente, por aquellas cuatro raices, que son las mayores de su especie, no consideradas todavía, y reuniendo en una suma los cuatro productos así obtenidos; y verificando despues operaciones análogas con los productos *binarios*, *ternarios* y *cuaternario* de las mismas raices. Los resultados finales, suponiendo ya muy elevado el valor de m, puede, sin error sensible, admitirse que se reducen á estos:

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} C_{2r+1} &= C_{2r}\times(a^m+f_m+g^m);\\ C_{2r+2} &= C_{2r}\times(a^m g^m+a^m f_m+g^m f_m+g^{2m});\\ C_{2r+3} &= C_{2r}\times(a^m g^m f_m+a^m g^{2m}+g^{3m});\ \text{y}\\ C_{2r+4} &= C_{2r}\times a^m g_3{}^m.\end{aligned}\right.$$

Pero, llegados á este punto, conviene advertir que el coeficiente $a^m+f_m+g^m$ es indeterminado en magnitud y en signo.—En efecto: por ser $g>a$, conforme m aumente, la potencia a^m adquirirá un valor relativo cada vez menor, y despreciable al fin, comparada con la g^m; y el trinomio considerado redúcese entónces al binomio f_m+g^m. Pero el término f_m puede variar entre $-2g^m$ y $+2g^m$: luego la indeterminacion del trinomio, y, por lo tanto, del coeficiente á que corresponde, C_{2r+1}, es inevitable en el curso de las transformaciones sucesivas de la ecuacion propuesta.

Lo propio sucede con el coeficiente C_{2r+2}.—Porque, en el *límite*, el polinomio $a^m g^m+a^m f_m+g^m f_m+g^{2m}$ se reduce al binomio $g^m f_m+g^{2m}$; y, como el primer término de este binomio puede variar entre $-2g^{2m}$ y $+2g^{2m}$ no hay medio en realidad de asignar límite alguno hácia el cual propenda el mencionado coeficiente.

Mas el C_{2r+3} tiene un valor final determinado: porque en el polinomio $a^m g^m f_m+a^m g^{2m}+g^{3m}$, el último término predomina al fin sobre todos los demás, hasta anularlos por completo casi. Y de la misma propiedad goza el C_{2r+4}, y por razon mucho más fácilmente perceptible todavia.

En resúmen: los cuatro coeficientes que en el caso ahora examinado siguen al C_{2r}, en la transformada (2^m). podrán escribirse de este modo:

$$(65)\begin{cases} C_{2r+1} = (?); \\ C_{2r+2} = (?); \\ C_{2r+3} = C_{2r} \times g^{3m}; \text{ y} \\ C_{2r+4} = C_{2r} \times g^{3m}\, a^{m}. \end{cases}$$

El carácter, pues, de este caso excepcional es el de presentarse en las transformadas sucesivas dos coeficientes *consecutivos*, indeterminados en magnitud y en signo. Mas, prescindiendo de estos dos coeficientes, rebeldes al análisis, los valores de g y de a se deducen inmediatamente, de los dos siguientes y del anterior á ellos, por el procedimiento sencillísimo y general ántes expuesto.

Si en vez de suponer que $g > a$, admitiésemos que $a > g$, al cuadro de relaciones algebráicas (65) reemplazaría este otro:

$$(66)\begin{cases} C_{2r+1} = C_{2r} \times a^{m}; \\ C_{2r+2} = (?) \\ C_{2r+3} = (?) \\ C_{2r+4} = C_{2r} \times a^{m}\, g^{3m}: \end{cases}$$

y las consecuencias de su análisis serían las mismas que en la hipótesis anterior.

(c)—No *dos* coeficientes consecutivos, sino *tres, cinco, ...,* coeficientes, variables con incesante irregularidad, nos resultarían en las transformadas sucesivas, si, en tercer lugar, considerásemos el caso de que la ecuacion propuesta contuviese *dos*, *tres*, ... *pares* de raices imaginarias, no precisamente iguales, sino dotadas del mismo módulo: como, despues de todo lo expuesto y referido, sería fácil tarea, aunque un poco larga y fastidiosa, demostrar.

(d)—Y, por último, y para no insistir más en asunto tan sencillo en la práctica como difícil y complicado en teoría, por su mucha generalidad y variabilidad interminable, supongamos que entre dos raices reales, a y b, de la ecuacion propuesta, se halle comprendido el módulo, g, de dos imaginarias conjugadas.—En aquella ecuacion figuraría entónces el producto

$$(x^2+fx+g^2)(x+a)(x+b),$$

equivalente á este polinomio:

$$x^4+(a+b+f)x^3+(ab+af+bf+g^2)x^2+$$
$$(abf+ag^2+bg^2)x+abg^2.$$

Y este polinomio, suponiendo que

$$(67) \qquad a>g>b,$$

se convierte en la última ecuacion, transformada de la primitiva, en el que sigue:

$$(68) \quad x^4+(a^m+f_m)x^3+(a^m b^m+a^m f_m+g^{2m})x^2+$$
$$(a^m b^m f_m+a^m g^{2m})x+a^m b^m g^{2m}.$$

Verificándose la doble condicion (67), puede, sin embargo, suceder que g^2 sea mayor que ab, ó menor, ó igual á este producto; pero en los tres casos el coeficiente de x^3, en el polinomio (68), propenderá hacia el *límite* a^m; el de x^2 resultará indeterminado, en magnitud y signo; y los de x^1 y x^0 propenderán evidentemente hacia los límites $a^m g^{2m}$ y $a^m b^m g^{2m}$.—Por lo tanto, suponiendo que los valores de v, desde v_1 hasta v_r inclusive, sean independientes de las cuatro raices que ahora consideramos, nos resultará que

$$(69) \left\{\begin{array}{l} C_{2r} \;\; = v_1^{\,m}\, v_2^{\,m}\, v_3^{\,m} \ldots\ldots v_r^{\,m}; \\ C_{2r+1} = C_{2r} \times a^m; \\ C_{2r+2} = (?) \\ C_{2r+3} = C_{2r} \times a^m g^{2m}; \qquad \text{y} \\ C_{2r+4} = C_{2r} \times a^m b^m g^{2m} \end{array}\right.$$

Ó, en términos vulgares, nos resultará *indeterminado* un solo coeficiente de lugar *impar:* anomalía distinta de todas las advertidas en los demas casos excepcionales anteriormente examinados; pero de ninguna trascendencia en el asunto. Pues, prescindiendo de aquel coeficiente, nada más fácil y expedito que hallar los valores de a, g^2 y b, con auxilio de los otros dos inmediatos, anteriores y posteriores, entre los cuales se encuentra comprendido.

(*e*)—En conclusion: siempre que las raices, reales ó imaginarias, discrepen unas de otras sensiblemente, la aplicacion, hasta irreflexiva, más ó ménos veces reiterada de la regla del (§. 3), nos proporcionará una ecuacion, derivada de la propuesta, de cuyos coeficientes, *limitados* todos, ó alternativa, regular ó irregularmente, limitados ó indeterminados, podremos deducir los valores de aquellas raices, ó de sus módulos, ó de sus productos binarios, distribuidos por órden de magnitud. Y la solucion completa del problema no pide tampoco más que esto último, segun lo expuesto y demostrado en los dos capítulos anteriores.

Ni áun la condicion previa, en el presente admitida como necesaria para simplificar la exposicion del asunto,—la de que sea de grado *par* la ecuacion que se trata de resolver,—tiene importancia alguna, ni siquiera objeto, en la práctica: porque, aplicando cuantas veces fuere menester la regla del (§. 3), obtendremos siempre una nueva ecuacion, de cuyos coeficientes, *limitados*, en el sentido convencional atribuido á esta palabra, en totalidad ó sólo en parte, segun la naturaleza de las raices y las relaciones de magnitud que entre las reales y los módulos de las imaginarias existan, imposibles de prever por de pronto, se desprenderán luégo los valores de aquellas raices y de los módulos con ellas combinados y como inseparables en la ecuacion primitiva.

Bastará resolver un par de ejemplos muy sencillos para adquirir la certidumbre, en algun modo experimental, de lo que acabamos de decir, y penetrarse de la generalidad y fecundidad del método de investigacion y análisis expuesto. La prueba material no es necesaria, ni prueba nada apénas, tras el razonamiento teórico; pero tampoco suele pecar de ociosa nunca.

§. 28.

Ejemplos y síntesis del método.

(*a*)—Como primer ejemplo, propongámonos hallar las raices ó factores de la ecuacion

$$5x^3 + 7x^2 + 22 = 0,$$

equivalente á esta otra:

$$(2^0)\ x^3 + 1.4\,x^2 + 4.4 = 0.$$

Las dos primeras transformadas, directamente construidas por la regla del (§. 3), son las siguientes:

$$(2^1)\ x^3 + 1.96\,x^2 - 12.32\,x + 19.36 = 0;\ \text{y}$$

$$(2^2)\ x^3 + 28.4816\,x^2 + 75.8912\,x + 374.8096 = 0.$$

El cambio de signo del coeficiente de x nos indica que no todas las raices de la ecuacion (2^0) son reales: y como una, por lo ménos, debe serlo, conclúyese que las otras dos serán imaginarias.

Reemplazando los coeficientes de la (2^2) por sus *logaritmos*, y aplicando luégo tres veces consecutivas la misma regla de derivacion de nuevas ecuaciones, obtiénense sin dificultad estos resultados:

$$(2^2)\ x^3 + 1.45456\,x^2 + 1.88019\,x + 2.57381 = 0$$

$$(2^3)\ x^3 + 2.81916\,x^2 - 4.19286\,x + 5.14762 = 0$$

$$(2^4)\ x^3 + 5.66839\,x^2 + 7.76185\,x + 10.29524 = 0$$

$$(2^5)\ x^3 + 11.33654\,x^2 - 16.17769\,x + 20.59048 = 0.$$

En la transformada (2^6) el coeficiente de x^2 sería igual al duplo del mismo coeficiente en la (2^5); el de x volvería á cambiar de signo: y el de x^0 se obtendría, como siempre, y lo mismo que el de x^2 ahora, por simple *duplicacion* del que le corresponde en la precedente. Las operaciones de transformacion ó derivacion terminan, pues, en la (2^5).

Y de esta ecuacion se concluye, sin dificultad, que

$$2^5 \times \log a = 11.33654\,; \quad \text{y} \quad 2^5 \times \log a\,b\,c = 20.59048$$

$$\text{ó} \quad \left.\begin{array}{l} \log a \;\,= 0.354267 \\ \log b\,c = 0.289186 \end{array}\right\}; \text{ y } \quad \left.\begin{array}{r} a = 2.26083 \\ (b\,c) = g^2 = 1.94619 \end{array}\right\}.$$

Conocemos, pues, ya con esto la raiz real, a,—negativa en el sentido vulgar algebráico; y el cuadrado, g^2, del módulo de las dos imaginarias conjugadas. El valor de f, que al trinomio $x^2 + f\,x + g^2$ corresponde, se deduce en el ejemplo propuesto de esta sencillísima condicion:

$$+ 2.26083 + f = + 1.4$$

Y, con el grado de aproximación que el uso de las tablas logarítmicas de *cinco* cifras decimales permite obtener, conclúyese finalmente que

$$5\,(x^2 - 0.86083\,x + 1.94619)\,(x + 2.26083) = 5\,x^3 + 7\,x^2 + 22.$$

(b)—Algo más complicado que el anterior es el siguiente segundo ejemplo, que pasamos á resolver.

$$(2^0) \quad x^5 - 7\,x^4 + 103\,x^3 - x^2 - 1834\,x - 11824 = 0.$$

Reemplazando los coeficientes de esta ecuacion por sus logaritmos, y calculando luégo los de su primera transformada con *siete* cifras decimales, para evitar muy desde el principio la acumulacion de errores, obtiénense por de pronto, estos resultados:

$$(2^0) \quad x^5 - 0.8450980\,x^4 + 2.0128372\,x^3 - 0.0000000\,x^2 - 3.2633993\,x - 4.0727644 = 0$$

$$(2^1) \quad x^5 - 2.1958997\,x^4 + 3.8405452\,x^3 + 5.7350715\,x^2 + 6.5237345\,x + 8.1455288 = 0.$$

Limitemos ahora la aproximacion á la compatible con el uso de logaritmos de *cinco* cifras; y como de la ecuacion (2^0) se ha deducido la (2^1), así de ésta se desprenderán sucesivamente, y cada vez con mayor facilidad, las cuatro que siguen:

$$(2^2) \quad x^5 + 4.03322\,x^4 + 8.35271\,x^3 + 11.31186\,x^2 - 14.14851\,x + 16.29106 = 0$$

$$(2^3) \quad x^5 - 8.52377\,x^4 + 16.66313\,x^3 + 23.02486\,x^2 + 28.07188\,x + 32.58212 = 0$$

$$(2^4) \quad x^5 + 16.28980\,x^4 + 33.34053\,x^3 + 46.00544\,x^2 + 55.76589\,x + 65.16424 = 0$$

$$(2^5) \quad x^5 - 33.60217\,x^4 + 66.68102\,x^3 + 92.00979\,x^2 + 110.64963\,x + 130.32848 = 0.$$

Si de la última ecuacion nos propusiésemos todavía deducir la (2^6), advertiríamos: que el coeficiente de x^4 cambiaba otra vez de signo y conservaba su carácter ya manifiesto de indeterminacion ó variabilidad irregular; que los de x^3 y x^2 se obtenian, por el contrario, *duplicando* los de estas mismas potencias de x en la (2^5); y que el de x^1, como el de la x^4, continuaba indeterminado. Del último coeficiente no hay que preocuparse; pues en éste, como en cualquiera otro caso, obtiénese siempre dicho coeficiente por duplicacion del que le corresponde en la precedente transformada, con independencia completa de todos los demas.

De la ecuacion (2^5) sólo podremos, en consecuencia de lo advertido, utilizar *tres* coeficientes para resolver la (2°); y como ésta contiene *cinco* raices, la solucion resultará incompleta, por de pronto, y se limitará á determinar los valores aproximados de la única raiz *real*, que aquella ecuacion comprende, y de los dos módulos de sus cuatro raices imaginarias. A renglon seguido se expresan las ecuaciones de condicion que han de servir para esto, y los resultados finales que de ellas se desprenden:

$$\left.\begin{array}{l} 2^5 \times \log ab \quad = \quad 66.68102 \\ 2^5 \times \log abc \quad = \quad 92.00979 \\ 2^5 \times \log abcde = 130.32848 \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{l} \log ab = 2.083782 \\ \log c \ = 0.791524 \\ \log de = 1.197458 \end{array}\right\}; \text{ y}$$

$$ab = g^2 = 121.278; \quad c = 6.18764; \quad \text{y} \quad de = g_1^2 = 15.7564.$$

Para determinar ahora los valores de f y f_1, que á los de g^2 y g_1^2 corresponden, habría que considerar la ecuacion propuesta como de *sexto grado*, multiplicando para ello todos sus términos por x; y aplicar á esta investigacion las fórmulas (a'') y (b'') del (§. 18). Pero esto, que ya en otro ejemplo análogo se practicó, y que es lo más directo é irreprochable en teoría, puede, en casos como el presente, simplificarse y abreviárse en gran manera, por el método del (§. 13).

Si, en efecto, la ecuacion (2°) la consideramos como equivalente á esta otra:

$$(x^2 + fx + g^2)(x^2 + f_1 x + g_1^2)(x + c) = 0,$$

conclúyese por necesidad ineludible que

$$f + f_1 + c = - \quad 7, \quad \text{y}$$

$$g^2 g_1^2 + cg^2 f_1 + cg_1^2 f = -1834.$$

Luego los valores de f y f_1, despues de conocidos los de g^2, g_1^2 y c, dependen de la resolucion de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Sustituyendo por g^2 y

g_1^2 sus actuales valores, *positivos*, y por e el que le corresponde tambien, con signo contrario al de la *raiz algebráica* que representa, ó con el signo *ménos*, dedúcese de aquellas ecuaciones que

$$f = -6.66922, \quad y \quad f_1 = +5.85686.$$

La solucion de la ecuacion propuesta, (2^0), queda así completada, con el grado de aproximacion, un poco exagerado ó ficticio tal vez, que las tablas auxiliares de logaritmos de *cinco* cifras consienten. Y si fuere menester ó conviniere cerciorarse de la exactitud de los cinco valores de g^2 y f, g_1^2 y f_1, y e, y rectificarlos, en caso de necesidad, habría que emplear el procedimiento y fórmulas, adecuadas al objeto, y en los párrafos (8) y (14) consignadas.—Sobre este punto no hay ya nada nuevo que advertir.

(c)—De mayor reparo es digna la aparente ligereza con que, del exámen de las transformadas sucesivas de la ecuacion (29), y, muy en particular, de la (2^5), hemos concluido que aquella primera ecuacion contenía *una* sola raiz real y *cuatro* imaginarias. ¿Por qué no serían reales *tres* é imaginarias *dos* únicamente? ¿Y por qué entónces el producto ab ó el de, en vez de representar el *cuadrado*, forzosamente *positivo*, de un módulo, no representaría el simple producto *binario* de dos raices reales, acaso *negativo*, contra lo supuesto en el cálculo posterior de f y f_1?

Repasemos muy por encima las diversas consideraciones teóricas en esta *Memoria* expuestas, con aplicacion al ejemplo de que ahora se trata; y no sólo resultará justificado lo que se acaba de practicar, sino que, tal vez, se disipe la ténue oscuridad que, al discurrir en el asunto, pudiera ofuscarnos todavía.

Si las cinco raices, $-a, b, c, d$ y e, — de la ecuacion propuesta fuesen *reales*, los coeficientes de todas las transformadas serían *positivos*. No lo son todos: luego el primer supuesto resulta inadmisible.

Mas pudieran ser reales *tres*, y existir entre ellas y el módulo, g, de las otras *dos*, estas relaciones de magnitud absoluta:

$$a > b > c > g.$$

Pues en la transformada cuyas raices fuesen las de la propuesta, elevadas á la potencia m, conforme este número aumentase, se verificaría entónces: que el coeficiente del segundo término contendría la potencia m de a, superior con grandísimo exceso á las demas potencias ó cantidades con ella combinadas, por vía de adicion ó suma; que el del tercer término contendría la misma potencia, dotada de igual ó análoga propiedad, del producto binario ab; y que el del cuarto contendría la del producto ternario abc, incomparablemente mayor asimismo que las potencias m de los demas productos de este nombre que con las cinco raices pueden formarse. Y, por lo tanto, los tres coeficientes mencionados, variables de signo alguna vez, en las primeras transformadas, concluirían por ser *positivos*, y por convergir hácia *límites* determinados. Falla tambien la consecuencia en el ejemplo resuelto: luego la condicion previa, de donde lógicamente se desprende, debe calificarse de errónea é inadmisible.

É inadmisible sería análogamente cualquiera otra en que el módulo g no ocupase el primer lugar, por órden de magnitud, en las relaciones, parecidas á la anterior, que entre él y las raices reales se establecieren. Pues bastaría que a fuese mayor que g, áun cuando g superase á b y c, para que en el coeficiente del segundo término de las transformadas sucesivas predominase la potencia m de a sobre todas las demas; y para que, en consecuencia, adquiriese este coeficiente el signo *positivo* y un valor *determinado*, ó independiente de los que le preceden y siguen en la anteúltima de las ecuaciones, por la regla del (§. 3), derivadas de la primitiva.

Resta, pues, saber si es ó no admisible esta otra condicion preliminar:

$$g > a > b > c.$$

Cierto que en las transformadas sucesivas el término, de signo indeterminado, $2g^m \cos m\varphi$, puede entónces predominar sobre los a^m, b^m y c^m, y de este predominio resultar indeterminacion en el signo y en la magnitud de su segundo coeficiente, conforme se advierte en las transformadas de nuestro ejemplo; pero los demas coeficientes deberán, al fin, ser *positivos* y *limitados* todos: el tercero porque g^{2m} representa un número, en cotejo del cual se desvanecen las demas cantidades que á la composicion de aquel coeficiente concurren; y los cuarto y quinto porque $g^{2m}a^m$ y $g^{2m}a^m b^m$ son tambien incomparablemente superiores á los demas productos análogos, en estos últimos coeficientes comprendidos. Con relacion al ejemplo que se discute, la consecuencia final no es cierta en todas sus partes: luego la hipótesis de donde procede no puede considerarse como admisible tampoco.—Luego la ecuacion (2^0) no poseerá *dos* solas raices imaginarias; sino *cuatro: precisamente* TANTOS PARES *como coeficientes indeterminados comprende su última transformada.*

Tan importante consecuencia se infiere de un razonamiento y conjunto de reflexiones, aplicables, con variantes de mera forma, á cualquier otro caso ó ejemplo, y, por lo tanto, completamente generales en el fondo. El contenido de este capítulo, y áun de toda la *Memoria*, queda así compendiado en dos palabras.

(*d*)—Propongámonos todavía resolver un ejemplo más, un poco rebuscado, pero muy interesante, relacionado con la doctrina del §. 27, y que nos servirá como de punto de partida para llegar sin violencia al capítulo siguiente.

Sea, pues, la ecuacion de 5° grado

$$(2^0) \qquad x^5 - 32x^3 + 72x^2 - 185x + 360 = 0,$$

cuya primera transformada es la que sigue:

$$(2^1) \quad x^5 + 64x^4 + 654x^3 - 6656x^2 - 17615x + 129600 = 0.$$

Sustituyendo al cálculo directo el logarítmico, obtiénense sucesivamente estos resultados:

$$(2^1)\quad x^5+\ 1.8061800\,x^4+\ 2.8155777\,x^3-\ 3.8232133\,x^2-$$
$$4.2458826\,x+5.1126050=0$$

$$(2^2)\quad x^5+\ 3.4452928\,x^4+\ 6.0949788\,x^3+\ 7.9239253\,x^2+$$
$$9.3086761\,x+10.2252100=0$$

$$(2^3)\quad x^5+\ 6.7229658\,x^4+12.0353233\,x^3+15.3163755\,x^2+$$
$$18.1218550\,x+20.4504200=0$$

$$(2^4)\quad x^5+13.4108037\,x^4+24.0624897\,x^3+30.1534264\,x^2+$$
$$35.7661749\,x+40.9008400=0$$

$$(2^5)\quad x^5+26.8200923\,x^4+48.1249556\,x^3+59.8318580\,x^2+$$
$$71.0571465\,x+\ 81.8016800=0$$

$$(2^6)\quad x^5+53.6401819\,x^4+96.2499112\,x^3+119.1954429\,x^2+$$
$$141.6443493\,x+163.6033600=0$$

Los coeficientes de x^4 y de x^3 en la transformada (2^7) son, ó pueden ya suponerse, *cuadrados* perfectos de sus correspondientes en la (2^6); y de estos dos coeficientes fácil será, por lo tanto, deducir los valores de *dos raices* de la ecuacion primitiva, *reales* por necesidad. Y siendo aquella ecuacion de grado *impar*, alguna otra raiz deberá ser *real* tambien: luego las imaginarias, indicadas por los signos negativos de la (2^1), no pasarán de *dos*, en el ejemplo propuesto.

Pero los coeficientes de x^2 y de x, aunque positivos siempre, desde la transformada (2^2) en adelante, ni en la (2^5) son cuadrados perfectos de los correspondientes en la anterior, ni como tales podrán considerarse tampoco en las sucesivas, hasta llegar á una de órden muy elevado.

Luego la ecuacion (2^0) contiene *dos* raices reales, que fácilmente se aislan ó desprenden de las demas; y *tres* que, *numéricamente*, deben discrepar muy poco entre sí, cuando tanto trabajo cuesta separarlas, por más que en algun otro concepto sean muy diferentes. Por de pronto debemos, pues, limitarnos á escribir las tres siguientes consecuencias de la ecuacion (2^6):

$$\left.\begin{array}{ll} 2^6 \times \log a & = 53.6401819; \\ 2^6 \times \log ab & = 96.2499112; \\ 2^6 \times \log abcde & = 163.6033600 \end{array}\right\} \text{ó} \left\{\begin{array}{ll} \log a & = 0.83812784; \\ \log b & = 0.66577702; \text{ y} \\ \log cde & = 1.05239764. \end{array}\right.$$

Si, en efecto, fuesen iguales las tres raices, designadas por c, d y e, el logaritmo de su *cubo* sería conocido, y el valor comun de las tres raices se deduciría inmediatamente. Pero ¿cómo cerciorarse de que son absolutamente iguales, ó de que difieren poquísimo unas de otras?—No es fácil la respuesta, en términos generales por lo ménos.

Advertiremos, sin embargo, que si fuesen iguales, por lo explicado en el §. 27, los coeficientes de x^2, x y x^0 propenderían respectivamente hácia los *límites*

$$3\,(a\,b\,c)^{2^m},\ 3\,(a\,b\,c^2)^{2^m} \quad \text{y} \quad (a\,b\,c^3)^{2^m}.$$

Luego, con alguna aproximacion á la verdad, podríamos escribir estas relaciones, que de la consideracion de la transformada (2^6) se deducen:

$$2^6 \times \log ab = 96.2499112;$$

$$2^6 \times \log abc = 119.1954429 - \log 3;$$

$$2^6 \times \log abc^2 = 141.6443493 - \log 3; \text{ y}$$

$$2^6 \times \log abc^3 = 163.6033600.$$

Y combinando la primera con la segunda, la segunda con la tercera, y la tercera con la cuarta, se concluirán estos tres valores de log c:

$$\log c = 0.3510689;\ 0.3507641;\ \text{ó}\ 0.3505646.$$

La pequeña discrepancia de estos logaritmos puede provenir, ó de discrepar en realidad las tres raices buscadas, ó de no representar todavía la ecuacion (2^6) el *límite* ó la transformada final de la (2^0) con suficiente grado de aproximacion. Lo único, pues, averiguado es que, ademas de las raices a y b, contiene la ecuacion propuesta otra ú otras raices, cuyo logaritmo aproximado es $0.3508\ldots$, ó el valor numérico comun $2,25\ldots$ Y con este primer valor, y por la regla de Newton, será menester calcular otro y otros, hasta llegar al punto de aproximacion apetecido.

Y que la regla de Newton es aplicable en este caso se infiere del hecho incuestionable de no contener la ecuacion propuesta más de *una* raiz real, á la cual el número 2.25 se aproxime. Pues si, por el contrario, contuviese *tres*, las cinco raices serian reales, y la transformada (2^1) debería poseer todos sus términos positivos. No los posee: luego, en virtud de cuanto procede, dos de aquellas cinco raices son *imaginarias*, y el número $2.25\ldots$ se aproximará á la única raiz real desconocida todavía, distinta de las a y b.

Mas, si las tres raices c, d y e son de especie diversa, *imaginarias* dos y *real* una, ¿cómo, ni por un momento, hemos podido suponer que fuesen exacta ó aproximadamente iguales?—Muy sencillo.

La transformada (2^6) así lo es de la (2^0) como de la (2^1): de la (2^0), que contiene *dos raices imaginarias*, como lo prueba la existencia del signo negativo en la (2^1); y de la (2^1), que no contiene ninguna de aquella especie ó nombre, conforme lo indican los signos positivos de todos los términos de todas las transformadas sucesivas, hasta la (2^6) inclusive, y las que á continuacion pudieran deducirse.

¿Y de qué *forma* deben ser las raices imaginarias de la (2^0) para convertirse en *reales* en la (2^1), por la simple elevacion al cuadrado?—De ésta: $\pm\beta\sqrt{-1}$; y no de la general, $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$.

La observacion es evidente, y tan importante que nos da la clave para acabar de resolver con grandísima sencillez y por completo la ecuacion primitiva (2^0).

En efecto: las dos raices a y b son ya conocidas; y la c, considerada como real tambien, debe ser tal que, sumada con ellas, reproduzca el coeficiente de x^4, igual á *cero* en este caso: con lo cual esta c puede asimismo darse por determinada. Y como el coeficiente, 360, del último término es igual al producto de las *tres* raices reales por el cuadrado del módulo de las *dos* imaginarias, conocidas ya aquellas tres raices, sencillísimo será tambien averiguar lo que el módulo, β ó g, aproximadamente vale. Los valores de las cinco raices, por tan breve procedimiento obtenidos, son, en fin de cuentas, los que siguen:

$$a = -6.888550;$$

$$b = +4.632091;$$

$$c = +2.256459; \text{ y}$$

$$d = -e = +2.236068\sqrt{-1}.$$

(*Se continuará.*)