XXIV.—Nota explicativa de un nuevo sistema de medida angular, dividiendo la circunferencia en seiscientas partes ó grados iguales.

POR D. HORACIO BENTABOL Y URETA.

Nombre y exposición del nuevo sistema.

Reconocida la ventaja y conveniencia de que la escritura, graduación de los instrumentos y cálculo para las medidas angulares, se haga bajo los mismos principios que la escritura numérica ordinaria, basada en el sistema decimal y no en otro de números complejos, como sucede en la antigua división sexagesimal, no se deduce de aquí la necesidad, ni siquiera conveniencia, de que el cuadrante de círculo haya de estar dividido en cien partes ni en mayor ó menor número de ellas. En todo caso, sería más lógico, ampliando á toda la circunferencia el principio decimal, que la circunferencia entera se dividiese en diez mil partes.

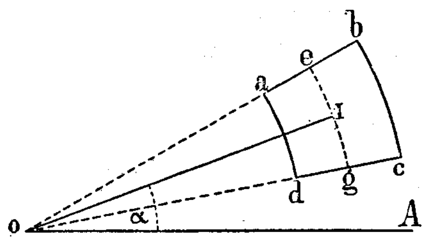
Pero ni aun este número de grados responde á ventaja alguna; pues la principal utilidad de la división (ó, mejor dicho, *subdivisión*) centesimal, no estriba precisamente en que el cuadrante se haya dividido en cien partes ó en otro número cualquiera, y la misma ventaja resultaría si fuese otro el número de partes en que se divida la circunferencia, excepto el caso de dividirla en *seiscientas* partes, por las razones que á continuación se dirán.

En la nueva división *sexcentesimal* que tengo el honor de proponer á los sabios, ingenieros, constructores de instrumentos topográficos, geodésicos y astronómicos, la circunferencia entera se divide en seiscientas partes iguales: el cuadrante en ciento cincuenta y el semicuadrante ó cartabón, en setenta y cinco.

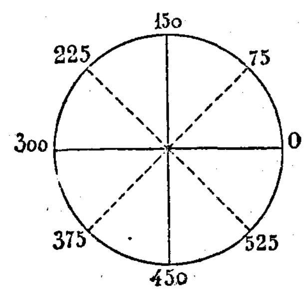
Como se verá, la nueva división de la circunferencia para la medida de los ángulos es superior á las conocidas hasta aquí, sin que su adopción tenga más inconveniente que los ineludibles á todo cambio en este orden de conocimientos.

Objeto y fundamento de la división sexcentesimal.

Observemos que la determinación de un punto I en coordenadas polares por medio de ciertos valores del radio y del ángulo, no se consigue ni puede obtenerse exactamente, sino con una cierta aproximación, ó sea con un cierto error ρ en el radio y otro ε en el ángulo, que son iguales á media unidad del último orden decimal en que se escriban.



En general no hay razón ni conveniencia para que la determinación de un punto no sea igualmente aproximada en todos sentidos; de donde se deduce, que si el radio y el ángulo se escriben en el sistema de numeración decimal, es evidente que el punto estará determinado con igual grado de precisión en el sentido del radio y en la dirección perpendicular al mismo (ó sea en el sentido de la tangente al arco), cuando la relación $\frac{\varepsilon}{\rho}$ de ambos errores sea la unidad, lo que será apreciable á simple vista en los números representativos del ángulo y del radio, siempre que las unidades, decenas, centenas, etc., en ambos, correspondan á fracciones del arco y del radio de iguales longitudes. Es decir, cuando en el trapecio curvilíneo *abcd*—formado por los radios correspondientes á ángulos que difieren de su expresión numérica en más ó menos media unidad del



último orden decimal, y dos arcos cuyos radios difieran también positiva ó negativamente en media unidad del mismo orden decimal—los grados de aproximación en el radio y en el arco sean iguales, lo que se expresa más gráficamente diciendo que $ab = \rho$ debe ser igual á $eg = \varepsilon$.

Aunque es bastante claro lo anterior, conviene, al exponer cuestiones que introducen alguna novedad en las ideas corrientes que han amoldado por muchos años las inteligencias, explicar con un ejemplo la esencia de la reforma.

Para que el grado de aproximación con que se determina un punto por medio de coordenadas polares, sea el mismo en todos sentidos, es preciso que escribiendo el radio y el ángulo con el mismo número de cifras decimales, el error cometido en la apreciación del radio sea igual al error cometido en la apreciación del ángulo. Esto es, que siendo $r = 100{,}00$ y $\alpha = 18^{\circ}45$, por ejemplo, las expresiones de ambos, las centésimas en las dos, correspondan á magnitudes iguales en el sentido del radio y del arco respectivamente.

Establecido esto y supuesto el convencimiento en los lectores de la razón y utilidad de lo expuesto, es fácil comprobar que los actuales sistemas centesimal y sexagesimal distan mucho de cumplir con esta importante condición.

Para lograr exactamente el fin propuesto, sería necesario tomar para unidad de arco uno cuyo desarrollo fuese igual á la longitud del radio; pero como tal arco resulta inconmensurable y hay otro conmensurable con la circunferencia, que difiere poco de la longitud del radio, éste es el que debe tomarse para unidad de arco.

Esta unidad de arco es la sexta parte de la circunferencia, ó sea el arco correspondiente al lado del exágono regular inscripto, cuyo lado tiene por longitud exacta la del radio, siendo la longitud del arco correspondiente poco mayor que la de aquel y dada por la expresión

$$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = 1{,}04719.75511.96\ldots \text{ del radio.}$$

De este modo el céntimo del radio valdrá 0,01 y el céntimo de arco (ó grado) valdrá 0,0104719...

Siendo $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$, son muchos los arcos divisores de la circunferencia que tienen expresión exacta en grados sexcentesimales. Así, los lados de los polígonos de

3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 25, 30, 40, 50,
60, 75, 100, 120, 150, 200, 300 y 600

lados, subtienden arcos cuyas medidas son

200, 150, 120, 100, 75, 60, 50, 40, 30, 25, 24, 20, 15, 12,
10, 8, 6, 5, 4, 3, 2 y 1

grados sexcentesimales respectivamente; y como muchos de estos lados tienen un valor directamente calculable y conocido, de aquí que haya en este sistema muchos arcos cuyo seno puede calcularse directamente con facilidad.

Basta con lo dicho para apreciar la superioridad teórica y práctica que esta división de la circunferencia tiene sobre las conocidas, por lo que seguramente es la más natural posible mientras se emplee en la numeración el sistema decimal.

Tablas trigonométricas para la división sexcentesimal.

Conocida la necesidad de tener tablas trigonométricas adaptadas al sistema de división angular en que se opera, y puesto que hoy se carece de ellas, mientras dichas tablas no estén calculadas pueden emplearse las existentes, previa la reducción de grados de uno á otro sistema por las fórmulas siguientes:

1.ª Para reducir la medida de un ángulo, escrita en el sistema *sexcentesimal* al sexagesimal antiguo, debe multiplicarse el número de grados escrito en el primer sistema por $\frac{3}{5}$.

2.ª Para la reducción inversa (sexagesimal en sexcentesimal), debe multiplicarse la lectura del ángulo (reducida á grados y fracción decimal de grado) por $\frac{5}{3}$.

3.ª Para reducir un ángulo escrito en el sistema *sexcentesimal* al centesimal antiguo (400 partes), debe multiplicarse el número de grados escrito en el primer sistema por $\frac{2}{3}$.

Y 4.ª Para la reducción inversa (centesimal antiguo en sexcentesimal), debe multiplicarse la primera lectura por $\frac{3}{2}$.

La nueva división sexcentesimal presenta especiales ventajas para el cálculo de tablas de senos y cosenos, ya por las fórmulas y procedimientos conocidos, ya directamente para los ángulos en el centro correspondientes á los 22 polígonos regulares que miden un número exacto de grados en este sistema; de donde por las fórmulas que dan los senos y cosenos de los múltiplos y submúltiplos por potencias de 2, sus complementos y suplementos, se deducen los valores de dichas líneas para más de 240 arcos menores que un cuadrante, de *céntimo en céntimo* de grado á partir del seno de 0°01, de los cuales se consignan algunos á continuación:

$$\text{sen } 0°01 = \text{arco } 0°01 = 0{,}0001047197 \ldots$$

$$\text{sen } 15° = \frac{\text{cuerda } 30°}{2} = 0{,}1564344650 \ldots$$

$$\text{sen } 30° = \frac{\text{decágono}}{2} = 0{,}3090169943 \ldots$$

$$\text{sen } 45° = \cos 105° = 0{,}45399049973 \ldots$$

$$\text{sen } 50° = \frac{\text{exágono}}{2} = 0{,}50000000000 \ldots$$

$$\text{sen } 60° = \frac{\text{pentágono}}{2} = 0{,}5877852522 \ldots$$

$$\text{sen } 75° = \frac{\text{cuadrado}}{2} = 0{,}7071067811 \ldots$$

en cuyas expresiones se observa lo poco que difieren las representaciones de los senos de los arcos correspondientes.

Los cosenos respectivos se calcularán por la fórmula conocida.

Para demostrar la facilidad que presenta la formación de tablas trigonométricas en el nuevo sistema sexcentesimal, debe tenerse en cuenta la importantísima observación de que, siendo 2700, 5000 y 7500 los números de minutos del semicuadrante, en las respectivas divisiones de las circunferencias en 360, 400 y 600 grados, son utilizables para el nuevo sistema el tercio de los valores calculados para el primero y la mitad de los conocidos en el segundo; no faltando para completar las tablas del nuevo sistema más que calcular los senos y cosenos correspondientes á los ángulos que no corresponden á números de minutos exactos en los antiguos sistemas.

O dicho más claro. Los senos y cosenos de los ángulos en la división sexcentesimal y en las antiguas son exactamente iguales para los ángnlos siguientes:

$$\begin{cases} (600^\circ) & 0-25-50-75-100 \text{ minutos} \\ (360^\circ) & 0-\ 9-18-27-36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (600^\circ) & 0-\ 3-\ 6-\ 9-12-15-18-21-24-27-30 \text{ minutos} \\ (400^\circ) & 0-\ 2-\ 4-\ 6\ -8-10-12-14-16-18-20 \end{cases}$$

De modo que, siendo utilizables 900 de los valores calculados para el semicuadrante en la división sexagesimal y 2500 de los conocidos en la centesimal antigua, sólo hay necesidad de calcular las líneas correspondientes á 4100 ángulos de los 7500 que de minuto en minuto tiene la nueva.

Por otra parte, la división y graduación de los limbos de los instrumentos es más fácil en este sistema que en cualquier otro, como sería fácil demostrar haciendo referencia al mecanismo, construcción y manipulación de las máquinas de dividir círculos.

7 Mayo 1901.