Revisión de la teoría de la relatividad

por

Julio Palacios

PROLOGO

Desde que Einstein enunció su famoso principio de relatividad no ha transcurrido más que medio siglo, pero las consecuencias han sido tales, que esta media centuria contará en la vida de la humanidad mucho más que decenas de siglos en que no hubo un descubrimiento comparable al que se encierra en la fórmula einsteniana $E = c^2 m$. Baste decir que, sin ella, continuaría ignorada la energía encerrada en los núcleos atómicos.

Con ocasión de la muerte del autor de la teoría de la relatividad, escribí en *Physicalia* un artículo titulado «¿Se puede entender la teoría de la relatividad?». Lo que entonces me atreví a decir, para consuelo de quienes no podían asimilar fácilmente las abstrusas ideas de dicha teoría, podía no tener importancia, porque todo depende del significado que se dé a la palabra entender, y en Física hemos de estar preparados a encontrarnos con hechos que, por estar encima de lo que alcanza nuestra razón, merecen ser llamados misterios. Tales, por ejemplo, como la innegable acción a distancia y el doble comportamiento onda-corpúsculo. Del principio de relatividad resultan cosas que el propio Einstein calificó de asombrosas y que trascienden a los conceptos metafísicos de tiempo y espacio en forma tal, que debemos renunciar a la idea intuitiva que de ellos tenemos, y atenernos a lo que dice un impenetrable algoritmo matemático. De todo esto se infiere que, al estudiar los fenómenos naturales, estamos expuestos a encontrar enigmas por todas partes, y que lo mejor será empezar por exponerlos en toda su desnudez, pues vale más un misterio claro y rotundo que una confusa teoría con la que se pretende explicar lo que está fuera de nuestra capacidad de raciocinio. El gran acierto de Einstein consistió, justamente, en que, cada vez que surgía un fenómeno inexplicable, tal como el efecto fotoeléctrico o la imposibilidad de poner de manifiesto el movimiento de la Tierra, se basaba en él para enunciar un nuevo postulado que, claro es, resultaba incomprensible, pero tenía la ventaja de que, una vez admitido, permitía explicar los hechos conocidos y predecir otros nuevos.

Pero, a pesar de tanto éxito, parece ser que hay algo torcido en la teoría de la relatividad. Una cosa es que admitamos lo maravilloso aunque no lo entendamos, y otra muy distinta el que demos por bueno lo que es absurdo. Cuanto más haya de lo primero, tanto más admirable será la Creación, pero lo absurdo no puede ser.

Todo esto viene a cuento de la encarnizada controversia que han entablado los mejores especialistas (1) en cuestiones relativistas acerca de la llamada «paradoja de los relojes». Esta paradoja es cosa vieja, y ya nos devanó los sesos cuando empezó a hablarse de la relatividad especial. Luego, con la relatividad general, quedó envuelta en un fárrago matemático impenetrable, y se dió por supuesto que todo estaba en regla. Pero hace cosa de año y medio, escribió Thomson (2) uno de esos libros para el gran público en que son maestros los ingleses, y se le ocurrió hacer vaticinios acerca de lo que sucederá cuando se realicen viajes por los espacios sidéreos, y dice que en un viaje de ida y vuelta a la estrella más próxima se invertirán unos dieciocho años y que, «según las opiniones más autorizadas», deberá suceder, por virtud del principio de relatividad, que los viajeros encuentren a su regreso que, para ellos, sólo han transcurrido quince años y medio. Si esto fuese cierto, serían más jóvenes que si hubiesen quedado en la Tierra, y se podría *vivir despacio viajando deprisa.*

En un trabajo que está pendiente de publicación en los *Anales de la Real Sociedad Española de Física y Química*, llegamos a la conclusión de que ninguna de las explicaciones propuestas para la paradoja de los relojes es satisfactoria, por lo que no parece empresa descabellada el revisar la teoría de Einstein, con el fin de ver si es posible sustituirla por otra que conduzca a los mismos resultados prácticos sin adolecer de dificultades lógicas.

---

(1) DINGLE, H., y MCCREA, W. H.: *Nature*, 177, 782 (1956) y 178, 681 (1956); *Proc. Phys. Soc.*, 444 A, 925 (1957). CRAWFORD, F. S.: *Nature*, 179, 35 (1957).

(2) SIR GEORGE THOMSON: *The Foreseeable Future*. Cambridge, 1955.

INTRODUCCION

1. *Definiciones.*

Aparte de las magnitudes espaciales y del tiempo, se opera en mecánica con tres magnitudes primarias (1): fuerza, masa inercial y masa gravitatoria. Su definición cualitatitva consistirá en la descripción del efecto observable que las caracteriza, y para que adquieran el carácter de magnitudes físicas es preciso establecer para cada una un postulado que permita definir, por vía operacional y universal, la razón entre dos de sus cantidades, o bien la suma de las mismas

Fuerza (f).—Ente que tiene la virtud de modificar el movimiento de los cuerpos en una dirección determinada. Dos fuerzas son iguales, cuando aplicadas sucesivamente a un mismo cuerpo y en iguales condiciones producen el mismo cambio en su movimiento. Se postula que las fuerzas coexistentes en un mismo punto se suman por la regla del polígono; son vectores.

Masa inercial (m_i).—Ente por cuya virtud cada cuerpo requiere una fuerza diferente para que en él se produzca un cambio determinado en su movimiento. Dos masas serán iguales cuando, sometidas a fuerzas iguales, adquieran el mismo movimiento. Se postula que la suma de las masas de varios cuerpos es igual a la masa del cuerpo que resulta por aglomeración de las mismas. En otros términos: las masas se suman por acumulación.

Masa gravitatoria (m_g).—Ente por cuya virtud cada cuerpo ejerce una acción atractiva sobre los demás. Se postula también que las masas gravitatorias se suman por acumulación.

En la relatividad especial se opera solamente con las masas inerciales, por lo que huelga poner subíndice al símbolo *m*.

---

(1) Para la definición de magnitudes físicas y su clasificación en primarias y secundarias, véase J. PALACIOS, *Análisis dimensional*. Espasa-Calpe, 1956.

2. *Postulados fundamentales de la mecánica clásica.*

a) *Principio de la inercia (Galileo). Existe un sistema de coordenadas en el cual ocurre que todo cuerpo libre de acciones exteriores ejecuta un movimiento exento de aceleración. Tal sistema se llama inercial.*

Para pasar del sistema inercial S a otro S' que se mueva con la velocidad constante v a lo largo del eje x, se aplican en mecánica clásica las *fórmulas de transformación de Galileo:*

$$x = x' + v_x t; \qquad y = y' + v_y t; \qquad z = z' + v_z t . \qquad [2.1]$$

Por hipótesis, ocurre que todo cuerpo libre de acciones exteriores ejecuta en S un movimiento rectilíneo y uniforme, luego:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{d^2 z}{d t^2} = 0 .$$

Para averiguar cuál será el movimiento de dicho cuerpo en el sistema móvil S′ bastará derivar las ecuaciones [2.1], y resulta:

$$\frac{d^2 x'}{d t^2} = \frac{d^2 y'}{d t^2} = \frac{d^2 z'}{d t^2} = 0$$

lo cual prueba que también está exento de aceleración el movimiento del cuerpo en el sistema S'. En consecuencia, *dado un sistema inercial, cualquier otro que se mueva con movimiento rectilíneo y uniforme será también inercial.*

b) *Principio de proporcionalidad entre fuerzas y aceleraciones.* (Newton).—De las definiciones de masa y de fuerza se deduce que ha de haber proporcionalidad entre una y otra a igualdad de la aceleración obtenida. Se postula, además, que *a igualdad de masa, la aceleración es proporcional a la fuerza:*

$$f_x = m \frac{d^2 x}{d t^2}; \qquad f_y = m \frac{d^2 y}{d t^2}; \qquad f_z = m \frac{d^2 z}{d t^2} .$$

c) *Principio de igualdad entre la acción y la reacción* (Newton).—*Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, este último ejerce una fuerza igual y contraria sobre el primero.*

3. *Dinámica de los sistemas de puntos materiales.*

Si nos atenemos a las acciones gravitatorias y a las electrostáticas, ocurre que las fuerzas que se ejercen entre dos cuerpos dados están dirigidas según la recta que los une y depende tan sólo de su distancia mutua.

Se llama energía potencial del sistema formado por dos cuerpos al trabajo que es preciso realizar para transportar uno de ellos desde la distancia nula hasta la distancia s:

$$V = -\int_0^s \vec{f}\, d\vec{s}$$

de donde se deduce:

$$f = -\operatorname{grad} V,$$

luego, *siempre que se trate de campos gravitatorios o electrostáticos, existe una función de fuerzas que coincide con la energía potencial.*

Cuando hay n puntos materiales sometidos a sus acciones mutuas, la energía potencial tiene por expresión:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} V_{ik}(s_{ik}) \qquad i < k \tag{3.1a}$$

$$s_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 \tag{3.1b}$$

y la fuerza que actúa sobre el punto i vale:

$$f_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V_{ik}}{\partial s_{ik}} \frac{x_i - x_k}{s_{ik}} \tag{3.2}$$

con expresiones análogas para las otras componentes.

Se ve fácilmente que estas expresiones están de acuerdo con el tercer principio, pues:

$$\frac{\partial V_{ik}}{\partial x_i} = -\frac{\partial V_{ik}}{\partial x_k}.$$

Por tanto, las fuerzas son iguales y opuestas, y ocurrirá que:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i,x} = \sum_{i=1}^{n} f_{i,y} = \sum_{i=1}^{n} f_{i,z} = 0 \qquad [3.3]$$

de donde resulta que la aceleración del centro de masa será nula.

Las ecuaciones de movimiento del punto i serán:

$$m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = f_{ix}; \qquad m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = f_{iy}; \qquad m_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} = f_{iz}\,. \qquad [3.4]$$

Se puede demostrar que las ecuaciones [3.1], [3.2] y [3.3] son covariantes con relación a la transformación de Galileo Empezando por la ecuación [3.2] se ve que como las medidas de las coordenadas han de efectuarse simultáneamente en ambos sistemas, resulta:

$$x_i - x_k = x'_i - x'_k; \qquad y_i - y_k = y'_i - y'_k; \qquad z_i - z_k = z'_i - z'_k$$

de donde se deduce que $s_{ik} = s'_{ik}$, de modo que *la transformación de Galileo conserva la medida de las distancias*. Nótese que para llegar a esta conclusión se ha supuesto implícitamente que el adverbio «simultáneamente» tiene el mismo significado en uno y otro sistema. Por tanto, si se da al potencial V' en el sistema móvil S' la misma forma que a la función V, el segundo miembro de [3.1 a] será invariante respecto de las transformaciones de Galileo.

Por otra parte, como se admite que la fuerza entre cada dos cuerpos está determinada por la distancia que los separa, y por ciertos parámetros constantes (masas, cargas, ...), la energía potencial del sistema no se alterará aunque exista un movimiento de conjunto y, en consecuencia, la energía potencial es también invariante respecto de las transformaciones de Galileo. Queda así demostrada la covariancia de las ecuaciones [2.1 a] y [3.1 b].

En las ecuaciones [3.2] figuran las derivadas de funciones que, según acabamos de ver, son invariantes. Como para $t =$ const. es:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x'_i} \cdot \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x'_i}$$

los segundos miembros de [3.2] son invariantes y, por consiguiente, también habrán de serlo las fuerzas. Pero sucede que éstas figuran también en las ecuaciones [3.4], por lo que es preciso probar que las invariancias exigidas por ambos grupos de ecuaciones no son incompatibles. Basta observar a este respecto que las expresiones:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial V}{\partial z_i}$$

son las componentes del gradiente de V en el punto x_i, y_i, z_i, por lo que al pasar a otros ejes fijos rectangulares se transformarán como las coordenadas. Por otra parte, las fuerzas son también vectores, de donde se desprende que *las ecuaciones* [3.2] *son covariantes con relación a los pasos entre ejes fijos.*

En las ecuaciones [3.4] figuran las fuerzas que, según hemos visto, varían como las coordenadas en las transformaciones de Galileo. En los primeros miembros intervienen las masas m_i, que en mecánica clásica se suponen ser parámetros característicos de cada cuerpo, invariantes con relación a cualquier cambio de ejes. Además, están las aceleraciones, que son invariantes con relación a las transformaciones de Galileo, pues de [3.5] se deduce:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x'_i}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y'_i}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z'_i}{\partial t^2},$$

y por ser vectores se transforman como las coordenadas en los pasos a ejes fijos.

En resumen; las ecuaciones [3.2] son invariantes con relación a las transformaciones de Galileo y covariantes en los pasos entre ejes fijos.

4. *Experimento de Michelson y Morley.*

La teoría de la relatividad tuvo su origen en el famoso experimento con que Michelson y Morley trataron de ver si era posible, por métodos ópticos, poner de manifiesto el movimiento de la Tierra, a fin de dilucidar una contradicción existente entre la óptica clásica y la teoría electromagnética de Maxwell.

La Tierra se mueve en torno del Sol con una velocidad tangencial que, salvo ligeras variaciones regidas por la ley de masas, vale 3×10^6 cm/s. Por tanto, en seis meses experimentará una variación de 6×10^6 cm/s. A este movimiento se superpone la rotación diurna que, para un punto del ecuador, origina una velocidad tangencial de 5×10^4 cm/s., que es despreciable en comparación con la anterior. Puede, pues, admitirse en experimentos de corta duración que se mueve la Tierra con movimiento uniforme y una velocidad que ciertamente no es inferior a los 3×10 cm/s. Vamos a ver que, si las velocidades se componen con arreglo a lo previsto en la mecánica clásica, debiera ser posible hallar la velocidad de la Tierra por mediciones hechas en un laboratorio.

El método empleado por Michelson y Morley está representado esquemáticamente en la figura 1. Un haz luminoso, procedente del

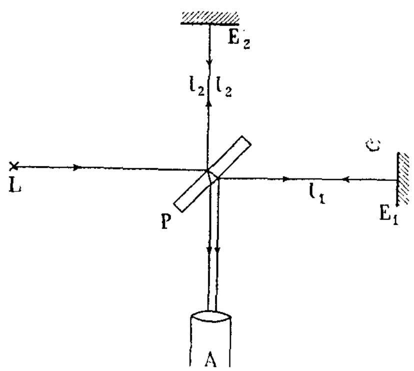

Fig. 1.—Experimento de Michelson y Morley.

manantial L, se bifurca al incidir con un ángulo de 45° sobre la cara semitransparente de la lámina P. El rayo refractado marcha por l_1, incide normalmente sobre el espejo E_1 y llega al anteojo A después de reflejarse en dicho espejo y en la cara posterior de la lámina P. El otro rayo marcha por l_2, se refleja en el espejo E_2 y después de refractarse en la lámina llega al anteojo, donde interfiere con el anterior. En el campo visual aparecerá una imagen de interferencia debida a los rayos que llegan a cada punto después de haber experimentado la referida bifurcación.

Supóngase que la Tierra se mueve con la velocidad v en el sentido LP. Respecto de los ejes del laboratorio, la luz tendrá la velocidad $c - v$ al ir de P a E_1, y la velocidad $c + v$ al hacer el mismo recorrido en sentido contrario. El tiempo invertido en el trayecto $P E_1 P$ valdrá:

$$t_1 = \frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2 l_1 / c}{1 - v^2/c^2} .$$

Si δ es el camino recorrido por el aparato mientras la luz va de P a E_2, será:

$$\frac{\delta}{v} = \frac{\sqrt{l_2^2 + \delta^2}}{c}, \quad \text{de donde} \quad \delta = \frac{v}{c} \frac{l_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

y el tiempo invertido por la luz al ir y volver de P a E_2, será:

$$t_2 = \frac{2\, l_2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Si se hace girar el aparato 90° en torno a P, de modo que E_2 ocupe la posición de E_1, los tiempos que tarda la luz en hacer los recorridos de ida y vuelta serán:

$$\bar{t}_1 = \frac{2\, l_1/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad \bar{t}_2 = \frac{2\, l_2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

y las diferencias a la llegada a P serán:

En la primera posición:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - l_2 \right).$$

En la segunda posición:

$$\Delta \bar{t} = \bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \frac{2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(\frac{l_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - l_2 \right).$$

La rotación del aparato es causa de que la diferencia de tiempos experimente un cambio dado por:

$$\Delta \bar{t} - \Delta t = \frac{2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (l_1 + l_2) \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).$$

Como $v^2/c^2 \sim 10^{-8}$ es muy pequeño comparado con la unidad, se puede hacer un desarrollo en serie, y resulta:

$$\Delta \bar{t} - \Delta t = \frac{1}{c} (l_1 + l_2) \frac{v^2}{c^2}.$$

Este cambio será causa de que varíe la posición de las franjas de interferencia en el campo del anteojo. Como la separación s entre dos franjas consecutivas corresponde a una diferencia de tiempos igual al período T de la luz empleada, la dislocación Δs estará dada por:

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta \bar{t} - \Delta t}{T} = -\frac{\nu}{c}(l_1 + l_2)\frac{v^2}{c^2}.$$

En esta expresión, ν es la frecuencia de la luz empleada, que vale alrededor de 2×10^{-4} cm^{-1}; v es la velocidad absoluta de la Tierra, que en alguna época del año no puede ser inferior a 3×10^6 cm/s. Por tanto:

$$\frac{\Delta s}{s} \sim -\frac{l_1 + l_2}{5 \cdot 10^3},$$

donde las distancias han de medirse en centímetros. Michelson y Morley pudieron emplear distancias de varios metros, con lo que el cambio de posición de las franjas debiera haberse observado. Pero el resultado fué reiteradamente negativo.

La explicación más sencilla del experimento en cuestión consiste en admitir que *la luz se propaga con la misma velocidad en todos los sistemas inerciales*. De este hecho, elevado a la categoría de postulado, dimana la teoría de la relatividad.

CAPITULO PRIMERO

LAS ECUACIONES DE LORENTZ

§ 1. *Los postulados de la teoría de la relatividad de Einstein.*

Hizo notar Lorentz que podía explicarse el resultado del experimento de Michelson y Morley sustituyendo las fórmulas de transformación de Galileo por otras convenientemente elegidas, y trató de justificarlas con razonamientos fundados en la Mecánica clásica. Pero Einstein (1), basándose en que los fenómenos del electromagnetismo dependen tan sólo del movimiento relativo de los imanes y de las corrientes, y teniendo en cuenta el citado experimento, enunció su famoso principio de la relatividad y dedujo de él las ecuaciones de Lorentz. En realidad, aunque Einstein no lo dijese expresamente, son tres los postulados que se utilizan sucesivamente para deducir las fórmulas de Lorentz:

1.º Postulado de Galileo. *Dado un sistema inercial, S, es también inercial cualquier otro sistema, S', que se mueva respecto del primero con movimiento rectilíneo y uniforme.*

2.º Invariancia de la velocidad de la luz. *La luz se propaga con igual velocidad en todos los sistemas inerciales.*

3.º Principio de la relatividad. *Todos los sistemas inerciales son equivalentes.*

El primer postulado procede de la Mecánica clásica y es consecuencia del principio de la inercia y de admitir que el paso de ejes fijos a ejes móviles está regido por las fórmulas de transformación de Galileo. Ahora se formula como postulado independiente, esto es, válido aunque sea preciso cambiar las fórmulas de transformación.

---

(1) A. Einstein: *Ann. der Physik*, 17, p. 891, 1905.

El segundo postulado se justifica por los éxitos de la teoría electromagnética de Maxwell, según la cual la velocidad de las ondas electromagnéticas es una constante universal ligada con las dos permeabilidades del vacío, la eléctrica y la magnética. El experimento de Michelson y Morley está conforme con dicho postulado, pero no constituye una prueba definitiva, pues no permite afirmar que las velocidades en los trayectos de ida y vuelta sean iguales, sino que el tiempo invertido en todo el recorrido es independiente de la orientación del aparato. Experimentos más recientes llevados a cabo por L. Essen, W. W. Hansen y K. Bol, mediante cavidades resonantes recorridas por ondas micrométricas, parecen probar que c es independiente del sentido en que se mueve el laboratorio donde se realiza el experimento, pero ello es negado por A. Grünbaum (2).

Finalmente, el tercer postulado es una generalización del primero, y se basa en el hecho de no haber sido posible realizar un experimento que permita averiguar si un sistema de referencia se halla en reposo absoluto o se mueve uniformemente.

§ 2. *Las fórmulas de transformación.*

Sean dos sistemas referenciales, uno S, que supondremos fijo, y otro S', que se mueve con velocidad constante en magnitud y dirección. Se trata de hallar las fórmulas que sirven para pasar de uno a otro sistema, teniendo presentes los postulados enunciados en el apartado anterior.

Sin perjuicio de la generalidad, y puesto que el paso a ejes fijos no ofrece dificultad, supondremos que ambos sistemas son rectangulares, que los ejes X y X' coinciden y son paralelos a la dirección del movimiento, y que los ejes Y, Z, son respectivamente, paralelos a los Y', Z'.

En virtud del postulado de Galileo ha de ocurrir que el movimiento de un punto material libre de acciones exteriores sea rectilíneo y uniforme al ser representado en cualquiera de los sistemas S y S', debiendo suceder, además, que el encuentro de dos puntos móviles sea descrito como un acontecimiento que ocurre en el punto

(2) A. Grünbaum: *Am. J. of Physics.*, 23, p. 450, 1955; íd., 24, p. 588, 1956.

común de sus trayectorias. En el lenguaje geométrico, esto equivale a decir que entre los espacios S y S' existe una correspondencia punto a punto y recta a recta, de tal modo, que al punto de intersección de dos rectas corresponda el punto de intersección de sus homólogas. Esto lleva consigo el que las fórmulas de transformación sean lineales respecto de las coordenadas, y también habrán de serlo respecto del tiempo, porque a un movimiento rectilineo y uniforme en S, debe corresponder otro movimiento rectilíneo y también uniforme en S'. Además, la correspondencia ha de ser afín, pues si dos móviles describen trayectorias paralelas en S, no se podrán encontrar en S'. Deberá, pues, conservarse el paralelismo.

En virtud del segundo postulado, deberá suceder que la propagación de una onda luminosa sea descrita del mismo modo en ambos sistemas referenciales. Para hallar las restricciones que ello impone a las fórmulas de transformación, supóngase que en el origen de S y en el instante $t = 0$, se produce un destello luminoso. Al cabo de un tiempo t, los puntos alcanzados por la luz se hallarán en la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \qquad [2.1]$$

y, si los orígenes de ambos sistemas coinciden en el intante $t = 0$, esta misma onde deberá tener en S' la ecuación:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t^2, \qquad [2.2]$$

pues damos por supuesto que los relojes de S y S' marchan acordes.

Desde luego, las ecuaciones de Galileo no sirven, pues con ellas la ecuación [2,1] se convierte en:

$$(x' + v\,t)^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t^2$$

que no puede identificarse con [2.2], sino en el caso trivial $v = 0$. Esto revela que, para que el problema tenga solución, hemos de disponer de más parámetros, y el único recurso consiste en admitir que, *al pasar de uno a otro sistema, no sólo cambian las coordenadas, sino que también cambia el tiempo.*

Según esto, la ecuación [2.2] debe ser sustituída por

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \qquad [2.2']$$

y el problema consiste en determinar los coeficientes de las fórmulas de transformación

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_{11} x' + \alpha_{12} y' + \alpha_{13} z' + \alpha_{14} t' + k_1 \\ y &= \alpha_{21} x' + \alpha_{22} y' + \alpha_{23} z' + \alpha_{24} t' + k_2 \\ t &= \alpha_{31} x' + \alpha_{32} y' + \alpha_{33} z' + \alpha_{34} t' + k_3 \\ z &= \alpha_{41} x' + \alpha_{42} y' + \alpha_{43} z' + \alpha_{44} t' + k_4 \end{aligned}\right\} \qquad [2.3]$$

de modo que, aplicadas a [2.1], resulte [2.2′].

Podemos, en primer lugar, imponer la condición de que sea $t = t' = 0$ cuando coinciden los orígenes de ambos referenciales, con lo cual será $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

Como el movimiento se realiza a lo largo del eje $X \equiv X'$, las coordenadas y, z correspondientes a cualquier punto $P\,(x', y', z')$, deberán ser independientes del tiempo, luego:

$$\alpha_{24} = \alpha_{34} = 0.$$

La conservación del paralelismo lleva consigo el que, si $x'_1 = x'_2$ sea también $x_1 = x_2$ para $t =$ const., cualesquiera que sean las otras coordenadas. Esta misma consideración vale para los otros dos ejes, luego:

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0.$$

Evidentemente, el eje $X \equiv X'$ es un eje de simetría, por lo que entre y e y' habrá la misma relación que entre z y z'. En consecuencia:

$$\alpha_{22} = \alpha_{33} = a.$$

Cualquiera de los puntos de S está animado de la velocidad $-v$ respecto de S', por lo que habrá de ser:

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial t'}\right)_x = -v$$

y la primera de las ecuaciones [2.3], teniendo presente que $\alpha_{12} = \alpha_{13} = 0$, conduce a

$$\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{11}} = v.$$

De las consideraciones anteriores resulta que, en virtud del primer postulado y por la manera de haber elegido los ejes y el origen de los tiempos, ha de ser:

$$x = \alpha_{11}(x' + v t'); \quad y = a y'; \quad z = a z'; \quad t = \alpha_{41} x' + \alpha_{42} y' + \alpha_{43} z' + \alpha_{44} t'. \qquad [2.4]$$

Pasando ahora al segundo postulado, se ve inmediatamente que si la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

ha de convertirse en

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

han de anularse los coeficientes de los términos xy, xz, zx, luego:

$$\alpha_{41}\,\alpha_{42} = 0; \quad \alpha_{42}\,\alpha_{43} = 0; \quad \alpha_{44}\,\alpha_{41} = 0$$

y, en virtud de la simetría en torno del eje $X \equiv X'$, deberá ser:

$$\alpha_{42} = -\alpha_{43} = 0.$$

Con esto, el segundo postulado exige que se cumpla la identidad:

$$\alpha_{11}^2 (x' + v t')^2 + a^2 (y'^2 + z'^2) - c^2 (\alpha_{41} x' + \alpha_{44} t')^2 \equiv \gamma^2 (x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2),$$

donde γ^2 es una constante arbitraria. En consecuencia, ha de ser:

$$\alpha_{11}^2 - c^2 \alpha_{41}^2 = \gamma^2; \quad a = \gamma; \quad v^2 \alpha_{11}^2 - c^2 \alpha_{44}^2 = -c^2 \gamma^2; \quad v \alpha_{11}^2 - c^2 \alpha_{41} \alpha_{41} = 0. \qquad [2.5$$

Estas cuatro ecuaciones permiten hallar todos los coeficientes de las ecuaciones de transformación en función de la constante arbitraria $\gamma = a$. Para ello, se despeja α_{44} de la última ecuación y se sustituye en la tercera:

$$v^2 \alpha_{11}^2 - \frac{v^2 \alpha_{11}^4}{c^2 \alpha_{41}^2} = -c^2 \gamma^2$$

De aquí se despeja $c^2 \alpha_{41}^2$ y se sustituye en la primera ecuación, con lo que resulta, puesto que $\gamma = a$:

$$\alpha_{11} = \pm \frac{\gamma}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Como se supone que los ejes X y X' están dirigidos en el mismo sentido, habrán de ser x y x' del mismo signo para $t = t' = 0$, lo que obliga a tomar el signo $+$.

La tercera ecuación da:

$$a_{44} = \pm \frac{\gamma}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

y como ha de ser $t' > 0$ si $t > 0$, es también válido el signo positivo.

Finalmente, la última de las ecuaciones [2.5] da:

$$a_{41} = \gamma \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

y las fórmulas de transformación resultan ser:

$$x = \gamma \frac{x' + v\,t'}{\alpha}; \quad y = \gamma\, y'; \quad z = \gamma\, z'; \quad t = \gamma \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\alpha} \qquad [2.6]$$

siendo:

$$\alpha = \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

El principio de la relatividad de Einstein sirve para fijar el valor de la magnitud de dimensión nula γ, pues, por ser equivalentes los sistemas S y S' ha de suceder que, para pasar de las fórmulas directas a las inversas, baste cambiar v por $-v$ y permutar las letras acentuadas por las que no lo están. Resultan así, según se ve fácilmente, que ha de ser $a = 1$, y resultan las fórmulas de Lorentz:

$$x = \frac{x' + v\,t'}{\alpha}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\alpha} \qquad [2.7]$$

y sus inversas:

$$x' = \frac{x - v\,t}{\alpha}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x}{\alpha} \qquad [2.8]$$

De la primera de las inversas se deduce que la velocidad de S' respecto de S es:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{x'} = v,$$

como era de prever. Esto significa que la velocidad relativa tiene el mismo valor absoluto en ambos sistemas.

§ 3. *Metros y relojes.*

Las fórmulas de transformación de Lorentz tienen consecuencias que el propio Einstein calificó de asombrosas. Para interpretarlas debidamente conviene precisar el significado de los símbolos que en ellas intervienen.

Desde luego, las coordenadas x, y, z son el resultado de mediciones hechas con metros, y los símbolos t y t' representan lecturas en relojes. De los metros exige Einstein que sean *rígidos*, pero resulta que, por efecto del movimiento, su longitud experimenta ciertos cambios. Por esta razón admitiremos que la rigidez impuesta por Einstein significa que han de ser *perfectamente elásticos*, de tal modo, que vuelvan a coincidir con el metro patrón siempre que se comparen directamente con él, cualesquiera que sean las vicisitudes que hayan sufrido. Quedan así excluídos todos los fenómenos de histéresis. En consonancia con lo que precede, entenderemos por distancia entre dos puntos la longitud de una regla rígida que los una.

A los relojes no puso otra condición que la de ser *idénticos* al patrón. Pero, para evitar confusiones en el desarrollo de la teoría, conviene añadir algunos requisitos, aunque parezcan triviales.

Admitiremos que la marcha de los relojes está regulada por un fenómeno físico *rigurosamente periódico*, de tal modo, que todas las piezas del aparato regulador vuelvan a ocupar su posición relativa al final de cada período. Esta condición excluye, por ejemplo, los llamados relojes atómicos, lo que no implica el que de la teoría de la relatividad no puedan derivarse consecuencias acerca de la frecuencia de las radiaciones emitidas por los distintos átomos o de la semivida de los núcleos atómicos y de los corpúsculos inestables. Además, y dado el fin a que se destinan, los relojes han de permitir la lectura instantánea de la hora, por lo que suponemos que llevan manecillas cuya posición puede variarse a voluntad para ponerlos en hora. También estarán provistos de un artificio que permita regular su marcha para acomodarla a la del reloj patrón.

§ 4. *Simultaneidad, isotopía y coincidencia.*

Cuando alguien sentado en un ferrocarril en marcha dice: «He estado aquí todo el rato», da a entender que ha permanecido fijo en un lugar del sistema de referencia de que forma parte. Pero los que se quedaron en la estación de partida dirán: «El viajero ya no está aquí.» Esto muestra que la palabra *aquí* tiene distinto significado, según que la pronuncie el viajero o el que se halla quieto en una estación. Por la misma razón, decir que dos sucesos han ocurrido *en un mismo lugar* significa cosa distinta para quien está en reposo y para quien se mueve.

Que yo sepa, no hay en el lenguaje corriente un adjetivo para calificar los sucesos que acaecen en un mismo lugar y en tiempos cualesquiera, por lo que habrá que recurrir al término pedantesco *isotopos*, que se emplea ya en Física para expresar una idea análoga. Con este convenio podemos decir que *la isotopía es un concepto relativo*, pues si es válido para un observador en reposo, no lo es para quien se mueve, de donde resulta que será preciso en cada caso mencionar el sistema de referencia en que vale la isotopía.

Si nos atenemos al significado intuitivo de la palabra simultaneidad, debiera suceder que, si todos los relojes hubiesen sido previamente contrastados y puestos en hora con un reloj patrón, marcasen *simultáneamente* la misma hora. Pero de las fórmulas de Einstein resulta que no puede ser $t' = t$ sino cuando $t' = t = 0$ y $x = x' = 0$. Esto significa que los relojes de S' no marchan sincrónicamente con los de S aun cuando se haya tenido cuidado de poner en hora con el patrón el que se hallaba en $x' = 0$ en el instante $t = 0$. Esta asombrosa consecuencia de la teoría de la relatividad obliga a precisar el concepto de simultaneidad, cosa que hizo Einstein según se verá a continuación.

El contraste de un reloj con el patrón no ofrece dificultad cuando permanecen uno al lado de otro, pero no es cosa obvia cuando están separados, aunque se hallen en reposo relativo. Para este caso dió Einstein una regla que puede describirse de la siguiente manera:

Cierto observador, A, que se halla junto al reloj patrón, es el encargado de poner en hora todos los relojes que forman parte de su sistema S. A este efecto, posee una estación de radar con la que se pueden enviar señales luminosas hacia cualquier objeto y observar en una pantalla la imagen transportada por la señal refleja Si se trata de poner en hora el reloj de otro observador, B, solidario de A, mandará A una señal hacia B y anotará las lecturas, t_1 y t_2, del reloj patrón en los instantes de salida y de llegada de la señal, así como la lectura, t, que se encuentra reproducida en la imagen del reloj B. Si sucede que:

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} \qquad [4.1]$$

el reloj B está en hora con el patrón. De no ser así, A dará instrucciones a B para que mueva convenientemente las manecillas de su reloj. Se ve inmediatamente que ésta es la única manera de poner en hora compatible con la invariancia de la velocidad de la luz, pues *de* $t - t_1 = t_2 - t$ se deduce la fórmula [4.1]. Además, para aplicarla no se requiere ni transportar relojes ni medir distancias. Sirve también para el contraste de relojes en reposo, pues bastará repetir la operación y comprobar que sigue siendo satisfecha. Cuando tal ocurra, se dirá que el reloj B está sincronizado con el patrón.

Desde el punto de vista cinemático, todo suceso queda caracterizado por el lugar y el momento en que ocurre, por lo que, dado un sistema referencial y relojes sincronizados en él, cada suceso se caracterizará por cuatro números, x, y, z, t. La definición de simultaneidad dada por Einstein reza así:

Dos sucesos, $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ *son simultáneos cuando* $t_1 = t_2$.

Veamos cómo son observados los mismos sucesos desde otro sistema inercial, S', animado de la velocidad v respecto del primero. Con las fórmulas de Lorentz se obtiene:

$$t'_1 = \frac{t_1 - \dfrac{v}{c^2} x_1}{\alpha}\,; \qquad t'_2 = \frac{t_2 - \dfrac{v}{c^2} x_2}{\alpha}$$

y será $t'_1 \neq t'_2$ a no ser en el caso trivial $x_1 = x_2$ y $t_1 = t_2 = 0$. Resulta, pues, que *dos sucesos simultáneos en* S *no lo son en* S'. *La simultaneidad no tiene valor absoluto más que cuando se refiere a sucesos que ocurren en el mismo lugar y en el mismo instante.*

Para terminar estas consideraciones, diremos que dos sucesos son coincidentes cuando son simultáneos e isótopos.

Dice Einstein en su primera memoria que, gracias a haber precisado lo que ha de entenderse por relojes sincrónicos en reposo, se obtiene una definición para la simultaneidad y otra para el tiempo. De aquí sacan algunos autores (A. Grünbaum, loc. cit.) la consecuencia de que la fórmula [4.1] sirve para definir el tiempo t en B y que, con igual razón, hubiera podido adoptarse la definición:

$$t = t_1 + \varepsilon (t_2 - t_1) \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

Desde nuestro punto de vista, la ecuación [4.1] no es una definición del tiempo, sino una consecuencia de haber postulado que la luz tiene la misma velocidad en el trayecto de ida que en el de vuelta. Lo que sí es independiente de dicho postulado es la definición de simultaneidad.

§ 5. *La dilatación de los intervalos de tiempo.*

Otra consecuencia asombrosa de las ecuaciones de Lorentz es que el tiempo que transcurre entre dos sucesos es diferentemente apreciado por los distintos observadores.

Sean dos sucesos, $P_1 (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)$ y $P_2 (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)$ que ocurren en el mismo lugar de S'. Para S' el tiempo transcurrido entre ambos sucesos será $t'_2 - t'_1$. En virtud de las ecuaciones de Lorentz este mismo intervalo, medido desde S, valdrá:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - \frac{v}{c^2} x'_1}{\alpha} - \frac{t'_1 - \frac{v}{c^2} x'_1}{\alpha} = \frac{t'_2 - t'_1}{\alpha} > t'_2 - t'_1 \qquad \text{(isotopía en } S')$$

Recíprocamente, dos sucesos, $P_1 (x_1, y_1, z_1, t_1)$ y $P_2 (x_1, y_1, z_1, t_2)$ que ocurren en el mismo lugar de S serán vistos desde S' como si ocurrieran en tiempos tales que:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\alpha} > t_2 - t_1 \qquad \text{(isotopía en } S)$$

y resulta en ambos casos que el tiempo que transcurre entre dos sucesos parece mayor cuando ocurren en un sistema en movimiento.

En particular, los sucesos en cuestión pueden ser el comienzo y el fin de uno de los períodos del fenómeno que regula la marcha de los relojes utilizados en las medidas. Entonces, cuando para S' haya transcurrido $t'_2 - t'_1 = 1$ hora, para S habrá transcurrido:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\alpha} > 1 \text{ hora} \qquad \textbf{(isotopía en } S'\textbf{)}$$

Recíprocamente, cuando haya transcurrido una hora en S, será:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\alpha} > 1 \text{ hora} \qquad \textbf{(isotopia en } S\textbf{)}$$

En consecuencia, cada observador encuentra que retrasa el reloj del otro.

§ 6. *La contracción de Fitzgerald-Lorentz.*

Tratemos de averiguar las implicaciones de las fórmulas de Lorentz en lo que se refiere a las dimensiones de los cuerpos. Supongamos que S' coloca su metro paralelamente al eje Y'. Entre las coordenadas de sus extremos existirá la diferencia $y'_2 - y'_1 = 1$ metro. Al aplicar las fórmulas de Lorentz resulta también $y_2 - y_1 = 1$ metro, cualquiera que sea t'. Lo mismo sucede si el metro se coloca en cualquier dirección perpendicular a X' y, por tanto, las dimensiones transversales de los cuerpos no se alteran a causa de su movimiento.

Si S' coloca su metro en la dirección del movimiento relativo, será $x'_2 - x'_1 = 1$ metro. Se trata ahora de ver cuánto vale esta misma distancia medida desde S. Ello requiere definir operacionalmente la manera de comparar dos metros que se mueven uno con relación a otro, y la manera obvia será definir la longitud del metro móvil como la diferencia entre las abscisas de los puntos en que se hallan *simultáneamente* sus extremos, apreciando la simultaneidad con los relojes del sistema que se considera fijo. Será, pues, preciso calcular la diferencia $x_2 - x_1$ para $t_2 = t_1$.

Como en virtud de la fórmula de transformación es:

$$x'_2 = \frac{x_2 - v\,t_2}{\alpha}\,; \qquad x'_1 = \frac{x_1 - v\,t_1}{\alpha}$$

resulta, si $t_2 = t_1$:

$$x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1)\,\alpha < 1 \text{ metro} \quad \text{(simultaneidad en S)} \qquad [6.1]$$

en consecuencia, a S le parece que el metro de S′ es más corto que el suyo propio.

El principio de la relatividad exige que, vistas las cosas desde S', sea el metro de S el que parece más corto. Así ocurre en efecto, puesto que ahora la longitud de este metro ha de definirse por la diferencia, $x'_2 - x'_1$ entre las abscisas de los puntos en que se hallan simultáneamente sus extremos, debiendo ser apreciada la simultaneidad con los relojes de S', esto es, con la condición $t'_2 = t'_1$. Entonces, las fórmulas de Lorentz:

$$x_1 = \frac{x'_1 + v\,t'_1}{\alpha}\,; \qquad x_2 = \frac{x'_2 + v\,t'_2}{\alpha}$$

dan, si $t'_2 = t'_1$:

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1)\,\alpha < 1 \text{ metro} \quad \text{(simultaneidad en S')} \qquad [6.2]$$

Como consecuencia de lo que precede resulta que *los cuerpos parecen acortarse en la dirección en que se mueven.*

Nótese que las ecuaciones [6.1] y [6.2] no son contradictorias, pues se refieren a operaciones diferentes, pero es irremediable el preguntar si los acortamientos son reales o aparentes. La respuesta depende de lo que se entienda por real, pero en todo caso cabe afirmar que el efecto en cuestión se debe a que, según la teoría de Einstein, la simultaneidad en S no es lo mismo que la simultaneidad en S', por lo que, aunque parezca paradójico, los acortamientos han de achacarse a los relojes y no a los metros. El que un metro parezca mayor que otro, o al revés, según el observador que los compara, es análogo a lo que sucede cuando dos personas se observan a través de una lente cilíndrica. Cada uno ve deformada la imagen del otro y, si bien es cierto que a los sujetos no les ha pasado nada, también es cierto que la deformación de las imágenes retinianas es cosa real.

Habrá notado el lector que, por la forma de las ecuaciones de Lorentz, ocurre que, a cada proposición que se refiere a los intervalos de tiempo, corresponde otra que afecta a las distancias, y que se pasa de una a otra cambiando dilatación por contracción y coincidencia de lugar o isotopía por simultaneidad.

§ 7. *Contraste de metros y relojes en movimiento.*

Si el observador S' pretende comparar sus medidas con las de S, y se ha convenido en que sea éste quien tenga los patrones, deberá comenzar por contrastar sus metros y sus relojes con los de S. Empezando por los relojes, cabe considerar las siguientes posibilidades:

a) *Contraste por transporte.* Se sincronizan directamente los relojes con el patrón y luego se transportan a S'.

b) *Contraste por regulación desde S.* El observador situado en S' ajusta la marcha de su reloj atendiendo las indicaciones que le envía una estación de radar situada junto al reloj patrón. Hecho esto, ajusta los demás relojes de S′ con el suyo propio.

c) *Contraste por regulación desde S'.* El observador S' posee una estación de radar con la que manda una señal hacia el reloj patrón, recibe la imagen de éste y aplica la regla de Einstein, ajustando la marcha de su reloj y la posición de las manecillas hasta conseguir el sincronismo. A continuación, sincroniza con el suyo los demás relojes de S'.

Estas dos últimas formas de contraste deben desecharse, porque no están de acuerdo con las ecuaciones de Lorentz. En efecto; si se procede como en *b*), el observador S encontrará que el reloj de S' tiene la misma marcha que el suyo propio, siendo así que las citadas fórmulas exigen que observe un retraso. Con la manera *c*), será S' quien encuentre que ambos relojes tienen la misma marcha, lo que no debe suceder por la misma razón.

Queda sólo como posible la manera *a*) y, para que sea viable, es preciso que, cualquiera que sea el tipo de reloj y la manera de transportar el reloj desde S a S', su marcha quede ajustada automáticamente de acuerdo con las exigencias de las fórmulas de Lorentz, según las cuales, la marcha de los relojes de S' comparada con la de los de S, no depende más que de la velocidad relativa v. De aquí resulta que, según la teoría de Einstein, *cuando un reloj cualquiera es transferido de un sistema* S *a otro* S′, *que se mueve con la velocidad* v *respecto del primero, su marcha se modifica automáticamente, de tal modo que, si el período era* T_0 *antes del transporte, el nuevo período, medido desde* S, *vale:*

$$T = \frac{T_0}{\alpha}$$

Esto equivale a decir que *la marcha de un reloj en movimiento depende tan sólo de su velocidad con relación al observador que la mide y no de cómo ha adquirido dicha velocidad*; es función de punto y no de línea.

Hay que advertir que, en opinión de algunos autores, el ajuste de la marcha no se hace automáticamente, sino que el observador S' debe variar el período de sus relojes de modo que se comporten de acuerdo con las ecuaciones de Lorentz. Así, McCrea (3) dice que se consigue que sea igual a 1 la constante arbitraria que figura en las fórmulas de transformación y que la velocidad de la luz valga lo mismo en todos los sistemas inerciales mediante un «ajuste de unidades». Esta tesis nos parece insostenible, porque el principio de la relatividad y la invariancia de la velocidad de la luz no serían leyes naturales, sino consecuencia de ciertas maniobras hechas con los metros y los relojes.

Un razonamiento enteramente análogo al anterior muestra que el contraste de metros ha de realizarse por transporte y que, según la teoría de la relatividad, si dos metros son iguales cuando están juntos y en reposo, siguen siéndolo cuando vuelven a estar juntos y en movimiento, cualesquiera que sean las vicisitudes que haya sufrido cada uno. *La longitud de un sólido es*, pues, *función de punto.*

§ 8. *Tiempo propio de un reloj. Relojes ideales.*

Supóngase que en el origen de coordenadas del sistema S, además del reloj patrón, R_0, hay otro reloj, R, sincronizado con el primero. En un instante dado, t_0, se pone en movimiento el reloj R con una velocidad, $u(t)$, que puede ser variable con el tiempo. Se trata de averiguar la hora, τ, que marcará R en el instante t.

En general, el problema es insoluble por falta de datos, pues es preciso saber cómo se comporta el reloj al ser acelerado, y es evidente que tal comportamiento dependerá del tipo de reloj que se utilice, pues no puede ser el mismo para péndulos regulados por fuerzas exteriores, como los de péndulo, que para relojes cuya marcha está condicionada por fuerzas interiores, como sucede en los relojes de bolsillo. Por eso, para poder seguir adelante, admitiremos que se

(3) W. H. McCrea: *Relativity Physics*, p. 14. Methuen & Co., Londres, 1934.

trata de *relojes ideales*, es decir, relojes cuya marcha, si bien puede depender de la velocidad instantánea, como exige la teoría de Einstein, no depende de la aceleración.

Según se ha visto en el apartado anterior, la marcha del reloj R, medida desde S, resulta ser más lenta que cuando se hallaba en reposo, de tal modo que, mientras las manecillas del reloj patrón avanzan dt, las de R avanzan:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\, dt,$$

de donde se deduce:

$$\tau - t_0 = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\, dt \qquad [8.1]$$

y como el radical es siempre menor que la unidad, la hora, τ, marcada por el reloj móvil será siempre menor que la marcada por los relojes fijos, y permanecerá invariable en el caso $u = c$.

Cuando un reloj sincronizado con el reloj patrón situado en el sistema inercial S es transportado a otro sistema inercial S', marcará en el instante t una hora, dada por la expresión [8.1], que dependerá de la forma de la función $u(t)$, y del tiempo $t - t_0$ invertido en la transferencia. Por tanto, τ no está determinado por los valores de t y de la velocidad final v, sino que depende de cómo se ha realizado el paso de un sistema a otro. Esto hace ver que, a diferencia de lo que sucede con el período, *la hora marcada por un reloj que ha sufrido cambios de velocidad, es una función de línea*. En particular, cuando el intervalo $t - t_0$ tiende a cero, τ tenderá a t.

La importancia de la hora τ que marca un reloj ideal que se ha movido de cualquier manera sin que nadie haya tocado sus manecillas, estriba en que se trata de una magnitud invariante; esto es, que no depende del sistema en que se coloca el reloj patrón para medir el tiempo t y, con él, la velocidad u. Por eso se llama *tiempo propio* del reloj en cuestión.

Para demostrar esta importante propiedad, haremos notar que la expresión

$$s^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \qquad [8.2]$$

es invariante respecto de las fórmulas de transformación de Lorentz, por lo que la magnitud $d\tau$, definida por:

$$\left.\begin{aligned} d\tau^2 &\equiv dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \\ &= \left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\} dt^2 \end{aligned}\right\} \qquad [8.3]$$

también será invariante. Pero la expresión encerrada en el paréntesis recto del segundo miembro es el cuadrado de la velocidad instantánea, u, del reloj, luego será:

$$d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2}\, dt$$

y basta integrar para obtener la expresión τ del tiempo propio.

Nótese que las magnitudes s y τ, definidas por [8.2] y [8.3], son invariantes, aunque no se trate de relojes ideales, pero en tal caso, el tiempo propio τ no representa ya la hora marcada por las manecillas del reloj, sino la que marcaría un reloj ideal que hubiese sufrido sus mismas vicisitudes.

Admitamos ahora que los fenómenos que ocurren en un cuerpo en movimiento están regidos en cada instante, a igualdad de otras circunstancias, por la velocidad, u, de que está animado con relación a cierto sistema de referencia S. Podremos ignorar dicha velocidad y el tiempo t medido en S, magnitudes que no son invariantes, a condición de introducir el tiempo propio de un reloj ideal que acompañe al cuerpo en su movimiento. Por eso, el tiempo, τ, medido en tal reloj, cuando sus manecillas no han sido tocadas por nadie desde que fué puesto en hora con el patrón, se llama tiempo propio del cuerpo en cuestión.

El siguiente comentario servirá para aclarar la noción de tiempo propio. Ocúpanse actualmente los físicos en medir la edad del universo analizando minerales radiactivos de diversas procedencias, y ello ha permitido afirmar, por vía empírica, que el universo fué creado en determinado lugar hace algunos miles de millones de años. Un físico imbuído de ideas relativistas preguntará, ¿qué significa tal resultado si el tiempo transcurrido entre dos sucesos depende del movimiento del observador que lo mide?

Sea S un sistema de referencia fijo en el lugar en que ocurrió la creación, y t el tiempo medido en dicho sistema. El tiempo propio de cada trozo de mineral valdrá:

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - u^2/c^2}\, d\,t,$$

y dependerá de los movimientos que, con relación a S, haya ejecutado desde que fué creado. Pero, en todo caso, será $\tau < t$, de donde resulta que, si la decadencia radiactiva no depende de la aceleración (4), puede afirmarse las mediciones de la edad del mundo pecarán por defecto mientras no se tenga la fortuna de tropezar con un cuerpo radiactivo que haya permanecido en el sistema S desde el principio de los tiempos. Es plausible tomar como edad del universo el tiempo t, medido en el sistema inmóvil, con lo que resulta que todas las medidas realizadas en la práctica podrán pecar por defecto, pero nunca por exceso.

Razonando de un modo perfectamente ortodoxo dentro de la teoría einsteniana, hemos encontrado un sistema privilegiado, el que ha permanecido invariablemente ligado al sitio de la Creación. Este sistema, por gozar de tal privilegio, merece ser llamado espacio en reposo por antonomasia, y también merecen la designación de espacio absoluto y de tiempo absoluto los conceptos abstractos derivados de las mediciones realizadas con metros y relojes solidarios del mismo. Como Einstein y, sobre todo los matemáticos y filósofos relativistas, han negado enfáticamente la existencia de tales entes absolutos, parece que hay contradicción entre el hecho de ser posible prácticamente la medición de la edad del universo y las ideas básicas de la teoría einsteniana. Pero, en realidad y pese a las rotundas afirmaciones de los relativistas, dicha teoría en nada se opone a la existencia del espacio y del tiempo absolutos, sino que afirma la imposibilidad de reconocerlos si alguna vez topamos con ellos. Y ocurre, en efecto, que si llegase hasta nosotros un meteorito con un tiempo propio muy superior a los medidos hasta la fecha, no podríamos asegurar que teníamos en la mano algo que había permanecido siempre en el sistema S, pues siempre quedaría la posibilidad de que nos llegase otro todavía más viejo.

---

(4) Que así sucede ha sido demostrado experimentalmente en los mesones por Ticho, H., *Phys. Rev.*, 72, 255 (1947).

§ 9. *Hora propia de un sistema inercial.*

Supóngase que en el sistema inercial fijo, S, se distribuyen por doquier relojes solidarios del mismo y se sincronizan con el situado en el origen de coordenadas de modo que todos marquen la hora t *simultáneamente en* S. Si se hace lo mismo en otro sistema inercial S', todos sus relojes marcarán la hora t' *simultáneamente en* S'. Los valores de t y t' están relacionados por las fórmulas de Lorentz, de tal modo que, si el reloj de S' que está situado en x' marca t' horas, el reloj de S, que en este instante coincide con él, marcará:

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\alpha}.$$

Hemos visto que, al transferir un reloj del sistema S al sistema S', su marcha medida con los relojes de S debe variar automáticamente, de tal modo que parezca retrasar a razón de $1 - \alpha$ horas cada hora. Por otra parte, si es un reloj ideal, la hora marcada por sus manecillas estará dada por el tiempo propio:

$$\tau = t_0 + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \sqrt{1 - u^2/c^2}\, d\, t,$$

donde t_0 es la hora que marcaba al salir del sistema S, y $\Delta\, t$ el tiempo invertido en la transferencia. Es evidente, puesto que la función $u(t)$ es arbitraria, que el valor de τ queda indeterminado, por lo que, si el observador S' quiere utilizar dicho reloj, habrá de comenzar por mover sus manecillas hasta que marque la hora t' propia de S'. Resulta, por tanto, a diferencia de lo que sucede con el período, el cual se ajusta automáticamente a la velocidad final v, que *la puesta en hora ha de ser efectuada a mano.*

La distinción entre la hora propia, τ, del reloj y la hora propia, t', del sistema S', resulta clara si se tiene en cuenta una circunstancia que parecen haber olvidado todos los que se ocupan en cuestiones relativistas, y es que en las ecuaciones de Lorentz pueden figurar cuatro constantes aditivas, de las que se puede disponer para elegir arbitrariamente el origen de coordenadas y el origen de los tiempos en el sistema móvil. En consecuencia, las fórmulas que resultan de suprimir dichas constantes sólo serán válidas cuando los metros con que se mide x' se hayan colocado a partir del origen $0'$ y todos los relojes de S' se hayan puesto en hora, de modo que sea $t' = 0$ para $x' = 0$ y $t = 0$. Hay necesidad, pues, de *efectuar maniobras, tanto para poner en posición los metros como para poner en hora los relojes*, y es natural que la hora t' que marca un reloj después de tales manipulaciones no tenga nada que ver con su hora propia, τ, que es la que marcaría si no se hubiesen tocado sus manecillas.

§ 10. *La paradoja de los relojes.*

Uno cualquiera de los relojes de S', por ejemplo el situado en la abscisa x', pasará en cada instante t' junto a alguno de los relojes de S, el cual marcará la hora t correspondiente a los valores dados de x' y t'. El que las horas t y t' marcadas por ambos relojes no sean iguales no ofrece, a primera vista, nada de particular, pues parece ser cosa comparable al hecho de que los relojes de España adelanten una hora respecto de los de Portugal, por lo que si un español y un portugués se encuentran en *cualquier parte* no se asombrarán de que sus relojes difieran en una hora. Pero lo que sucede con los sistemas inerciales es más complicado, porque, por una parte, la diferencia de hora entre dos relojes coincidentes en un punto, uno de S y otro de S' depende del lugar, x', en que ocurra el encuentro y, además, su marcha es diferente, como si la hora española fuese más corta que la portuguesa cuando la comparación la hace un portugués, y ocurriera lo contrario cuando es un español quien se encarga de hacer el contraste.

Este asombroso comportamiento de los relojes tiene su parangón en lo que sucede con los metros, pero en este caso el proceso se puede «visualizar» recurriendo a la metáfora de la lente cilíndrica interpuesta entre el metro fijo y el metro móvil. Cabría la esperanza de explicar de un modo análogo lo que sucede con los relojes, pero es el caso que no se puede imaginar una «lente para tiempos» que, colocada delante de un reloj, alterase el valor de sus indicaciones. Es un caso en que falla la correspondencia o isomorfismo entre espacios y tiempos, por lo que la explicación que sirve para los metros no vale para los relojes.

Entre las consecuencias sorprendentes de la teoría de Einstein destaca la llamada paradoja de los relojes, que fué y está siendo objeto de animada controversia, sin que, hasta ahora, haya sido posible aclararla a gusto de todos. Procede, pues, analizar cuidadosamente la paradoja en cuestión, y la manera más sencilla consiste en tratar de resolver el siguiente problema:

Por una estación, 0, pasa sin detenerse un tren (sistema S') en el que va un viajero con un reloj que ha sido previamente contrastado con el reloj de la estación. Al pasar el tren por delante de 0, marca el reloj de ésta la hora $t = 0$, y el viajero mueve las manecillas del suyo de modo que sea también $t' = 0$. El tren para bruscamente y al cabo de cierto tiempo T medido en S y regresa a la estación 0 con la misma velocidad que antes. Se trata de averiguar lo que marcará el reloj del viajero cuando termine el viaje de ida y vuelta.

El jefe de estación razonará así: puesto que el reloj del viajero retrasa, a razón de $1 - \alpha$ horas cada hora, la solución es:

$$2\,T' = 2\,\alpha\,T + \Delta\,t', \qquad [21.1]$$

donde $\Delta t'$ es lo que hayan avanzado sus manecillas mientras se produce la inversión.

Por su parte, el viajero razonará como sigue: el reloj de la estación retrasa respecto del mío, luego cuando aquél marque $2\,T$, el mío marcará:

$$2\,T' = 2\,T/\alpha + \Delta\,t' \qquad [21.2]$$

La paradoja consiste en que las dos soluciones, aparentemente legítimas, son incompatibles, pues de la comparación de [21.1] con [21.2] resulta la ecuación absurda:

$$\alpha = 1/\alpha. \qquad [21.3]$$

Ante estas dos soluciones contradictorias, la posición que parece lógica es la del profesor Dingle (loc. cit.), quien afirma que ambas son incorrectas, y que debe ser $T' = 2\,T$, como si los relojes de S y S' marcharan lo mismo. Procede, pues, examinar a fondo la cuestión.

Al retroceder el tren, cambia el sistema inercial S' en otro S'' y, aunque con ello no se altera la marcha de los relojes, hay que proceder a la determinación de las constantes arbitrarias que figuran en las ecuaciones de Lorentz aplicando las nuevas condiciones iniciales. Para facilitar la cuestión, supondremos que es despreciable el tiempo Δt invertido en el cambio de marcha.

El viajero, que se encuentra en $x' = 0$, tomará como condiciones iniciales para el viaje de regreso los valores $x = vT$, $t = T$, y el valor de t' dado por la fórmula de Lorentz

$$t = \frac{1}{\alpha}\left(t' + \frac{v}{c^2}\, x'\right)$$

que da $t' = \alpha T$ para $x' = 0$, $t = T$. Las condiciones iniciales serán, pues:

$$(x'' = 0,\ t'' = \alpha\, T) \qquad \text{para} \qquad (x = v\, T,\ t = T)$$

y si se hace $T'' = \alpha T$, las fórmulas de transformación para el viaje de vuelta serán:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\alpha}\,(x'' - v\, t'' + 2\, v\, T''); & t &= \frac{1}{\alpha}\left(t'' - \frac{v}{c^2}\, x''\right) \\ x'' &= \frac{1}{\alpha}\left(x + v\, t - 2\, \frac{v}{\alpha}\, T''\right); & t'' &= \frac{1}{\alpha}\left(t + \frac{v}{c^2}\, x - 2\, \frac{v^2}{\alpha\, c^2}\, T''\right) \end{aligned}\right\} \qquad [21.4]$$

y cuando ambos relojes vuelvan a estar reunidos en $x = x'' = 0$, sus respectivas indicaciones serán:

Reloj de la estación......... $t_0 = 2\, T$

Reloj del viajero........... $t''_v = 2\, \alpha\, T$,

con lo que resulta:

$$t_v = \alpha\, t_0\,. \qquad [21.5]$$

Ahora bien; el jefe de estación rechazará este resultado aduciendo que su reloj, que antes del cambio de marcha marcaba un tiempo t_1, dado por la ecuación

$$t' = \frac{1}{\alpha}\left(t_1 - \frac{v}{c^2}\, x\right) \qquad \text{para} \qquad x = 0,\ t' = \alpha\, T,$$

o sea, $t_1 = \alpha T''$, pasa a marcar súbitamente un tiempo t_2, que se obtendrá de [21.1] haciendo $x = 0$ y $t'' = T''$, o sea:

$$t_2 = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) T''$$

lo que significa que sus manecillas avanzan, sin causa justificada, un intervalo

$$t_2 - t_1 = \frac{2\,v^2}{\alpha\, c^2}\, T'' \qquad [21.6]$$

Para plantear el problema a gusto del jefe de estación, que se encuentra en $x = 0$, hay que tomar como situación inicial la que resulta de aplicar su propio concepto de simultaneidad, según el cual la inversión del movimiento del tren es un acontecimiento que se produce cuando su reloj marca $t = T$, y el reloj de S', que entonces pasa por $x = 0$, marca:

$$t' = \frac{1}{\alpha}\left(t - \frac{v}{c^2}\, x\right) = T/\alpha$$

con un valor de x' dado por

$$x' = \frac{1}{\alpha}(x - v\, t) = -\, v\; T/\alpha .$$

Las condiciones iniciales serán, pues,

$$x'' = -\, v\; T/\alpha;\; t'' = T/\alpha) \quad \text{para} \quad (x = 0,\, t = T)$$

con lo que las fórmulas de transformación para el viaje de regreso serán:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \frac{1}{\alpha}(x + v\, t - 2\, v\, T); & t'' &= \frac{1}{\alpha}\left(t + \frac{v}{c^2}\, x\right) \\ x &= \frac{1}{\alpha}\left(x'' - v\, t'' + 2\,\frac{v}{\alpha}\, T\right); & t &= \frac{1}{\alpha}\left(t'' - \frac{v}{c^2}\, x'' - 2\,\frac{v^2}{\alpha\, c^2}\, T\right) \end{aligned}\right\} \quad [21.4']$$

Al final de la jornada, cuando ambos relojes estén reunidos en $x = x'' = 0$, sus respectivas indicaciones serán:

$$t_0 = 2\, T; \quad t''_v = 2\, T/\alpha,$$

de donde

$$t''_v = t_0/\alpha \qquad [21.5']$$

Pero ahora es el viajero quien rechazará esta solución, pues su reloj, que antes de la inversión marcaba un tiempo t'_1 dado por

$$t = \frac{1}{\alpha}\left(t'_1 + \frac{v}{c^2}\, x'\right) \quad \text{para} \quad x' = 0,\; t = T,$$

o sea $t'_1 = \alpha T$, pasa a marcar súbitamente un tiempo t''_2, que se obtendrá de [21.4'], haciendo $x'' = 0$ y $t = T$, o sea:

$$t'_2 = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) T$$

lo que significa que sus manecillas avanzan, sin causa justificada, un intervalo:

$$t''_2 - t''_1 = \frac{2\, v^2}{\alpha\, c^2}\, T. \qquad [21.6']$$

Estamos, pues, ante un dilema. Si las dos soluciones [21.5] y [21.5'] fuesen válidas, resultaría la ecuación absurda $\alpha/1/\alpha$. Si se rechaza la [21.5'] porque no satisface al viajero, habrá que rechazar la [21.5] porque no satisface al jefe de estación

Resulta de esta discusión que las ecuaciones de Lorentz conducen a dos soluciones contradictorias, ninguna de las cuales es aceptable.

Podría alegarse que cuando se trata el problema a la manera del viajero, se supone que la parada y vuelta atrás de todos los puntos del tren se produce simultáneamente en S, mientras que el jefe de estación aplica el criterio de simultaneidad en su propio sistema. Pero es el caso que de ambas maneras se respeta la condición de que el reloj del viajero invierta su movimiento cuando $t = T$ y $t' = \alpha T$.

Ciertos autores (5) opinan que la paradoja de los relojes sólo puede explicarse mediante la teoría general de la relatividad, lo que equivale a decir que las ecuaciones de Lorentz no pueden aplicarse para pasar de S a S'', a pesar de que ambos sistemas son inerciales, que es justamente para lo que fueron obtenidas. Por otra parte, si se examina con cuidado el razonamiento que se aplica en la teoría general de la relatividad, se ve que, aunque sea irreprochable desde el punto de vista matemático, conduce a consecuencias inadmisibles si creemos en la existencia de leyes físicas, en cuya virtud no puede haber efecto sin causa que lo justifique.

En esencia, la explicación que se da en la teoría general es la siguiente: Desde el punto de vista del viajero (simultaneidad en S') su reloj marca $t' = \alpha T$ en el momento en que retrocede el tren,

---

(5) R. C. Tolman: *Relativity, Thermodinamics, and Cosmology*, Oxford, 1934; C Möller: *The Theory of Relativity*, Oxford, 1955.

mientras que el reloj de 0, situado en $x = 0$, marca $t = \alpha^2 T$. Cuando el viajero llega a 0, su reloj marcará $2 T'' = 2 \alpha T$, y el que permanece fijo en 0 habrá avanzado un intervalo dado por el tiempo propio

$$\tau = \int_{\alpha T}^{2\alpha T} \sqrt{1 - v^2/c^2}\, d t = \alpha^2 T,$$

por lo que debiera marcar $2 \alpha^2 T$, y sería el viajero quien había envejecido más deprisa, de acuerdo con la solución [21.5′] Pero ocurre que el efecto de la aceleración, que es nulo para el reloj del viajero cuando la inversión se produce instantáneamente, hace que el reloj situado en $x = 0$ experimente los efectos de un campo gravitatorio ficticio que le hace avanzar $2 v^2 T/c^2$, que es justamente el salto a que se refiere la ecuación [21.6]. Así se llega a la solución [21.5], que es la aceptada por todos los autores.

Pero, a nuestro juicio, la explicación que acabamos de exponer es inaceptable porque el potencial de dicho campo gravitatorio es una función de x que se anula en $x = v T$ y se hace infinito en $x = 0$, por lo que debiera suceder que la sincronización de los relojes de S se desbaratase a consecuencia de lo ocurrido a un reloj que no forma parte este de sistema. De ser así, los habitantes de la Tierra envejecerían cada vez que un vehículo interestelar emprendiera el viaje de regreso.

22. *La semivida de los mesones rápidos.*

Mientras se imprimía este capítulo ha aparecido un escrito de Crawford (6) en el que se aducen hechos para la confirmación experimental de la paradoja de los relojes.

Los hechos a que se refiere Crawford no constituyen ninguna novedad, pues fueron ya citados por Jánossy (7) y por Sommerfeld (8). Consiten en medidas realizadas por Rossi *et al.* (9), por Rasetti (10)

---

(6) Crawford, F. S.: *Nature*, 179, 35 (1957).
(7) Jánossy, L.: *Cosmic Rays*, Oxford (1950), pág. 201.
(8) Sommerfeld, A.: *Electrodynamics*, New York (1952), pág. 228.
(9) Rossi, Hilberry y Hoag: *Phys. Rev.*, 57, 461 (1949).
(10) Rasetti, F.: *Phys. Rev.*, 60, 198 (1941).

y por Blackett (11) del flujo de mesones μ a grandes alturas y al nivel del mar, de las que se deduce que la semivida de tales partículas, que vale $(1{,}5 \pm 0{,}3) \times 10^{-6}$ segundos cuando están en reposo, se convierte en 30×10^{-6} segundos cuando se mueven con una velocidad tal que $\alpha = 1/15$, lo cual, habida cuenta de los errores experimentales, está de acuerdo con la teoría de Einstein. Además, las medidas de Ticho (12) muestran que la aceleración no influye sobre la semivida, por lo que el efecto observado no puede atribuirse a lo que pasa cuando los mesones pasan del movimiento al reposo.

Si bien se mira, el comportamiento de los mesones, en vez de aclarar la paradoja, la pone de manifiesto con toda claridad, pues basta considerar dos porciones de un mismo cuerpo radiactivo, una de las cuales ejecuta un viaje de ida y vuelta en las mismas condiciones que el viajero del § 21. La que permaneció en reposo debe envejecer más deprisa que la otra, y, como según Ticho, ello no puede atribuirse a la aceleación sufrida por la otra porción, habrá que buscar otra explicación. Más adelante veremos cómo se encuentra.

---

(11) Blackett, P. M. S.: *Proc. Roy. Soc.*, A, 159, 1 (1937).
(12) Ticho, H.: *Phys. Rev.*, 72, 255 (1947).

CAPITULO II

LAS NUEVAS FORMULAS DE TRANSFORMACION

1. *Revisión de los postulados relativistas.*

En el capítulo anterior hemos puesto de manifiesto que las ecuaciones de Lorentz conducen a resultados difícilmente conciliables entre sí. Hay, pues, motivos para desecharlas, por grandes que sean los éxitos logrados por la teoría de Einstein, y por bello que sea el algoritmo matemático que utiliza. Todo esto constituiría una verdadera catástrofe si no fuese porque, como se verá en el curso de estas lecciones, cabe sustituir la teoría einsteniana por otra que, si bien discrepa en las implicaciones metafísicas acerca del espacio y del tiempo, conduce a las mismas consecuencias de orden físico y está libre de dificultabdes lógicas. La teoría de la relatividad se encuentra ahora en circunstancias análogas a como se hallaba la teoría del átomo de Bohr cuando se aplicaba con éxito, a sabiendas de que era inconsistente consigo misma.

Para deducir las fórmulas de Lorentz hemos hecho uso de tres postulados, a saber: 1.º Dado un sistema inercial son inerciales todos los que se mueven con respecto a él con velocidad constante. 2.º La luz se propaga con igual velocidad en todos los sistemas inerciales. 3.º Todos los sistemas inerciales son equivalentes. En realidad, para deducir las fórmulas de Lorentz basta un solo postulado, que abarca los tres anteriores, y que es el principio de la relatividad de Einstein. Puede enunciarse así: *No hay experimento que permita averiguar si un sistema se halla en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme.*

Puesto que las fórmulas de Lorentz parecen inadmisibles, el principio de relatividad de Einstein implica una imposibilidad lógica y no sirve para explicar racionalmente los fenómenos naturales. Si en lugar de este principio nos atenemos a los tres en que puede descomponerse, se ve fácilmente que el tercero es incompatible con los dos primeros y, como fué introducido mediante una generalización no plenamente justificada del principio de relatividad de Galileo, está indicado averiguar lo que sucede si se prescinde de él. Puestas así las cosas, habremos de basar la teoría en los dos primeros postulados, que pueden considerarse como suficientemente justificados. El uno, porque sirvió de base a la mecánica clásica, y no hay razón para abandonarlo; el otro, porque constituye la explicación más sencilla del experimento de Michelson y Morley.

2. *Las nuevas fórmulas de transformación.*

Según se vió en el § 2 del capítulo primero, los dos primeros postulados exigen que las fórmulas de transformación entre un sistema en reposo, S, y otro, S', que se mueve con la velocidad v, sean:

$$x = \frac{\gamma}{\alpha}(x' + v\,t'); \quad y = \gamma\,y'; \quad z = \gamma\,z'; \quad t = \frac{\gamma}{\alpha}\left(t' + \frac{v}{c^2}\,x'\right) \quad \alpha = \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

donde γ es una constante indeterminada. En la teoría de Einstein esta constante adquiere el valor $\gamma = 1$ gracias a la condición de que los sistemas S y S' sean equivalentes. Pero el mismo razonamiento que nos sirvió para probar que la llamada paradoja de los relojes es, en realidad, un absurdo, muestra que *la duración de un suceso que transcurre en un lugar fijo de un sistema inercial cualquiera ha de ser igualmente apreciada desde el sistema en reposo*, de donde resulta que no se requiere ningún nuevo postulado para hallar el valor de γ, pues la condición $t_2 - t_1 = t_2' - t_1'$ si $x_1' = x_2'$ exige que sea $\gamma = \alpha$. Según esto, las fórmulas de transformación deberán ser:

$$x = x' + v\,t'; \quad y = \alpha\,y'; \quad z = \alpha\,z'; \quad t = t' + \frac{v}{c^2}\,x'; \quad \alpha = \sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad [2.1]$$

de donde se deducen las fórmulas inversas:

$$x' = \frac{1}{\alpha^2}(x - v\,t); \quad y' = y/\alpha; \quad z' = z/\alpha; \quad t' = \frac{1}{\alpha^2}\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right). \qquad [2.2]$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{x'} = v; \qquad \left(\frac{\partial x'}{\partial t'}\right)_{x} = -v,$$

lo que significa que, prescindiendo del signo, la velocidad relativa vale lo mismo en ambos sistemas.

En lo que sigue empezaremos por analizar las modificaciones que el mero cambio de la constante de proporcionalidad obliga a introducir en la teoría de Einstein. Luego, fieles a nuestro programa, seguiremos exponiendo esta teoría, pero utilizaremos también las nuevas fórmulas de transformación. En la exposición nos acomodaremos, en líneas generales, al método seguido por McCrea (1), que nos parece recomendable por lo riguroso y completo.

3. *Simultaneidad y contraste de relojes.*

Con las nuevas fórmulas de transformación ocurre también que dos sucesos, $P_1(x_1, t_1)$ y $P_2(x_2, t_1)$, que son simultáneos en S no lo son en S', pues:

$$t_2' - t_1' = \frac{v(x_1 - x_2)}{c^2 a^2} \neq 0 \quad \text{si} \quad x_1 \neq x_2.$$

Por tanto, la simultaneidad tiene carácter relativo.

En cambio, la duración de un fenómeno cualquiera, que empieza y termina en el mismo lugar de un sistema inercial S', vale lo mismo si se mide desde el sistema en reposo S, pues si el comienzo y el fin están dados por $P_1(x'_1, t'_1)$ y $P_2(x'_1, t'_2)$, será:

$$t_2 - t_1 = t_2' - t_1' \quad \text{(isotopía en S')}.$$

En particular, si $t_2' - t_1' = 1$ hora, será también $t_2 - t_1 = 1$ hora. La marcha de los relojes es la misma.

A diferencia de lo que sucedía en la teoría de Einstein (§ 7, cap. I), *el contraste de relojes puede hacerse desde el sistema en reposo* S. Nótese que las consecuencias anteriores no excluyen el que el pe-

(1) McCrea, W. H.: *Relativity Physics*. Methuen & Co. Londres, 1935.

ríodo del reloj y, en general, la duración de un fenómeno cualquiera, puedan cambiar al pasar del sistema fijo al sistema móvil. Lo que se afirma es la posibilidad de ajustar el reloj situado en $x' = 0$, de modo que marque la misma hora $t' = t$ que los relojes de S que encuentra a su paso. El que para los demás relojes no se cumpla dicha igualdad es debido a que el observador S' tiene que poner en hora con el suyo propio todos los relojes que haya de utilizar en sus experimentos, de modo que todos marquen la misma hora t' simultáneamente en S'.

Para fijar las ideas, supóngase que se trata de averiguar la hora que marcan los relojes de S′ cuando todos los relojes de S marcan $t = 0$. La fórmula

$$t = t' + \frac{v}{c^2} x', \quad \text{con} \quad t = 0 \ \text{(simultaneidad en } S\text{)}$$

nos dice que

$$t' = -\frac{v}{c^2} x'$$

y será $t' \gtreqless 0$ según que $x' \lesseqgtr 0$. En otros términos: vistas las cosas desde S, los relojes situados a la derecha de $x' = 0$ van atrasados y los situados a la izquierda van adelantados a razón de v/c^2 segundos por cada centímetro de su distancia al origen.

Recípocramente, en el instante en que los relojes de S' marcan $t' = 0$, la fórmula

$$t' = \frac{v}{c^2}\left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \quad \text{con} \quad t' = 0 \ \text{(simultaneidad en } S'\text{)}$$

dice que

$$t = \frac{v}{c^2} x,$$

en consecuencia, vistas las cosas desde S', los relojes situados a la derecha del origen van adelantados, y los que están a la izquierda van atrasados, lo cual está de acuerdo con lo que observa S.

En resumen; utilizando señales luminosas y aplicando la regla de Einstein, se puede ajustar la marcha de todos los relojes, fijos y móviles, de modo que todos marchen sincrónicamente con el reloj patrón. Pero, si se trata de realizar medidas en un sistema inercial determinado, S', será preciso mover las manecillas de los relojes solidarios del mismo hasta que marquen la misma hora *simultáneamen-*

te en S'. Las fórmulas hacen ver que, después de esta maniobra, tan sólo el reloj situado en $x' = 0$ marcha sincrónicamente con los relojes de S.

Es de notar que, si se mide desde S' la duración de un fenómeno que ocurre en un lugar fijo de S, se obtendrá

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\alpha^2}(t_2 - t_1) \quad \text{(isotopía en } S\text{)}$$

lo que revela que, para obtener la *verdadera duración* de un fenómeno, el operador deberá hallarse en reposo, o bien debe acompañar en su movimiento al conjunto de cuerpos en que se produce el fenómeno en cuestión.

Nótese que con las nuevas fórmulas queda eliminada la paradoja de los relojes, pues con ellas las diferencias entre los tiempos t y t' se deben a la distinta puesta en hora y no a la diferencia de marcha. La solución que el viajero obtiene en el [21], capítulo I, no es válida, porque las duraciones de fenómenos que ocurren en el sistema en reposo han de medirse en este mismo sistema.

1. *Contracción de los sólidos en movimiento.*

Un sólido rígido es transferido desde el sistema en reposo S al sistema móvil S'. Juntamente con él es transferido un metro, también rígido, después de haberlo contrastado con el metro patrón situado en S. Como lo que suceda al sólido sucederá también al metro, las medidas obtenidas por S' en el sólido coincidirán con las halladas por S antes de la transferencia, por lo que S' no notará cambios de tamaño ni de forma. Se trata ahora de comparar la longitud del metro móvil con la del metro en reposo.

Supóngase que S' coloca su metro perpendicularmente a la dirección del movimiento; por ejemplo, a lo largo del eje Y'. Las coordenadas de sus extremos serán tales que

$$y'_2 - y'_1 = 1 \text{ metro}.$$

Esta misma distancia, medida desde S, valdrá, en virtud de las nuevas fórmulas de transformación:

$$y_2 - y_1 = \alpha\left(y'_2 - y'_1\right) < 1 \text{ metro},$$

de modo que el metro móvil aparece contraído de acuerdo con el factor α.

Recíprocamente, si es S' quien mide con su metro la longitud del metro fijo colocado transversalmente, será:

$$y_2 - y_1 = 1 \text{ metro}; \quad y'_2 - y'_1 = \frac{y_2 - y_1}{\alpha} > 1 \text{ metro}.$$

Los dos observadores están de acuerdo en que el metro móvil, el de S', es más corto que el metro fijo, y como otro tanto puede decirse de cualquier sólido, resulta que, *por efecto del movimiento, las dimensiones transversales se contraen en la proporción* $1/\alpha$. Nótese que, por no intervenir el tiempo en las fórmulas que hemos utilizado, no hay necesidad de especificar en qué sistema han de ser simultáneas las operaciones de medida.

Veamos ahora lo que sucede cuando los metros se colocan en la dirección del movimiento. Las abscisas de los extremos del metro de S' serán tales que

$$x'_2 - x'_1 = 1 \text{ metro},$$

y se trata de averiguar los valores que, *simultáneamente*, toman dichas abscisas en el sistema S, esto es, con la condición $t_2 = t_1$. Habremos de utilizar para ello la primera de las fórmulas [2.2], que conduce a:

$$x_2 - x_1 = \alpha^2 \left(x'_2 - x'_1\right) < 1 \text{ metro} \quad (\text{simultaneidad en } S)$$

y resulta que *las dimensiones paralelas al movimiento aparecen contraídas en la proporción* $1 : \alpha^2$.

Recíprocamente, si es S' quien lleva a cabo la comparación, obtendrá para la longitud $x_2 - x_1 = 1$ metro el valor que resulta de la primera de las fórmulas [2.1], haciendo en ella $t'_1 = t'_2$:

$$x'_2 - x'_1 = 1 \text{ metro}$$

y S' encuentra que su metro coincide con el patrón.

Estos resultados pueden expresarse de un modo sencillo si convenimos en llamar *efecto real* al que es igualmente apreciado por ambos observadores, y *efecto aparente* al que es diferentemente apreciado por proceder de la aplicación de distintos criterios de simultaneidad, de tal modo, que cada uno encuentra que es el metro del otro el que se ha contraído. Con este convenio se puede decir que: *A consecuencia del movimiento, todo cuerpo sólido experimenta una contracción homogénea, de tal modo, que todas sus dimensiones disminuyen en la proporción* $1 : \alpha$. *A este efecto real se superpone un efecto aparente, en cuya virtud cada observador encuentra que las dimensiones paralelas al movimiento relativo se contraen en la proporción* $1 : \alpha$.

Si el observador en reposo, S, mide las dimensiones de un cuerpo en movimiento, encontrará una contracción real α, a la que se superpone otra contracción aparente que vale también α y que sólo afecta a las longitudes paralelas al movimiento. La contracción de estas últimas será, pues, α^2. Pero si el cuerpo se halla en reposo y las mediciones son efectuadas desde el sistema en movimiento, S', la contracción real del metro de S' será causa de que se observe una dilatación homogénea $1/\alpha$ acompañada de una dilatación aparente que sólo afecta a las longitudes paralelas al movimiento. Estas últimas resultan, pues, inalteradas.

Vistas las cosas desde el sistema en reposo, todo pasa como si: *Los cuerpos cambian de tamaño y de forma cuando se ponen en movimiento, de tal modo, que las dimensiones transversales se acortan en la proporción* $s/s_0 = \alpha^2$, *mientras que para las transversales el acortamiento está dado por* $s/s_0 = \alpha$.

Por efecto del movimiento, una esfera se convertirá en un elipsoide de revolución achatado, porque las dimensiones longitudinales se contraen más que las transversales. Desde luego, un observador que se mueva con el cuerpo no notará cambios de tamaño ni de forma.

5. *El espacio-tiempo.*

En el capítulo anterior hemos hecho notar la correspondencia que existe entre los conceptos que atañen al espacio y los que se refieren al tiempo, correspondencia que se manifiesta en el hecho de que a cada conjunto de vocablos referentes a las tres dimensiones del espacio corresponde un vocablo para el tiempo. Así:

Aquí	Ahora.
Arriba, abajo, izquierda, derecha, delante, detrás	Antes, después.

Cerca.	Hace poco; dentro de poco.
Lejos	Hace mucho; falta mucho.
Metros....................	Relojes.
Tamaño....................	Duración.
Posición	Hora.
Isotopía....................	Simultaneidad.

En la teoría einsteniana se manifiesta esta correspondencia gramatical por un *isomorfismo* entre las magnitudes espaciales y las temporales que permite fundirlas todas en una entidad compleja que se denomina espacio-tiempo, cuya razón de ser estriba en las siguientes consideraciones:

Un suceso, P, está caracterizado desde el punto de vista cinemático por cuatro magnitudes, x, y, z, t, que fijan el lugar y el momento. Dados dos sucesos, $P_1 (x_1, y_1, z_1, t_1)$ y $P_2 (x_2, y_2, z_2, t_2)$, la distancia entre los lugares en que ocurren está dada por la expresión:

$$R_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

y el tiempo que transcurre entre ambos vale:

$$T_{12} = t_2 - t_1 .$$

Tanto R_{12} como T_{12} permanecen invariables si se aplican las ecuaciones de transformación de Galileo, circunstancia que se expresa diciendo que son invariantes respecto de las mismas. Pero en la teoría de Einstein ocurre que *ni las distancias ni las duraciones son invariantes respecto de las fórmulas de Lorentz.*

En cambio, el *intervalo entre dos sucesos*, definido por:

$$s_{12} \equiv \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2} = \sqrt{R_{12}^2 - c^2 T_{12}^2}$$

es invariante respecto de las fórmulas de transformación de Lorentz.

El intervalo entre dos sucesos puede ser real, imaginario o nulo. En el primer caso diremos que es de la misma índole que el espacio o que es *paraespacial*. En el segundo caso diremos que es *paratemporal* y conviene sustituirlo por otro real:

$$\tau_{12} \equiv \frac{i s}{c} \equiv \sqrt{(t_2 - t_1)^2 - R_{12}^2/c^2} .$$

Finalmente, el intervalo nulo es a la vez paraespacial y paratemporal.

Dado un intervalo paraespacial, existe siempre un sistema inercial en el que ambos sucesos son simultáneos y, por tanto, el intervalo es igual a la distancia, medida en dicho sistema, entre los puntos en que ocurren. En efecto; si se elige el sistema S' de modo que los sucesos en cuestión ocurran en el eje X' será $R_{12} = x_2 - x_1$ y, para que sea $t'_1 = t'_2$ habrá de ser, por virtud de las fórmulas de Lorentz:

$$t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) = 0$$

de donde:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = c^2 \frac{(t_2 - t_1)^2}{R_{12}^2} < 1 \qquad [5.1]$$

pues, por hipótesis, es $R_{12}^2 > c^2 (t_2 - t_1)^2$.

Cuando el intervalo es paratemporal, o sea cuando $R_{12} < c^2 T_{12}^2$, hay un sistema inercial en el que ambos sucesos son isótopos y, por tanto, el intervalo τ es igual al tiempo que, en dicho sistema, transcurre entre los mismos. En efecto; para que $x'_2 = x'_1$ deberá ser, si rigen las fórmulas de Lorentz,

$$x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1) = 0,$$

de donde:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{R_{12}^2}{c^2 (t_2 - t_1)^2} < s. \qquad [5.2]$$

Finalmente, cuando el intervalo es nulo, cualquiera de las fórmulas [5.1] o [5.2] da para el sistema S' la velocidad $v = c$, lo cual significa que, en este sistema, los sucesos en cuestión serán, a la vez, simultáneos e isótopos.

El isomorfismo entre las magnitudes espaciales y las temporales se pone de manifiesto si se introduce una nueva magnitud:

$$x_4 \equiv i c t,$$

con lo cual, mediante un cambio de notación para las coordenadas, resultan las siguientes expresiones para los invariantes:

$$\left.\begin{aligned} s^2 &\equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ \tau^2 &\equiv -\frac{s^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) \end{aligned}\right\} \qquad [5.3]$$

Al proceder así, y operando en un espacio abstracto de cuatro dimensiones, desaparece de las fórmulas toda distinción entre el espacio y el tiempo. Estas ideas fueron expuestas por Minkowski el año 1907 en el LIII Congreso de Médicos y Naturalistas celebrado en Colonia, en un célebre discurso que comenzaba con estos solemnes párrafos: «Señores: Las ideas que voy a desarrollar ante ustedes acerca del tiempo y el espacio se basan en la experiencia física. En ello radica su fuerza. Su tendencia es radical. Desde este momento, el espacio en sí y el tiempo en sí se sumergen en las sombras, pero queda una entidad formada por la unión de ambos a la que se puede atribuir existencia propia.»

Merced a las ideas de Minkowski, la teoría de Einstein pasó a ser una geometría en un espacio de cuatro dimensiones con una métrica definida por el intervalo [5.3], y en la que las fórmulas de Lorentz se interpretan como una rotación definida por una matriz unitaria. El espacio-tiempo o universo de Minkowski tiene carácter absoluto, a diferencia del espacio en sí y del tiempo en sí que, por ser cosas relativas, carecen de existencia objetiva (1).

Las rotundas afirmaciones de Minkowski no se acomodan a los hechos, pues la experiencia física a que se alude es el experimento de Michelson y Morley, para cuya realización no fué preciso emplear reloj ninguno por lo que puede decirse que el tiempo estaba ausente y no es legítimo sacar consecuencias acerca de su comportamiento. Todo es explicable por los cambios de longitud que experimentan los brazos del aparato cuando pasan de la posición perpendicular al movimiento terrestre a la posición paralela.

Por otra parte, la correspondencia entre las magnitudes espaciales y las temporales no es completa, ni mucho menos. El tiempo transcurre siempre hacia el futuro y no hay manera de alterar su marcha. Tampoco disponemos de artificios que, a manera de lentes ópticas, nos hagan ver aumentadas o disminuídas las duraciones de los fenómenos físicos.

---

(1) Según MINKOWSKI, la esencia del principio de relatividad de Einstein está condensada en la «fórmula mística» 3×10^5 km $= \sqrt{-1}$ seg. Al hacer esta afirmación no se tiene en cuenta que, para los fines del análisis dimensional la constante universal c es ineludible (véase J. PALACIOS, *Análisis Dimensional*. Espasa Calpe, Madrid, 1956).

Todavía cabe señalar una diferencia que radica en la peculiar manera de ser del tiempo y del espacio. Imaginemos un ser racional viviendo en el seno de una atmósfera indefinida, sin ningún cuerpo sólido que sirva de mojón o punto de referencia. O, si se quiere hacer el caso más verosímil, un habitante de una inmensa sábana perfectamente tersa y tan dura que no fuera posible hacer marcas o señales de ningún género. Nuestro personaje tiene víveres suficientes y está provisto de un metro y un reloj. En estas condiciones, todo el vocabulario referente a los conceptos espaciales tendría para él un sentido tan recóndito como toda la terminología de los colores para un ciego. Con su único metro no podría hacer mediciones de ningún género, pues no sabría cómo colocarlo a continuación de sí mismo. Si era matemático podría crear una geometría abstracta, euclídea o no, pero no tendría sentido el tratar de comprobar experimentalmente sus consecuencias. Otro sería el caso si disponía de abundantes barras sólidas, pues empalmándolas unas con otras podría construir una estructura en la que ya sería posible hacer mediciones con el metro. Como se ve, la existencia de sólidos rígidos es condición indispensable para que exista una geometría como ciencia positiva; esto es, basada en mediciones definidas operacionalmente. Lo demás es pura metafísica. Esto no quiere decir que el espacio no pueda existir sin cuerpos sólidos en él; pero sería un espacio sin geometría.

En cambio, el ser solitario tendría idea del tiempo, pues su memoria le bastaría para ordenar sus sensaciones y podría usar su reloj para saber si había dormido mucho o poco, para saber si ya es hora de comer a pesar de no tener apetito, para contar los latidos de su corazón, etc. Es posible, pues, tener idea de lo que es el tiempo y su medida.

Las consideraciones anteriores muestran que la teoría de Einstein, en el aspecto geométrico que le dió Minkowski, a pesar de su belleza, es a modo de lecho de Procusto en el que no cabe la realidad física, sino a fuerza de graves mutilaciones. De un mejor conocimiento cabe esperar que surjan diferencias entre entes que parecían iguales, pero de una teoría que confunde cosas claramente distintas, como son el espacio y el tiempo, no puede decirse que dé una mejor idea de la realidad, sino, en todo caso, un aspecto parcial de la misma. El intervalo espacio-tiempo es un complejo de distancia y duración que ha de medirse con un aparato, híbrido de metro y reloj, que dará segundos o metros, según se trate de sucesos paratemporales o paraespaciales. Con la información que se obtiene al medirlo nada puede decirse acerca de lo que sucede por separado a las distancias y a las duraciones. Por eso, a quienes afirman que la paradoja de los relojes desaparece cuando se opera en el espacio-tiempo y que, por ello, es fruto de nuestra incapacidad para intuirlo, hay que replicar que, si la teoría de Minkowski es consistente consigo misma, se debe a que, por ser excesivamente angosta, deja fuera hechos fundamentales y, entre ellos, la referida paradoja.

Procede ahora revisar las precedentes ideas a la luz de las nuevas fórmulas de transformación. Ante todo, ya no sucede que sea invariante la expresión

$$s^2 \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2$$

pues se transforma en

$$s^2 = \alpha^2 \left[\left(x_2' - x_1'\right)^2 + \left(y_2' - y_1'\right)^2 + \left(z_2' - z_1'\right)^2 - c^2 \left(t_2' - t_1'\right)^2 \right] \equiv \alpha^2 s'^2$$

Por consiguiente, al intervalo espacio-tiempo, cuya importancia consistía en ser invariante, conviene la frase de Minkowski «se hunde en la sombra», y con él toda la geometrización de la teoría de la relatividad.

A cambio de la pérdida de tan valioso invariante, ocurre que *se conserva la duración de cualquier fenómeno físico*, pues si un observador la mide en un sistema inercial cualquiera, operando de la manera que podemos llamar natural, esto es, hallándose en reposo relativo con relación a los cuerpos que intervienen en el experimento (isotopía en S') y obtiene $T'_{12} = t'_2 - t'_1$, las fórmulas de transformación, con $x'_1 = x'_2$, dan

$$T_{12} = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 = T'_{12}.$$

Eliminando t' de las nuevas fórmulas de transformación se obtiene:

$$x = \alpha^2 x' + v\,t; \quad y = \alpha\, y'; \quad z = \alpha\, z'$$

y, salvo el término $v\,t$, que representa un movimiento de traslación uniforme, resulta que todo cuerpo sólido, por el hecho de moverse con la velocidad v, experimenta un cambio dado por el tensor simétrico.

$$S \equiv \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

que representa una deformación pura en la que se conservan las alineaciones a lo largo de los ejes X', Y', Z' en que se hallan los vectores propios del tensor. Es invariante la dilatación relativa, dada por el determinante $\triangle = \alpha^4$. En fin, en lugar de la rotación en el espacio-tiempo, se obtiene una traslación uniforme acompañada de una deformación irrotacional.

6. *El sistema en reposo absoluto.*

En la teoría einsteniana la noción de espacio absoluto carece de sentido, porque se afirma la imposibilidad de que haya en él algo observable que lo distinga de los demás sistemas inerciales. Decir que existe o no un sistema en reposo absoluto pasa a ser una de esas proposiciones de las que no puede decirse que sean ciertas o falsas por la carencia completa de información. Todo esto se traduce en el hecho de haber simetría entre las fórmulas de Lorentz directas y las inversas.

En las nuevas fórmulas de transformación no hay ya tal simetría, lo que indica que el sistema S, el que hemos supuesto en reposo, ha de poseer algún rasgo característico, recognoscible experimentalmente. Para ponerlo de manifiesto, recordemos que, por efecto del movimiento, se contraen los sólidos y que esta contracción puede descomponerse en dos partes: una contracción homogénea que puede calificarse de real porque es igualmente apreciada desde el sistema fijo y desde el sistema móvil, y otra, que sólo afecta a las dimensiones paralelas al movimiento, de la que puede decirse que es aparente porque procede de ser distinto el criterio de simultaneidad.

Si nos atenemos a las dimensiones perpendiculares al movimiento, deberá suceder que experimenten una contracción real tal que, si r_0 es su medida cuando el cuerpo estaba en reposo absoluto, se conviertan en $r = r_0 \sqrt{1-v^2/c^2}$ cuando el cuerpo se mueva con la velocidad v. Este cambio de dimensiones ha de atribuirse a los cambios que experimenta la velocidad del cuerpo cuando pasa del sistema en reposo al sistema móvil, de donde se infiere que *todo cuerpo tiene su tamaño* *máximo cuando forma parte de un sistema que nunca ha sido acelerado. Diremos que un sistema está en reposo absoluto cuando nunca ha sido acelerado, o cuando ha sufrido aceleraciones iguales y contrarias.*

Si hubiere varios de estos sistemas serían indiscernibles, y de cualquiera de ellos podría decirse que estaba en reposo absoluto. Para fijar las ideas podemos suponer que existe uno solo, solidario del lugar en que fué creado el universo y que, en virtud de las leyes de la mecánica, es solidario de su centro de masa.

Las precedentes consideraciones permiten idear un experimento para averiguar, por vía operacional, la *velocidad absoluta* del sistema de que formamos parte. Dispárese una esfera contra un blanco situado perpendicularmente a la trayectoria del proyectil y mídase el radio de la perforación producida. Repítase el experimento cambiando la dirección y la velocidad del proyectil hasta obtener el valor máximo para dicho radio. Esta velocidad, cambiada de signo, sería nuestra velocidad absoluta.

7. *El tiempo absoluto.*

Veamos ahora cuáles son las implicaciones de las nuevas fórmulas de transformación en lo que atañe a las magnitudes temporales.

Sean dos sucesos, $P_1(x'_1, t'_1)$ y $P_2(x'_1, t'_2)$, que ocurren en un mismo punto del eje X'. El tiempo transcurrido entre los mismos, medido desde el sistema en reposo absoluto, valdrá, por virtud de la última fórmula [2.1]:

$$t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 \quad \text{(isotopía en } S'\text{)}. \qquad [7.1]$$

En particular, si $t'_2 - t'_1 = 1$ hora, será también $t_2 - t_1 = 1$ hora. Esto significa que el contraste ha de efectuarse desde el sistema en reposo, con lo cual se logrará que todos los relojes del universo, tanto los fijos como los móviles, tengan el mismo período medido desde S. Pero si el observador móvil quiere hacer experimentos en su propio sistema habrá de poner en hora sus relojes, para lo cual moverá sus manecillas sin alterar su marcha. De este modo, todas las duraciones medidas en cuerpos solidarios de un sistema inercial cualquiera darán el mismo resultado que si la medida se hubiera realizado desde el sistema en reposo absoluto.

Consideremos ahora dos sucesos, $P_1(x_1, t_1)$ y $P(x_1, x_2)$, isótopos en el sistema en reposo absoluto. El tiempo transcurrido entre ellos, medido desde un sistema inercial móvil, valdrá, por virtud de la última fórmula [2.2]:

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\alpha^2}(t_2 - t_1) \quad \text{(isotopía en } S\text{)}.$$

Por tanto, la duración de un fenómeno que acaece en un cuerpo en reposo absoluto parece mayor si se mide desde un sistema móvil. De aquí se infiere que no sería correcto efectuar el contraste de relojes desde el sistema móvil. Vamos a ver, sin embargo, que si la marcha del reloj no depende de la aceleración, es válido el *transporte por transferencia*, lo mismo que en la teoría de Einstein.

Con las fórmulas de Lorentz el tiempo propio de un reloj era invariante, pero no función de punto o de estado, puesto que dependía de la manera cómo la velocidad variaba con el tiempo. Con las nuevas fórmulas ocurre justamente lo contrario. En primer lugar, al no ser invariante la expresión $s^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + c^2 - t^2$, tampoco lo es el tiempo propio $\tau \equiv \sqrt{-s^2/c^2}$. Además, la fórmula [7.1] muestra que la marcha del reloj, medida desde S, es independiente de su movimiento, por lo que habrá de ser $d\tau = dt$ y, en consecuencia

$$\tau - t_0 = t - t_0, \quad \text{o sea,} \quad \tau = t. \qquad [7.2]$$

Por tanto, un reloj ideal que haya sido sincronizado cuando estaba junto al reloj patrón situado en S, y que se mueva luego de cualquier manera, marcará la misma hora, $\tau = t$, que los relojes de S que encuentra a su paso. Al ser transferido a un sistema inercial deberá ser puesto en hora, pero no se deberá alterar su marcha, puesto que ya está conforme con el contraste efectuado desde S.

En la práctica habremos de tomar como patrón un reloj de nuestro propio sistema que, verosímilmente, no está en reposo absoluto, pero su marcha, medida desde un sistema absolutamente inmóvil, es la misma que tendría al ser transferido a él de un modo cualquiera. Podemos, pues, estar seguros de que *las medidas que efectuemos del tiempo que transcurre entre dos sucesos isótopos en nuetro sistema tienen valor absoluto*, pues coinciden con las que se obtendrían haciendo las mediciones desde el sistema en reposo absoluto.

En particular, las medidas de la edad del universo obtenidas con minerales cualesquiera debieran dar el mismo resultado si estos cuerpos se comportaran como relojes ideales. Sin embargo, veremos en el capítulo IV que no es así, de donde resulta que la proporción de átomos radiactivos desintegrados dependerá de las vicisitudes sufridas por el mineral desde que quedó constituído hasta que llegó a nuestras manos.

8. *Causalidad.*

Con las nuevas fórmulas, lo mismo que con las de Lorentz, ocurre que el tiempo que transcurre entre dos sucesos es apreciado diferentemente desde los distintos sistemas inerciales, y hasta puede suceder que se invierta el orden en que son observados.

Sean dos acontecimientos, $P_1 (x_1, t_1)$ y $P_2 (x_2, t_2)$, que acaecen en sendos puntos del sistema en reposo. Supondremos que $t_2 > t_1$. Dos casos pueden presentarse:

a) El intervalo $t_2 - t_1$ es menor que el tiempo $(x_2 - x_1)/c$ que tarda la luz en ir de x_1 a x_2. En este caso, el intervalo es paraespacial, pues $R^2_{12} \equiv (x_2 - x_1)^2 > c^2 (t_2 - t_1)^2$, y de las nuevas fórmulas se deduce que, lo mismo que se halló en el § 5 con las fórmulas de Lorentz, hay un sistema inercial en que dichos sucesos parecen simultáneos, pues será $t'_2 - t'_1 = 0$ cuando

$$t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) = 0 \qquad [8.1]$$

de donde se deduce:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = c^2 \frac{(t_2 - t_1)^2}{(x_2 - x_1)^2} < 1$$

que da la velocidad v $(< c)$ del sistema que se busca. En sistemas animados de una velocidad mayor será $t'_2 < t'_1$, lo que significa que podrá verse primero P_1 y después P_2.

b) Supongamos ahora que

$$t_2 - t_1 > \frac{x_2 - x_1}{c} .$$

Este caso se presentará siempre que el suceso P_1 sea causa del P_2 y ocurra que la acción ejercida por el primero sobre el segundo, se transmita con una velocidad inferior a la de la luz como requiere la relatividad. En este caso, la fórmula [8.1] dice que es imposible hallar un sistema inercial en el que ambos sucesos sean simultáneos, pues dicho sistema habría de ir más de prisa que la luz. En consecuencia, *la causa precede siempre al efecto.*

9. *Fórmulas para la transformación de velocidades.*

El observador móvil, S', estudia el movimiento de un punto material y encuentra para las componentes de la velocidad los valores:

$$u'_x = \frac{d\,x'}{d\,t'}\;;\quad u'_y = \frac{d\,y'}{d\,t'}\;;\quad u'_z = \frac{d\,z'}{d\,t'}\,.$$

Se trata de averiguar el valor que encontrará el observador en reposo para la velocidad del mismo punto. Para resolver este problema escribiremos las fórmulas de transformación en forma diferencial:

Fórmulas de Lorentz	Nuevas fórmulas
$d\,x = \frac{1}{\alpha}(d\,x' + v\,d\,t')$	$d\,x = d\,x' + v\,d\,t'$
$d\,y = d\,y'$	$d\,y = \alpha\,d\,y'$
$d\,z = d\,z'$	$d\,z = \alpha\,d\,z'$
$d\,t = \frac{1}{\alpha}\left(d\,t' + \frac{v}{c^2}\,d\,x'\right)$	$d\,t = d\,t' + \frac{v}{c^2}\,d\,x'$

y basta dividir las tres primeras por la última para obtener, lo mismo con las fórmulas de Lorentz que con las nuevas:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{d\,x}{d\,t} = \frac{d\,x' + v\,d\,t'}{d\,t' + \frac{v}{c^2}\,d\,x'} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}\,u'_x} \\ u_y &= \frac{d\,y}{d\,t} = \alpha\,\frac{d\,y'}{d\,t' + \frac{v}{c^2}\,d\,x'} = \alpha\,\frac{u'_x}{1 + \frac{v}{c^2}\,u'_x} \\ u_z &= \frac{d\,z}{d\,t} = \alpha\,\frac{d\,z'}{d\,t' + \frac{v}{c^2}\,d\,x'} = \alpha\,\frac{u'_z}{1 + \frac{v}{c^2}\,u'_x}\,. \end{aligned}\right\} \qquad [9.1]$$

Estas ecuaciones no son lineales, lo que muestra que las velocidades no se comportan como vectores. Además, si se llama a la velocidad u medida en el sistema en reposo, suma de las velocidades v y u', resulta que *la suma de velocidades no es conmutativa.* Finalmente, cualesquiera que sean los valores de v y u' la suma es siempre inferior a la velocidad de la luz, pues aun en el caso extremo en que $v = c$ resulta:

$$u_x = \frac{u'_x + c}{1 + u'_x/c} = c,$$

de modo que la adición de una velocidad cualquiera a la velocidad de la luz reproduce la velocidad de la luz.

Las fórmulas inversas se obtienen cambiando v por $-v$ y permutando las letras con acento por las no acentuadas.

10. *Las fórmulas de transformación entre sistemas inerciales cualesquiera.*

Las fórmulas [2.1] y [2.2] sirven para pasar del sistema en reposo absoluto, S, a un sistema inercial cualquiera S'. Tratemos ahora de hallar las fórmulas que hay que utilizar para pasar de un sistema S', cuya velocidad absoluta es v', a otro sistema inercial, S'', cuya velocidad absoluta sea v''. En general, v' y v'' tendrán direcciones diferentes, pero para simplificar la cuestión supondremos que son paralelas. Eligiendo convenientemente los ejes, las fórmulas para pasar de S a S' y de S a S'' son:

$$x = x' + v' t'; \quad y = \alpha' y'; \quad z = \alpha' z'; \quad t = t' + \frac{v'}{c^2} x'; \quad \alpha' = \sqrt{1 - v'^2/c^2}$$

$$x = x'' + v'' t''; \quad y = \alpha'' y''; \quad z = \alpha'' z''; \quad t = t'' + \frac{v''}{c^2} x''; \quad \alpha'' = \sqrt{1 - v''^2/c^2}$$

y las fórmulas buscadas se obtendrán eliminando x, y, z, t:

$$x' + v' t' = x'' + v'' t''; \quad \alpha' y' = \alpha'' y''; \quad \alpha' z' = \alpha'' z''; \quad t' + \frac{v'}{c^2} x' = t'' + \frac{v''}{c^2} x''$$

de donde, despejando x', y', z', t', se deduce para las fórmulas directas

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\alpha'^2}\left[\left(1 - \frac{v' v''}{c^2}\right) x'' + (v'' - v') t''\right]; \quad y' = \frac{\alpha''}{\alpha'} y''; \\ z' &= \frac{\alpha''}{\alpha'} z''; \quad t' = \frac{1}{\alpha'^2}\left[\left(1 - \frac{v' v''}{c^2}\right) t'' + \frac{v'' - v'}{c^2} x''\right]. \end{aligned}\right\} \qquad [10.1]$$

Las fórmulas inversas se obtienen permutando las letras acentuadas con las que no lo están y cambiando v por $-v$.

11. *Sistemas inerciales equivalentes.*

Con las nuevas fórmulas, dos sistemas inerciales cualesquiera no son equivalentes, lo cual significa que las dimensiones de cuerpos sólidos en reposo absoluto y las duraciones de los fenómenos que en ellos ocurren serán apreciadas de distinto modo. Pero podemos tener la certeza de que todo sistema inercial es equivalente al que se mueve con velocidad igual y contraria, tanto por la isotropía del espacio como a consecuencia de las referidas ecuaciones.

Las fórmulas de transformación entre sistemas equivalentes se obtendrán haciendo $v'' = -v'$ y $\alpha'' = \alpha'$ en las ecuaciones [10.1], y resulta:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1 + v'^2/c^2}{1 - v'^2/c^2}\, x'' - \frac{2\, v'}{1 - v'^2/c^2}\, t'' \\ y' &= y'' \\ z' &= z'' \\ t' &= \frac{1 + v'^2/c^2}{1 - v'^2/c^2}\, t'' - \frac{2\, v'/c^2}{1 - v'^2/c^2}\, x'' \end{aligned}\right\} \qquad [11.1]$$

De la primera de estas fórmulas se deduce que la velocidad de S' respecto de S'' vale:

$$w = \left(\frac{\partial x''}{\partial t''}\right)_{x'} = \frac{2\, v'}{1 + v'^2/c^2} \qquad [11.2]$$

de acuerdo con la regla de composición de velocidades [9.1] aplicada al caso $u'_x = v = v'$.

Veamos ahora en qué se convierten las ecuaciones [11.1] al sustituir en ellas v' por su valor deducido de [11.2]:

$$v' = \frac{1 \pm \sqrt{1 - w^2/c^2}}{w/c^2}.$$

Para saber el signo que se debe tomar basta tener en cuenta que ha de ser

$$\frac{v'\, w}{c^2} = 1 \pm \sqrt{1 - w^2/c^2} < 1,$$

lo que indica que sólo es válido el signo negativo. Así resulta:

$$\frac{1 - v'^2/c^2}{1 + v'^2/c^2} = \frac{w^2 - c^2(1 - \sqrt{1 - w^2/c^2})}{c^2(1 - \sqrt{1 - w^2/c^2})}$$

y, racionalizando el denominador del segundo miembro:

$$\frac{1 - v'^2/c^2}{1 + v'^2/c^2} = \sqrt{1 - w^2/c^2}\,.$$

Del mismo modo se obtiene:

$$\frac{1 - v'^2/c^2}{2\,v'/c^2} = \frac{c^2}{w}\sqrt{1 - w^2/c^2}\,,$$

y, sustituyendo en [11.1] resulta, finalmente:

$$x' = \frac{x'' - \dfrac{w}{c^2}\,t''}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}\,; \quad y' = y''; \quad z' = z''; \quad t' = \frac{t'' - \dfrac{w}{c^2}\,x''}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \qquad [11.3]$$

que son las fórmulas de Lorentz, puesto que w es la velocidad de S'' respecto de S'.

Con la modificación que hemos introducido en la teoría de la relatividad hay que manejar dos series de ecuaciones de transformación, que sirven para resolver dos tipos diferentes de problemas. Las nuevas, [2.1], sirven para pasar del sistema en reposo absoluto a otro sistema inercial cualquiera, mientras que las [11.1] son sólo utilizables entre sistemas inerciales equivalentes.

En la nueva teoría ocurre que los relojes de cualquier sistema marchan lo mismo que el reloj patrón, suponiendo que el contraste se realiza desde el sistema en reposo absoluto, por lo que la diferencia entre los valores de t y t' en las fórmulas [2.1] se debe exclusivamente a que la simultaneidad en S no es la misma cosa que en S'. Dicho de otro modo: los relojes de S y S' miden todos segundos, pero su puesta en hora es diferente. Falta ahora hacer ver que las ecuaciones de Lorentz, [11.4], aplicadas a dos sistemas equivalentes, S' y S'', conducen a la consecuencia de que los relojes de uno y otro, *vistos desde el sistema en reposo absoluto* S, marchan lo mismo, esto es, todos miden segundos, por ejemplo.

La cuestión puede plantearse en los siguientes términos. En el sistema S se encuentra el reloj patrón y, mediante señales luminosas emitidas desde el mismo, se contrastan y ponen en hora los relojes situados a lo largo del camino que han de recorrer S' y S''. Por el mismo método, esto es, desde el reloj patrón situado en S, se contrastan los relojes de S' y S'' cuando ya marchan con las velocidades $+v'$ y $-v'$, respectivamente. Entonces, las ecuaciones [2.1] dan:

$$t' = t \quad \text{para} \quad x' = 0 \quad (\text{reloj de } S')$$

$$t'' = t \quad \text{para} \quad x'' = 0 \quad (\text{reloj de } S'')$$

lo cual muestra que las indicaciones de ambos relojes coinciden con la hora marcada por los relojes de S que encuentran a su paso Resulta, además, que para cualquier valor de t es $t' = t''$, lo cual significa que *ambos relojes marcan la misma hora simultáneamente en* S.

12. *Los relojes de Fokker.*

Razonando sobre las fórmulas de Lorentz, hicimos ver en el § 7 del capítulo primero que el contraste de relojes ha de efectuarse cuando están en reposo respecto del patrón, pues si estuvieran en movimiento y se utilizasen señales luminosas se obtendrían resultados en desacuerdo con dichas fórmulas. Hay que admitir, por tanto, que cuando un reloj es transferido de un sistema a otro, su marcha se modifica automáticamente hasta adquirir el valor previsto por las fórmulas de Lorentz. Además del cambio de marcha, prevé la teoría einsteniana un cambio en las dimensiones del reloj paralelas al movimiento, y no está claro si se trata de dos efectos independientes o si el cambio de dimensiones es la causa de que se altere el período del fenómeno físico que regula la marcha del fenómeno en cuestión. Sea como fuere, en todos los tratados se da por supuesto que el referido cambio automático ocurre en los relojes de cualquier tipo, y por eso se dice que es el tiempo, como entidad abstracta, el que se dilata a consecuencia del movimiento.

En el caso de los relojes de bolsillo, por ejemplo, debiera ocurrir que el período de oscilación del volante:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \quad (I \text{ momento de inercia; } k \text{ par elástico correspondiente a un radián.})$$

se convirtiera en

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k(1 - v^2/c^2)}}$$

cuando el reloj se mueve con la velocidad v.

Ahora cabe preguntar, ¿será debido el cambio experimentado por el período a la contracción prevista por las fórmulas de Lorentz? La respuesta es difícil porque, si bien podemos calcular lo que ocurre con el momento de inercia para cada posición del volante con relación al movimiento, no sabemos lo que ocurre con la elasticidad del resorte, a no ser que admitamos que, por arte de birlibirloque, toma el valor que conviene a las previsiones de dichas fórmulas, cosa en la que parecen estar de acuerdo todos los relativistas.

Para dar una respuesta razonada conviene recurrir a *relojes ideales*, construídos exclusivamente con sólidos rígidos, esto es, sin resortes, y eventualmente con rayos luminosos, pues entonces los postulados relativistas bastan para calcular el período en función de la contracción de las longitudes. Hemos de agradecer al profesor Fokker la descripción, todavía inédita, de un tipo de reloj que sirve admirablemente para los fines de la teoría de la relatividad.

Sea una superficie esférica rígida cuya cara interior es perfectamente reflectora. Si desde el centro de la esfera se lanza un destello resultará una onda que, después de reflejarse, convergerá en el centro, volverá a reflejarse y así indefinidamente. En virtud del experimento de Michelson y Morley, tanto la reflexión como la convergencia en el centro se producen lo mismo cuando la esfera está quieta que cuando se mueve con velocidad constante.

El precedente fenómeno nos proporciona el medio ideal de construir un reloj cuyo comportamiento se podrá prever con el solo auxilio de los postulados relativistas. Bastará idear un artificio que haga avanzar una división a la manecilla cada vez que el destello pasa por el foco.

Ha demostrado Fokker que la focalización se produce aunque el reloj se mueva con movimiento uniformemente acelerado, si bien el foco no se forma ya en el centro de la esfera. Para nuestro propósito basta calcular el período, medido desde S, cuando el reloj se mueve con la velocidad constante v.

Como el fenómeno es simétrico respecto del eje X, podemos operar en dos dimensiones y utilizar las coordenadas polares r y θ.

El problema consiste en averiguar los tiempos, medidos desde S, que transcurren entre los siguientes sucesos:

P_1	Un rayo parte de O	$x'_1 = y'_1 = t'_1 = 0$
P_2	Llega al punto A de la esfera..	$x'_2 = r \cos\theta;\quad y'_2 = r \operatorname{sen}\theta;\quad t'_2 = \dfrac{r}{c}$
P_3	Regresa al centro............	$x'_3 = y'_3 = 0;\quad t'_3 = 2\,r/c.$

y el período, medido desde S', valdrá: $T_0 = 2r/c$. Se ve inmediatamente que el período, medido desde el sistema en reposo, vale:

$$T = \frac{1}{\alpha}\left(t'_3 + \frac{v}{c^2}\,x'_3\right) = 2\,r/\alpha\,c = T_0/\alpha \quad \text{(con las fórmulas de Lorentz)}$$

$$T = t'_3 + \frac{v}{c^2}\,x = 2\,r/c = T_0 \quad \text{(con las nuevas fórmulas).}$$

Se trata ahora de calcular T a partir de la deformación que sufre la esfera vista desde S.

Empezando con las fórmulas de Lorentz, la reflexión se produce en un punto, A', cuyas coordenadas son:

$$x_2 = \frac{x'_2 + v\,t'_2}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}(r\cos\theta + v\,r/c);\quad y_2 = y'_2 = r\operatorname{sen}\theta,$$

y el trayecto recorrido por la luz será:

$$O\,A' = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \frac{r}{\alpha}\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right).$$

Cuando regresa el rayo al centro, las coordenadas de éste son:

$$x_3 = 2\,r\,v/\alpha\,c;\quad y_3 = 0$$

y el camino recorrido vale:

$$A'\,O_1 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \frac{r}{\alpha}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

En resumen, el tiempo invertido es:

$$T = \frac{O\,A' + A'\,O_1}{c} = \frac{2\,r}{\alpha\,c} = \frac{T_0}{\alpha} \quad \text{(con la contracción de Lorentz).}$$

Para efectuar el cálculo con la contracción prevista por la nueva teoría, basta multiplicar por α el camino recorrido, y resulta $T = T_0$.

En la nueva teoría la contracción se produce de modo que no resulte alterada la marcha de los relojes de Fokker. De aquí se infiere que el cambio de duración que, eventualmente, se observe en fenómenos en què intervienen cuerpos que no son rígidos, habrán de atribuirse a los cambios que, por efecto del movimiento, experimenten las fuerzas que sobre ellos actuan, ya que el mero cambio de dimensiones no alteraría la duración.

13. *Tiempo propio de un cuerpo.*

En la teoría de Einstein, el tiempo propio de un cuerpo es lo que marcaría un reloj solidario del mismo cuyo período, medido desde el sistema S, dependiera exclusivamente de la velocidad instantánea de acuerdo con la fórmula:

$$T = \frac{T_0}{\alpha}.$$

En la nueva teoría, la marcha de los relojes de Fokker, medida desde el sistema en reposo absoluto, no depende de la velocidad, por lo que el tiempo propio, definido por:

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt$$

queda reducido a una expresión matemática que goza de la propiedad de ser invariante respecto de las transformaciones de Lorentz.

CAPITULO III

DINAMICA RELATIVISTA

1. *Postulados fundamentales.*

En la mecánica de Newton, el movimiento de un punto de masa m, sometido a una fuerza f, estaba regido por la ecuación:

$$\mathbf{f} = m \frac{d\,\mathbf{u}}{d\,t}$$

que, en el caso de ser constante la fuerza, daba para la velocidad el valor

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{f}}{m} t + \text{const.}$$

Esta fórmula es incompatible con la teoría de la relatividad porque, según ella, bastaría prolongar suficientemente la actuación de la fuerza para conseguir que el cuerpo se moviese más de prisa que la luz. Procede, por tanto, sustituir dicha ecuación por otra que esté de acuerdo con los postulados relativistas.

Para este propósito generalizó Einstein las ecuaciones que rigen el movimiento de los corpúsculos cargados eléctricamente cuando están sometidos a un campo electromagnético. Pero Lewis y Tolman (1) consiguieron el mismo resultado por consideraciones puramente mecánicas, y su método es aplicado, con ligeras variantes, por todos los autores. El camino que vamos a seguir es, en el fondo, el de Lewis y Tolman, pero puntualizaremos los postulados de modo que quede patente que no es necesario recurrir al principio de la relatividad de Einstein. Nos basaremos en las siguientes hipótesis:

---

(1) G. N. Lewis y R. C. Tolman: *Phil. Mag.*, 18, pág. 510, 1909.

a) *Subsiste el postulado de Galileo y el de la igualdad entre la acción y la reacción.*

b) *Las velocidades se transforman de acuerdo con las fórmulas relativas* [9.1, cap. II]. Como estas fórmulas son válidas, lo mismo con las fórmulas de Lorentz que con las nuevas, no es preciso aceptar el principio de la relatividad de Einstein.

c) *Las colisiones*, esto es, los fenómenos cinéticos que resultan de aquellas fuerzas que se manifiestan cuando dos cuerpos se tocan, *son igualmente apreciadas desde cualquier sistema inercial.*

Este postulado se justifica considerando que el encuentro de dos cuerpos equivale a la coincidencia de dos sucesos en el espacio y en el tiempo. Tanto las fórmulas de Lorentz como las nuevas dicen que si

$$R_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 0; \qquad T_{12} = (t_2 - t_1) = 0$$

es también·

$$R'_{12} = T'_{12} = 0;$$

por lo que, en el caso actual, la isotopía y la simultaneidad tienen carácter absoluto.

d) El postulado de Newton, según el cual hay proporcionalidad entre la fuerza y la aceleración, se sustituye por este otro: *La impulsión, f dt, es igual al cambio experimentado por el ímpetu*, entendiendo por tal un vector definido por

$$\mathbf{p} \equiv \psi(m, u)\,\mathbf{u}\,.$$

El ímpetu es, pues, un vector que depende tan solo de la masa del cuerpo y de su velocidad. Decir que es un vector implica que, dados tres ejes coordinados, admite tres componentes que se comportan como las coordenadas de un punto en los cambios entre ejes ortogonales.

Según este postulado será:

$$\mathbf{f}\,dt = d\,[\psi(m, u)\,\mathbf{u}] \qquad [1.1]$$

y el problema consiste en hallar la forma de la función de modo que resulten satisfechos los postulados anteriores.

Es fácil ver que la masa ha de figurar como factor en el segundo miembro de [1.1], pues cabe considerar que el punto en cuestión está constituído por dos de masa mitad y que la fuerza se reparte por igual entre ambos. De aquí resulta que si se duplican a la vez la masa y la fuerza, el movimiento queda inalterado, lo que exige sea

$$d\,\mathbf{p} = \mathbf{f}\,d\,t = m d\,[\varphi(u)\,\mathbf{u}] \qquad [1.2]$$

Si se trata de varios puntos sometidos a fuerzas cualesquiera, a cada uno será aplicable la ecuación precedente. Cuando no hay fuerzas exteriores, como las acciones mutuas son iguales y contrarias por el principio de igualdàd entre la acción y la reacción, bastará sumar las ecuaciones correspondiente a todos los puntos para obtener:

$$\Sigma\, m\, \varphi\,(u)\, \mathbf{u} = \text{const.} \qquad [1.3]$$

que es la expresión del *teorema de la conservación del ímpetu.*

e) *Cuando* v/c *tiende a cero, es válida la ley de Newton.*

2. *Dedución de la fórmula fundamental de la dinámica.*

Se trata ahora de hallar la forma de la función $\varphi\,(u)$ que figura en la expresión [1.2]. Observaremos, ante todo, que por tratarse de una función universal, basta hallarla en un caso particular, que puede ser el siguiente:

Supóngase que el sistema inercial S′ se mueve hacia el S con la velocidad v (fig. 2) y que ambos obsevadores poseen esferas muy pequeñas, *a* y *b*, de las que se sabe que tienen igual masa, *m*, porque

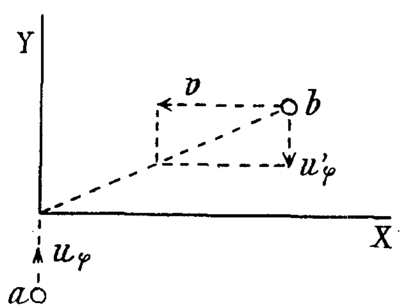

Fig. 2.—Deducción de la fórmula fundamental de la dinámica.

han sido comparadas cuando se hallaban en reposo relativo. Se encarga a cada observador que lance su esfera en dirección vertical y con velocidades iguales, pero el uno hacia arriba y el otro hacia abajo, de tal manera que las esferas choquen y que, en el momento de la colisión, la recta que une sus centros sea paralela al eje vertical Y.

Antes del choque, la proyección de la velocidad de la esfera b sobre el eje Y′ vale u_y, pero esta misma velocidad, medida por S, vale:

$$\frac{\alpha\, u'_y}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} = \alpha\, u'_y = -\,\alpha\, u_y$$

pues $u'_x = 0$, $u'_y = -\,u_y$ por hipótesis. Según esto, las condiciones antes del choque son las consignadas en el siguiente cuadro:

Antes del choque. Observador S

Esfera	VELOCIDAD			$m\,\varphi(u)\,\mathbf{u}$
	Componentes		Módulo	
a	0	u_y	$u_a = u_y$	$m\,\varphi(u_a)\,u_y\,\mathbf{j}$
b	v	$-\,\alpha\, u_y$	$u_b = \sqrt{v^2+\alpha^2 u_y^2}$	$m\,\varphi(u_b)\,(v\,\mathbf{i} - \alpha\, u_y\,\mathbf{j})$

donde $\mathbf{i}$ $\mathbf{j}$ son los vectores unitarios tomados a lo largo de los ejes X, Y, respectivamente.

Supondremos que las esferas son perfectamente tersas, por lo que la colisión no producirá fuerzas tangenciales y la ecuación [1.1] dice que habrán de conservarse constantes las proyecciones de las velocidades de ambas esferas sobre el eje X. Para averiguar lo que sucede a las otras componentes tendremos presente que, por virtud del postulado c) del apartado anterior, si S encuentra que su esfera tiene después del choque cierta velocidad w_a, el observador S′ ha de hallar para la suya, b, la misma velocidad, pero cambiada de signo. Será, pues, $w'_y = -\,w_y$, y S encontrará que la velocidad de b después del choque, puesto que u'_x sigue siendo nula, vale $w_b = -\,\alpha\, w_y$. En consecuencia, las condiciones después del choque serán las consignadas en el siguiente cuadro:

Después del choque. Observador S

Esfera	VELOCIDAD Componentes		VELOCIDAD Módulo	$m\,\varphi\,(u)\,d\,\mathbf{u}$
a	0	w_y	$w_a = w_y$	$m\,\varphi\,(w_a)\,w_y\,\mathbf{j}$
b	v	$-\,\alpha\,w_y$	$w_b = \sqrt{v^2 + \alpha^2\,w_y^2}$	$m\,\varphi\,(w_b)\,(v\,\mathbf{i} - \alpha\,w_y\,\mathbf{j})$

Con los cuadros anteriores, la ecuación [1.2], proyectada sobre cada uno de los ejes X e Y, conduce a:

$$\varphi\,(u_b)\,v = \varphi\,(w_b)\,v \qquad [2.1]$$

$$\varphi\,(u_a)\,u_y - \varphi\,(u_b)\,\alpha\,u_y = \varphi\,(w_a)\,w_y - \varphi\,(w_b)\,\alpha\,w_y. \qquad [2.2]$$

La ecuación [2.1] exige que sea $u_b = w_b$, y sustituyendo los valores que figuran en los cuadros anteriores resulta:

$$v^2 + \alpha^2\,u_y^2 = v^2 + \alpha^2\,w_y^2$$

de donde se deduce $u_y = \pm\,w_y$, y como las esferas son impenetrables habremos de tomar el signo negativo. Por otra parte, como $u_x = u_y$, $w_a = w_y$, los módulos u_a y w_a habrán de ser iguales, por lo que $\varphi\,(u_a) = \varphi\,(w_a)$. Con esto, y recordando que $u_b = w_b$, la ecuación [2.2] se convierte en:

$$\varphi\,(u_b) = \frac{\varphi\,(u_a)}{\alpha}$$

Como la ecuación de Newton es válida en primera aproximación, la ecuación [1.1] exige que $\varphi\,(u_a)$ tienda a 1 cuando u_a tiende a $\mathbf{0}$, y como entonces u_b tiende a v, habrá de ser:

$$\varphi\,(v) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

y la ley fundamental de la dinámica relativista se expresará así:

$$\mathbf{f}\,d\,t = m\,d\,\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad [2.3]$$

que coincide con la hallada en la teoría de Einstein.

Para el ímpetu se obtiene la expresión:

$$\mathbf{p} \equiv \frac{m\,\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad [2.4]$$

Si, para abreviar la escritura, se hace:

$$m' \equiv \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad [2.5]$$

la ecuación fundamental se convierte en:

$$\mathbf{f}\,d\,t = d\,(m'\,v) \qquad [2.6]$$

Suele expresarse este resultado diciendo que, a consecuencia del movimiento, la *masa en reposo*, m, ha aumentado, convirtiéndose en la *masa en movimiento*, m', y que para mantener el principio de la conservación del ímpetu ha sido preciso sacrificar el principio de la conservación de la masa. Este modo de hablar estaría justificado si la ecuación [2.6] sirviera para definir la masa. Pero esta expresión no es una ecuación de definición, sino una ley física, y nos parece preferible atenernos a la ecuación [2.3] y decir que la masa m es una magnitud característica del cuerpo, que se conserva constante mientras no se altera su constitución física, y que la nueva teoría obliga a cambiar la definición del ímpetu:

$$\mathbf{p} \equiv m\,\mathbf{v},$$

por esta otra:

$$\mathbf{p} \equiv \frac{m\,\mathbf{v}}{\alpha}. \qquad [2.7]$$

La llamada masa en movimiento es una *magnitud por definición*, que por tener la misma dimensión que la masa puede medirse en gramos. Es una magnitud superflua, que sólo sirve para abreviar el lenguaje y la escritura. Puede desarrollarse toda la mecánica relativista sin hablar de ella, lo cual prueba que *no debe decirse que la masa de un cuerpo se altera por efecto del movimiento*. Lo que sucede es que la ley de Newton debe ser reemplazada por la expresión [2.3].

3. *Movimiento de un punto material sometido a una fuerza constante.*

Como ejemplo, vamos a hallar la ecuación de movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza constante. Suponiendo que el cuerpo parte del reposo y que la fuerza actúa a lo largo del eje X, la ecuación [2.3] es inmediatamente integrable y representando por $g \equiv f/m$ la fuerza por unidad de masa, da:

$$g\,t = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

y, despejando v:

$$v = \frac{g\,t}{\sqrt{1 + g^2\,t^2/c^2}}$$

La velocidad no crece proporcionalmente al tiempo, sino cada vez más despacio, y tiende hacia c cuando t tiende hacia infinito.

El espacio recorrido vale:

$$x = \int_0^t v\,d\,t = g \int_0^t \frac{t\,d\,t}{\sqrt{1 + g^2\,t^2/c^2}}$$

o sea:

$$x = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1 + g^2\,t^2/c^2} - 1\right)$$

Cuando gt es despreciable en comparación con c, las fórmulas precedentes dan:

$$v = g\,t; \quad x = \frac{1}{2}\,g\,t^2,$$

que son las leyes del movimiento uniformemente acelerado.

4. *Energía cinética.*

Si subsiste en Mecánica relativista el principio de conservación de la energía, habrá de suceder que todo el trabajo realizado por una fuerza al actuar sobre un cuerpo libre se invierta en aumentar su energía cinética:

$$d\,T = f\,d\,s = f\,v\,d\,t = \frac{m\,v\,d\,v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

y basta integrar por partes para obtener:

$$T = m\,c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right). \qquad [4.1]$$

Si en [4.1] se hace $v = c$, resulta $T = \infty$, lo que significa que toda la energía del universo no bastaría para comunicar a la más insignificante de las partículas materiales la velocidad de la luz.

Un desarrollo en serie da:

$$T = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{3}{8}\,\frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

y se ve que, en primera aproximación, resulta el mismo valor que en la mecánica clásica.

5. *Fórmulas de transformación de la aceleración, de la fuerza y de la energía cinética.*

En ejes rectangulares, la ecuación fundamental se descompone en estas tres:

$$f_x = m\,\frac{d}{d\,t}\,\frac{v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad f_y = \frac{d}{d\,t}\,\frac{v_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad f_z =$$

$$= m\,\frac{d}{d\,t}\,\frac{v_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde $v^2 = v^2{}_x + v^2{}_y + v^2{}_z$. Desarrollandó las derivadas que figuran en el segundo miembro, resulta:

$$f_x = m \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{v_x\,v/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \right] a_x$$

$$f_y = m \left[\frac{a_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{v_y\,v/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\,\frac{d\,v}{d\,t} \right]$$

$$f_z = m \left[\frac{a_z}{\sqrt{(1 - v^2/c^2}} + \frac{v_z\,v/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\,\frac{d\,v}{d\,t} \right]$$

donde a_x, a_y, a_z son las componentes de la aceleración. Si se toman los ejes de modo que X sea paralelo a la velocidad del cuerpo en el instante considerado, será $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$, y las fórmulas precedentes se reducen a:

$$f_x = m\left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\right] a_x = m\,\frac{a_x}{\alpha^3} \qquad [5.1]$$

$$f_y = m\,\frac{a_y}{\alpha}; \quad f_z = m\,\frac{a_z}{\alpha}.$$

La magnitud m/α^3 se denomina *masa longitudinal* y m/α recibe el nombre de *masa transversal*. Estas denominaciones son adecuadas cuando se define la masa como la relación entre la fuerza y la aceleración. Se puede definir el *tensor másico* como un tensor que, multiplicado por la aceleración dé la fuerza:

$$f_i = M_{ij}\, a_j$$

$$M = \begin{pmatrix} m/\alpha^3 & 0 & 0 \\ 0 & m/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & m/\alpha \end{pmatrix}$$

En otro sistema, S', el movimiento del mismo cuerpo estará regido por la ecuación:

$$\mathbf{f}' = m\,\frac{d}{d\,t'}\,\frac{\mathbf{v}'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$$

de donde se deduce:

$$f'\,d\,t' = m\left(\frac{d\,\mathbf{v}'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} + \frac{v'\,d\,v'}{c^2\,(1 - v'^2/c^2)^{3/2}}\,\mathbf{v}'\right).$$

Supongamos que la velocidad del nuevo sistema sea igual a la velocidad, v, del cuerpo en el instante considerado. Entonces será $\mathbf{v}' = 0$ para $t' = 0$, y la ecuación precedente se convierte en:

$$\mathbf{f}' = m\,\frac{d\,\mathbf{v}}{d\,t'} = m\,\mathbf{a}' \qquad \text{para } t' = 0 \qquad [5.2]$$

Para pasar de la velocidad $\mathbf{v}'$ medida en S', a la velocidad $\mathbf{v}$ medida en S valen las fórmulas:

$$v_x = \frac{v'_x + v}{1 + v\,v'_x/c^2}; \quad v_y = \frac{\alpha\,v'_y}{1 + v\,v'_x/c^2}; \quad v_z = \frac{\alpha\,v'_z}{1 + v\,v'_x/c^2}$$

de las que, puesto que $v =$ conts., se deducen las siguientes ecuaciones para las componentes de la aceleración en S:

$$a_x = \frac{d\,v_x}{d\,t} = \left(\frac{1}{1 + v\,v'_x/c^2} - \frac{(v'_x + v)\,v/c^2}{(1 + v\,v'_x/c^2)^2}\right)\frac{d\,v'_x}{d\,t'}\,\frac{d\,t'}{d\,t}$$

$$a_y = \frac{d\,v_y}{d\,t} = \left(\frac{\alpha}{1 + v\,v'_x\,c^2}\,\frac{d\,v'_y}{d\,t'} - \frac{\alpha\,v'_y\,v/c^2}{(1 + v\,v'_x/c^2)^2}\,\frac{d\,v'_x}{d\,t'}\right)\frac{d\,t'}{d\,t}$$

$$a_z = \frac{d\,v_z}{d\,t} = \left(\frac{\alpha}{1 + v\,v'_x/c^2}\,\frac{d\,v'_z}{d\,t'} - \frac{\alpha\,v'_z\,v/c^2}{(1 + v\,v'_x/c^2)^2}\,\frac{d\,v'_x}{d\,t'}\right)\frac{d\,t'}{d\,t}.$$

Hasta aquí, las fórmulas son igualmente válidas con las ecuaciones de transformación de Lorentz que con las nuevas, pero el cálculo de $d\,t'/d\,t$ requiere distinguir entre unas y otras.

Con las fórmulas de Lorentz	Con las nuevas
$t = \dfrac{1}{\alpha}(t' + v\,x'/c^2)$	$t = t' + v\,x'/c^2$
$\dfrac{d\,t}{d\,t'} = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{v}{c^2}\,v'_x$	$\dfrac{d\,t}{d\,t'} = 1 + \dfrac{v}{c^2}\,v'_x$

Aplicando estas fórmulas al caso en que la velocidad v de S′ coincide con la velocidad instantánea del cuerpo será $v_x = v_y = v_z = 0$, y las fórmulas precedentes se reducen a:

$$\left.\begin{array}{l|l}
a_x = \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)\alpha\,a'_x = \alpha^3\,a'_x & a_x = \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)a'_x = \alpha^2\,a'_x \\[2ex]
a_y = \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)a'_y = \alpha^2\,a'_y & a_y = \alpha\,a'_y \\[2ex]
a_z = \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)a'_z = \alpha^2\,a'_z & a_z = \alpha\,a'_z
\end{array}\right\} \qquad [5.3]$$

que son las fórmulas de transformación de las aceleraciones.

Para ver cómo se transforman las fuerzas, recurriremos a las ecuaciones [5.2], de las que se deduce, teniendo en cuenta [5.1]:

$$\left.\begin{array}{l|l}
f'_x = m\,a'_x = \dfrac{m}{\alpha^3}\,a_x = f_x & f'_x = \dfrac{m}{\alpha^2}\,a_x = \alpha\,f_x \\[2ex]
f'_y = m\,a'_y = \dfrac{m}{\alpha^2}\,a_y = \dfrac{1}{\alpha}\,f_y & f'_y = \dfrac{m}{\alpha}\,a_y = f_y \\[2ex]
f'_z = m\,a'_z = \dfrac{m}{\alpha^2}\,a_z = \dfrac{1}{\alpha}\,f_z & f'_z = \dfrac{m}{\alpha}\,a_z = f_z
\end{array}\right\} \qquad [5.4]$$

Estas fórmulas sirven para pasar de la fuerza f, que actúa sobre un cuerpo que se mueve con la velocidad $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$, a la fuerza f', que mediría un observador animado de esta misma velocidad.

La energía cinética de un cuerpo que se mueve con la velocidad u' en S, u en S′, vale:

$$T = m\,c^2\,[(1 - u^2/c^2)^{-1/2} - 1] \quad \text{en} \quad S$$

$$T' = m\,c^2\,[(1 - u'^2/c^2)^{-1/2} - 1] \quad \text{en} \quad S'$$

Para hallar la relación entre ambas basta aplicar la regla de composición de velocidades, que da:

$$1 - u'^2/c^2 = \frac{\alpha^2}{1 - v\,u_x/c^2}\,(1 - u^2/c^2)$$

con lo que resulta:

$$T' + m\,c^2 = \frac{1}{\alpha}\,(1 - v\,u_x/c^2)\,(T + m\,c^2) \qquad [5.5]$$

6. *Ecuaciones de Lagrange.*

En mecánica clásica, las ecuaciones de movimiento de un sistema de puntos materiales, cuando las fuerzas derivan de un potencial, toman la forma:

$$\frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

donde las q_j son las coordenadas generalizadas de Lagrange, y

$$L \equiv T - V \qquad [6.1]$$

es la diferencia que, en el momento considerado, hay entre la energía cinética, T, y la energía potencial, V.

En mecánica relativista valen ecuaciones análogas, pero en vez de definir la función L mediante la relación [6.1] se define así:

$$L \equiv K - V \qquad [6.1']$$

siendo:

$$K \equiv \sum m_i\,c^2\left(1 - \sqrt{1 - v_i^2/c^2}\right) = \sum \sqrt{1 - v_i^2/c^2}\;\; T_i \qquad [6.2]$$

Partamos de las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas. Para cada punto del sistema será:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{d\,t}$$

y, si las fuerzas derivan de un potencial:

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial V}{\partial x};\ \dot{p}_y = -\frac{\partial V}{\partial y};\ \dot{p}_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad [6.3]$$

Es fácil comprobar que, merced a la definición [6.2], las componentes del ímpetu de cada uno de los puntos valen:

$$p_x = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}};\ p_y = \frac{\partial K}{\partial \dot{y}};\ p_z = \frac{\partial K}{\partial \dot{z}} \qquad [6.4]$$

pues, por ejemplo:

$$p_x = \frac{m\,\dot{x}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};\quad \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = -m\,c^2\,\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} = \frac{m\,\dot{x}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,.$$

Con esto, se pueden sustituir las ecuaciones [6.3] por otras en que sólo figuren las derivadas parciales de la función L definida por [6.1′]. En efecto, como V depende de las coordenadas, pero no de las velocidades, será:

$$\dot{p}_x = \frac{d p_x}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}};\ \dot{p}_y = \frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{y}};\ \dot{p}_z = \frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\,.$$

Por otra parte, como K depende de las velocidades, pero no de las coordenadas:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial (K - V)}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x};\ \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial L}{\partial y};\ \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial L}{\partial z},$$

con lo cual las ecuaciones de movimiento [6.3] se convierten en:

$$\frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x};\quad \frac{d}{d\,t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y};\quad \frac{d}{\partial\,t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} \qquad [6.5]$$

y habrá tres para cada punto.

Si en lugar de las coordenadas cartesianas se utilizan las coordenadas generalizadas de Lagrange, q_j, las ecuaciones de movimiento toman la forma (1)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \qquad [6.6]$$

pues el paso a coordenadas generalizadas se efectúa mediante ecuaciones tales como

$$x_k = \varphi_k (q_1, q_2 \cdot\cdot\ q_s)$$

en las que no figuran las velocidades. Por tanto, V sólo dependerá de las coordenadas generalizadas, mientras que K pasará a ser función de las coordenadas q_j y de las velocidades $\dot{q}_j$.

Las ecuaciones [6.6] tienen la misma forma que en mecánica clásica, pero la función de Lagrange está ahora definida por la expresión [6.1], que, en coordenadas cartesianas, se convierte en:

$$\mathrm{L} \equiv \sum \left[m_i c^2 \left(1 - \sqrt{1 - v_i^2/c^2}\right) - V_i \right] \qquad [6.7]$$

7. *Ecuaciones de Hamilton.*

Mediante la definición

$$H \equiv T(q_j, p_j) + V = 2\, T(q_j, p_j) - L \qquad [7.1]$$

en la cual la energía cinética se expresa en función de los ímpetus p_j y de las coordenadas q_j, las ecuaciones de movimiento tomaban en la mecánica clásica la forma canónica

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad [7.2]$$

Es fácil ver que, en mecánica relativista, rigen también estas ecuaciones, pero a condición de dar a L en la expresión [7.1] el valor que resulta de aplicar a [6.7] el paso a coordenadas generalizadas.

(1) Véase, p. ej., J. Palacios: *Mecánica Física*. Madrid, 1948.

8. *Principio de Hamilton.*

En mecánica clásica rige el principio de Hamilton, que puede enunciarse así: *Entre todos los movimientos imaginables que llevan un sistema de una configuración a otra en un tiempo determinado, el que realmente se produce es aquél en que la integral*

$$\int_0^t L\,d\,t$$

tenga un valor extremo (máximo o mínimo).

Basta rehacer, paso a paso, el razonamiento que conduce al principio de Hamilton para ver que en mecánica relativista, lo mismo en la de Einstein que en la nueva, rige el mismo principio con solo dar a la función de Lagrange el valor [6.7].

9. *Conservación de la energía.*

Vamos a demostrar que en todo sistema de puntos materiales, sometidos a ligaduras que no dependen del tiempo y a fuerzas que derivan de un potencial, se cumple el principio de conservación de la energía:

$$T + V = \text{cont.}$$

La ecuación [6.7] muestra que, en coordenadas cartesianas, L no depende del tiempo, y lo mismo sucederá en coordenadas generalizadas cuando las fórmulas de transformación, que están determinadas por las ligaduras, sean independientes del tiempo. En tal caso, se ve fácilmente que una integral primera de las ecuaciones de Lagrange es:

$$L = \sum \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \text{cons.}$$

Para demostrarlo se recurre al siguiente artificio. Multiplíquense ambos miembros de la ecuación de Lagrange por $\dot{q}_j$ y añádaseles el término

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d \dot{q}_j}{d t}.$$

Sumando para todos los valores de j resulta:

$$\sum \left(\dot{q}_j \frac{d}{d t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d \dot{q}_j}{d t} \right) = \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d \dot{q}_j}{d t} \right)$$

Si L no contiene explícitamente el tiempo, el primer miembro es la derivada del producto $\dot{q}_j \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, mientras que el segundo es la derivada de L:

$$\frac{d}{d t} \sum \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d L}{d t},$$

lo que prueba que

$$\sum \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = L + \text{const.} \qquad [9.1]$$

Calculemos ahora la energía total del sistema:

$$E = T + V = T + K - L \qquad [9.2]$$

Para estos efectos podemos utilizar las coordenadas cartesianas de todos los puntos del sistema, aunque no sean independientes, y será:

$$T + K = c^2 \sum_{s=1}^{n} m_s \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v_s^2/c^2}} - \sqrt{1 - v_s^2/c^2} \right] = \sum_{s=1}^{n} \frac{m_s v_s^2}{\sqrt{1 - v_s^2/c^2}} \qquad [9.3]$$

Para calcular L recurriremos a [9.1], recordando que $L = K\text{-}V$ y que V no depende de las velocidades:

$$L = \sum_{s=1}^{n} \left(v_{sx} \frac{\partial K_s}{\partial v_{sx}} + v_{sy} \frac{\partial K_s}{\partial v_{sy}} + v_{sz} \frac{\partial K_s}{\partial v_{sz}} \right) + \text{const}$$

y como

$$K_s = m_s c^2 \left(1 - \sqrt{1 - v_s^2/c^2}\right)$$

resulta:

$$L = \sum_{s=1}^{n} \frac{m_s v_s^2}{\sqrt{1 - v_s^2/c^2}} + \text{const} \qquad [9.4]$$

y basta sustituir [9.3] y [9.4] en [6.2] para obtener:

$$E = \text{const}.$$

10. *Inercia de la energía.*

Si se compara la ecuación fundamental de la mecánica relativista:

$$\mathbf{f}\, d\, t = d \frac{m\, \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

con la ecuación de Newton:

$$\mathbf{f}\, d\, t = d\,(m\, \mathbf{v})$$

se ve que todo pasa como si, a causa del movimiento, la masa se hubiese convertido en:

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad [10.1]$$

Por otra parte, la energía cinética, según se vió en el § 4, vale:

$$T = m\, c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right) \qquad [10.2]$$

y de la comparación de [10.1] y de [10.2] resulta:

$$\mu = m + T/c^2, \qquad [10.3]$$

por lo que todo pasa como si, a causa del movimiento, hubiera que agregar a la masa propia, m, un término proporcional a la energía cinética.

Einstein tuvo la idea genial de generalizar el resultado precedente y establecer un nuevo principio, que dice así: *A toda especie de energía corresponde una masa que se obtiene, en cualquier sistema coherente de unidades, dividiendo el valor de la misma por el cuadrado de la constante universal* c. Según esto, si de un sistema se desprende una energía ΔE, su masa experimentará una disminución, Δm, dada por la expresión:

$$\Delta m = \Delta E / c^2 \qquad [10.4]$$

Previó Einstein que esta hipótesis podría comprobarse en las transformaciones radiactivas, y el descubrimiento de las escisiones nucleares ha confirmado plenamente esta previsión, lo cual ha dado justo prestigio a la teoría de la relatividad. Es de notar, sin embargo, que con la nueva teoría hemos obtenido las mismas fórmulas, [10.1] y [20.2], que con la de Einstein, por lo que con ella resulta tambión justificada la [10.4].

Gracias a la hipótesis de Einstein expresada por la ecuación [10.4] se puede interpretar el término constante, mc^2, que interviene en la expresión [10.2] de la energía cinética como representante de la energía propia o *energía interna*, U, del sistema en reposo. Como la energía total de un sistema de cuerpos materiales libres de acciones exteriores se compone de la energía cinética del conjunto y de la energía interna, será:

$$E = T + U = T + m c^2$$

y de la comparación con [10.2] resulta para la energía total:

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \qquad [10.5]$$

Según la termodinámica, la energía interna de un sistema es una función de estado que depende de la temperatura, θ, y del volumen, V, por lo que será:

$$U = m c^2 = f(\theta, V)$$

lo que revela que la masa en reposo depende, en general, del volumen y de la temperatura.

Suele interpretarse la ecuación [10.4] diciendo que la masa y la energía son equivalentes en el sentido de que la una puede transformarse en la otra (2), y que los dos principios de conservación, el de la masa y el de la energía, se funden en uno solo: masa + energía = constante. Y McCrea llega a afirmar (3) que si la mecánica hubiera sido relativista desde un principio, no hubiera habido necesidad de dos nombres para designar una misma magnitud.

Parécenos que la precedente interpretación es desatinada, porque para poder decir que una cosa se transforma en otra es preciso que deje de ser lo que era, y ocurre que la masa de un reactor atómico, por ejemplo, permanece rigurosamente constante si se impide la salida de energía, y cuando sale energía, la masa perdida por el reactor es justamente igual a la que lleva consigo la energía expulsada. Subsisten, pues, los dos principios de conservación, y lo que sucede es que se puede utilizar la expresión [10.4] para hacer el balance energético de las reacciones nucleares.

Por otra parte, para que la masa y la energía pudieran considerarse como magnitudes homogéneas, habría que dar el valor 1 a la constante universal c, lo cual echa por tierra el análisis dimensional por tratarse de una constante ineludible. En fin, sería cosa asombrosa el que el descubrimiento de una nueva ley sirviera para hacer indiscernibles cosas claramente distintas, y no vale aducir el ejemplo del calor y el trabajo porque, a pesar de ser verdaderamente transformables el uno en el otro, toda la termodinámica se basa en distinguirlos claramente.

11. *Fuerzas centrales.*

Como ejemplo de aplicación de la teoría de la relatividad, estudiaremos el movimiento de un cuerpo de masa m en un campo de fuerzas definido por $V(r)$, en que r es la distancia a un punto fijo (con relación al observador), que tomaremos como origen de coordenadas. Desde luego, lo mismo que sucedía en mecánica clásica, la trayectoria será plana, y podremos utilizar las coordenadas polares r y θ.

En coordenadas polares, la expresión relativista de la función de Lagrange es:

$$L = K - V = m c^2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{c^2}} \right] - V$$

(2) P. G. BERGMANN: *Introduction to the Theory of Relativity*, pág. 93. New York. Prentice Hall., 1948.

(3) W. H. MCCREA: *Relativity Physics*, pág. 29. Methuen & Co. Londres, 1935.

y, por tanto:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = -\gamma m \dot{r}; \quad \frac{\partial L}{\partial r} = -\gamma r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -\gamma m r^2 \dot{\theta}; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)/c^2}}$$

Con esto, las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

se convierten en:

$$\frac{d}{dt} (\gamma \dot{r}) - \gamma r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \qquad [11.1]$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma r^2 \dot{\theta}) = 0 \qquad [11.2]$$

La segunda ecuación conduce inmediatamente a

$$\gamma r^2 \dot{\theta} = \text{const} = A \qquad [11.3]$$

que es la forma relativista de la ley de las áreas.

Otra integral primera expresa la conservación de la energía:

$$T + V = m c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) + V = m c^2 (\gamma - 1) + V = B \qquad [11.4]$$

Vamos a hacer ver que, pasando a radios vectores recíprocos:

$$r = \frac{1}{u}; \ \dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2}$$

la ecuación [11.1] se convierte en:

$$\frac{d^2 u}{d \theta^2} + u - \frac{m c^2 + B - V}{A^2 m^2 c^2 u^2} \frac{d V}{d r} = 0.$$

En efecto, con el referido cambio de variables, y teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{dt} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta},$$

el primer término de [11.1] se convierte en:

$$\frac{d}{dt}(\gamma\,\dot{r}) = -\,\dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\dot{\theta}}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right).$$

Pero de [11.2] se deduce

$$\frac{\gamma\,\dot{\theta}}{u^2} = A$$

y, por tanto:

$$\frac{d}{dt}(\gamma\,\dot{r}) = -\,A\,\dot{\theta}\frac{d^2 u}{d\theta^2},$$

y, sustituyendo en [11.1]

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{\gamma}{A\,u}\dot{\theta} - \frac{1}{m\,A\,\dot{\theta}}\frac{dV}{dr} = 0.$$

Finalmente, como de [11.4] y [11.3] se deduce:

$$\gamma = \frac{m\,c^2 + B - V}{m\,c^2};\ \dot{\theta} = \frac{A\,m\,c^2\,u^2}{m\,c^2 + B - V},$$

resulta, en definitiva:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u - \frac{m\,c^2 + B - V}{A^2\,m^2\,c^2\,u^2}\frac{dV}{dr} = 0$$

que es la ecuación relativista de la trayectoria de un cuerpo sometido a fuerzas centrales.

Si se trata de fuerzas atractivas que varían en razón inversa de la distancia al centro, habrá que poner:

$$V = -\frac{\mu}{r} = -\,\mu\,u;\ \frac{dV}{dr} = \frac{dV}{du}\frac{du}{dr} = \mu\,u^2$$

y entonces la ecuación diferencial de la órbita es:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + (1 - a)\,u - C = 0 \qquad [11.5]$$

siendo

$$C = \frac{m\,c^2 + B}{A^2\,m^2\,c^2}\,\mu; \quad a = \frac{\mu^2}{A^2\,m^2\,C^2}. \qquad [11.6]$$

la integral general de [11.5] es:

$$u = \frac{C}{1-a} + D \cos \sqrt{1-a}\,(\theta - \alpha)$$

donde D y α son constantes de integración. La primera puede calcularse en función de A y B, pero no nos interesa. Si se cuentan los ángulos a partir de la recta que pasa por uno de los máximos de u, será entonces $\alpha = 0$, con lo cual:

$$u = \frac{C}{1-a} + D \cos \sqrt{1-a}\,\theta.$$

De este modo, los máximos sucesivos de u (mínimos de r) se producirán cuando

$$\sqrt{1-a}\,\theta = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, \ldots \qquad r_{\text{mín.}} = \frac{C}{1-a} - D$$

y los mínimos

$$\sqrt{1-a}\,\theta = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi, \ldots \qquad r_{\text{máx.}} = \frac{C}{1-a} + D.$$

En consecuencia, cada dos máximos o mínimos consecutivos estarán separados por un ángulo $2\pi/\sqrt{1-a}$, esto es, por un ángulo mayor que 2π, por lo que avanzarán a razón de

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a}} - 2\pi = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}} - 1\right)$$

cada vez que el punto dé una vuelta. Si el valor de a, calculado con [11.6], es muy pequeño en comparación con la unidad, vale la fórmula aproximada

$$\delta = 2\pi\left[1 + \frac{1}{2}a - \ldots - 1\right] \sim a\pi = \frac{\mu^2}{A^2\,m^2\,C^2}\,\pi. \qquad]11.7]$$

y todo pasa (fig. 3) como si la elipse prevista por la teoría clásica gigirase, de manera que el perihelio avanzase el ángulo $a\,\pi$ en cada revolución.

Este resultado tiene interés histórico porque sirvió a Sommerfeld para dar la primera explicación de la estructura fina del espectro del hidrógeno, explicación que hubo de ser desechada porque no se podía conciliar con el espín del electrón. Fué necesario que Dirac diese forma relativista a la ecuación de ondas para poner de acuerdo los efectos relativistas con los del espín.

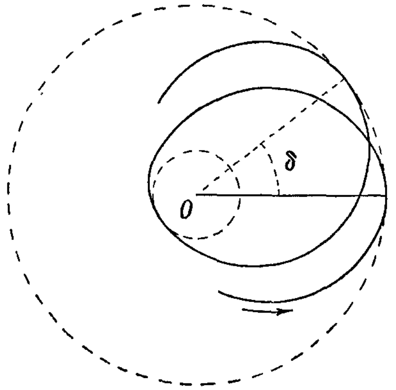

Fig. 3

12. *Orbitas de los planetas.*

En el caso del movimiento de un planeta en torno del Sol, la teoría de la relatividad predice que el perihelio ha de avanzar en cada revolución un ángulo dado por la fórmula [11.7], en la que si G es la constante de la gravitación y M y m son las masas del Sol y del planeta, respectivamente, hay que dar a μ el valor

$$\mu = G\,M\,m.$$

El efecto será tanto más perceptible cuanto menor sea la constante A en comparación μ/mc, y tan solo en el caso de Mercurio es de prever un efecto suficientemente grande para ser observado. Pero las medidas dan para el avance del perihelio el valor 43″ por siglo, que es unas seis veces mayor que el dado por la fórmula [11.7]. Con la teoría general de la relatividad se logró un resultado más próximo del correcto.

(Continuará)