gitudes de las ondas; de modo que conocidas que sean las rotaciones que esperimentan dos rayos diferentes al atravesar una misma columna de un líquido activo, y la longitud de onda de uno de ellos, se puede hallar la del otro. Créen los autores de la memoria que aplicando esta misma ley á los rayos caloríficos, llegarán á poder determinar las longitudes de las ondas de tales ó cuales rayos de la parte oscura del espectro. Verdad es que segun Broch (Repertorium der Physik T. VII, pág. 115) no es del todo exacta la ley de Biot, pero puede dar una primera aproximacion. Empleando el mismo método para con el calórico de diversos orígenes, se podrá tener un nuevo método de reconocer si las diferencias en la reflexion de estos calóricos en un mismo espejo metálico, son ó no una consecuencia de una diferencia correspondiente en las longitudes de las ondas.

Polarizacion del calor por refraccion simple: por Prevostaye y Desains.

(An. de Fis. Quim., octubre de 1850.)

En un trabajo anterior publicado en la tercera série de los mismos Anales, tomo XXVII, hemos estudiado, dicen los autores, la reflexion del calor polarizado en el vidrio, y hemos visto que las fórmulas teóricas indicadas por Fresnel, para representar las proporciones de luz reflejada, dan, tratándose del calor, resultados verificados por la esperiencia con la misma precision. Debiendo estas fórmulas encerrar, en el caso de medios dotados de la simple refraccion, ya sea esplícita ó implícitamente cuanto se sabe acerca de la reflexion ó refraccion de la luz y del calor, naturales ó polarizados, hemos creido que convenia darles, en cuanto al calor, una confirmacion nueva y mas ámplia. Hemos, pues, tratado de deducir matemáticamente la proporcion del calor trasmitido al través de una ó varias láminas de vidrio bajo una inclinacion cualquiera, verificando despues por medio de observaciones repetidas las fórmulas á que hemos llegado. Confirman nuestros primeros resultados y los completan, pues el fenómeno de que aquí se trata depende á la vez de la reflexion y de la refraccion.

La resolucion del primer caso de que vamos á ocuparnos es evidente; pero para ordenar debidamente nuestra esposicion, es útil considerarlo.

Reflexion y refraccion en la superficie que separa dos medios.

Imaginemos un haz de luz (1) que caiga bajo un ángulo i sobre la superficie plana de un medio simplemente refringente; supongámoslo polarizado en el plano de incidencia y de intensidad igual á la unidad; finalmente, llamemos R á la fraccion, $\frac{\operatorname{sen}^2(i-r)}{\operatorname{sen}^2(i+r)}$ que, segun Fresnel, representa la cantidad de luz reflejada. La cantidad refractada será complementaria é igual á $1-R$. En este caso ni la reflexion ni la refraccion cambian la direccion de las vibraciones; por tanto, los dos nuevos rayos están como el primitivo, del todo polarizados en el plano de incidencia.

Si la luz que cae sobre la superficie fuese polarizada perpendicularmente al plano de incidencia, tomando tambien su intensidad igual á la unidad, y designando por R′ la fraccion $\frac{\operatorname{tang}^2(i-r)}{\operatorname{tang}^2(i+r)}$ que representa la intensidad del rayo reflejado, tendriamos que $1-R'$ seria la intensidad del rayo refractado, y los dos rayos R′ y $1-R'$ se polarizarian completa y perpendicularmente al plano de incidencia.

Reflexion y refraccion por una lámina ó por dos superficies paralelas.

Volvamos á tomar el haz polarizado en el plano de incidencia, y considerémoslo despues de su paso al traves de la primera superficie, cuando su intensidad se ha reducido á $1-R$. Cae sobre la segunda superficie de la lámina, formando un ángulo de incidencia r y de refraccion i: la fraccion reflejada es $\frac{\operatorname{sen}^2(r-i)}{\operatorname{sen}^2(r+i)}=R$. Luego la cantidad $(1-R)R$ vuelve hácia la pri-

(1) Cuanto digamos de la luz, debe entenderse tambien del calor.

mera superficie. Emerge de esta una parte $(1-R)^2 R$, que se une á la que se reflejó antes de toda refraccion. Otra parte $(1-R) R^2$ se refleja, y va de nuevo al encuentro de la segunda superficie, etc. Haciendo la suma de los rayos en número infinito reflejados por la lámina, se halla ser

$$R+(1-R)^2 R(1+R^2+R^4+\ldots)=\frac{2R}{1+R}$$

Se veria asimismo que salen de la lámina rayos cuya suma es $\frac{1-R}{1+R}$, haciendo abstraccion de la absorcion. Estos dos haces, el uno $\frac{2R}{1+R}$ reflejado, el otro $\frac{1-R}{1+R}$ trasmitido, se hallan ambos completamente polarizados en el plano de incidencia.

Reflexion y refraccion por un número N *de superficies paralelas.*

Continuando un raciocinio análogo, y conservando la misma notacion, se llega á determinar las cantidades de luz reflejadas y trasmitidas por n superficies paralelas; se halla (1)

(1) Se pueden demostrar las fórmulas (A) y (B), (A′) y (B′) haciendo ver que si son verdaderas para $(n-1)$, lo serán tambien para n superficies. Efectivamente, el rayo primitivamente polarizado en el plano de incidencia y que despues de haber atravesado $n-1$ superficies llega á caer sobre la n, es por hipótesis $\frac{1-R}{1+(n-2)R}$, fraccion que igualaremos á T; el rayo reflejado por las $n-1$ primeras superficies es $\frac{(n-1)R}{1+(n-2)R}$ que representaremos por U. Admitido esto, se hallará facilmente, teniendo en cuenta las reflexiones en número infinito, que la cantidad de luz que pasa al traves de la superficie de órden n es

$$\frac{T(1-R)}{1-UR}=\frac{T(1-R)\ (1+(n-2)R)}{1+(n-2)R-(n-1)R^2}=\frac{T(1+(n-2)R)}{1+(n-1)R}=\frac{1-R}{1+(n-1)R}.$$

Del mismo modo se hallaria la cantidad de luz reflejada por las n superficies, pero no hay para qué buscarla directamente, pues que es complementaria de $\frac{1-R}{1+(n-1)R}$ é igual á $\frac{nR}{1+(n-1)R}$, que es lo que se trataba de probar.

Luz ó calor polarizado en el plano de incidencia.

Cantidad total reflejada llamando 1 la cantidad incidente.	Cantidad total trasmitida llamando 1 la cantidad incidente.
(A) $\frac{nR}{1+(n-1)R}$	(B) $\frac{1-R}{1+(n-1)R}$

Luz ó calor polarizado perpendicularmente al plano de incidencia.

(A′) $\frac{nR'}{1+(n-1)R'}$	(B′) $\frac{1-R'}{1+(n-1)R'}$

No olvidemos que los haces (A) y (B) están completamente polarizados en el plano de incidencia, y los haces (A′) y (B′) perpendicularmente á dicho plano.

Verificacion esperimental.

Al deducir de las fórmulas de Fresnel las espresiones (A), (B), (A′) y (B′), hemos hecho abstraccion de la difusion y absorcion. Para el vidrio pulimentado es muy poco sensible la difusion, pero no la absorcion; es á veces muy notable si se trata del calor. Hemos llegado á eludir esta dificultad, primero: tomando para hacer los esperimentos vidrios de Saint-Gobain muy puros y delgados; segundo: haciendo solo uso del calor que habia atravesado antes un gran espesor de cristal. Con estas precauciones llegamos á conseguir que la pérdida del calor fuese escesivamente pequeña. Lo prueba la circunstancia de que, en todos nuestros esperimentos, la suma de los efectos de los rayos reflejados y trasmitidos por una ó varias láminas bajo incidencias variables, han igualado siempre, próximamente, á la accion de la radiacion directa. Finalmente, y para abreviar tambien errores que pudieran haberse supuesto despreciables, se tomaba por término de comparacion, por unidad, no ya la intensidad de los rayos directos, que habria sido algo escesiva, sino la suma de las intensidades de los rayos trasmitidos y reflejados.

Procedia el calor empleado de una lámpara de Argand, provista de su chimenea. Los rayos emitidos caian á una distancia de 55 centímetros sobre una lente de vidrio, cuya distancia focal era de unos 14 centímetros, y que en seguida se desviaban en un prisma de espato acromatizado, cuya seccion principal se hallaba, segun el caso, horizontal ó vertical. Una de las imágenes polarizadas en un plano conocido, era recibida sobre la lámina ó pila de láminas de cristal, puesta de antemano con la inclinacion conveniente, y la parte trasmitida ó reflejada iba en seguida á caer sobre la pila del aparato termo-eléctrico. Las desviaciones del galvanómetro daban la medida de las intensidades.

Pondremos al lado unas de otras las intensidades observadas y las que dan las fórmulas, admitiendo para el vidrio de Saint-Gobain y para el calor empleado el índice 1,49.

Calor polarizado en el plano de incidencia.

Inclinacion de la lámina o láminas para con los rayos incidentes.	Intensidad observada del rayo trasmitido, ó sea relacion de esta intensidad á la suma de las intensidades del rayo reflejado y del trasmitido.	Intensidad calculada por la fórmula $\frac{1-R}{1+(n-1)R}$
	Esperimentos con una lámina.	
60° (a)	0,706	0,705
70	0,541	0,544
	Esperimentos con dos láminas.	
60	0,542	0,544
70	0,370	0;374
	Esperimentos con tres láminas.	
50	0,586	0,583
60	0,439	0,444
70	0,282	0,285

(a) Se colocaban las láminas de modo que estuviesen inclinadas sucesivamente 60° á derecha y 60° á izquierda con la direccion del haz y se tomaba la media de los resultados obtenidos en dichas posiciones. En todos los casos se procedia del mismo modo.

	Esperimentos con cuatro láminas(a).	
60	0,396	0,374

Calor polarizado perpendicularmente al plano de incidencia (b).

	Esperimentos con una lámina.	
75°	0,802	0,806
	Esperimentos con dos láminas.	
75	0,676	0,675
	Esperimentos con tres láminas.	
70	0,775	0,788
75	0,585	0,581

Calor natural.—Indice normal.

	Intensidad observada del rayo trasmitido.	Intensidad calculada.
Una lámina.	0,92	0,92
Dos láminas.	0,855	0,857
Tres láminas..	0,80	0,80
Cuatro láminas.	0,73	0,75

Concuerdan tan bien, que podemos dar por plenamente confirmadas por la esperiencia las fórmulas (A), (B), (A′) y (B′).

(a) Si se empleasen un gran número de láminas ó se diese á la pila de vidrios grandes inclinaciones, seria difícil recibir todos los rayos reflejados sobre la pila termo-eléctrica. La esperiencia daria en tal caso resultados intermedios entre los que indican las fórmulas y los que se hallarian no tomando en cuenta las reflexiones en número infinito.

(b) Las intensidades de la tercera columna se calculan en este caso por la fórmula $\frac{1-R'}{1+(n-1)R'}$

Examinarémos por tanto algunas de las consecuencias á que pueden conducirnos.

Teorema de Mr. Arago sobre la igualdad de las cantidades de luz polarizada contenidas en el rayo reflejado y en el refractado.

Ha demostrado Mr. Arago esperimentalmente, que cuando la luz natural cae sobre una *lámina de vidrio* de caras paralelas, el rayo trasmitido y el reflejado contienen uno y otro *cantidades iguales* de luz polarizada en planos rectangulares.

Por otro lado, se trata en las obras de física de probar teóricamente la misma proposicion, deduciéndola de las fórmulas de Fresnel; pero solo se ha conseguido para el caso en que se consideran la reflexion y refraccion nacidas de una sola superficie. Mr. Brewster, en las *Transaciones filosóficas* de 1830, página 145, asegura que la prueba esperimental hecha por Arago es necesariamente errónea, puesto que, *si es verdadera la proposicion para una superficie, no es posible que lo sea para una lámina.*

Por raciocinios cuya reproduccion en este lugar no es del caso, cree probar que Mr. Arago ha podido tomar como iguales dos cantidades de luz que, en ciertos casos, pueden llegar á ser dobles, triples y aun cuádruples una de otra. La conclusion es estraña, pero los raciocinios son inexactos. Mr. Brewster no toma en cuenta en sus cálcnlos mas de una ó dos reflexiones; debiera haber tenido presente que son infinitas.

Ocupémonos de esta cuestion á fondo.

Caso de una superficie.

La luz natural que cae sobre la superficie se puede considerar compuesta de dos haces de intensidad igual á una mitad, el uno polarizado en el plano de incidencia y en un plano perpendicular á este el otro. Por tanto, la cantidad total de luz reflejada es $\frac{1}{2}(R+R')$, y la de luz refractada es $\frac{1}{2}(1-R)+\frac{1}{2}(1-R')$.

Sea cual fuere i, el valor de R es siempre mayor que el de

R'; por tanto, en el rayo reflejado, domina la luz polarizada en el plano de incidencia. Lo contrario acontece en el rayo refractado, pues $1-R' > 1-R$. Podemos, pues, considerar al primero como compuesto de dos partes; una $\frac{1}{2}(R-R')$ polarizada en el plano de incidencia; otra R' que se conduce como la luz natural. Asimismo podemos considerar al rayo refractado compuesto de $\frac{1}{2}(1-R')-\frac{1}{2}(1-R)=\frac{1}{2}(R-R')$ de luz polarizada perpendicularmente al plano de refraccion, y de $1-R$ de luz natural.

Vemos, pues, que en este caso el teorema es evidente.

Caso de una lámina.

La cantidad de luz reflejada por una lámina debe ser $\frac{R}{1+R}+\frac{R'}{1+R'}$, y la cantidad trasmitida $\frac{1}{2}\left[\frac{1-R}{1+R}+\frac{1-R'}{1+R'}\right]$. Siendo R mayor que R', el término $\frac{R}{1+R}$, que representa la parte de luz reflejada polarizada en el plano de incidencia, es tambien mayor que $\frac{R'}{1+R'}$, que representa la parte polarizada en el plano perpendicular. Podemos, pues, considerar á los rayos reflejados como formados de una cantidad $\frac{2R'}{1+R'}$ de luz natural y de una cantidad

$$(a) \quad \frac{R}{1+R}-\frac{R'}{1+R'}=\frac{R-R'}{(1+R)(1+R')},$$

de luz polarizada en el plano de incidencia.

Asimismo, siendo $\frac{1-R'}{1+R'}$ mayor que $\frac{1-R}{1+R}$, podemos considerar á los rayos trasmitidos como compuestos de una cantidad $\frac{1-R}{1+R}$ de luz natural y de una cantidad

$$(b) \quad \frac{1}{2}\left[\frac{1-R'}{1+R'}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1-R}{1+R}\right]=\frac{R-R'}{(1+R)(1+R')}$$

de luz polarizada perpendicularmente al plano de incidencia. Siendo iguales las dos espresiones (*a*) y (*b*), ningun fundamento tienen los cargos de Mr. Brewster.

Podemos avanzar mas, y hacer ver que cuando la luz natural cae sobre una pila de vidrios, la cantidad de luz polarizada contenida en los rayos trasmitidos, es igual á la cantidad de luz polarizada contenida en los reflejados.

Caso de una pila de vidrios.

Designemos por $\frac{1}{2}n$ el número de vidrios, siendo n un número par que representa el número de superficies; tendremos:

Haz reflejado. . $\frac{1}{2}\left[\frac{nR}{1+(n-1)R}+\frac{nR'}{1+(n-1)R'}\right]$,

Haz trasmitido.. $\frac{1}{2}\left[\frac{1-R}{1+(n-1)R}+\frac{1-R'}{1+(n-1)R'}\right]$.

La cantidad de luz polarizada contenida es en el primer caso;

$$\frac{1}{2}\left[\frac{nR}{1+(n-1)R}-\frac{nR'}{1+(n-1)R'}\right]=\frac{\frac{1}{2}n(R-R')}{(1+(n-1)R)(1+(n-1)R')}$$

en el segundo;

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1-R'}{1+(n-1)R'}-\frac{1-R}{1+(n-1)R}\right]=\frac{\frac{1}{2}n(R-R')}{(1+(n-1)R)(1+(n-1)R')}$$

Puede por tanto enunciarse el teorema del modo mas general.

Teoría de las pilas de vidrios.

La teoría de estas pilas estriba del todo en las fórmulas.

$$(1)\quad \frac{nR}{1+(n-1)R},\qquad (2)\quad \frac{nR'}{1+(n-1)R'},$$

$$(3)\quad \frac{1-R}{1+(n-1)R},\qquad (4)\quad \frac{1-R'}{1+(n-1)R},$$

que dan las cantidades de luz ó de calor reflejadas ó trasmitidas cuando se polariza el rayo incidente en el plano de incidencia, ó en otro perpendicular á este.

Vamos á deducir de aqui la rotacion del plano de polarizacion producida por una pila de vidrios cuando se hace caer sobre ella rayos caloríficos ya polarizados; la cantidad total de calor reflejado ó trasmitido cuando es natural el calor incidente; finalmente, la *cantidad absoluta* y tambien la *proporcion* de calor polarizado contenido en el rayo reflejado y en el trasmitido.

Rotacion del plano de polarizacion producida por una pila de vidrios cuando se hace que sobre ella caiga calor primitivamente polarizado.

Llamemos α, ρ y ψ á los angulos formados con el plano de reflexion por el plano de polarizacion primitivo y por los dos planos de polarizacion de los rayos reflejados y de los trasmidos; valiéndonos de las ecuaciones (1) y (2), se halla fácilmente

$$(5)\quad \tan^2 \rho=\tan^2 \alpha\frac{R'}{R}\left[\frac{1+(n-1)R}{1+(n-1)R'}\right],$$

y valiéndonos de (3) y (4),

$$(6)\quad \tan^2 \psi=\tan^2 \alpha\left[\frac{1-R'}{1-R}\right]\left[\frac{1+(n-1)R}{1+(n-1)R'}\right].$$

Como que $\frac{R'}{R}=\frac{\cos^2 (i+r)}{\cos^2 (i-r)}$ es una fraccion menor que la unidad, ácil es ver que en igualdad de circunstancias, el plano de polarizacion del rayo reflejado se acerca con tanta mayor lentitud al plano de incidencia, cuanto mayor número de vidrios contiene la pila.

La relacion (6), en la cual $\frac{1-R'}{1-R}=\frac{1}{\cos^2(i-r)}$, hace ver asimismo que el plano de polarizacion del rayo trasmitido se aleja tanto mas rápidamente del plano de refraccion, cuanto mayor es el número de las láminas.

Cantidades de luz ó calor trasmitidas y reflejadas por una pila de vidrios siendo natural la luz incidente.

Ya hemos dicho que estas cantidades son:

$$(7)\quad \frac{1}{2}\left[\frac{nR}{1+(n-1)R}+\frac{nR'}{1+(n-1)R'}\right],$$

$$(8)\quad \frac{1}{2}\left[\frac{1-R}{1+(n-1)R}+\frac{1-R'}{1+(n-1)R'}\right].$$

Fácil es deducir de (7) que la cantidad de luz reflejada aumenta con el número de láminas y llega á la unidad cuando es infinito este número, sea cual fuere el ángulo de incidencia. Es con todo preciso esceptuar, como caso matemático, el ángulo de polarizacion completa.

Cantidades absolutas de luz polarizada contenidas en el rayo reflejado y en el trasmitido cuando es natural el calor incidente.

La espresion

$$(9)\quad \frac{\frac{1}{2}n(R-R')}{(1+(n-1)R)(1+(n-1)R')}$$

ha sido ya citada. Nos limitaremos á hacer notar que indica que, para una incidencia dada distinta del ángulo de polarizacion total, la cantidad absoluta de calor polarizado disminuye segun va en aumento el número de láminas.

Proporcion de calor polarizado contenido en el rayo reflejado y en el trasmitido, siendo natural el calor incidente.

Esta proporcion en el rayo reflejado es:

$$(10)\quad \frac{\dfrac{nR}{1+(n-1)R}-\dfrac{nR'}{1+(n-1)R'}}{\dfrac{nR}{1+(n-1)R}+\dfrac{nR'}{1+(n-1)R'}}=\frac{R-R'}{R+R'+2(n-1)RR'};$$

en el rayo trasmitido es:

$$(11)\quad \frac{\dfrac{1-R'}{1+(n-1)R'}-\dfrac{1-R}{1+(n-1)R}}{\dfrac{1-R'}{1+(n-1)R'}+\dfrac{1-R}{1+(n-1)R}}=\frac{n(R-R')}{2+(n-2)(R+R')-2(n-1)RR'}.$$

Hemos determinado directamente la proporcion de calor polarizado contenido en el rayo reflejado, fundándonos en las siguientes consideraciones:

Sea p la cantidad de calor polarizado contenido en el rayo reflejado y n la cantidad de calor natural; la espresion (10) podrá escribirse $\frac{p}{p+n}$. Para hallar el valor de esta fraccion, es preciso conocer p y n. Podremos conseguirlo recibiendo el haz reflejado total$=p+n$ sobre un espato cuya seccion principal se coloque sucesivamente paralela y perpendicular al plano de reflexion En el primer caso, la cantidad trasmitida será k $(p+\frac{1}{2}n)$; en el segundo, la cantidad trasmitida será k $\frac{1}{2}n$.

Dividiendo la diferencia de las desviaciones por la suma, tendremos $\frac{p}{p+n}$.

Nos ha faltado el tiempo y escaseado el sol este verano, así que solo en tres puntos hemos podido hacer esta verificacion. Empleando los rayos solares, hemos hallado las proporciones de calor polarizado siguientes:

	Observada.	Calculada con el índice 1,52.
A 10°.	0,393	0,396
75°.	0,574	0,587
70°.	0,75	0,76

Vamos á discutir la espresion (11) que da la proporcion de calor polarizado contenido en el rayo trasmitido; pero antes recordaremos lo que acerca de este punto hemos hallado en las Memorias de Mr. Melloni (*Annales de Chimie et de Physique, segunda série*, tomo LXV, p. 30.)

Hé aquí sus proposiciones:

1.° La proporcion de calor polarizado (por trasmision) por las pilas, es tanto mayor, cuanto menor es el ángulo en que los rayos encuentran la superficie.

2.° En las pilas compuestas de suficiente número de elementos, la polarizacion calorífica llega, bajo cierto ángulo de inclinacion, á un máximo de efecto que retiene despues para todas las inclinaciones menores, que pueden formar sucesivamente los rayos con las láminas.

3.° La inclinacion, contada siempre á partir de la superficie en donde principia á notarse el efecto invariable, aumenta con el número de láminas que entran en la composicion de la pila.

He aquí las nuestras:

Primera proposicion. Cuando se reduce la pila á una lámina única, la proporcion de luz ó calor polarizado (1) en el rayo trasmitido, va en aumento hasta el ángulo $i=90°$ contado á partir de la normal. Llamando λ al índice, será

$$\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}=0,3958, \text{ para } \lambda=1,52.$$

Segunda proposicion. Dicha proporcion es siempre la misma para $i=90°$, sea cual fuere el número de láminas.

Tercera proposicion. En el momento en que se emplea una pila formada de varias láminas, la proporcion de calor polarizado

(1) Debemos hacer notar que conservamos aquí á la espresion *proporcion de calor polarizado* su sentido ordinario, el que le dió Fresnel y la mayor parte de los físicos. Mr. Melloni da distinta definicion, como puede verse en los *Annales de Chimie et de Physique, segunda série tomo LXV*, p. 26.

en el rayo trasmitido tiene un verdadero máximo. Este máximo, cuando se emplean

Dos láminas, se presenta cuando.	$i=77^\circ\ 51'$
Tres láminas.	$i=74^\circ\ 41'$
Diez láminas.	$i=64^\circ\ 52'$

Cuarta proposicion. Aumentando mas y mas el número de láminas, el ángulo en que se presenta la proporcion polarizada máxima se acerca mas y mas al ángulo de polarizacion completa y el máximo mismo se acerca cada vez mas á 1.

He aquí la demostracion de estas proposiciones:

La proporcion de calor polarizado en el rayo trasmitido está dada por la fraccion,

$$\frac{n(R-R')}{2+(n-2)(R+R')-2(n-1)RR'}.$$

Para abreviar la representaremos por P. Sea

$$\operatorname{sen}^2(i-r)=x^2,$$
$$\operatorname{sen}^2(i+r)=y^2;$$

podremos escribir:

$$R=\frac{x^2}{y^2},$$
$$R'=\frac{x^2(1-y^2)}{y^2(1-x^2)}.$$

Sustituyendo, reduciendo y suprimiendo el factor y^2-x^2, comun á numerador y denominador, hallamos

$$(1)\qquad P=\frac{nx^2y^2}{2(y^2-x^2)+nx^2(2-y^2)}.$$

Para $n=\infty$, P se reduce á $\frac{y^2}{2-y^2}=\frac{\operatorname{sen}^2(i+r)}{2-\operatorname{sen}^2(i+r)}$, cuyo máximo corresponde á $i+r=90^\circ$, es decir, al ángulo de polarizacion completa y es igual á la unidad. Esto prueba la cuarta proposicion.

Para $i=90^\circ$, tendremos $y=x$. Luego en este caso y sea cual fuere n, se reduce el valor de P á $\frac{y^2}{2-y^2}$. Representando al índice por λ, tendremos, para $i=90^\circ$,

$$\operatorname{sen} r=\frac{1}{\lambda},\ y^2=\operatorname{sen}^2(90+r)=\cos^2 r=\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}.$$

La fraccion $\frac{y^2}{2-y^2}$ viene á ser $\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}$. Lo que justifica la segunda proposicion.

Para seguir adelante, trasformaremos nuevamente el valor de P dado por la ecuacion (1).

Sentemos

$$\operatorname{sen} i=u,$$
$$\operatorname{sen} r=v;$$

Tendremos

$$x=u\sqrt{1-v^2}-v\sqrt{1-u^2},$$
$$y=u\sqrt{1-v^2}+v\sqrt{1-u^2}.$$

De donde

$$x^2y^2=(u^2-v^2)^2,$$
$$y^2-x^2=4uv\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2},$$
$$2x^2-x^2y^2=2(u^2+v^2)-(u^2+v^2)^2-4uv\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}.$$

Sustituyendo en (1), hallamos:

$$(2)\quad P=\frac{n(u^2-v^2)^2}{n(\lambda^2+1)\left[2\lambda^2-u^2(\lambda^2+1)\right]-(n-2)4\lambda^2\sqrt{1-u^2}\sqrt{\lambda^2-u^2}}.$$

Observando que $v=\frac{u}{\lambda}$, sustituyendo y reduciendo,

$$P=\frac{nu^2(\lambda^2-1)^2}{n(\lambda^2+1)\left[2\lambda^2-u^2(\lambda^2+1)\right]-(n-2)4\lambda^2\sqrt{1-u^2}\sqrt{\lambda^2-u^2}}.$$

Si $n=2$, desaparece el segundo término del denominador; pero creciendo u^2 con i, crece el numerador y disminuye el denominador segun que u va acercándose á la unidad. Para $i=90°$, $u=1$ y $P=\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}$, lo que anunciamos en la primera proposicion.

Si $n>2$, hay un máximo. Diferenciando (2) é igualando á cero la diferencial, se ve que tiene lugar cuando

$$(3)\quad n(\lambda^2+1)\sqrt{1-u^2}\sqrt{\lambda^2-u^2}=(n-2)\left[2\lambda^2-u^2(\lambda^2+1)\right],$$

y que por tanto el valor máximo es

$$(4)\quad \frac{n^2u^2(\lambda^2+1)(\lambda^2-1)^2}{\left[n(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2(n-2)^2\right]\left[2\lambda^2-u^2(\lambda^2+1)\right]}$$

La ecuacion bicuadrada (3) nos da el valor de u correspondiente al máximo. Reemplazando u y λ por valores numéricos particulares, se tiene una ecuacion que da á conocer el valor de *u ó sen. i correspondiente* al máximo. Así es como se han hallado los ángulos correspondientes á la tercera proposicion.

Pilas de vidrios paralelas ó cruzadas.

Cuando cae el calor natural sobre una pila de vidrios, mas ó menos inclinada sobre el eje del haz, se puede, como lo hemos visto, representar la intensidad del rayo emergente por $\frac{1}{2}(\rho+\rho')$, haciendo $\frac{1-R}{1+(n-1)R}=\rho$, y $\frac{1-R'}{1+(n-1)R'}=\rho.'$

Tambien hemos dicho que la proporcion de calor polarizado que contiene, está representada por $\frac{\rho-\rho}{\rho+\rho}$.

Para determinar el valor de esta relacion, podemos echar mano del siguiente método:

Detrás de la primera pila y á cierta distancia, coloquemos otra segunda pila idéntica á la primera, é inclinada lo mismo, y demas sucesivamente á los planos de refracciones, posiciones paralelas y perpendiculares entre sí. En la primera posicion, la cantidad de calor que atravesará ambas filas será $\frac{1}{2}(\rho^2+\rho'^2)$; en la segunda será $\rho\rho.'$ Si dividimos, pues, la diferencia de estas cantidades por su suma, tendremos $\left(\frac{\rho'-\rho}{\rho'+\rho}\right)^2$, cuya raiz cuadrada será la espresion buscada que da á conocer, cual es, en el haz emergente de la primera pila, la relacion del calor polarizado $\frac{1}{2}(\rho'-\rho)$ con el calor total $\frac{1}{2}(\rho'+\rho)$.

Reflexion y refraccion del calor y de la luz por las superficies paralelas de separacion de varios medios sucesivos que supondremos estar en contacto y ser de diversas naturalezas.

Nos referimos especialmente á los líquidos comprendidos entre láminas muy delgadas de vidrio, pero indicaremos aquí las fórmulas generales.

Admitirémos las fórmulas de Fresnel, y por tanto supondremos que se aplican al caso en que la luz pasa de un medio á otro, con tal que en la relacion entre los ángulos de incidencia y refraccion, se tome la incidencia conveniente. Designaremos como hasta aquí por R y R' los valores que en la primera superficie toman las fracciones

$$\frac{\operatorname{sen}^2(i-r)}{\operatorname{sen}^2(i+r)} \text{ y } \frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)},$$

y por

$$R\, R_1\, R_2\, R_3 \ldots.,$$
$$R' R'_1\, R'_2\, R'_3 \ldots.,$$

el valor que toman dichas fracciones en las superficies sucesivas.

Se halla sin dificultad ninguna:

Luz ó calor polarizado en el plano de incidencia.

Cantidad reflejada por dos superficies. $\displaystyle .\frac{R+R_1-2RR_1}{1-RR_1}$

Cantidad trasmitida por dos superficies. $\displaystyle .\frac{(1-R)(1-R_1)}{1-RR_1}.$

Cantidad reflejada por tres superficies:

$$\frac{R+R_1+R_2-2(RR_1+RR_2+R_1R_2)+3R_1RR_2}{1-(RR_1+RR_2+R_1R_2)+2RR_1R_2}.$$

Cantidad trasmitida por tres superficies:

$$\frac{(1-R)(1-R_1)(1-R_2)}{1-(RR_1+RR_2+R_1R_2)+2RR_1R_2}.$$

Haciendo

$$R+R_1+R^2 \ldots +R_{n-1}=\Sigma R;$$

la suma de las combinaciones dos á dos:

$$RR_1+RR_2+\ldots+RR_{n-1}+R_1R_2+\ldots=\Sigma RR_1;$$

La suma de las combinaciones tres á tres:

$$RR_1R_2+RR_1R_3+\ldots RR_1R_{n-1}+R_1R_2R_3+\ldots=\Sigma RR_1R_2;$$

se halla:

(1) Cantidad reflejada por n superficies

$$\frac{\Sigma R-2\Sigma RR_1+3\Sigma RR_1R_2-4\Sigma RR_1R_2R_3+\ldots\pm nRR_1\ldots R_{n-1}}{1-\Sigma RR_1+2\Sigma RR_1R_2-3\Sigma RR_1R_2R_3+\ldots\pm(n-1)RR_{12}\ldots R_{n-1}}$$

(2) Cantidad trasmitida por n superficies

$$\frac{(1-R)(1-R_1)(1-R_2)\ldots(1-R_{n-1})}{1-\Sigma RR_1+2\Sigma RR_1R_2-3\Sigma RR_1R_2R_3+\ldots\pm(n-1)RR_1R_2\ldots R_{n-1}}$$

Si se polarizase la luz incidente perpendicularmente al plano de incidencia, las fórmulas serian exactamente de la misma forma. Solo habria que reemplazar en (1) y (2), $RR_1,\ldots R_{n-1}$ por $R'R'_1\ldots,R'_{n-1}$.

Haciendo en las dos fórmulas primeras

$$R=R_1=R_2=\ldots=R_{n-1},$$

y en las dos últimas:

$$R'=R'_1=R'_2=\ldots=R'_{n-1},$$

se vuelve á las espresiones dadas al principio de esta Memoria, relativas á láminas de vidrio paralelas separadas por capas de aire.

En el caso en que se considere un líquido metido entre dos láminas de vidrio, se tiene:

$$R_3 = R, R_2 = R_1,$$
$$R'_3 = R', R'_2 = R'_1.$$

Si se polariza la luz incidente en el plano de incidencia, la cantidad trasmitida es

$$\frac{(1-R)^2 (1-R_1)^2}{1-4RR_1 - R^2 - R_1{}^2 + 4RR_1{}^2 + 4R^2 R_1 - 3R^2 R_1{}^2}.$$

Finalmente, si se quiere determinar la cantidad de luz ó de calor trasmitida al través del agua, haciendo abstraccion de la absorcion, en el caso de incidencia normal, se hace

$$R = \frac{1}{25} = 0,04, \qquad R_1 = \frac{1}{289} = 0,0034671;$$

y efectuando las sustituciones, se halla que la cantidad trasmitida es 0,917. De lo que se deduce que se puede no hacer caso de las reflexiones que se efectúan en las superficies de contacto del vidrio y del agua, y solo tomar en cuenta las reflexiones que se efectúan en las superficies de entrada y salida.

Siendo muy pequeña para todos los líquidos la cantidad R_1 reflejada en la superficie que los separa del vidrio, para todos ellos se deduce la misma consecuencia.

ELECTRICIDAD.

Investigaciones sobre la conductibilidad de la tierra: por Matteucci.

(L' Institut., núm. 876.)

Se dió cuenta de estas investigaciones en la sesion XX de la Asociacion Británica para el adelanto de las ciencias, celebrada en Edimburgo en julio y agosto de 1850. Es preciso confesar