Sobre congruencia de líneas en diagramas termodinámicos. Una rectificación al aerograma de Refsdal (*)

Por M. BALLESTER CRUELLES**

Abstract

The theory of thermodynamic charts is reviewed, particularly the outstanding conditions for optimum use of diagrams in graphical estimates. In connection with the problem of congruence of iso-lines, aiming at maximum clearance and economy, its mathematical condition (existence of an axis or straight line along which it is possible to carry one curve to the other) is revised; realizing a systematic gap in the usual literature, which has led to erroneous or misleading conclusions. A new, simple, analytical condition for congruence is suggested, and applied to a classic chart (the Refsdal's Aerogram) turns out an unknown quality, not discovered either by its own author nor later references. Isobars, exponential curves not believed to be congruent are shown to be so; a fact that introduces new, updated, possibilities of the use and application of the diagram.

(Dedico esta comunicación a la memoria de don Francisco Morán Samaniego, primer Catedrático de Física del Aire, de cuya obra fundamental y extensa este trabajo aspira a ser modesto epígono.)

Los diagramas termodinámicos aerológicos (también conocidos como diagramas de estado, por razón de la naturaleza de sus coordenadas) no son simples espacios geométricos destinados a la mera descripción, sino que gozan de propiedades (analíticas, topológicas) idóneas para la representación de procesos (adiabáticos, isotermos, equisaturados, etc.), y al ejercicio nomográfico (cálculo de espesores, inestabilidades latentes, trabajos, calores de evolución). La paridad área/energía con la condición de «equivalencia» se remite a un invariante del cambio de coordenadas a partir del diagrama de Clapeyron (p, v); lo que implica constancia del determinante jacobiano de la transformación puntual

$$X = X(x, y) \quad ; \quad Y = Y(x, y)$$

Exigencias de otra índole atañen a la forma de las líneas fundamentales, a ser posible en haces rectilíneos. Deseable es también la dispersión o «sensibilidad» a las variaciones de gradiente térmico, lo que se logra abriendo el ángulo formado por las adiabáticas «secas» y las isotermas (las equisaturadas y las pseudoadiabáticas se encuentran dentro de él). De sumo interés son la

* Presentada en la sesión científica del 12 de junio de 1985, dirigida por el académico numerario Joaquín Catalá de Alemany.

** Catedrático Director del Departamento de «Física del Aire y Geofísica», Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense de Madrid.

economía y sencillez de los trazados; ello depende de la congruencia de líneas o facultad de superponerlas por traslación.

Morán (1943, 1944/1984) consciente de la importancia de esta condición[1] la trata más exhaustivamente que sus contemporáneos (Defrise, Dufour, Flohn, Godson, Pone, Van Mieghem, en OMM, 1954, 1957, 1960). Refsdal (1935, 1937) admite que su aerograma ($\ln T$, $T \ln p$) no posee esta propiedad[2] y Morán reproduce esta confesión[3]. Muy apreciado por sus diversas cualidades (facilidad del cálculo de espesores, segmentos de ordenadas según la hipótesis hidrostática; máxima dispersión entre todos los diagramas en uso; etc.), su principal defecto radicaría en la «incongruencia» de las isobaras, insistentemente repetido en la literatura[4], y cuyo inconveniente vamos en seguida a despejar, pues me propongo demostrar hoy que ese defecto que se le atribuye, en realidad, no existe.

En efecto. Entre los invariantes de las transformaciones puntuales podríamos incluir la conservación de la congruencia. Como quiera que otro invariante, ineludible, es la conservación de las áreas, el problema se concreta en su compatibilidad. A todo esto, si una de las coordenadas transformadas no es mixta, esto es, si

$$X = X(x) \quad ; \quad Y = Y(x, y)$$

el imperativo de esa segunda invariancia en términos del jacobiano se recluye a:

$$J \equiv \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = \frac{dX}{dx}\frac{\partial Y}{\partial y} = 1$$

Ecuación diferencial que, al ser integrada, arroja una dependencia funcional

$$Y = \int \frac{1}{X'(x)} dy = \frac{y}{X'(x)} + f(x)$$

---

[1] «Lo verdaderamente práctico es recurrir a diagramas en que las líneas fundamentales de cada haz sean congruentes, mediante una traslación; pues ello permitirá trazarlas por medio de plantillas, o hallar su intersección con otras, por medio de escuadras y compases» (MORÁN 1944/1984, p. 302). «Con ser tan obvia la conveniencia práctica de esta propiedad, los meteorólogos están tan lejos de utilizarla que actualmente son preferidos en la técnica dos diagramas que no la poseen: el de Stüve y el de Refsdal» (MORÁN, 1943, p. 21).

[2] «Wo die Drucklinien derartig divergieren, dass ihr gegenseitiger Abstand der absoluten Temperatur proportional ist» (REFSDAL, 1935, p. 1). «Wir erinneren jetz, dass auf dem Aerogramm die Drucklinien derartig divergieren, dass ihr Abstand der absoluten Temperatur proportional ist» (REFSDAL, 1937, p.312).

[3] «Aerograma de Refsdal. (b) Desigualdad de las líneas fundamentales. Ni siquiera las isobras son congruentes por traslación, pues su distancia aumenta con la temperatura (MORÁN, 1944/1984, p. 312). «Eliminamos, pues, el diagrama de Refsdal, en que las isobaras son desiguales» (MORÁN, 1943, p. 21).

[4] «Aerograma: cierto que con éste se miden muy bien las alturas y que sus dos sistemas de escalas logarítmicas ofrecen facilidades para muchos cálculos, admirablemente previstas y aprovechadas por Refsdal; pero ... tiene el defecto de que en él no es posible interpolar, por traslación las líneas fundamentales» (MORÁN, 1944/1948, p. 317).

entre coordenadas homónimas, de forma lineal; siendo $f(x)$ una función arbitraria de integración. Esta transformación no conserva aparentemente la congruencia, pues si el haz original es coincidente por traslación a lo largo del eje de ordenadas, habrá de tener la forma:

$$y = g(x) + n_i \qquad (i = 1, 2, 3, ...)$$

siendo n_i un parámetro que identifica cada una de las isolíneas del haz[5]. Su transformación en el nuevo

$$Y = \frac{g(x) + n_i}{X'(x)} + f(x) = F(X) + n_i G(X)$$

si bien permite formular de manera explícita la nueva ordenada, su derivada a *que da lugar*

$$\frac{dY}{dX} = F'X + n_i G'(X)$$

depende del parámetro n_i, con lo que se malogra, así, toda posibilidad de superposición a lo largo de cualquier recta $X = X_0$.

En principio, para transformaciones puntuales a una sola coordenada mixta, no es alcanzable la compatibilidad de todas las circunstancias simultáneas siguientes: *a*) conservación de las áreas-energías; *b*) conservación de la congruencia; *c*) conservación de la recta de traslación. Sin embargo, el siguiente raciocinio que sugiero, abre nuevas posibilidades. El haz original

$$y = n_i$$

de rectas paralelas al eje de abscisas, al transformarse en el haz de curvas

$$Y = \frac{n_i}{X'(x)} = n_i G(X)$$

podrá ser congruente a eje trocado (esto es, por traslación a lo largo de una recta $Y = Y_0$, y no a lo largo de $x = x_0$, como ocurría en el primitivo) si la derivada logarítmica

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dX} = H(X, Y)$$

permanece constante durante esa traslación. La introducción de esta inadvertida propiedad permitirá atribuir cualidades de congruencia a isolíneas que,

[5] La inveterada costumbre de adoptar exclusivamente esta condición como de congruencia por antonomasia es lo que habrá contribuido a pasar inadvertidas las posibilidades que señalo; pues el imperativo se restringe al hecho de que las pendientes $y' = g'(x_0)$ de las isolíneas cortadas por la recta $x = x_0$ son iguales.

aparentemente por aplicación del método convencional, no las tenían. La condición anteriormente indicada se traduce en:

$$\frac{G'(X)}{G(X)} = \text{cte.}$$

lo que se verifica para funciones del tipo

$$G(X) = c_1 \exp(c_2 X) \qquad (c_1, c_2, \text{ constantes})$$

Recordando que $dX/dx = 1/G(X)$, esto significa

$$c_1 \exp(c_2 X)\, dX = dx$$

$$c_2 X = \ln \frac{c_2}{c_1} x + \text{cons. arbitr.}$$

Resulta, así, que la congruencia se satisface a condición de que la transformación puntual de la coordenada no mixta tenga forma logarítmica, amén de no conservarse la línea de traslación.

Recapitulando, la transformación de coordenadas

$$X = \ln x$$

$$Y = Y(x, y) = \frac{y}{X'(x)} = \text{xy}$$

transforma las rectas paralelas al eje de abscisas en el primer sistema, en curvas exponenciales

$$Y = n_i e^X$$

susceptibles de superposición por traslación no ortogonal al eje de abscisas, sino al nuevo eje homónimo transformado. La aplicación de esto al caso que nos ocupa se hará a tenor del siguiente ejercicio: busquemos un diagrama primitivo que conserve las áreas y satisfaga la ley de transformación de la coordenada no mixta; circunstancias que se cumplen partiendo del Emagrama de Neuhoff

$$x = T$$

$$y = \ln p$$

Las nuevas coordenadas se encontrarán aplicando la transformación

$$X = \ln T$$

$$Y = \frac{y}{X'(x)} = \frac{\ln p}{d \ln T/dT} = T \ln p$$

que resulta ser, precisamente, el Aerograma de Refsdal (q.e.d.)

BIBLIOGRAFIA

MORÁN, F.: *Aplicaciones teóricas y aerológicas de los diagramas termodinámicos. El diagrama politrópico.* SMM, serie A, núm. 16 (1943).

——: *Apuntes de Termodinámica de la atmósfera.* SMN, serie B, núm. 4 (1944/1948).

O.M.M.: *Diagrammes aérologiques.* Núm. 35, TP 11 (1954).

——: *Les diagrammes aérologiques.* Núm. 66, TP 25 (1957).

——: *Les représentations graphiques en météorologie.* Núm. 95, TP 37 (1960).

REFSDAL, A.: «Das Aerogramm, ein neues Diagrammpapiere für aerologische Berechnungen». *Met. Zeitschr.*, 52, 1, 1-6 (1935).

——: «Aerologische Diagrammpapiere». *Geofys. Publ.*, XII, 13, 1-55 (1937).