Comunicaciones a la Academia

presentadas en las Sesiones Científicas celebradas en las fechas que se indican

*Un teorema tipo «Michael» para subálgebras de funciones continuas sobre un espacio de Banach**

Por J. GÓMEZ y J. G. LLAVONA

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Ciencias Matemáticas,
Universidad Complutense de Madrid

1. INTRODUCCION

Un álgebra topológica A se llama funcionalmente continua cuando todo homomorfismo $\phi : A \to \mathbb{K}$ es automáticamente continuo. Si X es un espacio completamente regular Hausdorff, $C(X)$ el álgebra de las funciones escalares continuas sobre X y $A \subseteq C(X)$ es una subálgebra, en [8] se dan condiciones suficientes sobre A para garantizar que todo homomorfismo, no nulo, $\phi : A \to \mathbb{K}$ es la evaluación en un punto de X. Como aplicación de este resultado Michael prueba que las álgebras de Fréchet simétricas son funcionalmente continuas y que el álgebra $H(U)$, de las funciones analíticas sobre un domio U de $\mathbb{C}^n$ dotada de la topología compacto-abierta, es también funcionalmente continua.

En los últimos años varios autores se han interesado por el estudio del espectro de ciertas álgebras de funciones diferenciables, tanto en el caso real como en el complejo definidas sobre espacios infinito dimensionales. (Véase [6] y [9] para el caso complejo y [2], [4], [5] y [7] para el caso real).

En esta comunicación presentamos un Teorema tipo «Michael» para el caso particular en el que X es un espacio de Banach real. Como aplicación resulta que si E es un espacio de Banach separable o E es el dual de un espacio de Banach separable y A es la subálgebra de todas las funciones analíticas reales o la subálgebra de todas las funciones reales de clase C^m, $m = 0, 1, \ldots, \infty$, sobre E, entonces todo homomorfismo, no nulo, $\phi : A \to \mathbb{R}$ es la evaluación en un punto de E. Como consecuencia obtenemos que dichas subálgebras son funcionalmente continuas cuando se las dota de sus topologías naturales.

2. HOMOMORFISMOS SOBRE ALGEBRAS DE FUNCIONES

Todos los homomorfismos considerados lo serán en el sentido de álgebras.

1.1. Teorema. (Michael [8]). *Sea A una subálgebra de $C(X)$ con $1 \in A$. Supongamos que A satisface las siguientes propiedades:*

i) *Si $f \in A$ y $f(x) \neq 0$ para cada $x \in X$, entonces $1/f \in A$.*

Investigación parcialmente financiada por el proyecto de la CAICYT 2197/83

* Presentada en la Sesión Científica del 3 de febrero de 1988.

ii) *Si* $\{f_i\}_{i=1}^n$ *es un subconjunto finito de A con* $\bigcap_{i=1}^n Z(f_i) = \phi$ ($Z(f_i)$ *es el conjunto de ceros de* f_i), *entonces existen* $\{g_i\}_{i=1}^n$ *funciones de A tales que* $\sum_{i=1}^n f_i g_i = 1$.

iii) *A contiene un subconjunto finito* $\{h_i\}_{i=1}^m$ *tal que para cualesquiera escalares* $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$, *el conjunto*

$$\bigcap_{i=1}^m \{x \in X : h_i(x) = \lambda_i\}$$

es un compacto no vacío de X.

Entonces todo homomorfismo $\phi : A \to \mathbb{K}$, *no nulo, es la evaluación en un punto de X.*

El teorema 1.1 puede establecerse con una hipótesis alternativa tal como figura en el enunciado siguiente.

1.2. Teorema. (Michael [8]). *Sea A una subálgebra de* $C(X)$ *con* $1 \in A$. *Supongamos que X es Lindelöf, que A satisface las condiciones* (i) *y* (ii) *del Teorema 1.1 y además la siguiente:*

(iii)′ *Si* $\{f_n\}$ *es una sucesión en A, entonces existe una sucesión* $\{g_n\}$ *en A tal que* $Z(f_n) = Z(g_n)$ *para cada* $n \geqslant 1$, $|g_n(x)| \leqslant 1$ *para todo* $x \in X$, $n \geqslant 1$ *y* $g = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g_n \in A$.

Entonces todo homomorfismo $\phi : A \to \mathbb{K}$, *no nulo, es la evaluación en un punto de X.*

Sea ahora E un espacio de Banach real, E' su dual topológico y $C(E)$ el álgebra de todas las funciones continuas, con valores en $\mathbb{R}$, definidas en E. Sea $l^1 = l^1(\mathbb{N}) = \left\{x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\right\}$. El resultado principal objeto de esta comunicación es el siguiente:

1.3. Teorema. *Supongamos que existe* $(\phi_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$, $\|\phi_n\| \leqslant 1$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *con la propiedad de separar los puntos de E. Sea* $A \subset C(E)$ *una subálgebra con* $1 \in A$. *Supongamos que A satisface las siguientes propiedades:*

i) *Si* $f \in A$ *y* $f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in E$, *entonces* $1/f \in A$.

ii) $E' \subset A$ *y si* $\alpha = (\alpha_n) \in l^1$, *la función*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \phi_n^2 \text{ pertenece a } A$$

En estas condiciones todo homomorfismo no nulo $\phi : A \to \mathbb{R}$ *que verifique* $\phi(\phi_n) = \phi_n(a)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y un* $a \in E$, *es la evaluación en a.*

1.4. Observación. La hipótesis exigida al espacio de Banach E (la existencia de $(\phi_n)_{n=1}^{\infty} \subset E'$, $\|\phi_n\| \leqslant 1$, $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ separa los puntos de E), equivale a decir que E' es

$\sigma(E'; E)$-separable. Por consiguiente, dicha condición la satisfacen los espacios de Banach separables y los espacios de Banach que son duales de espacios de Banach separables.

3. APLICACIONES

Sea $A(E)$, resp. $C^m(E)$ $m = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, la subálgebra de $C(E)$ formada por todas las funciones analíticas reales, respectivamente de clase C^m en el sentido usual de Fréchet, definidas en E con valores en $\mathbb{R}$. Utilizando el teorema 1.3 hemos conseguido obtener el resultado que enunciamos a continuación en forma de corolario.

2.1. Corolario. *Sea E un espacio de Banach que es separable o es dual de un separable. Sea $A = A(E)$ o $A = C^m(E)$. Entonces todo homomorfismo, no nulo, $\phi : A \to \mathbb{R}$ es la evaluación en un punto de E.*

Nota. El resultado del corolario 2.1, para el caso E separable y $A = C^\infty(E)$, aparece en [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] ARIAS-DE-REYNA, J.: «Real valued homomorphisms on algebras of differentiable functions». (En prensa).
[2] ARON, R. M.; GÓMEZ, J., y LLAVONA, J. G.: «Homomorphisms between Algebras of Differentiable Functions in Infinite Dimensions». (Aparecerá en Michigan Math. Journal).
[3] BOCHNAK, J.: «Analytic Functions in Banach Spaces». *Studia Math., Tomo XXXV, págs 273-292 (1970).*
[4] GALÉ J. E.: «Gelfand Theory in Algebras of Differentiable Functions on Banach Spaces». *Pac. J. Math.*, vol. 119, núm. 2, págs. 303-315 (1985).
[5] GÓMEZ, J.: «Espectro e ideales primarios del álgebra $C^p_{wb}(E)$ de funciones débilmente diferenciables sobre espacios de Banach». *Rev. R. Acad. Ciencias Ex. Fís. y Nat.*, Madrid, Tomo LXXV, Cuad. 2, págs 514-519 (1981).
[6] ISIDRO, J. M.: «Characterization of the Spectrum of some Topological Algebras of Holomorphic Functions». *Advances in Holomorphy*, North-Holland, Ed. J. A. Barroso. *Notas de Matemática (65)*, 1979.
[7] JARAMILLO, J.: «Topologies and Homomorphisms on Algebras of Differentiable Functions». (En prensa).
[8] MICHAEL, E. A.: «Locally Multiplicatively-Convex Topological Algebras». *Memoirs of the A.M.S.*, núm. 11 (1952).
[9] MUJICA, J.: «Complex Homomorphisms of the Algebra of Holomorphic Functions on Fréchet Spaces». *Math. Ann.*, *241*, págs. 73-82 (1979).