

TEOREMA 4.

$$\mathcal{D}^{\{u_n\}}(\Omega) \simeq \mathcal{E}^{\{u_n\}}(I)(N) \simeq \mathcal{D}^{\{u_n\}}(I)(N).$$

Bibliografía

- [1] KOMATSU, H.: *Ultradistributions I, Structure Theorems and a Characterization*. «J. Fac. Sc. Univ. Tokyo», Sec. IA, 20, n.º 1 (1973), 25-105.
- [2] OGRODZKA, Z.: *On simultaneous extension of infinitely differentiable functions*. «*Studia Math.*», 28, 193-207 (1967).
- [3] VALDIVIA, M.: *Representaciones de los espacios $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}'(\Omega)$* . «*Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*», Madrid, 72, 385-414 (1978).
- [4] VALDIVIA, M.: *Representaciones de los espacios $\mathcal{C}^m(V)$ y $\mathcal{D}^m(V)$* . «*Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*», Madrid (pendiente de publicación).

UNA NOTA EN CODIMENSION DE SUBESPACIOS DE CIERTOS ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS (*)

Pedro Pérez Carreras y José Bonet

Departamento de Matemáticas. E. S. I. Industriales de la Universidad Politécnica de Valencia. C. de Vera, s/n, Valencia-10

Departamento de Teoría de Funciones. Facultad de Matemáticas. Burjasot, Valencia

Some results in codimension are given: Let E be a space and let F be a subspace of E of codimension less than 2^{\aleph_0} . If $E'[\mu(E', E)]$ is complete, then F is countably barreled (w -barreled) if E is countably barreled (w -barreled).

Los espacios vectoriales que usaremos están definidos sobre el cuerpo K de los números reales o complejos. Dado un par dual (F, G) denotamos mediante $\sigma(F, G)$, $\mu(F, G)$ y $\beta(F, G)$ las topologías débil, de Mackey y fuerte, respectivamente. La palabra espacio quiere significar espacio vectorial topológico separado localmen-

(*) Presentada en la sesión celebrada el 3 de diciembre de 1980.

te convexo. E' es el dual topológico de E y si \mathcal{A} es una familia de $\sigma(E', E)$ -acotados de E' total, denotaremos mediante $T_{\mathcal{A}}$ a la topología sobre E de la convergencia uniforme sobre los elementos de \mathcal{A} . Si B es un subconjunto cerrado acotado y absolutamente convexo de E , E_B denota la envoltura lineal de B provista de la topología normada que se deduce de su calibrador. En lo que sigue, se deducirá que ciertas propiedades de tonelación se heredan a subespacios de codimensión menor que 2^{x_0} haciendo uso de ciertos resultados debidos a B. Tsirulnikov y a M. Valdivia, resultados que enunciamos a continuación: (a) Sea E un espacio de Fréchet de dimensión infinita y sea F un subespacio denso de E que no es tonelado. Entonces, existe un subespacio cerrado G de E de dimensión infinita tal que $G \cap F = \{0\}$ (ver [3]). (b) Sea E un espacio y sea F un subespacio de E . Sea \mathcal{A} una familia de acotados absolutamente convexos de E y cerrados en E tal que contiene a las partes finitas de E y tal que es estable por homotecias y tal que si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces existe $C \in \mathcal{A}$ tal que $C \supset A \cup B$. Si $F \cap A$ es cerrado en E para cada $A \in \mathcal{A}$ y si $F \cap E_A$ es de codimensión finita en E_A para cada A de \mathcal{A} , entonces F es cerrado en E si $E'(T_{\mathcal{A}})$ es completo (ver [3]). (c) Sea E un espacio y sea G un subespacio de E' que es $\sigma(E', E)$ -completo. Sea T una topología en E tal que todo $\sigma(E', E)$ -acotado de G sea T -equicontinuo. Entonces, G^\perp es un subespacio complementado de $E(T)$ (ver [2]).

El siguiente lema se deduce fácilmente de (b):

LEMA 1.—Sea E un espacio tal que $E'[\mu(E', E)]$ es completo y sea G un subespacio cerrado de E de codimensión menor que 2^{x_0} . Entonces, $G'[\mu(G', G)]$ es completo.

LEMA 2.—Sea G un subespacio cerrado de un espacio E y supongamos que se cumplen las condiciones: i) Todo conjunto absolutamente convexo y $\sigma(E', E)$ -compacto de G^\perp es equicontinuo. ii) $E'[\mu(E', E)]$ es completo. iii) La codimensión de G en E es menor que 2^{x_0} . Entonces G es complementado en E .

DEMOSTRACIÓN.—Sea B un absolutamente convexo $\sigma(E, E')$ -compacto de E . Claramente, $E_B \cap G$ es cerrado en E_B y en virtud de iii) y de (a), $E_B \cap G$ es de codimensión finita en E_B , por lo que existe un real positivo r tal que $B \subset r(B \cap G + K)$ donde K es un acotado de dimensión finita. Se comprueba fácilmente que

$K^o \cap G^\perp \subset r(B^o \cap G^\perp)$, de donde se sigue que las topologías $\sigma(E', E)$ y $\mu(E', E)$ coinciden sobre G^\perp . Así, G^\perp es $\sigma(E', E)$ -completo, luego aplicando (c) se sigue que G es complementado en E , q. e. d.

Diremos que un espacio E es numerablemente tonelado si todo tonel que sea intersección numerable de entornos del origen absolutamente convexos y cerrados es entorno del origen. Un espacio E se dice w -tonelado si toda sucesión de E' que sea $\sigma(E', E)$ -acotada es un equicontinuo.

TEOREMA 1.—Sea E un espacio numerablemente tonelado tal que $E'[\mu(E', E)]$ es completo. Sea F un subespacio de E de codimensión menor que 2^{x_0} . Entonces F es numerablemente tonelado.

DEMOSTRACIÓN.—Debido al lema 1, basta probar el resultado si F es denso o cerrado en E . Si F es denso en E , sea T un tonel en F tal que $T = \bigcap V_n$, en donde V_n son entornos del origen absolutamente convexos y cerrados, y sea $T^* = \bigcap \bar{V}_n$ en donde las clausuras han sido tomadas en E . La envoltura lineal H de T^* será cerrada en E y así coincidirá con E y como E es numerablemente tonelado, T^* será un entorno del origen en E y así T será entorno del origen en F . En efecto, bastará comprobar que se satisfacen las condiciones necesarias para poder aplicar (b). Sea B un conjunto de E absolutamente convexo y $\sigma(E, E')$ -compacto. Debido al resultado (a), $E_{B \cap H}$ es un normado tonelado, luego existe un r positivo tal que $B \cap H \subset rT$ y así $B \cap H$ es cerrado en E , por lo que $E_{B \cap H}$ es un espacio de Banach y aplicando (a) tendrá codimensión finita en E_B . Supongamos, ahora, que F es cerrado en E . Tal como se hizo en la prueba del lema 2, es fácil ver que $F^\perp[\sigma(E', E)]$ es completo luego topológicamente isomorfo a un producto de rectas K^1 con $\text{card}(I)$ la codimensión de F en E . Como K^1 tiene un sistema fundamental de acotados, cada uno de los cuales es el producto de acotados absolutamente convexos de dimensión uno o dos, se trata de acotados separables luego equicontinuos. Aplicando el lema 2, F es complementado en E de donde se sigue que F es numerablemente tonelado, q. e. d.

COROLARIO 1.1.—Sea E un espacio D F localmente completo tal que $E'[\mu(E', E)]$ es completo. Si F es un subespacio de codimensión menor de 2^{x_0} de E , entonces F es un espacio D F .

NOTA 1.—En [3] se prueba que si E es tonelado y $E'[\mu(E', E)]$ es completo y si F es un subespacio de E de codimensión menor de 2^{x_0} , entonces F es tonelado. Es claro que existen espacios numeralesmente tonelados con dual Mackey completo que no son tonelados: por ejemplo, cualquier espacio de Banach reflexivo no separable dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados separables de E' .

TEOREMA 2.—Sea E un espacio w -tonelado tal que $E'[\mu(E', E)]$ es completo y sea F un subespacio de E de codimensión menor que 2^{x_0} . Entonces F es w -tonelado.

DEMOSTRACIÓN.—Debido al lema 1, basta con considerar los casos F denso y F cerrado en E . Sea F denso en E y sea (u_n) una sucesión en F' que sea $\sigma(F', F)$ -acotada y sean (v_n) sus únicas extensiones continuas posibles. Un razonamiento análogo al de la prueba del teorema 1 sirve para comprobar que $T^* = \cap \{v_n\}^0$ es un entorno del origen en E y así (u_n) es un equicontinuo en F' . Supongamos ahora F cerrado en E . Consideraremos la familia de acotados \mathcal{A} en E' que sea $(B \subset E': B \text{ es equicontinuo}) \cup (A \subset F': A \text{ es absolutamente convexo y } \sigma(E', E)\text{-compacto})$. La topología $T_{\mathcal{A}}$ es más fina que la original del espacio y menos fina que la de Mackey y así $E(T_{\mathcal{A}})$ es w -tonelado y en F coincide con la topología original. Debido al lema 2, F es complementado en $E(T_{\mathcal{A}})$ y por tanto w -tonelado, q. e. d.

NOTA 2.—Decimos que un espacio E es sucesionalmente tonelado si toda sucesión de E' que $\sigma(E', E)$ -converge al origen es un equicontinuo. Con el razonamiento del resultado anterior, puede probarse que si E es sucesionalmente tonelado y $E'[\mu(E', E)]$ es completo, entonces todo subespacio cerrado de codimensión menor que 2^{x_0} es sucesionalmente tonelado.

NOTA 3.—Existen espacios w -tonelados con dual Mackey completo que no son numeralesmente tonelados (ver [1]): Sea (I_n) una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos de índices tales que

$$2^{x_0} < \text{card}(I_1) < \text{card}(I_2) < \dots \text{ y sea } I = \bigcup I_n.$$

Consideremos $l^2(I)$ y la topología sobre él de la convergencia uni-

forme sobre la familia \mathcal{A} de acotados siguiente: $\mathcal{A} = (B \subset l^2(I) : \text{acotados separables}) \cup (\text{envolturas absolutamente convexas y cerradas de } (e_i : i \in I_n), n = 1, 2, \dots)$. Es claro que $l^2(I)$ es w -tonelado y su dual es Mackey completo; sin embargo, no es numerablemente tonelado. En efecto, sea B_n la envoltura absolutamente convexa y cerrada de $(e_i : i \in I_n)$ que es un equicontinuo y $B = \bigcup B_n$ es un acotado débil. Si B fuera equicontinuo existiría un $A \subset l^2(I)$ absolutamente convexo separable y existiría un natural n_0 tal que B estaría contenido en la envoltura absolutamente convexa y cerrada de $A \cup (B_1 \cup \dots \cup B_{n_0})$ y así B tendría un subconjunto denso de cardinal menor o igual que el cardinal de I_{n_0} . Sin embargo, $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ para cada i, j de I_{n_0+1} y B contiene un subconjunto discreto de cardinal igual al de I_{n_0+1} , lo cual es absurdo.

Referencias

- [1] MAZÓN, J. M. (1980). Tres nuevas clases de espacios localmente convexos. Tesis Doctoral, Valencia.
- [2] TSIRULNIKOV, B. (1980). Subspaces with property (b) in locally convex spaces of quasibarreled type. *Proc. Math. Cambr. Phil. Soc.*, **88**, 331-337.
- [3] VALDIVIA, M. A property of Fréchet spaces (pendiente de publicación).

REGIO- Y ESTEREOSELECTIVIDAD EN ALGUNAS REACCIONES DE ADICION A SISTEMAS 4a,12a-DIAZATETRACICLICOS (*)

M. C. Cano, F. Gómez Contreras, A. Sanz y A. Solana

*Laboratorio de Química. Colegio Universitario Integrado
Universidad Complutense, Madrid*

Se ha estudiado la estereoquímica de algunas reacciones de adición electrófila en el ciclo de tetrahidropiridazina terminal de compuestos 4a,12a-diazatetracíclicos. La mayor parte de los resultados obtenidos favorecen la hipótesis de que estas adiciones transcurren a través de un mecanismo en el que el paso nucleófilo es el

(*) Presentada en la sesión celebrada el 10 de diciembre de 1980.