

## TEOREMA 4.

$$\mathcal{D}^{\{u_n\}}(\Omega) \simeq \mathcal{E}^{\{u_n\}}(I)(N) \simeq \mathcal{D}^{\{u_n\}}(I)(N).$$

## Bibliografía

- [1] KOMATSU, H.: *Ultradistributions I, Structure Theorems and a Characterization*. «J. Fac. Sc. Univ. Tokyo», Sec. IA, 20, n.º 1 (1973), 25-105.
- [2] OGRODZKA, Z.: *On simultaneous extension of infinitely differentiable functions*. «Studia Math.», 28, 193-207 (1967).
- [3] VALDIVIA, M.: *Representaciones de los espacios  $\mathcal{D}(\Omega)$  y  $\mathcal{D}'(\Omega)$* . «Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales», Madrid, 72, 385-414 (1978).
- [4] VALDIVIA, M.: *Representaciones de los espacios  $\mathcal{C}^m(V)$  y  $\mathcal{D}^m(V)$* . «Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales», Madrid (pendiente de publicación).

## UNA NOTA EN CODIMENSION DE SUBESPACIOS DE CIERTOS ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS (\*)

Pedro Pérez Carreras y José Bonet

Departamento de Matemáticas. E. S. I. Industriales de la Universidad Politécnica de Valencia. C. de Vera, s/n, Valencia-10

Departamento de Teoría de Funciones. Facultad de Matemáticas. Burjasot, Valencia

Some results in codimension are given: Let  $E$  be a space and let  $F$  be a subspace of  $E$  of codimension less than  $2^\aleph_0$ . If  $E'[\mu(E', E)]$  is complete, then  $F$  is countably barreled ( $w$ -barreled) if  $E$  is countably barreled ( $w$ -barreled).

Los espacios vectoriales que usaremos están definidos sobre el cuerpo  $K$  de los números reales o complejos. Dado un par dual  $(F, G)$  denotamos mediante  $\sigma(F, G)$ ,  $\mu(F, G)$  y  $\beta(F, G)$  las topologías débil, de Mackey y fuerte, respectivamente. La palabra espacio quiere significar espacio vectorial topológico separado localmen-

(\*) Presentada en la sesión celebrada el 3 de diciembre de 1980.

te convexo.  $E'$  es el dual topológico de  $E$  y si  $\mathcal{A}$  es una familia de  $\sigma(E', E)$ -acotados de  $E'$  total, denotaremos mediante  $T_{\mathcal{A}}$  a la topología sobre  $E$  de la convergencia uniforme sobre los elementos de  $\mathcal{A}$ . Si  $B$  es un subconjunto cerrado acotado y absolutamente convexo de  $E$ ,  $E_B$  denota la envoltura lineal de  $B$  provista de la topología normada que se deduce de su calibrador. En lo que sigue, se deducirá que ciertas propiedades de tonelación se heredan a subespacios de codimensión menor que  $2^{x_0}$  haciendo uso de ciertos resultados debidos a B. Tsirulnikov y a M. Valdivia, resultados que enunciamos a continuación: (a) Sea  $E$  un espacio de Fréchet de dimensión infinita y sea  $F$  un subespacio denso de  $E$  que no es tonelado. Entonces, existe un subespacio cerrado  $G$  de  $E$  de dimensión infinita tal que  $G \cap F = \{0\}$  (ver [3]). (b) Sea  $E$  un espacio y sea  $F$  un subespacio de  $E$ . Sea  $\mathcal{A}$  una familia de acotados absolutamente convexos de  $E$  y cerrados en  $E$  tal que contiene a las partes finitas de  $E$  y tal que es estable por homotecias y tal que si  $A, B \in \mathcal{A}$  entonces existe  $C \in \mathcal{A}$  tal que  $C \supset A \cup B$ . Si  $F \cap A$  es cerrado en  $E$  para cada  $A \in \mathcal{A}$  y si  $F \cap E_A$  es de codimensión finita en  $E_A$  para cada  $A$  de  $\mathcal{A}$ , entonces  $F$  es cerrado en  $E$  si  $E'(T_{\mathcal{A}})$  es completo (ver [3]). (c) Sea  $E$  un espacio y sea  $G$  un subespacio de  $E'$  que es  $\sigma(E', E)$ -completo. Sea  $T$  una topología en  $E$  tal que todo  $\sigma(E', E)$ -acotado de  $G$  sea  $T$ -equicontinuo. Entonces,  $G^\perp$  es un subespacio complementado de  $E(T)$  (ver [2]).

El siguiente lema se deduce fácilmente de (b):

**LEMA 1.**—Sea  $E$  un espacio tal que  $E'[\mu(E', E)]$  es completo y sea  $G$  un subespacio cerrado de  $E$  de codimensión menor que  $2^{x_0}$ . Entonces,  $G'[\mu(G', G)]$  es completo.

**LEMA 2.**—Sea  $G$  un subespacio cerrado de un espacio  $E$  y supongamos que se cumplen las condiciones: i) Todo conjunto absolutamente convexo y  $\sigma(E', E)$ -compacto de  $G^\perp$  es equicontinuo. ii)  $E'[\mu(E', E)]$  es completo. iii) La codimensión de  $G$  en  $E$  es menor que  $2^{x_0}$ . Entonces  $G$  es complementado en  $E$ .

**DEMOSTRACIÓN.**—Sea  $B$  un absolutamente convexo  $\sigma(E, E')$ -compacto de  $E$ . Claramente,  $E_B \cap G$  es cerrado en  $E_B$  y en virtud de iii) y de (a),  $E_B \cap G$  es de codimensión finita en  $E_B$ , por lo que existe un real positivo  $r$  tal que  $B \subset r(B \cap G + K)$  donde  $K$  es un acotado de dimensión finita. Se comprueba fácilmente que

$K^o \cap G^\perp \subset r(B^o \cap G^\perp)$ , de donde se sigue que las topologías  $\sigma(E', E)$  y  $\mu(E', E)$  coinciden sobre  $G^\perp$ . Así,  $G^\perp$  es  $\sigma(E', E)$ -completo, luego aplicando (c) se sigue que  $G$  es complementado en  $E$ , q. e. d.

Diremos que un espacio  $E$  es numerablemente tonelado si todo tonel que sea intersección numerable de entornos del origen absolutamente convexos y cerrados es entorno del origen. Un espacio  $E$  se dice  $w$ -tonelado si toda sucesión de  $E'$  que sea  $\sigma(E', E)$ -acotada es un equicontinuo.

**TEOREMA 1.**—Sea  $E$  un espacio numerablemente tonelado tal que  $E'[\mu(E', E)]$  es completo. Sea  $F$  un subespacio de  $E$  de codimensión menor que  $2^{x_0}$ . Entonces  $F$  es numerablemente tonelado.

**DEMOSTRACIÓN.**—Debido al lema 1, basta probar el resultado si  $F$  es denso o cerrado en  $E$ . Si  $F$  es denso en  $E$ , sea  $T$  un tonel en  $F$  tal que  $T = \bigcap V_n$ , en donde  $V_n$  son entornos del origen absolutamente convexos y cerrados, y sea  $T^* = \bigcap \bar{V}_n$  en donde las clausuras han sido tomadas en  $E$ . La envoltura lineal  $H$  de  $T^*$  será cerrada en  $E$  y así coincidirá con  $E$  y como  $E$  es numerablemente tonelado,  $T^*$  será un entorno del origen en  $E$  y así  $T$  será entorno del origen en  $F$ . En efecto, bastará comprobar que se satisfacen las condiciones necesarias para poder aplicar (b). Sea  $B$  un conjunto de  $E$  absolutamente convexo y  $\sigma(E, E')$ -compacto. Debido al resultado (a),  $E_{B \cap H}$  es un normado tonelado, luego existe un  $r$  positivo tal que  $B \cap H \subset rT$  y así  $B \cap H$  es cerrado en  $E$ , por lo que  $E_{B \cap H}$  es un espacio de Banach y aplicando (a) tendrá codimensión finita en  $E_B$ . Supongamos, ahora, que  $F$  es cerrado en  $E$ . Tal como se hizo en la prueba del lema 2, es fácil ver que  $F^\perp[\sigma(E', E)]$  es completo luego topológicamente isomorfo a un producto de rectas  $K^I$  con  $\text{card}(I)$  la codimensión de  $F$  en  $E$ . Como  $K^I$  tiene un sistema fundamental de acotados, cada uno de los cuales es el producto de acotados absolutamente convexos de dimensión uno o dos, se trata de acotados separables luego equicontinuos. Aplicando el lema 2,  $F$  es complementado en  $E$  de donde se sigue que  $F$  es numerablemente tonelado, q. e. d.

**COROLARIO 1.1.**—Sea  $E$  un espacio  $D_F$  localmente completo tal que  $E'[\mu(E', E)]$  es completo. Si  $F$  es un subespacio de codimensión menor de  $2^{x_0}$  de  $E$ , entonces  $F$  es un espacio  $D_F$ .

NOTA 1.—En [3] se prueba que si  $E$  es tonelado y  $E'[\mu(E', E)]$  es completo y si  $F$  es un subespacio de  $E$  de codimensión menor de  $2^{x_0}$ , entonces  $F$  es tonelado. Es claro que existen espacios numeralesmente tonelados con dual Mackey completo que no son tonelados: por ejemplo, cualquier espacio de Banach reflexivo no separable dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados separables de  $E'$ .

TEOREMA 2.—Sea  $E$  un espacio  $w$ -tonelado tal que  $E'[\mu(E', E)]$  es completo y sea  $F$  un subespacio de  $E$  de codimensión menor que  $2^{x_0}$ . Entonces  $F$  es  $w$ -tonelado.

DEMOSTRACIÓN.—Debido al lema 1, basta con considerar los casos  $F$  denso y  $F$  cerrado en  $E$ . Sea  $F$  denso en  $E$  y sea  $(u_n)$  una sucesión en  $F'$  que sea  $\sigma(F', F)$ -acotada y sean  $(v_n)$  sus únicas extensiones continuas posibles. Un razonamiento análogo al de la prueba del teorema 1 sirve para comprobar que  $T^* = \cap \{v_n\}^0$  es un entorno del origen en  $E$  y así  $(u_n)$  es un equicontinuo en  $F'$ . Supongamos ahora  $F$  cerrado en  $E$ . Consideraremos la familia de acotados  $\mathcal{A}$  en  $E'$  que sea  $(B \subset E': B \text{ es equicontinuo}) \cup (A \subset F': A \text{ es absolutamente convexo y } \sigma(E', E)\text{-compacto})$ . La topología  $T_{\mathcal{A}}$  es más fina que la original del espacio y menos fina que la de Mackey y así  $E(T_{\mathcal{A}})$  es  $w$ -tonelado y en  $F$  coincide con la topología original. Debido al lema 2,  $F$  es complementado en  $E(T_{\mathcal{A}})$  y por tanto  $w$ -tonelado, q. e. d.

NOTA 2.—Decimos que un espacio  $E$  es sucesionalmente tonelado si toda sucesión de  $E'$  que  $\sigma(E', E)$ -converge al origen es un equicontinuo. Con el razonamiento del resultado anterior, puede probarse que si  $E$  es sucesionalmente tonelado y  $E'[\mu(E', E)]$  es completo, entonces todo subespacio cerrado de codimensión menor que  $2^{x_0}$  es sucesionalmente tonelado.

NOTA 3.—Existen espacios  $w$ -tonelados con dual Mackey completo que no son numeralesmente tonelados (ver [1]): Sea  $(I_n)$  una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos de índices tales que

$$2^{x_0} < \text{card}(I_1) < \text{card}(I_2) < \dots \text{ y sea } I = \bigcup I_n.$$

Consideremos  $l^2(I)$  y la topología sobre él de la convergencia uni-

forme sobre la familia  $\mathcal{A}$  de acotados siguiente:  $\mathcal{A} = \{B \subset l^2(I) : \text{acotados separables}\} \cup \{\text{envolturas absolutamente convexas y cerradas de } (e_i : i \in I_n), n = 1, 2, \dots\}$ . Es claro que  $l^2(I)$  es  $w$ -tonelado y su dual es Mackey completo; sin embargo, no es numerablemente tonelado. En efecto, sea  $B_n$  la envoltura absolutamente convexa y cerrada de  $(e_i : i \in I_n)$  que es un equicontinuo y  $B = \bigcup B_n$  es un acotado débil. Si  $B$  fuera equicontinuo existiría un  $A \subset l^2(I)$  absolutamente convexo separable y existiría un natural  $n_0$  tal que  $B$  estaría contenido en la envoltura absolutamente convexa y cerrada de  $A \cup (B_1 \cup \dots \cup B_{n_0})$  y así  $B$  tendría un subconjunto denso de cardinal menor o igual que el cardinal de  $I_{n_0}$ . Sin embargo,  $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$  para cada  $i, j$  de  $I_{n_0+1}$  y  $B$  contiene un subconjunto discreto de cardinal igual al de  $I_{n_0+1}$ , lo cual es absurdo.

### Referencias

- [1] MAZÓN, J. M. (1980). Tres nuevas clases de espacios localmente convexos. Tesis Doctoral, Valencia.
- [2] TSIRULNIKOV, B. (1980). Subspaces with property (b) in locally convex spaces of quasibarreled type. *Proc. Math. Cambr. Phil. Soc.*, **88**, 331-337.
- [3] VALDIVIA, M. A property of Fréchet spaces (pendiente de publicación).

### REGIO- Y ESTEREOSELECTIVIDAD EN ALGUNAS REACCIONES DE ADICIÓN A SISTEMAS 4a,12a-DIAZATETRACÍCLICOS (\*)

M. C. Cano, F. Gómez Contreras, A. Sanz y A. Solana

*Laboratorio de Química. Colegio Universitario Integrado  
Universidad Complutense, Madrid*

Se ha estudiado la estereoquímica de algunas reacciones de adición electrófila en el ciclo de tetrahidropiridazina terminal de compuestos 4a,12a-diazatetracíclicos. La mayor parte de los resultados obtenidos favorecen la hipótesis de que estas adiciones transcurren a través de un mecanismo en el que el paso nucleófilo es el

(\*) Presentada en la sesión celebrada el 10 de diciembre de 1980.