RESOLUCION DE ECUACIONES MATRICIALES POLINOMICAS MEDIANTE POLINOMIOS ANULADORES DE MATRICES SOLUCION

Vicente Hernández García (*) y Fernando Incertis Carro (**)

Recibido: 4 febrero 1981

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

In this article we present a new method of resolution of polynomial matrix equations. By using annulating polynomials of matrix solution it is possible to reduce the degree of a polynomial matrix equation. Then the problem is reduced to the resolution of a first degree equation.

I. Introducción

Se considera en este trabajo el problema de la resolución de una ecuación matricial polinómica de grado m

$$X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \dots + A_1 X + A_0 = 0 \tag{1.1}$$

donde las matrices coeficientes son tales que, $A_i \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ para $i = 0, 1, \dots, m-1$, siendo $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos. El polinomio matricial del primer miembro de (1.1) será denotado por

$$P(X) = X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \dots + A_1 X + A_0 \tag{1.2}$$

(*) Departamento de Matemáticas (dirigido por el profesor D. Pedro Pérez Carreras), E. S I. Industriales, Universidad Politécnica de Valencia, campus de Vera, Valencia.

(**) Centro Científico I. B. M., Universidad Autónoma de Madrid.

y, por analogía con el caso escalar, asociada a P (X) se define la matriz «compañera» por bloques

$$H = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & I & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & I \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & . & . & -A_{m-1} \end{bmatrix}_{mn \times mn}$$

Si la matriz incógnita es una matriz escalar, $X = \lambda I$, entonces (1.2) se reduce a

$$P(\lambda I) = P(\lambda) = I \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \ldots + A_1 \lambda + A_0$$

y se denomina una lambda-matriz de grado m. Dentro de la teoría de lambda-matrices el problema básico consiste en encontrar un escalar $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que la matriz $P(\lambda_0)$ sea singular. Dicho escalar λ_0 es llamado una raíz latente de $P(\lambda)$. Véase Lancaster [1] para una discusión detallada de raíces latentes y sus aplicaciones.

Existe una estrecha relación entre el problema de raíces latentes de $P(\lambda)$ y el de la resolución de la ecuación matricial polinómica $P(X) = 0$. Como un corolario del teorema de Bezout generalizado, Gantmacher [2], se demuestra que si X es una matriz solución de (1.1) entonces

$$P(\lambda) = Q(\lambda)(I \lambda - X) \tag{1.3}$$

donde $Q(\lambda)$ es una lambda-matriz de grado $m - 1$. A partir de (1.3) se deduce que los n valores propios de una solución cualquiera de $P(X) = 0$ son todos raíces latentes de $P(\lambda)$.

Tras estos comentarios iniciales se pasa a exponer la metodología general propuesta para la resolución de ecuaciones matriciales polinómicas.

II. La ecuación matricial polinómica de grado *m*

Se considera la ecuación matricial polinómica de grado m

$$X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \ldots + A_1 X + A_0 = 0 \tag{2.1}$$

donde las matrices coeficientes son tales que $A_i \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ para $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

A partir de una solución cualquiera X de (2.1) se deducen las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
X^{m-1} &= X^{m-1} = Q_0(X) && (0)\\
X^{m} &= -A_0 - A_1 X - \ldots - A_{m-2} X^{m-2} - A_{m-1} X^{m-1} = Q_1(X) && (1)\\
X^{m+1} &= X^m X = -A_0 X - A_1 X^2 - \ldots - A_{m-2} X^{m-1} - A_{m-1} X^m =\\
&= -A_0 X - A_1 X^2 - \ldots - A_{m-2} X^{m-1} - A_{m-1} (-A_0 - A_1 X -\\
&- \ldots - A_{m-1} X^{m-1}) = A_{m-1} A_0 + (A_{m-1} A_1 - A_0) X + \ldots +\\
&+ (A^2_{m-1} - A_{m-2}) X^{m-1} = Q_2(X) && (2)\\
&\cdot\\
&\cdot && (2.2)\\
&\cdot\\
X^{m+i-1} &= Q_i(X) && (i)\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot
\end{aligned}
$$

Cada una de las expresiones $Q_i(X)$ representa un polinomio matricial en X de grado $m-1$ y, por tanto, responde a la forma general siguiente:

$$Q_i(X) = Q_{i,0} + Q_{i,1} X + \ldots + Q_{i,m-1} X^{m-1} = \sum_{j=0}^{m-1} Q_{i,j} X^j \qquad (2.3)$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots$$

A continuación se demuestra que cada una de las m-tuplas de matrices

$$(Q_{i,0} ; Q_{i,1} ; \ldots ; Q_{i,m-1})$$

que definen a los polinomios $Q_i(X)$, pueden ser obtenidas recurrentemente a partir de la m-tupla

$$(Q_{0,0} ; Q_{0,1} ; \ldots ; Q_{0,m-2} ; Q_{0,m-1}) = (0 ; 0 ; \ldots ; 0 ; I)$$

que define a $Q_0(X)$.

En efecto, a partir de (2.3), (2.2)-(i) y (2.1) se verifica que

$$
\begin{aligned}
& Q_{i,0} + Q_{i,1} X + \dots + Q_{i,m-1} X^{m-1} = Q_i(X) = X^{m+i-1} = X^{m+i-2} X = \\
& = Q_{i-1}(X) \cdot X = (Q_{i-1,0} + Q_{i-1,1} X + \dots + Q_{i-1,m-1} X^{m-1}) X = \\
& = Q_{i-1,0} X + Q_{i-1,1} X^2 + \dots + Q_{i-1,m-2} X^{m-1} + Q_{i-1,m-1} X^m = \\
& = Q_{i-1,0} X + Q_{i-1,1} X^2 + \dots + Q_{i-1,m-2} X^{m-1} + Q_{i-1,m-1} (- A_0 - A_1 X - \\
& - \dots - A_{m-1} X^{m-1}) = - Q_{i-1,m-1} A_0 + (Q_{i-1,0} - Q_{i-1,m-1} A_1) X + \\
& + (Q_{i-1,1} - Q_{i-1,m-1} A_2) X^2 + \dots + (Q_{i-1,m-2} - Q_{i-1,m-1} A_{m-1}) X^{m-1}. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Identificando términos en el primer y último miembro de (2.4) se obtiene que

$$
\left.
\begin{array}{llr}
Q_{i,0} = & - Q_{i-1,m-1} A_0 & (0) \\
Q_{i,1} = & Q_{i-1,0} - Q_{i-1,m-1} A_1 & (1) \\
Q_{i,2} = & Q_{i-1,1} - Q_{i-1,m-1} A_2 & (2) \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
Q_{i,m-1} = & Q_{i-1,m-2} - Q_{i-1,m-1} A_{m-1} & (m-1)
\end{array}
\right. \qquad (2.5)
$$

Es decir, se cumple que

$$Q_{i,j} = Q_{i-1,j-1} - Q_{i-1,m-1} A_j$$

para $j = 0, 1, \dots, m-1$, con el convenio de que $Q_{i-1,-1} = 0$.

Volviendo de nuevo a las expresiones (2.2)-(i) se supone conocido un polinomio anulador de X

$$
\begin{aligned}
S(\lambda) &= \sum_{i=0}^{s} \xi_i \lambda^i \in \mathbb{C}[\lambda] \\
S(X) &= \sum_{i=0}^{s} \xi_i X^i = 0
\end{aligned} \qquad (2.6)
$$

Postmultiplicando (2.6) por X^{m-1} y realizando a continuación las sustituciones $X^{m+i-1} = Q_i(X)$ se deduce, a partir de las expresiones (2.3), que

$$\sum_{i=0}^{s} \xi_i X^{m+i-1} = \sum_{i=0}^{s} \xi_i Q_i(X) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{s} \xi_i \left(\sum_{j=0}^{m-1} Q_{i,j} X^j \right) = 0$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{i=0}^{s} \xi_i Q_{i,j} \right) X^j = 0$$

con lo que se obtiene que X satisface la ecuación polinómica de grado $m - 1$

$$\sum_{j=0}^{m-1} B_j X^j = 0$$

siendo

$$B_j = \sum_{i=0}^{s} \xi_i Q_{i,j} \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Este resultado queda enunciado en el siguiente teorema:

TEOREMA 2.1.—«Dada una solución cualquiera X de la ecuación polinómica de grado m

$$X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \ldots + A_1 X + A_0 = 0 \tag{2.7}$$

y conocido un polinomio anulador de X

$$S(\lambda) = \sum_{i=0}^{s} \xi_i \lambda^i$$

se verifica que X es solución de la ecuación polinómica de grado $m - 1$

$$B_{m-1} X^{m-1} + B_{m-2} X^{m-2} + \ldots + B_1 X + B_0 = 0 \tag{2.8}$$

siendo las matrices coeficientes B_j tales que

$$B_j = \sum_{i=0}^{s} \xi_i Q_{i,j} \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{2.9}$$

y donde las matrices $Q_{i,j}$ pueden ser calculadas recurrentemente mediante la expresión

$$Q_{i,j} = Q_{i-1,j-1} - Q_{i-1,m-1} A_j \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, s \\ j = 0, 1, \ldots, m-1 \end{array} \tag{2.10}$$

a partir de la m-tupla de matrices

$$(Q_{0,0} ; Q_{0,1} ; \ldots ; Q_{0,m-2} ; Q_{0,m-1}) = (0 ; 0 ; \ldots ; 0 ; I) \tag{2.11}$$

con el convenio de que $Q_{i-1,-1} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$».

Si la matriz coeficiente principal B_{m-1} en (2.8) es no singular, se puede premultiplicar dicha ecuación por B_{m-1}^{-1} con lo que se obtiene una ecuación matricial polinómica de grado $m-1$ del mismo tipo que la ecuación (2.7). De este modo es posible aplicar de nuevo el resultado del teorema anterior. Así, sucesivamente, y supuesto que las correspondientes matrices coeficientes principales sean no singulares, se llega a que la solución X de (2.7) satisface una ecuación matricial polinómica de primer grado

$$F_1 X + F_0 = 0. \tag{2.12}$$

Habiendo estudiado el problema propuesto en un sentido, interesa abordarlo en sentido contrario. Es decir, ¿bajo qué condiciones cualquier solución de la ecuación polinómica de grado $m-1$, (2.8), es solución de la ecuación de grado m (2.7)? Para ello se puede observar que las matrices coeficientes B_j de la ecuación (2.8) satisfacen las expresiones (2.9)-(2.11). A partir de las expresiones recurrentes (2.10)-(2.11), se deduce que las matrices $Q_{i,j}$ pueden ser escritas matricialmente, en forma compacta, del siguiente modo:

$$[Q_{i,0} ; Q_{i,1} ; \cdots ; Q_{i,m-1}] =$$

$$= [Q_{i-1,0} ; Q_{i-1,1} ; \cdots ; Q_{i-1,m-1}] \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & I & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & I \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & . & . & -A_{m-1} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

para $i = 1, 2, \dots, s$, siendo

$$[Q_{0,0} ; Q_{0,1} ; \dots ; Q_{0,m-2} ; Q_{0,m-1}] = [0 ; 0 ; \dots ; 0 ; I] \tag{2.14}$$

Se puede observar que la matriz que aparece postmultiplicando en el segundo miembro de (2.13) es precisamente la matriz «compañera» por bloques asociada al polinomio matricial de grado m

$$P(X) = X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \dots + A_1 X + A_0$$

que define a la ecuación inicial dada. Denotando a dicha matriz por H, se infiere de la fórmula de recurrencia (2.13)-(2.14) que

$$[Q_{i,0} ; Q_{i,1} ; \dots ; Q_{i,m-1}] = [0 ; 0 ; \dots ; 0 ; I] H^i \tag{2.15}$$

para $i = 1, 2, \dots, s$.

Por otro lado, a partir de (2.9) se sabe que las matrices coeficientes B_j, $j = 0, 1, \dots, m-1$, son tales que

$$B_0 = \sum_{i=0}^{s} \xi_i Q_{i,0}$$

$$B_1 = \sum_{i=0}^{s} \xi_i Q_{i,1}$$

$$\vdots$$

$$B_{m-1} = \sum_{i=0}^{s} \xi_i Q_{i,m-1}$$

y, por tanto, pueden ser agrupadas para formar la matriz

$$[B_0 B_1 \dots B_{m-1}] = \sum_{i=0}^{s} \xi_i [Q_{i,0} ; Q_{i,1} ; \dots ; Q_{i,m-1}].$$

Al sustituir (2.15) en esta última expresión se obtiene que

$$[B_0 B_1 \dots B_{m-1}] =$$

$$= \sum_{i=0}^{s} \xi_i [0\ 0 \dots 0\ I] H^i = [0\ 0 \dots 0\ I] \sum_{i=0}^{s} \xi_i H^i = [0\ 0 \dots 0\ I] S(H). \tag{2.16}$$

La expresión (2.16) sugiere que las matrices B_j constituyen la m-ésima fila de una matriz de m^2 bloques $n \times n$, obtenida al aplicar el polinomio anulador S (λ) a la matriz H

$$S(H) = \begin{bmatrix} - & - & . & . & . & - \\ - & - & . & . & . & - \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ - & - & . & . & . & - \\ B_0 & B_1 & . & . & . & B_{m-1} \end{bmatrix}_{mn \times mn}$$

En base a estas observaciones se demuestra el siguiente resultado:

TEOREMA 2.2.—«Dado un polinomio cualquiera

$$T(\lambda) = \sum_{i=0}^{t} \eta_i \lambda^i \in \mathbb{C}[\lambda]$$

y la matriz "compañera" por bloques

$$H = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & I & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & I \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & . & . & . & -A_{m-1} \end{bmatrix}_{mn \times mn}$$

si se cumple que la matriz

$$T(H) = \sum_{i=0}^{t} \eta_i H^i = \begin{bmatrix} B_{0,m-1} & B_{1,m-1} & . & . & . & B_{m-1,m-1} \\ B_{0,m-2} & B_{1,m-2} & . & . & . & B_{m-1,m-2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{0,1} & B_{1,1} & . & . & . & B_{m-1,1} \\ B_0 & B_1 & . & . & . & B_{m-1} \end{bmatrix}_{mn \times mn}$$

es de rango n con B_{m-1} no singular, esto implica que cualquier solución de la ecuación polinómica de grado $m-1$

$$B_{m-1} X^{m-1} + B_{m-2} X^{m-2} + \dots + B_1 X + B_0 = 0 \tag{2.17}$$

es solución de la ecuación polinómica de grado m

$$X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \dots + A_1 X + A_0 = 0. \tag{2.18}$$

Se cumple además que las matrices coeficientes B_j de la ecuación (2.17), satisfacen las mismas expresiones recurrentes (2.9)-(2.11) del teorema anterior».

DEMOSTRACIÓN.—Al realizar una partición de T (H) en cuatro bloques de la forma siguiente:

$$T(H) = \left[\begin{array}{cccc|c} B_{0,m-1} & B_{1,m-1} & \cdots & & B_{m-1,m-1} \\ B_{0,m-2} & B_{1,m-2} & \cdots & & B_{m-1,m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ B_{0,1} & B_{1,1} & \cdots & & B_{m-1,1} \\ \hline B_0 & B_1 & \cdots & & B_{m-1} \end{array}\right]$$

y bajo la hipótesis de que T (H) es de rango n con B_{m-1} no singular, se cumple de modo equivalente, Gantmacher [2], pág. 47, que

$$\begin{bmatrix} B_{0,m-1} & B_{1,m-1} & \cdot & \cdot & B_{m-2,m-1} \\ B_{0,m-2} & B_{1,m-2} & \cdot & \cdot & B_{m-2,m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{0,1} & B_{1,1} & \cdot & \cdot & B_{m-2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{m-1,m-1} \\ B_{m-1,m-2} \\ \cdot \\ B_{m-1,1} \end{bmatrix} B_{m-1}^{-1} \, [B_0 \, B_1 \ldots B_{m-2}]. \tag{2.19}$$

A partir de (2.19) se deducen las expresiones siguientes:

$$B_{j,h} = B_{m-1,h} B_{m-1}^{-1} B_j \qquad \begin{array}{l} j = 0, 1, \ldots, m-2 \\ h = m-1, m-2, \ldots, 1 \end{array} \tag{2.20}$$

Si X es una solución cualquiera de la ecuación polinómica (2.17)

$$\sum_{j=0}^{m-1} B_j X^j = 0 \tag{2,21}$$

se demuestra, a continuación, que X también satisface las $m-1$ ecuaciones polinómicas siguientes:

$$\sum_{j=0}^{m-1} B_{j,h} X^j = 0 \quad h = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Para ello se premultiplica (2.21) por la matriz $B_{m-1,h}B_{m-1}^{-1}$ y luego se sustituyen las expresiones (2.20), con lo que se obtiene

$$\sum_{j=0}^{m=1} B_{m-1,h}B_{m-1}^{-1} \quad B_j X^j = 0$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} B_{j,h} X^j = 0 \tag{2.22}$$

cualquiera que sea $h = 1, 2, \dots, m-1$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que las matrices H y T (H) conmutan entre sí

$$T(H) \cdot H = H \cdot T(H)$$

se obtienen las siguientes relaciones, como resultado de igualar los bloques que componen la última fila de T (H) · H con los bloques que componen la última fila de H · T (H)

$$\begin{array}{rl}
-B_{m-1}A_0 & = -A_0B_{0,m-1} - A_1B_{0,m-2} - \dots - A_{m-2}B_{0,1} - A_{m-1}B_0 \\
B_0 - B_{m-1}A_1 & = -A_0B_{1,m-1} - A_1B_{1,m-2} - \dots - A_{m-2}B_{1,1} - A_{m-1}B_1 \\
\cdot & \\
\cdot & \\
B_{m-3} - B_{m-1}A_{m-2} & = -A_0B_{m-2,m-1} - A_1B_{m-2,m-2} - \dots - A_{m-2}B_{m-2,1} - A_{m-1}B_{m-2} \\
B_{m-2} - B_{m-1}A_{m-1} & = -A_0B_{m-1,m-1} - A_1B_{m-1,m-2} - \dots - A_{m-2}B_{m-1,1} - A_{m-1}B_{m-1}
\end{array}$$

A partir de estas expresiones se deduce que

$$\begin{array}{rl}
A_{m-1}B_0 & = -A_0B_{0,m-1} - A_1B_{0,m-2} - \dots - A_{m-2}B_{0,1} + B_{m-1}A_0 \\
A_{m-1}B_1 & = -A_0B_{1,m-1} - A_1B_{1,m-2} - \dots - A_{m-2}B_{1,1} + B_{m-1}A_1 - B_0 \\
\cdot & \\
\cdot & \\
A_{m-1}B_{m-2} & = -A_0B_{m-2,m-1} - A_1B_{m-2,m-2} - \dots - A_{m-2}B_{m-2,1} + B_{m-1}A_{m-2} - B_{m-3} \\
A_{m-1}B_{m-1} & = -A_0B_{m-1,m-1} - A_1B_{m-1,m-2} - \dots - A_{m-2}B_{m-1,1} + B_{m-1}A_{m-1} - B_{m-2}
\end{array}$$

o análogamente

$$A_{m-1}B_j = B_{m-1}A_j - \sum_{h=1}^{m-1} A_{m-h-1}B_{j,h} - B_{j-1} \tag{2.23}$$

para $j = 0, 1, \dots, m-1$ con el convenio de que $B_{-1} = 0$.

A partir de estas últimas relaciones puede demostrarse que si X es solución de la ecuación polinómica de grado $m-1$, (2.17), también satisface la ecuación polinómica de grado m, (2.18). Para ello se expresa (2.17) de la forma

$$\sum_{j=0}^{m-1} B_j X^j = 0. \tag{2.24}$$

Premultiplicando por la matriz A_{m-1} y sustituyendo, a continuación, las relaciones (2.23) se obtiene

$$\sum_{j=0}^{m-1} A_{m-1} B_j X^j = 0$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(B_{m-1} A_j - \sum_{h=1}^{m-1} A_{m-h-1} B_{j,h} - B_{j-1} \right) X^j = 0.$$

Separando del anterior sumatorio el término correspondiente a $j = 0$

$$B_{m-1} A_0 - \sum_{h=1}^{m-1} A_{m-h-1} B_{0,h} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m-1} \left(B_{m-1} A_j - \sum_{h=1}^{m-1} A_{m-h-1} B_{j,h} - B_{j-1} \right) X^j = 0. \tag{2.25}$$

Puesto que X también es solución de las ecuaciones (2.22), se verifica que

$$B_{0,h} = - \sum_{j=1}^{m-1} B_{j,h} X^j \tag{2.26}$$

para $h = 1, 2, \ldots, m-1$. Al sustituir (2.26) en (2.25) resulta

$$B_{m-1} A_0 - \sum_{h=1}^{m-1} A_{m-h-1} \left(- \sum_{j=1}^{m-1} B_{j,h} X^j \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m-1} B_{m-1} A_j X^j - \sum_{j=1}^{m-1} \left(\sum_{h=1}^{m-1} A_{m-h-1} B_{j,h} \right) X^j - \sum_{j=1}^{m-1} B_{j-1} X^j = 0$$

o de modo equivalente

$$B_{m-1} A_0 + \sum_{h=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} A_{m-h-1} B_{j,h} X^j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m-1} B_{m-1} A_j X^j - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{h=1}^{m-1} A_{m-h-1} B_{j,h} X^j - \sum_{j=1}^{m-1} B_{j-1} X^j = 0. \quad (2.27)$$

Postmultiplicando (2.24) por X se deduce que

$$B_{m-1} X^m = - \sum_{j=1}^{m-1} B_{j-1} X^j.$$

Al sustituir esta última expresión en (2.27), y teniendo en cuenta que los dos sumatorios dobles que intervienen en la misma se eliminan entre sí, se verifica que

$$B_{m-1} A_0 + \sum_{j=1}^{m-1} B_{m-1} A_j X^j + B_{m-1} X^m = 0$$

$$B_{m-1} (X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \ldots + A_1 X + A_0) = 0.$$

Finalmente, premultiplicando por B_{m-1}^{-1}, se concluye que

$$X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \ldots + A_1 X + A_0 = 0$$

como se quería demostrar.

Una vez que ha sido demostrado el resultado recíproco al del teorema 2.1, interesa averiguar la relación existente entre la clase S (λ) de polinomios anuladores de matrices solución de la ecuación polinómica de grado m y la clase T (λ) de polinomios que verifican las condiciones del teorema 2.2.

III. La clase de polinomios T (λ)

Se demuestra en esta sección que la clase de polinomios T (λ) está contenida en la clase de polinomios S (λ). Con este objetivo se prueba el siguiente lema:

LEMA 3.1.—«Dada una solución cualquiera X de la ecuación polinómica de grado m

$$X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \dots + A_1 X + A_0 = 0 \tag{3.1}$$

se verifica para las matrices

$$H = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & I \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & . & . & -A_{m-2} & -A_{m-1} \end{bmatrix}_{mn \times mn} \tag{3.2}$$

y

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ X & I & 0 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ X^{m-2} & X^{m-3} & X^{m-4} & . & . & I & 0 \\ X^{m-1} & X^{m-2} & X^{m-3} & . & . & X & I \end{bmatrix}_{mn \times mn} \tag{3.3}$$

que

$$J^{-1} H J = M \tag{3.4}$$

siendo

$$M = \left[\begin{array}{c|cccccc} X & I & 0 & . & . & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & I \\ 0 & -M_1(X) & -M_2(X) & . & . & -M_{m-2}(X) & -M_{m-1}(X) \end{array}\right]_{mn \times mn} \tag{3.5}$$

y donde

$$\begin{array}{lr} M_1 (X) = X^{m-1} + A_{m-1} X^{m-2} + \dots + A_1 & (1) \\ M_2 (X) = X^{m-2} + A_{m-1} X^{m-3} + \dots + A_2 & (2) \\ & \\ M_{m-1} (X) = X \quad + A_{m-1} & (m-1) \end{array} \tag{3.6}$$

DEMOSTRACIÓN.—A partir de las expresiones de las matrices H y J, (3.2) y (3.3), respectivamente, se cumple que

$$
\mathrm{H\,J} = \begin{bmatrix} X & I & 0 & \cdot\ \cdot & 0 & 0 \\ X^2 & X & I & \cdot\ \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X^{m-1} & X^{m-2} & X^{m-3} & \cdot\ \cdot & X & I \\ -N_0(X) & -N_1(X) & -N_2(X) & \cdot\ \cdot & -N_{m-2}(X) & -N_{m-1}(X) \end{bmatrix} \tag{3.7}
$$

siendo

$$
\begin{array}{lll}
N_0\ (X) = A_{m-1} X^{m-1} + A_{m-2} X^{m-2} + \dots + A_2 X^2 + A_1 X + A_0 & (0) & \\
N_1\ (X) = A_{m-1} X^{m-2} + A_{m-2} X^{m-3} + \dots + A_2 X + A_1 & (1) & \\
N_2\ (X) = A_{m-1} X^{m-3} + A_{m-2} X^{m-4} + \dots + A_2 & (2) & (3.8) \\
\cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \\
N_{m-1}(X) = A_{m-1} & (m-1) &
\end{array}
$$

Si X es solución de la ecuación polinómica (3.1), es evidente a partir de (3.8)-(0) que

$$
N_0(X) = -X^m \tag{3.9}
$$

mientras que a partir de las expresiones (3.6)-(j) y (3.8)(j) resulta

$$
N_j(X) = M_j(X) - X^{m-j} \tag{3.10}
$$

para $j = 1, 2, \dots, m-1$. Sustituyendo (3.9)-(3.10) en (3.7) y teniendo en cuenta la expresión de la matriz M, (3.5), se deduce que

$$
\mathrm{H\,J} = \\
= \begin{bmatrix} X & I & 0 & \cdot\ \cdot & 0 & 0 \\ X^2 & X & I & \cdot\ \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X^{m-1} & X^{m-2} & X^{m-3} & \cdot\ \cdot & X & I \\ X^m & X^{m-1} - M_1(X) & X^{m-2} - M_2(X) & \cdot\ \cdot & X^2 - M_{m-2}(X) & X - M_{m-1}(X) \end{bmatrix} = \\
= \mathrm{J\,M} \tag{3.11}
$$

Premultiplicando (3.11) por J^{-1} se obtiene finalmente

$$
J^{-1}\,H\,J = M.
$$

A partir del lema anterior se demuestran los resultados siguientes:

PROPOSICIÓN 3.1.—«Los valores propios de una matriz solución cualquiera X de la ecuación polinómica de grado m, (3.1), son también valores propios de la matriz "compañera" por bloques H asociadas a (3.1)».

DEMOSTRACIÓN.—Sea X una solución cualquiera de (3.1). Teniendo en cuenta la relación de semejanza (3.4) y la estructura triangular por bloques de la matriz M, (3.5), se verifica que

$$\det(\lambda I - M) = \det(\lambda I - H) \tag{3.12}$$

$$\det(\lambda I - M) = \det(\lambda I - X)\det(\lambda I - G) \tag{3.13}$$

siendo G la matriz «compañera» por bloques

$$G = \begin{bmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & I \\ -M_1(X) & -M_2(X) & \cdots & -M_{m-1}(X) \end{bmatrix}_{(m-1)n \times (m-1)n}$$

A partir de (3.12) y (3.13) se deduce que

$$\det(\lambda I - H) = \det(\lambda I - X) \cdot \det(\lambda I - G).$$

PROPOSICIÓN 3.2.—«Si el polinomio

$$T(\lambda) = \sum_{i=0}^{t} \eta_i \lambda^i \in \mathbb{C}[\lambda]$$

es tal que, al aplicarlo a la matriz «compañera» por bloques H, (3.2), la matriz que se obtiene

$$T(H) = \begin{bmatrix} B_{0,m-1} & B_{1,m-1} & \cdots & B_{m-2,m-1} & B_{m-1,m-1} \\ B_{0,m-2} & B_{1,m-2} & \cdots & B_{m-2,m-2} & B_{m-1,m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \\ B_{0,1} & B_{1,1} & \cdots & B_{m-2,1} & B_{m-1,1} \\ B_0 & B_1 & \cdots & B_{m-2} & B_{m-1} \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

es de rango n con B_{m-1} no singular, esto implica que $T(\lambda)$ es un polinomio anulador de alguna matriz solución X de

$$X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \dots + A_1 X + A_0 = 0. \tag{3.15}$$

Demostración.—Si el polinomio $T(\lambda)$ es tal que la matriz $T(H)$ es de rango n con B_{m-1} no singular, se cumple, a partir del teorema 2.2, que cualquier solución de la ecuación de grado $m-1$

$$B_{m-1} X^{m-1} + B_{m-2} X^{m-2} + \dots + B_1 X + B_0 = 0 \tag{3.16}$$

es solución de (3.15).

Sea X una matriz solución de (3.16) y, por lo tanto, de (3.15). En virtud del lema 3.1 se verifica que

$$J^{-1} H J = M.$$

Aplicando el polinomio $T(\lambda)$ a los dos miembros de esta igualdad, resulta

$$J^{-1} T(H) J = T(M). \tag{3.17}$$

Teniendo en cuenta las expresiones de las matrices J, $T(H)$, dadas por (3.3), (3.14), respectivamente, se obtiene que

$$T(H)\,J = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{m-1} B_{j,m-1} X^j & - & \cdot & \cdot & - \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{j=0}^{m-1} B_{j,1} X^j & - & \cdot & \cdot & - \\ \sum_{j=0}^{m-1} B_j X^j & - & \cdot & \cdot & - \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

donde, como ha quedado demostrado en el teorema 2.2,

$$\sum_{j=0}^{m-1} B_j X^j = 0 \tag{3.19}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} B_{j,h} X^j = 0 \quad h = 1, 2, \dots, m-1 \tag{3.20}$$

Por otro lado, a partir de la expresión de la matriz M, (3.5), se deduce que

$$T(M) = \begin{bmatrix} T(X) & - & . & . & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & - & . & . & - \\ - & - & . & . & - \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Como resultado de sustituir (3.18)-(3.21) en (3.17) se concluye que

$$T(X) = 0.$$

Una vez que ha sido demostrado que la clase de polinomios T (λ) está contenida en S (λ), se estudia a continuación el problema de la determinación de polinomios anuladores de matrices solución.

IV. La obtención de polinomios anuladores de matrices solución

Con objeto de simplificar los cálculos se considera en esta sección la ecuación polinómica de segundo grado

$$X^2 + A_1 X + A_0 = 0 \tag{4.1}$$

donde las matrices coeficientes $A_i \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $i = 0, 1$.

Sea H la matriz «compañera» por bloques asociada

$$H = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

y X una matriz solución cualquiera de (4.1). Se trata entonces de determinar un polinomio anulador de X, concretamente su polinomio mínimo

$$S(\lambda) = \lambda^p + b_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0, \quad p \leqslant n. \tag{4.2}$$

En virtud de la proposición 3.1, se sabe que la matriz X satisface la ecuación característica de H

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - H) &= \lambda^{2n} + a_{2n-1} \lambda^{2n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \\ X^{2n} &+ a_{2n-1} X^{2n-1} + \dots + a_1 X + a_0 I = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

También se sabe que X satisface su propia ecuación mínima

$$X^{p} + b_{p-1} X^{p-1} + \dots + b_1 X + b_0 I = 0. \tag{4.4}$$

A partir de esta última expresión se deduce que

$$\begin{aligned}
X^{p} &= - b_0 I - b_1 X - \dots - b_{p-1} X^{p-1} = \sum_{j=0}^{p-1} b_j^{(0)} X^j && (0)\\
X^{p+1} &= X^{p} X = - b_0 X - b_1 X^2 - \dots - b_{p-2} X^{p-1} - b_{p-1} X^{p} = \\
&= - b_0 X - b_1 X^2 - \dots - b_{p-2} X^{p-1} - b_{p-1} (- b_0 I - b_1 X - \dots - b_{p-1} X^{p-1}) = \\
&= b_{p-1} b_0 I + (b_{p-1} b_1 - b_0) X + \dots + (b^2_{p-1} - b_{p-2}) X^{p-1} = \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} b_j^{(1)} X^j && (1)\\
&\vdots \\
X^{p+i} &= \sum_{j=0}^{p-1} b_j^{(i)} X^j && (i)\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Los coeficientes $b_j^{(i)}$, $j = 0, 1, \dots, p - 1$; $i = 1, 2, 3, \dots$ pueden ser obtenidos, recurrentemente, a partir de los coeficientes $b_j^{(0)} = - b_j$, $j = 0, 1, \dots, p - 1$. En efecto, a partir de (4.5)-(i) y (4.4) se verifica que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p-1} b_j^{(i)} X^j &= X^{p+i} = X^{p+i-1} X = \left(\sum_{j=0}^{p-1} b_j^{(i-1)} X^j \right) X = \\
&= b_0^{(i-1)} X + b_1^{(i-1)} X^2 + \dots + b_{p-2}^{(i-1)} X^{p-1} + b_{p-1}^{(i-1)} X^{p} = \\
&= b_0^{(i-1)} X + b_1^{(i-1)} X^2 + \dots + b_{p-2}^{(i-1)} X^{p-1} + \\
&+ b_{p-1}^{(i-1)} (- b_0 I - b_1 X - \dots - b_{p-1} X^{p-1}) = - b_{p-1}^{(i-1)} b_0 I + \\
&+ (b_0^{(i-1)} - b_{p-1}^{(i-1)} b_1) X + \dots + (b_{p-2}^{(i-1)} - b_{p-1}^{(i-1)} b_{p-1}) X^{p-1}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Identificando términos en el primer y último miembro de (4.6) se obtiene

$$
\begin{aligned}
b_0^{(i)} &= \qquad\quad - b_{p-1}^{(i-1)}\, b_0 \\
b_1^{(i)} &= b_0^{(i-1)} - b_{p-1}^{(i-1)}\, b_1 \\
&\;\;\vdots \\
b_{p-1}^{(i)} &= b_{p-2}^{(i-1)} - b_{p-1}^{(i-1)}\, b_{p-1}
\end{aligned}
$$

o de modo equivalente

$$
\left.
\begin{aligned}
b_j^{(i)} &= b_{j-1}^{(i-1)} - b_{p-1}^{(i-1)}\, b_j \\
b_j^{(0)} &= -\, b_j
\end{aligned}
\right\} \; j = 0, 1, \ldots, p-1 \tag{4.7}
$$

con el convenio de que $b_{-1}^{(i-1)} = 0$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$

Considerando de nuevo la ecuación (4.3), que puede ser escrita de la forma siguiente:

$$
X^{p+(2n-p)} + \sum_{i=0}^{2n-p-1} a_{p+i}\, X^{p+i} + \sum_{i=0}^{p-1} a_i\, X^i = 0
$$

y al sustituir en ella las expresiones (4.5)-(i), resulta

$$
\sum_{j=0}^{p-1} b_j^{(2n-p)}\, X^j + \sum_{i=0}^{2n-p-1} a_{p+i} \left(\sum_{j=0}^{p-1} b_j^{(i)}\, X^j \right) + \sum_{i=0}^{p-1} a_i\, X^i = 0
$$

$$
\sum_{j=0}^{p-1} \left(b_j^{(2n-p)} + \sum_{i=0}^{2n-p-1} a_{p+i}\, b_j^{(i)} \right) X^j + \sum_{i=0}^{p-1} a_i\, X^i = 0
$$

$$
\sum_{j=0}^{p-1} \left(b_j^{(2n-p)} + \sum_{i=0}^{2n-p-1} a_{p+i}\, b_j^{(i)} + a_j \right) X^j = 0
$$

Con esto se concluye que el polinomio

$$
\sum_{j=0}^{p-1} \left(b_j^{(2n-p)} + \sum_{i=0}^{2n-p-1} a_{p+i}\, b_j^{(i)} + a_j \right) \lambda^j
$$

es un polinomio anulador de X de menor grado que el polinomio mínimo y por tanto tiene que ser el polinomio idénticamente nulo, es decir, se cumple que

$$\left.\begin{array}{l} b_0^{(2n-p)} + \sum_{i=0}^{2n-p-1} a_{p+i}\, b_0^{(i)} + a_0 = 0 \\ b_1^{(2n-p)} + \sum_{i=0}^{2n-p-1} a_{p+i}\, b_1^{(i)} + a_1 = 0 \\ \vdots \\ b_{p-1}^{(2n-p)} + \sum_{i=0}^{2n-p-1} a_{p+i}\, b_{p-1}^{(i)} + a_{p-1} = 0 \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

Este sistema de ecuaciones caracteriza a los coeficientes b_j, $j = 0, 1, \ldots, p - 1$. Se trata de un sistema de p ecuaciones con p incógnitas $b_0, b_1, \ldots, b_{p-1}$. Es fácil comprobar, a partir de las fórmulas de recurrencia (4.7), que cada una de las ecuaciones de (4.8) es polinómica en $b_0, b_1, \ldots, b_{p-1}$ y en general de grado $p + 1$. El procedimiento descrito se ilustra con el siguiente ejemplo:

V. Ejemplo

Se considera la ecuación matricial polinómica de segundo grado

$$X^2 + A_1 X + A_0 = 0 \tag{5.1}$$

siendo

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \qquad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de la matriz «compañera» por bloques asociada

$$H = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

viene dado por

$$\det(\lambda I - H) = \lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24$$

de donde

$$a_3 = -10, \quad a_2 = 35, \quad a_1 = -50, \quad a_0 = 24. \tag{5.2}$$

Sea

$$S(\lambda) = \lambda^2 + b_1\lambda + b_0$$

el polinomio mínimo de una matriz solución X de (5.1). A partir de (4.7), (4.8) y (5.2) se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} b^2_0 - b^2_1 b_0 - 35 b_0 - 10 b_1 b_0 + 24 = 0 \\ 2 b_0 b_1 - b^3_1 - 35 b_1 + 10 b_0 - 10 b^2_1 - 50 = 0 \end{array}\right\}$$

que define a los coeficientes b_1, b_0. Dicho sistema admite las soluciones

$$(b_1, b_0) : (-4, 3), (-6, 8), (-3, 2), (-5, 4), (-5, 6), (-7, 12)$$

que dan lugar al siguiente conjunto de polinomios:

$$S(\lambda) : \lambda^2 - 4\lambda + 3, \quad \lambda^2 - 6\lambda + 8, \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2, \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4,$$
$$\lambda^2 - 5\lambda + 6, \quad \lambda^2 - 7\lambda + 12. \tag{5.3}$$

Utilizando, a continuación, los resultados del teorema 2.1 se calculan las matrices $Q_{i,j}$, $i = 0, 1, 2$; $j = 0, 1$. Para ello se aplican las fórmulas recurrentes (2.10)-(2.11) con lo que se obtiene

$$\begin{array}{ll} Q_{0,0} = 0 & Q_{0,1} = I \\ Q_{1,0} = -A_0 & Q_{1,1} = -A_1 \\ Q_{2,0} = A_1 A_0 & Q_{2,1} = -A_0 + A^2_1 \end{array}$$

Cada uno de los polinomios (5.3) que es del tipo

$$S(\lambda) = \sum_{i=0}^{2} \xi_i \lambda^i$$

da lugar a una ecuación matricial polinómica de primer grado

$$B_1 X + B_0 = 0$$

donde B_1, B_0, vienen dadas, según (2.9), por las expresiones

$$B_1 = \sum_{i=0}^{2} \xi_i Q_{i,1}$$

$$B_0 = \sum_{i=0}^{2} \xi_i Q_{i,0}$$

Efectuando dichas operaciones se obtienen las siguientes ecuaciones de primer grado:

1) $S(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$, $B_1 X + B_0 = 0$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -12 & 24 \\ -10 & 22 \end{bmatrix} \qquad B_0 = \begin{bmatrix} 12 & -48 \\ 10 & -46 \end{bmatrix}$$

2) $S(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8$, $B_1 X + B_0 = 0$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \qquad B_0 = \begin{bmatrix} 12 & -24 \\ 6 & -18 \end{bmatrix}$$

3) $S(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, $B_1 X + B_0 = 0$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -12 & 30 \\ -12 & 30 \end{bmatrix} \qquad B_0 = \begin{bmatrix} 12 & -60 \\ 12 & -60 \end{bmatrix}$$

4) $S(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$, $B_1 X + B_0 = 0$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -12 & 18 \\ -8 & 14 \end{bmatrix} \qquad B_0 = \begin{bmatrix} 12 & -36 \\ 8 & -32 \end{bmatrix}$$

5) $S(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$, $B_1 X + B_0 = 0$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -10 & 18 \\ -8 & 16 \end{bmatrix} \qquad B_0 = \begin{bmatrix} 12 & -36 \\ 8 & -32 \end{bmatrix}$$

6) $S(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 12$, $B_1 X + B_0 = 0$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_0 = \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar que salvo la última ecuación, que es incompatible, las cinco restantes proporcionan matrices solución de (5.1) que se obtienen sin más que resolver la correspondiente ecuación de primer grado y que son, respectivamente:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad X_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X_5 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

VI. Conclusiones

Ha sido expuesto en este trabajo un nuevo método de resolución de ecuaciones matriciales polinómicas. La idea básica ha consistido en reducir, de unidad en unidad, el grado de la ecuación polinómica hasta obtener finalmente, una ecuación de primer grado. Esta reducción del grado de la ecuación inicial, se realiza mediante la aplicación de polinomios anuladores de matrices solución. Se puede decir que el procedimiento desarrollado conduce a la «deflación» de una ecuación polinómica ya que permite reducir el grado de la misma de unidad en unidad. En el dominio de las ecuaciones polinómicas escalares se entiende por «deflación» el proceso de reducción del grado de la ecuación a partir de una raíz conocida, eliminando mediante división dicha raíz. En el dominio matricial no es posible, en general, factorizar un polinomio de grado m en producto de dos polinomios, uno de grado $m - 1$ y otro de primer grado, debido a la no conmutatividad del producto ordinario de matrices. Por consiguiente, el sentido que aquí se da al término «deflación» es completamente distinto al que se utiliza en el caso escalar, ya que no se trata de eliminar sino de obtener una solución, separándola de las restantes soluciones del problema.

Por último, interesa destacar que en la bibliografía consultada relativa al problema de la resolución de una ecuación matricial polinómica general de grado m, Gantmacher [2] págs. 230-234, Mac Duffee [3] págs. 89-97, Roth [4], el procedimiento que se utiliza es el de transformación a la forma canónica de Jordán de la matriz incógnita X. Mediante esta aproximación se recae en una ecuación matricial lineal no unilateral del tipo

$$C_1 X D_1 + C_2 X D_2 + \dots + C_m X D_m = E$$

cuya resolución presenta serios problemas computacionales.

Referencias

[1] LANCASTER, P. (1966). Lambda-Matrices and Vibrating Systems. Ed. Pergamon Press, New York.

[2] GANTMACHER, F. R. (1966). Théorie des Matrices, tome 1. Ed. Dunod, París.

[3] MAC DUFFEE, C. C. (1946). The Theory of Matrices. Ed. Chelsea, New York.

[4] ROTH, W. E. (1930). On the unilateral equation in matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 32, págs. 61-80.