NOTA SOBRE EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS EN EL PRODUCTO CARTESIANO DE DOS ESPACIOS COMPACTOS

Aníbal Moltó (*)

Recibido: 4 marzo 1981

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

In this note it is shown that if K_1 and K_2 are infinite compact topological spaces there exists a subspace of $C(K_1 \times K_2)$ isomorphic to c_0 and complemented in $C(K_1 \times K_2)$ (so $C(K_1 \times K_2)$ is not isomorphic to the conjugate space of a Banach space). From this it is obtained a wide class of compact topological spaces such that $C(K)$ is not isomorphic to $C(K \times K)$.

En este artículo los números naturales y reales son representados por $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ respectivamente, $\mathbb{K}$ será el cuerpo de los números reales o complejos. Todos los espacios topológicos usados aquí serán de Hausdorff. Dado un espacio topológico compacto K, C (K) y $\mathfrak{M}$ (K) son los espacios de Banach de las funciones continuas y las medidas de Borel regulares sobre K, con valores en $\mathbb{K}$, dotados de la norma supremo y variación total respectivamente. Como es usual escribiremos c_0 para el espacio de Banach de las sucesiones en $\mathbb{K}$ convergentes a cero, con la norma supremo.

La topología débil sobre E correspondiente al par dual (E, F) se denota por σ (E, F). Recordemos que un espacio de Banach X es un espacio de Grothendieck o G-espacio si y sólo si las sucesiones σ (X', X)-convergentes en el dual X' son σ (X', X'')-convergentes; por extensión diremos que un espacio topológico compacto K es G-espacio si y sólo si C (K) es un G-espacio.

(*) Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia, que dirige el profesor Dr. M. Valdivia.

TEOREMA 1.—Sean K_1 y K_2 dos espacios topológicos compactos infinitos tales que $C(K_1)$ y $C(K_2)$ son G-espacios, entonces $C(K_1 \times K_2)$ no es un G-espacio.

DEMOSTRACIÓN.—Si K_1 no contuviese ningún subespacio denso en sí mismo infinito (1) existiría en K_1 una sucesión $\{a_m\}$ convergente y $a_m \neq a_n$ si $m \neq n$ (ver la prueba del lema 3.2 de [5]), lo que contradice que K_1 sea G-espacio ([3]). Por tanto en $\mathfrak{M}(K_1)$ debe existir un subespacio isomorfo a $L^1([0, 1])$ (ver [5]), entonces podemos encontrar una sucesión $\{\mu_n\}$ en $\mathfrak{M}(K_1)$ que converge débilmente a cero y $\|\mu_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$ (ya que en $L^1([0, 1])$ existe una sucesión débil-convergente a cero y que no converge en norma (ver 13.43 de [2])).

Sea N un subespacio de K_2 homeomorfo a $\mathbb{N}$ ([1]), se define

$$F_n = K_1 \times \}n\{, \quad n \in N, \quad (F_n \subset K_1 \times K_2).$$

Si $P_1 \colon K_1 \times K_2 \longrightarrow K_1$ es la proyección $P_1(x, y) = x$, y $\mathcal{B}(K_1 \times K_2)$ son los Borelianos de $K_1 \times K_2$, consideremos la sucesión $\{\lambda_n\}$ en $\mathfrak{M}(K_1 \times K_2)$ definida por

$$\lambda_n(E) = \mu_n(P_1(E \cap F_n)), \quad E \in \mathcal{B}(K_1 \times K_2).$$

Veremos que la sucesión $\{\lambda_n\}$ es $\sigma(\mathfrak{M}(K_1 \times K_2), C(K_1 \times K_2))$-convergente a cero y que no es débil-convergente.

El álgebra $\mathcal{A}$ engendrada por los conjuntos de la forma $A_1 \times A_2$, donde A_i es un Boreliano de K_i, $i = 1, 2$, es una subálgebra de los Borelianos de $K_1 \times K_2$ que contiene una base de abiertos de $K_1 \times K_2$. Con argumentos similares a los de la demostración de 26.2 de [4] se llega a que dada $f \in C(K_1 \times K_2)$ y $\varepsilon > 0$ existen

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\,; \quad E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$$

de modo que

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x) \right| < \varepsilon, \quad x \in K_1 \times K_2$$

(1) Recordemos que un espacio topológico es denso en sí mismo si y sólo si no tiene puntos aislados.

siendo χ_E la función característica de E_i. Según la desigualdad anterior y puesto que $\{\lambda_n\}$ es acotada, para mostrar que $\{\lambda_n\}$ es $\sigma(\mathfrak{M}(K_1 \times K_2), C(K_1 \times K_2))$-convergente a cero será suficiente comprobar que

$$\lim_n \lambda_n(E) = 0 \quad \text{si} \quad E \in \mathcal{A}.$$

Dado un E de $\mathcal{A}$ existen $\{A^i{}_j\}_{j=1}^n$, $i = 1, 2$, Borelianos de K_i tales que

$$(A^1{}_j \times A^2{}_j) \cap (A^1{}_k \times A^2{}_k) = \emptyset \quad \text{si} \quad j \neq k$$

$$E = \bigsqcup_{j=1}^{n} (A^1{}_j \times A^2{}_j)$$

por tanto bastará mostrar que

$$\lim \lambda_n (A_1 \times A_2) = 0$$

siendo A_i un Boreliano de K_i, $i = 1, 2$. Tenemos que

$$\lambda_n (A_1 \times A_2) = \mu_n (A_1)$$

si $n \in A_2$ y

$$\lambda_n (A_1 \times A_2) = \mu_n (\emptyset)$$

si $n \notin A_2$; en cualquier caso el límite anterior es cero puesto que $\{\mu_n\}$ es débil-convergente a cero.

Como $\| \mu_n \| = 1$ existirá un Boreliano V_n en K_1 tal que

$$| \mu_n (V_n) | \geq 1/8,$$

tomemos el Boreliano

$$V = \bigsqcup_{n \in N} (V_n \times \{n\})$$

tendremos

$$| \lambda_n (V) | = | \mu_n (P_1 (V \cap F_n)) | = | \mu_n (V_n) | \geq 1/8,$$

por tanto $\{\lambda_n\}$ no es débil-convergente.

Corolario 1.1.—Sean K_1 y K_2 dos espacios topológicos compactos infinitos, existe un subespacio de $C(K_1 \times K_2)$ que es linealmente isométrico a c_0 y está suplementado en $C(K_1 \times K_2)$, por tanto

$C(K_1 \times K_2)$ no es isomorfo al dual de ningún espacio de Banach.

DEMOSTRACIÓN.—Veamos que $K_1 \times K_2$ no es un G-espacio, si K_1 y K_2 lo son la afirmación se deduce del teorema anterior; si por ejemplo K_1 no fuese un G-espacio, $K_1 \times K_2$ tampoco lo sería porque un subespacio cerrado de un G-espacio es un G-espacio [3]. Como $K_1 \times K_2$ no es un G-espacio de [6] se deduce que $C(K_1 \times K_2)$ debe contener un subespacio que es linealmente isométrico a c_0 y está suplementado en $C(K_1 \times K_2)$.

A. Pelczyński ha mostrado que si K es un espacio topológico compacto y C (K) es isomorfo al dual de un espacio de Banach entonces C (K) es inyectivo (2) y por tanto G-espacio, [3], entonces la segunda parte es consecuencia de este hecho y del teorema 1.

COROLARIO 1.2.—Si el espacio topológico compacto K es un G-espacio infinito (o en particular un F-espacio ([1]) compacto infinito) entonces C (K) no es isomorfo a $C(K \times K)$.

DEMOSTRACIÓN.—Si K es un G-espacio todo espacio de Banach que sea un cociente de C (K) es un G-espacio ([3]), por tanto C (K) no contiene ningún subespacio suplementado isomorfo a c_0; entonces del corolario 1.1 resulta que $C(K \times K)$ no es isomorfo a C (K). La afirmación para F-espacios es consecuencia de que en [7] se prueba que todo F-espacio compacto es un G-espacio.

NOTA.—Según un resultado de A. A. Miljutin, si K es un espacio métrico compacto no numerable $C(K \times K)$ es isomorfo a C (K), [8].

Bibliografía

[1] GILLMAN, L. y JERISON, J. (1960). Rings of Continuous Functions. Van Nostrand Reinhold Company (Londres).

[2] HEWITT, E. y STROMBERG, K. (1969). Real and Abstract Analysis. Springer-Verlag. 2.ª edición (Berlin-Heidelberg-New York).

[3] ISBELL, J. R. y SEMADENI, Z. (1963). Projection constants and spaces of continuous functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **107**, 38-48.

(2) Como es usual diremos que un espacio de Banach X es inyectivo si y sólo si está suplementado en todo espacio de Banach Y del cual X sea un subespacio.

[4] JAMESON, G. J. O. (1974). Topology and Normed Spaces. Chapman and Hall (Londres).
[5] ROSENTHAL, H. P. (1969). On Quasi-Complemented Subspaces of Banach Spaces, With an Appendix on Compactness of Operators from $L^p(\mu)$ to $L^r(\nu)$. *Journal of Functional Analysis*, **4**, 176-214.
[6] SCHACHERMAYER, W. On some Classical Measure-Theoretic Theorems for non-σ-complete Boolean Algebras. (Pendiente de publicación.)
[7] SEEVER, G. L. (1968). Measures on F-spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **133**, 267-280.
[8] SEMADENI, Z. (1971). Banach spaces of continuous functions. *Monografie Matematiczne*, vol. 55 (Varsovia).