# LA COMPLETA REGULARIDAD DE UN ESPACIO TOPOLOGICO NO ES UNA PROPIEDAD LOCAL

J. L. Llorens, V. Serra y E. Tarazona (*)

Recibido: 5 marzo 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. DARÍO MARAVALL CASESNOVES

M. López and M. Valdivia have obtained in [3] and [4] completely regular topological spaces whose associated $k$-spaces are not regular. Here we prove that these $k$-spaces are such that every point admits a neighbourhood which, endowed with the induced topology, is completely regular.

J. L. Blasco ha probado en [1], tras el lema, que un espacio topológico regular, en que cada punto tenga un entorno completamente regular, es completamente regular. Vamos a demostrar que no se puede prescindir de la regularidad en esta proposición, utilizando los ejemplos de M. López Pellicer y de M. Valdivia dados en [3] y [4]. Se reproduce a continuación, en parte, el ejemplo de M. Valdivia para facilitar la lectura de este artículo.

EJEMPLO.—Sea $\omega_0$ el primer ordinal infinito, $\omega_1$ el primer ordinal de cardinal no numerable y $(E, \mathcal{U})$ el espacio topológico producto de $([1\ \omega_1[\ \mathcal{T}_{\leq})$ por $([1\ \omega_0]\ \mathcal{T}'_{\leq})$, donde $\mathcal{T}_{\leq}$ y $\mathcal{T}'_{\leq}$ son las topologías correspondientes al buen orden usual en los ordinales.

Si $\alpha$ es un ordinal límite de $[1, \omega_1[$, entonces, por definición de $\omega_1$ existe una sucesión $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ estrictamente creciente y $\mathcal{T}_{\leq}$-conver-

---

(*) Este trabajo ha sido realizado en la Cátedra de Matemáticas de la E. T. S. I. Agrónomos de la Universidad Politécnica de Valencia, bajo la dirección del profesor Dr. M. López Pellicer, a quien agradecemos su constante ayuda.

gente a $\alpha$. La sucesión de puntos aislados $\{\alpha_n = \beta_n + 1\}_{n=1}^{\infty}$ es también estrictamente creciente y $\mathcal{T}_{\leq}$-convergente a $\alpha$. Sea

$$A_{\alpha p} = \{ (\delta, p) \in E : \alpha_p \leq \delta \leq \alpha \} \quad y \quad U_{\alpha n} = \{ (\alpha, \omega_0) \} \cup \left\{ \bigcup_{p=n}^{\infty} A_{\alpha p} \right\}.$$

En $(E, \mathcal{U})$ es $U_{\alpha n}$ compacto y $U_{\alpha n} - \{(\alpha\ \omega_0)\}$ abierto.

Sea J la topología en E que tiene por subbase a los abiertos de $\mathcal{U}$ y a los conjuntos $\mathcal{U}_{\alpha n}$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $\alpha$ un ordinal límite cualquiera de $[1\ \omega_1[$. (E, J) es completamente regular, pues $(E, \mathcal{U})$ es un espacio topológico compacto y $U_{\alpha n}$ es J-abierto y J-cerrado, cualquiera que sea $n = 1, 2, 3, \ldots$ y cualquiera que sea el ordinal límite $\alpha \in [1\ \omega_1[$. Además, por el teorema de Alexander (2, capítulos 5, 6) se deduce que los conjuntos $U_{\alpha n}$ son J-compactos, pues si $(A_i, i \in I)$ es un recubrimiento de $U_{\alpha n}$ formado por J.abiertos de la subbase considerada se puede extraer un subcubrimiento finito, ya que si $(\alpha, \omega_0) \in A_{i_0}$ existe un $n_0$ tal que

$$U_{\alpha n} - A_{i_0} \subset U_{\alpha n} \cap [[1, \omega_1] \times [1, n_0]] = M \quad y \quad \{ A_i - \{ (\alpha, \omega_0) \}, \quad i \in I \}$$

es un cubrimiento de $\mathcal{U}$-abiertos del $\mathcal{U}$-compacto M. Por tanto, el subespacio topológico de $(E, \mathcal{J})$ de conjunto soporte $E - \{(\omega_1, \omega_0)\}$ es localmente compacto.

Se tiene que J y su $k$-topología asociada $J_k$ (2, pág. 274, K) coinciden en los subconjuntos J-compactos de (E, J), por lo que las restricciones de J y $J_k$ a $E - \{(\omega_1, \omega_0)\}$ son iguales. Se tiene, pues, que $E - \{(\omega_1, \omega_0)\}$ es un $J_k$-abierto, que con la topología inducida por $J_k$ es localmente compacto, y, por tanto, completamente regular.

Si V es un $J_k$-entorno abierto de $(\omega_1, \omega_0)$ podemos determinar dos ordinales

$$\alpha_I \in [1\ \omega_1] \quad y \quad n_I \in [1\ \omega_0]$$

tales que

$$([\alpha_I, \omega_1] \times [n_I, \omega_0[) \cup \{ (\omega_1, \omega_0) \} \subset V \tag{1}$$

pues en los subespacios compactos de (E, J) de conjuntos soportes

$$\{ \omega_1 \} \times [1, \omega_0] \quad y \quad [1, \omega_1] \times \{ n \}, \quad n \in [1, \omega_0]$$

coinciden J y $J_k$, por lo que existirá un ordinal $n_I$ tal que $\{\omega_1\} \times$ $\times [n_I, \omega_0] \subset V$ y para cada $n \in [n_I, \omega_0[$ existirá un ordinal $\alpha_n \in$ $\in [1, \omega_1[$ tal que

$$[\alpha_0, \omega_1] \times \{n\} \subset V.$$

Se verifica (1) con

$$\alpha_I = \sup \{\alpha_n, \quad n \in [n_I, \omega_0[\}.$$

Las topologías J y $J_k$ coinciden pues en $E - \{[1 \omega_1[ \times \{\omega_0\}\}$, por (1) y por la coincidencia ya establecida en $E - \{(\omega_1, \omega_0\}$. Por tanto, $E - \{[1, \omega_1[ \times \{\omega_0\}\}$, provisto con la topología inducida por $J_k$, es completamente regular. El conjunto $E - \{[1, \omega_1[ \times \{\omega_0\}\}$ es, además, $J_k$-abierto, pues J induce en $\{[1, \omega_1[ \times \{\omega_0\}\}$ la topología discreta, por lo que $\{[1, \omega_1[ \times \{\omega_0\}\}$ es $J_k$-cerrado.

Cada punto de $(E, J_k)$ tiene un entorno completamente regular. En [4] se prueba que $(E, J_k)$ no es regular, pues es absurdo suponer que W es un $J_k$-entorno cerrado de $(\omega_1, \omega_0)$ contenido en $E - \{[1, \omega_1[ \times \{\omega_0\}\}$, pues si V es un $J_k$-entorno abierto de $(\omega_1, \omega_0)$ contenido en W se deduce de (1) que $(n_I, \omega_0) \in \overline{V}$, en tanto que $(n_I, \omega_0)$ no puede pertenecer a W, ya que

$$(n_I, \omega_0) \in E - \{[1, \omega_1[ \times \{\omega_0\}\}.$$

NOTA 1.—Análogamente se prueba que en el $k$-espacio no completamente regular $k - \mathcal{R}$ determinado en [3] cada punto posee un entorno completamente regular. El lema dado en [1] implica que $k - \mathcal{R}$ no es regular.

NOTA 2.—Siguiendo el método dado en [3], y las notaciones del ejemplo, vamos a indicar otra topología completamente regular $J^1$ en E, más fina que J, que como en el ejemplo se puede demostrar que no es regular su $k$-topología asociada $J^1_k$, y que cada punto de $(E, J^1_k)$ posee un entorno completamente regular.

Consideremos las funciones $f_\alpha$, siendo $\alpha$ un ordinal límite de $[1, \omega_1[$, definidas así:

$$f_\alpha((\alpha, n)) = 1 \qquad n \in [1, \omega_0]$$

$$f_\alpha((\beta, n)) = \frac{h}{h+n} \quad \text{si} \quad \beta \in [\alpha_h, \alpha_{h+1}[, \; h = 1, 2, 3, \ldots, \quad n \in [1, \omega_0]$$

y $f_\alpha$ es cero en los restantes puntos de E. Sea $J^1$ la mínima topología más fina que $\mathcal{U}$, que hace continuas todas las funciones $f$. Es evidente que $J^1$ es completamente regular.

Se tiene que $J^1$ es estrictamente más fina que J, pues

$$U_{\alpha n} = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right[\right) \cap \{[\alpha_n, \alpha] \times [n, \omega_0]\} \quad \text{y} \quad \{(\alpha_n, n)\}_{n=1}^{\infty}$$

es una sucesión que J-converge a $(\alpha, \omega_0)$ y no $J^1$-converge a $(\alpha, \omega_0)$, ya que $f((\alpha, \omega_0)) = 1/2$.

## Bibliografía

[1] Blasco Olcina, J. L. (1974). Sobre una clase de espacios regulares no completamente regulares. *Rev. R. Acad. Ciencias de Madrid*, t. LXVIII, cuaderno 3.°, 547-555.

[2] Kelley, J. L. (1962). Topología general. Eudeba, Buenos Aires.

[3] López Pellicer, M. (1974). Un ejemplo de un espacio topológico completamente regular que el *k*-espacio correspondiente no es completamente regular. *Rev. R. Acad. Ciencias de Madrid*, t. LXVIII, cuaderno 1.°, 111-118.

[4] Valdivia, M. (1974). On certain topologies on a vector space. *Manuscripta Math.*, **14**, 241-247.