Una caracterización sucesional de los espacios $\mathcal{C}$ (X) ultrabornológicos

por

Manuel López Pellicer (*)

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO EXCMO. SR. D. DARÍO MARAVALL CASESNOVES

SUMMARY

In [5] and [6] L. Nachbin and T. Shirota have shown that if X is a Hausdorff completely regular space and $\mathcal{C}_c$ (X) is the space of the real valued continuous functions on X, endowed with the compact-open topology, then $\mathcal{C}_c$ (X) is bornological if and only if X is a Q-space.

In [8] M. de Wilde and J. Schmets have shown that this condition is also necessary and sufficient for $\mathcal{C}_c$ (X) to be ultrabornological.

Here we prove (theorem 1) that X is a Q-space if and only if the sequentially continuous linear functionals on $\mathcal{C}_c$ (X) are continuous.

En este artículo se designará por R el cuerpo real dotado con la topología métrica ordinaria y todas las funciones que usaremos tendrán en R su recorrido.

Sea X un espacio topológico de Hausdorff completamente regular; sea $\mathcal{C}_c$ (X) el espacio vectorial real de las funciones continuas con valores reales, definidas en X, provisto de la topología compacta-abierta. Entonces los teoremas de Nachbin-Shirota [5, 6] afirman:

(*) Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valencia bajo la dirección del profesor Dr. Manuel Valdivia.

TEOREMA N-S 1.—$\mathcal{C}_c(X)$ *es tonelado si y sólo si para cada subconjunto F contenido en X, cerrado y no compacto, existe una función* f $\in \mathcal{C}_c(X)$ *que no está acotada sobre F.* (Se dice que el espacio X es un Q_1-espacio [6, pág. 294].)

TEOREMA N-S 2.—$\mathcal{C}_c(X)$ *es bornológico si y sólo si X es completo en la mínima uniformidad para la que todas las funciones de* $\mathcal{C}_c(X)$ *son uniformemente continuas.* (Se dice entonces que X es un Q-espacio [4, pág. 474, nota 1].)

Recientemente M. de Wilde y J. Schmets [8] han demostrado que *la condición de ser X un Q-espacio es necesaria y suficiente para que* $\mathcal{C}_c(X)$ *sea ultrabornológico* (teorema W-S 1).

Basándonos en estos resultados podemos demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA 1.—*Dado un espacio topológico de Hausdorff completamente regular X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *X es un Q-espacio.*

b) $\mathcal{C}_c(X)$ *es ultrabornológico* (teorema W-S 1).

c) $\mathcal{C}_c(X)$ *es bornológico* (teorema N-S 2).

d) *Las aplicaciones lineales definidas en* $\mathcal{C}_c(X)$, *con valores reales y sucesionalmente continuas, son continuas.*

DEMOSTRACIÓN.—Se probará que:

$$a \Longrightarrow b \Longrightarrow c \Longrightarrow d \Longrightarrow a.$$

$a \Longrightarrow b$. El teorema de M. de Wilde y J. Schmets [8] asegura la equivalencia de las proposiciones a y b.

Es evidente que $b \Longrightarrow c$.

$c \Longrightarrow d$. Sea ψ una forma lineal definida en $\mathcal{C}_c$ (X) con valores reales y sucesionalmente continua. Como suponemos que $\mathcal{C}_c$ (X) es bornológico [condición c)], entonces resulta que para probar la continuidad de ψ es suficiente demostrar que ψ transforma conjuntos acotados de $\mathcal{C}_c$ (X) en conjuntos acotados de R.

Supongamos que A es un acotado de $\mathcal{C}_c$ (X).

El demostrar que ψ (A) es un subconjunto de R acotado es equivalente a establecer que dada una sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en ψ (A) y una sucesión real $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a cero, se cumple que la sucesión $\{\alpha_n r_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero. Esta última proposición es consecuencia de que:

Se puede construir una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en A y tal que $r_n = \psi(a_n)$, $\forall\, n \in \mathrm{N}$ (puesto que $r_n \in \psi(\mathrm{A})$, $\forall\, n \in \mathrm{N}$).

La sucesión $\{\alpha_n\, a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en $\mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ a la función idénticamente nula (por ser A un acotado de $\mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ y en R $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$).

Finalmente,

$$0 = \psi(\lim_{n \to \infty} \alpha_n\, a_n) = \lim_{n \to \infty} \psi(\alpha_n\, a_n) = \lim_{n \to \infty} \alpha_n\, \psi(a_n) = \lim_{n \to \infty} \alpha_n\, r_n$$

por ser la aplicación ψ sucesionalmente continua.

$d \Longrightarrow a$. Demostraremos que si X no es un Q-espacio, entonces existe una aplicación lineal φ de $\mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ en R que es sucesionalmente continua y no es continua.

Sea $\mathcal{U}$ la mínima uniformidad en X para la que todas las funciones de $\mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ son uniformemente continuas. Sea $\hat{\mathrm{X}}$ la completación del espacio X con la uniformidad $\mathcal{U}$. Identificaremos X con un subespacio denso de $\hat{\mathrm{X}}$. Al no ser X un Q-espacio existe un punto $t \in \hat{\mathrm{X}} \sim \mathrm{X}$ y una red $\{x_n,\ n \in \mathrm{D}\}$ en X, de Cauchy, respecto a la uniformidad $\mathcal{U}$ cuyo límite en $\hat{\mathrm{X}}$ es el punto t.

Puesto que $\mathcal{U}$ hace uniformemente continuas todas las funciones de $\mathcal{C}_c(\mathrm{X})$, resulta entonces que dada una función $f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ se puede prolongar a una función $\hat{f}$ de $\hat{\mathrm{X}}$ en R, también uniformemente continua [1, § 3-6, teor. 2].

Sea φ la aplicación de $\mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ en R tal que

$$\varphi(f) = \hat{f}(t) = \lim_{n \in \mathrm{D}} f(x_n) \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_c(\mathrm{X}) \tag{1}$$

La linealidad de la aplicación φ es inmediata, puesto que

$$\varphi(\alpha f + \beta g) = \lim_{n \in \mathrm{D}} \{\alpha f(x_n) + \beta g(x_n)\} = \alpha \lim_{n \in \mathrm{D}} f(x_n) +$$

$$+ \beta \lim_{n \in \mathrm{D}} g(x_n) = \alpha\, \varphi(f) + \beta\, \varphi(g).$$

Veamos por reducción al absurdo que la aplicación φ es sucesionalmente continua:

Sea la sucesión $\{f_m,\ m \in \mathrm{N}\} \subset \mathcal{C}_c(\mathrm{X})$. Supongamos que en $\mathcal{C}_c(\mathrm{X})$ converge a f y que $\{\varphi(f_m),\ m \in \mathrm{N}\}$ no converge a $\varphi(f)$. Pueden suceder estos dos casos:

Caso 1.° Sea

$$\varphi(f) = \hat{f}(t) = c \tag{2}$$

y b un número real estrictamente menor que c tal que existe una subsección $\{\varphi(f_{m_n}),\ n \in \mathrm{N}\}$ cumpliendo que

$$\varphi(f_{m_n}) = \hat{f}_{m_n}(t) \leqslant b \qquad \forall\, n \in \mathrm{N}. \tag{3}$$

Entonces el número $\varepsilon = \dfrac{c - b}{3}$ será estrictamente positivo y para cada $n \in \mathrm{N}$ el conjunto

$$\mathrm{W}_n = \{ x \in \hat{\mathrm{X}} : | \hat{f}_{m_n}(x) - \hat{f}_{m_n}(t) | \leqslant \epsilon \} \tag{4}$$

es un entorno cerrado del punto t en la completación $\hat{\mathrm{X}}$.

La misma propiedad la posee el conjunto

$$\mathrm{W} = \{ x \in \hat{\mathrm{X}} : | \hat{f}(x) - \hat{f}(t) | \leqslant \epsilon \}. \tag{5}$$

Es absurdo que una intersección numerable de entornos cerrados en $\hat{\mathrm{X}}$ del punto t tuviese una intersección disjunta con X, puesto que entonces existiría una sucesión decreciente de entornos cerrados del punto t, $\{\mathrm{V}_n,\ n \in \mathrm{N}\}$ con la propiedad de que

$$\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{V}_n\right] \cap \mathrm{X} = \emptyset.$$

Para cada $n \in \mathrm{N}$ construiríamos una función $\hat{g}_n$ de $\hat{\mathrm{X}}$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{1}{2^n}\right]$ que tomaría el valor $\dfrac{1}{2^n}$ en el punto t y cero en $\hat{\mathrm{X}} \sim \mathrm{V}_n$ [2, pág. 165]. Es evidente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{g}_n(x) = \hat{g}(x)$$

es una función continua de $\hat{X}$ en el intervalo $[0,1]$ tal que $\hat{g}(t) = 1$ y cada punto de X tiene un entorno donde $\hat{g}$ es menor que uno (pues

$$\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right] \cap X = \emptyset,$$

por lo que si g es la restricción de $\hat{g}$ a X, entonces la función

$$\frac{1}{1-g} \in \mathcal{C}_c(X).$$

Esta inclusión es un absurdo, puesto que $\varphi\left(\frac{1}{1-g}\right)$ debe ser un valor finito (la aplicación φ es de $\mathcal{C}_c(X)$ en R), que debe coincidir con el valor que prolonga a la función $\frac{1}{1-g}$ en el punto t (por construcción de la aplicación lineal φ). Este valor no puede ser finito, pues si una red en X converge a t, entonces la función g (restricción de $\hat{g}$) converge a 1, tomando sus valores en el intervalo $[0, 1]$.

Existe, pues, un punto

$$x_0 \in \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n\right] \cap W \cap X. \tag{6}$$

El conjunto formado por el punto x_0 es compacto, por lo que

$$\lim_{n \to \infty} f_{m_n}(x_0) = f(x_0). \tag{7}$$

De (6), (4) y (3) se deduce que

$$f_{n'_n}(x_0) \leqslant b + \varepsilon \qquad \forall\, n \in N. \tag{8}$$

De (6), (5) y (2) se deduce que

$$c - \varepsilon \leqslant f(x_0). \tag{9}$$

Las igualdades (7), (8) y (9) son contradictorias, puesto que de $\varepsilon = \frac{c-b}{3}$ se sigue que $b + \varepsilon < c - \varepsilon$.

Caso 2.º Sea $\varphi(f) = c$ y b un número estrictamente mayor que c y tal que existe una subsucesión $\{\varphi(f_{m_n}),\ n \in N\}$ tal que $\varphi(f_{m_n}) \geqslant b$.

Se establece la contradicción como en el caso primero (pues multiplicando las funciones por -1 se reduce al caso primero).

Finalmente, veamos que la aplicación φ no es continua:

Dado un compacto K contenido en X, se puede definir una función $\hat{f}_K$ continua, con dominio $\hat{X}$ y con valores en el intervalo real $[0\ 1]$ que vale cero en el compacto K y uno en el punto t. (Véase la construcción de $\hat{f}_K$ en [2, pág. 165].)

La restricción de f_K a X la llamaremos f_K y pertenece a $\mathcal{C}_c$ (X).

Si dados los subespacios compactos de X, K y K′, convenimos que K es posterior a K′ si $K \supset K'$, entonces la familia de compactos del espacio X se convierte en un conjunto dirigido que llamaremos $\mathcal{D}$.

Es evidente que la red $\{f_K, K \in \mathcal{D}\}$ converge a la función idénticamente nula, mientras que

$$\varphi(f_K) = \hat{f}_K(t) = 1$$

para todo compacto $K \in \mathcal{D}$, lo que prueba la no continuidad de la aplicación φ, y *a fortiori* la equivalencia de las cuatro proposiciones del teorema.

* * *

En [4, teorema 4] se demuestra que un espacio vectorial topológico E ($\mathcal{T}$) sobre el cuerpo K, real o complejo, tiene dual topológico completo respecto a la topología fuerte si y sólo si toda forma lineal tal que la antiimagen del disco unidad cerrado de K es casi cerrado, es continua.

En [4, definición 2] se introducen y estudian los espacios fuerte-tonelados, que son espacios vectoriales topológicos con la propiedad de que los conjuntos absolutamente convexos, absorbentes y casi cerrados son entornos del origen. Un conjunto es casi cerrado si su intersección con cada acotado es un cerrado, con la topología inducida en el acotado. En el citado artículo se prueba que los espacios fuerte-tonelados poseen dual fuerte completo y que los espacios ultrabornológicos son fuerte-tonelados.

En [7] se dan condiciones para que los acotados de $\mathcal{C}_c$ (X) sean metrizables. Entonces se puede afirmar.

Corolario 1-1.—*Sea X un espacio topológico de Hausdorff completamente regular. Si los acotados de $\mathcal{C}_c(X)$ son metrizables, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *X es un Q-espacio.*

b) *$\mathcal{C}_c(X)$ es ultrabornológico.*

c) *$\mathcal{C}_c(X)$ es bornológico.*

d) *Las formas lineales definidas en $\mathcal{C}_c(X)$ sucesionalmente continuas son continuas.*

e) *$\mathcal{C}_c(X)$ tiene dual fuerte completo.*

f) *$\mathcal{C}_c(X)$ es fuerte-tonelado.*

Demostración.—La cadena que probará las equivalencias es la siguiente:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, Rightarrow] & b \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & c \arrow[r, Rightarrow] & d \arrow[r, Rightarrow] & a \\ & f \arrow[rr, Rightarrow] & & e \arrow[u, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

El teorema 1 asegura que

$$a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow a.$$

Las observaciones previas al corolario aseguran que

$$b \Rightarrow f \Rightarrow e.$$

Veamos ahora que si los acotados de $\mathcal{C}_c$ (X) son metrizables, $e \Rightarrow d$.

En efecto, por ser los acotados metrizables, los conjuntos absolutamente convexos y casi cerrados coinciden con los conjuntos absolutamente convexos, absorbentes y sucesionalmente cerrados.

Entonces $\mathcal{C}_c$ (X) es fuerte-tonelado si y sólo si los conjuntos absolutamente convexos, absorbentes y sucesionalmente cerrados son entornos del origen (ver [4] y las observaciones previas al corolario).

Por lo que si se cumple e, entonces toda forma lineal definida en $\mathcal{C}_c$ (X) sucesionalmente continua es continua, pues la antiimagen del disco unidad cerrado de R por una forma lineal sucesionalmente continua es un conjunto sucesionalmente cerrado, y, a fortiori, por ser los acotados matrizables es casi cerrado y el citado teorema 4 de [4] asegura la continuidad de la forma lineal (véase la nota 2, tras la bibliografía).

NOTA 1.—En general es obvio que si X es un Q-espacio, entonces $\mathcal{C}_c$ (X) tiene dual fuerte completo.

El recíproco, en general, creemos que no es cierto, puesto que entonces $\mathcal{C}_c$ (X) sería bornológico si y sólo si $\mathcal{C}_c$ (X) fuese fuerte-tonelado.

Sabemos que el producto de espacios fuerte-tonelados es fuerte-tonelado [4, teorema 6], en tanto que el producto de una familia de espacios bornológicos de cardinal fuertemente inaccesible no sabemos si es bornológico (teorema de Mackey-Ulam (3), pág. 392).

Esta nota sugiere el siguiente problema:

PROBLEMA ABIERTO.—Construir un espacio X que no sea un Q-espacio y que el dual fuerte de $\mathcal{C}_c$ (X) sea completo.

TEOREMA 2.—*Sea X un espacio de Hausdorff completamente regular. Supongamos que* $\mathcal{C}_c(X)$ *es tonelado, entonces se cumple que existe un subconjunto* $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_c(X)$ *tal que:*

a) *La mínima uniformidad* $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ *que hace uniformemente continuas todas las funciones de* $\mathcal{F}$, *es compatible con la topología de X.*

b) *El espacio X provisto con la uniformidad* $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ *es sucesionalmente completo.*

DEMOSTRACIÓN.—Al ser $\mathcal{C}_c$ (X) tonelado, el teorema N-S-1 asegura que para cada cerrado no compacto B contenido en X debe existir una función $f_B \in \mathcal{C}_c$ (X) y no acotada sobre B.

Sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los cerrados no compactos del espacio X y sea $\mathcal{H}$ el subconjunto de $\mathcal{C}_c$ (X) formado por todas las funciones acotadas.

Vamos a probar que la familia $\mathcal{F}$ de funciones formada por

$$\mathcal{F} = \mathcal{H} \cup \{ f_B, \ B \in \mathcal{B} \}$$

cumple la tesis del teorema.

En efecto,

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{C}_c(X);$$

además, la mínima uniformidad que hace uniformemente continuas todas las funciones de $\mathcal{H}$, es compatible con la topología del espacio X. La misma propiedad tiene la mínima uniformidad, que hace uniformemente continuas todas las funciones de $\mathcal{C}_c$ (X).

De lo que resulta que si $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ es la mínima uniformidad que hace uniformemente continuas todas las funciones de $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ es compatible con la topología de X.

Además, si $\{x_n, n \in N\}$ es una sucesión de Cauchy, respecto a la uniformidad $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$, es evidente que será convergente si está contenida en un subconjunto compacto contenido en X.

Si la sucesión $\{x_n, n \in N\}$ no estuviera contenida en un compacto, el conjunto B formado por la clausura de $\cup \{x_n, n \in N\}$ sería un conjunto cerrado y no compacto. La función f_B no estaría acotada en el conjunto $\cup \{x_n, n \in N\}$.

Esto es absurdo puesto que la continuidad uniforme de la función f_B asegura que la sucesión $\{f_B(x_n), n \in N\}$ *sea de Cauchy en R*.

DEFINICIÓN 1.—Sea X un espacio de Hausdorff completamente regular, y $\mathcal{U}$ una uniformidad compatible. Se dice que la uniformidad $\mathcal{U}$ es estable frente al producto por funciones continuas acotadas si el producto de una función continua acotada por una función uniformemente continua es una función uniformemente continua.

TEOREMA 3.—*Sea X un Q_1 espacio de Hausdorff completamente regular, y $\mathcal{U}$ una uniformidad compatible, estable frente al producto por funciones acotadas.*

Si el espacio $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$ de las funciones uniformemente continuas respecto a la uniformidad $\mathcal{U}$ es un subconjunto cerrado del espacio tonelado $\mathcal{C}_c(X)$, entonces $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$ con la topología inducida es tonelado.

DEMOSTRACIÓN.—Representamos por $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ (X) al espacio de las funciones uniformemente continuas respecto a la uniformidad $\mathcal{U}$, dotado de la topología inducida por la de $\mathcal{C}_c$ (X). $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)'$ indicará el dual topológico de $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ (X), y

$$\sigma [\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)', \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)]$$

la topología débil en $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)'$.

Sea $\{\varphi_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ un conjunto acotado en

$$\left(\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\mathrm{X})',\ \sigma\left[\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\mathrm{X})',\ \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\mathrm{X})\right]\right)$$

y V su polar. El conjunto V es un tonel y todo lo que hemos de probar es que el tonel V es un entorno de la función idénticamente nula en $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\mathrm{X})$.

Sea B el subconjunto de $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(\mathrm{X})$ formado por las funciones que están acotadas en X, dotado de la topología inducida por la norma supremo en X.

B es completo, puesto que si la sucesión $\{f_n,\ n \in \mathrm{N}\}$ es de Cauchy con la norma introducida, entonces es obvio que la sucesión $\{f_n,\ n \in \mathrm{N}\}$ converge puntualmente a cierta función f.

Además, como dado un número positivo ε existe un n_ε tal que si n y m son posteriores a n_ε, se verifica

$$\sup_{x \in \mathrm{X}} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \epsilon;$$

entonces resulta que en cada punto

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \epsilon.$$

Fijando n y variando m se deduce que en cada punto

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon \quad \text{si} \quad n > n_\varepsilon,$$

por lo que

$$\sup_{x \in \mathrm{X}} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon \quad \text{si} \quad n > n_\varepsilon.$$

Resulta que la sucesión de Cauchy considerada convege en norma a la función f. Para probar la completitud de B sólo queda demostrar que la función f es uniformemente continua respecto a la uniformidad $\mathcal{U}$.

Sea η un número positivo. Existe un natural p tal que

$$\sup_{x \in \mathrm{X}} |f_p(x) - f(x)| \leqslant \frac{\eta}{3}.$$

La continuidad uniforme de f_p respecto a la uniformidad $\mathcal{U}$ implica que el conjunto

$$U = \left\{(x, y) : |f_p(x) - f_p(y)| \leqslant \frac{\eta}{3}\right\}$$

es una banda.

Pero si $(x, y) \in U$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f_p(y)| + |f_p(y) - f(y)| \leqslant \frac{3\eta}{3} = \eta,$$

con lo que se establece la continuidad uniforme de la función f respecto a la uniformidad $\mathcal{U}$.

El conjunto $V \cap B$ es un tonel en el espacio de Banach B con la norma supremo, por lo que es un entorno del origen. Existirá un número positivo δ con la propiedad de que

$$\{f \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X) : \sup_{x \in X} |f(x)| \leqslant \delta\} \subset V.$$

El número positivo δ le llamaremos número asociado al tonel V.

Si un conjunto $K \subset X$ tiene la propiedad de que toda función $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$ que se anule en K está en V, entonces vamos a probar que

$$\left\{f \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X) : \sup_{x \in K} |f(x)| \leqslant \frac{\delta}{2}\right\} \subset V. \tag{10}$$

En efecto, si e es la función unidad en X, desde luego $e \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$.

Si f es una función de $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$, cuyo supremo en K es menor o igual que $\frac{\delta}{2}$, entonces es obvio que la función

$$g = \sup\left(f, \frac{\delta e}{2}\right) + \inf\left(f, \frac{\delta e}{2}\right)$$

pertenece a $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$ y se anula en K, por lo que $2g \in V$.

También el

$$\sup_{x \in X} |2f(x) - 2g(x)|$$

es menor a igual a δ, por lo que $2(f - g) \in V$.

Al ser V un conjunto convexo resulta que la función $f \in V$, con lo que queda probada la relación de inclusión (10).

Supongamos que la aplicación no idénticamente nula $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)'$.

Vamos a probar que existe en X un compacto mínimo, $s_{\mathcal{U}}(\varphi)$, no vacío, llamado su soporte uniforme, tal que para cada función f que se anule en $s_{\mathcal{U}}(\varphi)$ se cumple que $\varphi(f) = 0$.

Haremos la demostración en cuatro apartados:

A) Probemos que existe un compacto K contenido en X tal que toda función $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$ que se anule en K, su imagen por la aplicación φ es cero.

Si esta proposición no fuese correcta, para cada compacto no vacío K contenido en X se podría construir una función

$$f_K \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X).$$

tal que se anulase en el compacto K, siendo $\varphi(f_K) = 1$.

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto dirigido formado por todos los compactos contenidos en X conviniendo que el compacto K es posterior al compacto K′ si $K \supset K'$. Entonces la red $\{f_K, K \in \mathcal{D}\}$ converge en $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$ a la función idénticamente nula, por lo que

$$0 = \varphi(\lim_{K \in \mathcal{D}} f_K) \neq \lim_{K \in \mathcal{D}} \varphi(f_K) = 1,$$

desigualdad que contradice la continuidad de φ.

Llamaremos $\mathcal{F}$ a la familia no vacía de compactos que tienen la propiedad enunciada en A.

B) Probemos que si $K_1 \in \mathcal{F}$ y $K_2 \in \mathcal{F}$, entonces $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.

Supongamos que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Entonces construiríamos una función continua g de X en el intervalo $[0\ 1]$ tal que vale cero en K_1 y uno en K_2 [2, pág. 165].

Para toda función $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$ se cumple que $f \cdot g \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$.

La función

$$(f\,g - f) \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$$

y se anula en K_2, por lo que $\varphi(f\,g - f) = 0$. Como $f\,g$ se anula en K_1, resulta que $\varphi(f\,g) = 0$, de lo que se deduce que

$$\varphi(f) = \varphi(f\,g) - \varphi(f\,g - f) = 0,$$

para toda función $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ (X). Esta igualdad contradice que la aplicación φ no sea idénticamente nula.

C) Probemos que si $K_1 = \mathcal{F}$ y $K_2 \in \mathcal{F}$, entonces $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{F}$.

Si $K_1 \cap K_2 \notin \mathcal{F}$, existiría una función $h \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ (X), que se anularía en $K_1 \cap K_2$, siendo $\varphi(h) = 1$.

Sea W el tonel formado por

$$\left\{ f \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X) : |\varphi(f)| \leqslant \frac{1}{2} \right\}$$

y μ el número asociado al tonel W.

Teniendo en cuenta que $K_2 \in \mathcal{F}$ y la relación de inclusión (**10**), obtenemos la siguiente relación de inclusión:

$$\left\{ f \in \mathcal{C}\ (X) : \sup_{x \in K_2} |f(x)| \leqslant \frac{\mu}{2} \right\} \subset \left\{ f \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X) : |\varphi(f)| \leqslant \frac{1}{2} \right\} \tag{11}$$

Sea

$$A = \left\{ x \in K_2 : |h(x)| \geqslant \frac{\mu}{2} \right\}$$

Como la función h se anula en $K_1 \cap K_2$, resulta que el compacto A es disjunto del compacto K_1 y se puede construir una función continua g con dominio en X y recorrido en el intervalo [**0 1**], que vale uno en K_1 y cero en A.

La función $h\,g - h \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ (X) y se anula en K_1, por lo que

$$\varphi(h\,g - h) = 0,$$

de donde

$$\varphi(h\,g) = \varphi(h) = 1 \tag{12}$$

teniendo en cuenta la elección de h.

El supremo en módulo de la función $h\,g$ en el compacto K_2 es menor o igual a $\frac{\mu}{2}$, puesto que donde h vale en módulo más que $\frac{\mu}{2}$ la función g se anula. La relación de inclusión (**11**) nos dice que

$$|\varphi(h\,g)| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{13}$$

De (12) y (13) se sigue la contradicción. El razonamiento se abrevia si el compacto A es vacío. Entonces por construcción $\varphi(h) = 1$, pero por ser su supremo en K_2 menor o igual a $\frac{\mu}{2}$, se sigue de (11) que

$$|\varphi(h)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Queda establecido en cualquier caso que $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{F}$.

D) Sea

$$K = \bigcap_{K_i \in \mathcal{F}} K_i.$$

Vamos a probar que $K \in \mathcal{F}$. El compacto K será el soporte uniforme de la aplicación φ.

Supongamos que K_1 es uno de los compactos que pertenecen a $\mathcal{F}$. Entonces

$$K = \bigcap_{K_i \in \mathcal{F}} (K_1 \cap K_i),$$

y como los cerrados $K_1 \cap K_i$ tienen la propiedad de intersección finita no vacía y están contenidos en el compacto K_1, resulta que $K \neq \emptyset$.

Veamos que es contradictorio el suponer que existe una función $l \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$ que se anule en K y tal que $\varphi(l) = 1$.

Volvamos a considerar el tonel

$$W = \left\{ f \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X) : |\varphi(f)| \leqslant \frac{1}{2} \right\}$$

y sea el número $\mu > 0$ el número asociado al tonel W.

Sea

$$B = \left\{ x \in X : |l(x)| < \frac{\mu}{2} \right\}$$

Como la función l se anula en K, resulta que

$$K = \bigcap_{K_i \in \mathcal{F}} (K_1 \cap K_i) \subset B.$$

Entonces la familia de cerrados

$$\{ K_1 \cap K_i \cap (X \sim B),\ K_i \in \mathcal{F} \}$$

tiene intersección vacía y está contenida en el compacto K_1, por lo que una subfamilia finita tiene intersección vacía. Como la familia $\mathcal{F}$ es estable frente a las intersecciones finitas, existe un compacto $K_j \in \mathcal{F}$ tal que $K_j \subset B$.

El

$$\sup_{x \in K_j} | l(x) | \leqslant \frac{\mu}{2}$$

y la relación de inclusión (11) nos dice que

$$| \varphi(l) | \leqslant \frac{1}{2}$$

lo que contradice la construcción de la función l.

Convendremos que si la aplicación lineal φ es idénticamente nula, su soporte uniforme es el conjunto vacío.

Todo lo que se ha probado va a servir para demostrar que el tonel V, que es el conjunto polar de $\{\varphi_i,\ i \in I\}$, es un entorno del origen en $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$.

Sea F la clausura de la unión de los soportes uniformes de las aplicaciones φ_i para $i \in I$.

Por definición de soporte uniforme, toda función $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$ que se anule en F cumple que $\varphi_i(f) = 0$, por lo que f pertenece al tonel V.

La relación de inclusión (10) nos dice que si δ es el número asociado al tonel V, entonces

$$\left\{ f \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X) : \sup_{x \in F} | f(x) | \leqslant \frac{\delta}{2} \right\} \subset V. \tag{14}$$

Si F es compacto es obvio que V es un entorno del origen en $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$.

Vamos a probar que conduce a un absurdo el suponer que F no es compacto.

Al ser el espacio X, Q_1, existiría sobre el cerrado no compacto F una función continua b no acotada sobre F. Sea

$$A_n = b^{-1}\{\,]-\infty\ -n[\cup]n+\infty[\,\},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

La sucesión de abiertos A_n tiene las siguientes propiedades:

$$A_n \supset A_{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{15}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n = \emptyset \tag{16}$$

$$A_n \cap F \neq \emptyset, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{17}$$

El cerrado F es la clausura en X de la

$$\cup \{ s_{\mathcal{U}}(\varphi_i), \quad i \in I \},$$

por lo que de (17) se deduce que para cada abierto A_n existe un

$$\varphi_i \in \{ \varphi_i,\ i \in I \}$$

tal que

$$A_n \cap s_{\mathcal{U}}(\varphi_n) \neq \emptyset.$$

Probemos que existe una función g_n que se anula fuera de A_n y tal que $\varphi_n(g_n) = 1$.

Sea W_n el tonel formado por

$$W_n = \left\{ f \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X) : |\varphi_n(f)| \leqslant \frac{1}{2} \right\} \tag{18}$$

y μ_n el número positivo asociado al tonel W_n.

Sea $B_n = X \sim A_n$. Si toda función $g \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$ que se anule en B_n cumpliese que $\varphi_n(g) = 0$, entonces de (18) se seguiría que las funciones que se anulasen en B_n pertenecerían al tonel W_n.

La relación de inclusión (10) aplicada en este caso nos dice que

$$\left\{ f \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X) : \sup_{x \in B_n} |f(x)| \leqslant \frac{\mu_n}{2} \right\} \subset W_n. \tag{19}$$

Por definición de soporte uniforme y puesto que

$$A_n \cap s_{\mathcal{U}}(\varphi_n) \neq \emptyset$$

existe una función $j \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$ que se anula en

$$(X \sim A_n) \cap s_{\mathcal{U}}(\varphi_n) = B_n \cap s_{\mathcal{U}}(\varphi_n)$$

y tal que $\varphi_n(j) = 1$. (El conjunto $B_n \cap s_{\mathcal{U}}(\varphi_n)$ puede ser vacío. Entonces j se busca con la condición de que $\varphi_n(j) = 1$, lo cual siempre es posible puesto que φ_n no es idénticamente nula, por ser $s_{\mathcal{U}}(\varphi_n) \neq \emptyset$). Sea

$$D_n = B_n \cap j^{-1}\left(\left] -\infty \quad \frac{\mu_n}{2} \right] \cup \left[\frac{\mu_n}{2} + \infty \right[\right)$$

El cerrado D_n es disjunto del compacto $s_{\mathcal{U}}(\varphi_n)$,por lo que existe una función continua $p(x) \in \mathcal{C}_c(X)$ con valores en el intervalo $[0\ 1]$ que vale uno en el compacto $s_{\mathcal{U}}(\varphi_n)$ y cero en D_n.

La función

$$j(x) \cdot p(x) - j(x) \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X),$$

se anula en $s_{\mathcal{U}}(\varphi_n)$, por lo que

$$\varphi_n[j(x)\,p(x) - j(x)] = 0,$$

de donde

$$\varphi_n(j(x)\,p(x)) = \varphi_n(j(x)) = 1. \tag{20}$$

El módulo de $j(x) \cdot p(x)$ en B_n es menor o igual a $\frac{\mu_n}{2}$, por lo que (19) y (18) si sigue que

$$|\varphi_n(j(x)\,p(x))| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{21}$$

Las igualdades (20) y (21) son, pues, contradictorias, por lo que existe una función $g_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X)$ que se anula en B_n cumpliendo que $\varphi_n(g_n) = 1$.

La igualdad (16), junto con la construcción de g_n, permiten afirmar que en $\mathcal{C}_c$ (X) las sumas parciales de la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \, g_m(x)$$

forman una sucesión, que, con la topología de $\mathcal{C}_c$ (X), converge a la función

$$g = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \, g_m(x)$$

que es una función de $\mathcal{C}_c$ (X) y esto es válido para cualquier elección de coeficientes.

Las sumas parciales

$$\sum_{m=1}^{r} c_m \, g_m(x)$$

pertenecen a $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ (X), por lo que al ser $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ (X) cerrado en $\mathcal{C}_c$ (X), resulta que

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \, g_m(x) \in \mathcal{C}_{\mathcal{U}}(X).$$

Además, dado un m existe un natural i_m tal que si el número natural i es posterior a i_m, entonces el soporte uniforme de g_m no corta a $\bar{A}_i$ (es consecuencia de (16) y de la compacidad de los soportes).

Empleando una subsucesión monótona creciente adecuada de la sucesión $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, que seguiremos escribiéndola con la misma notación, podemos suponer que

$$\bar{A}_i \cap s_{\mathcal{U}}(g_m) = \emptyset \quad \text{si} \quad i > m.$$

Por lo que

$$\varphi_n(g) = \varphi_n\left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m \, g_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \, \varphi_n(g_m) = \sum_{m=1}^{n-1} c_m \, \varphi_n(g_m) + c_n,$$

lo que permite elegir la sucesión de coeficientes $\{c_m\}_{m=1}^{\infty}$ de forma que

$$\varphi_n(g) = n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

La función g no puede ser absorbida por el polar del conjunto $\{\varphi_n, n = 1, 2, 3, \ldots\}$.

A fortiori, tampoco puede ser absorbida por el conjunto polar de $\{\varphi_i, i \in I\}$, que es el tonel V. Esto contradice que Vsea un tonel.

Bibliografía

[1] N. Bourbaki: *Elements of Mathematics. General Topology.* Addison-Wesley (1966).

[2] J. L. Kelley: *Topología general.* Eudeba (1962).

[3] G. Köethe: *Topological Vector Spaces.* I. Springer-Verlag (1969).

[4] A. Marquina y P. Pérez Carreras: *On quasi-barrelled spaces.* (Pendiente de publicación en «Manuscripta Math».)

[5] L. Nachbin: *Topological vector spaces of continuous functions.* «Proc. Nat. Acd. of Sc.», *40*, 471-474 (1954).

[6] T. Shirota: *On locally covex vector spaces of continuous functions.* «Proc. Japan Acd.», *30*, 294-298 (1954).

[7] S. Warner: *The topology of compact convergence on continuous function spaces.* «Duke Math. J.», *25*, 265-282 (1958).

[8] M. de Wilde et J. Schmets: *Caractérisation des espaces C (X) ultrabornologiques.* «Bull. des Sc. de Liége», *40*, 119-121 (1971).

* * *

Nota 2.—En un trabajo titulado *Algunas propiedades de los espacios de funciones continuas ultrabornológicos*, pendiente de publicación en la revista «Collectanea Mathematica», hemos probado que X es un Q-espacio si y sólo si las formas lineales definidas en $\mathcal{C}_c$ (X) y débilmente sucesionalmente continuas son continuas.

Con ayuda de este resultado se puede probar el corolario 1.1, aplicando el teorema de A. Grothendieck de construcción de la completación ([3]-§ 21-9-(2)).