

# Sobre el cálculo de estructuras endo-hiperestáticas

por

Eduardo Torroja Miret

Con relativa frecuencia se presentan casos de estructuras de construcción, bien de hormigón armado, bien de perfiles soldados, formados por un conjunto de piezas rectas o curvas, monolíticamente enlazadas, y que presentan, por tanto, unos pocos nudos interiores con sus correspondientes reacciones endo-hiperestáticas, que constituyen las incógnitas del problema; pues una vez conocidas éstas, las reacciones exteriores se pueden deducir isostáticamente de las anteriores.

El método que se expone a continuación no es práctico para todos los casos que se pueden presentar; pero, puede ser útil para los casos corrientes de estructuras con piezas curvas poligonales entre nudo y nudo, en las que el número de los interiores es relativamente pequeño y en las que la rigidez de las piezas interiores que enlazan entre sí los nudos interiores no es demasiado grande respecto a las del resto de la estructura; o dicho de otra forma, cuando no se presentan piezas muy rígidas enlazando dos nudos con corrimientos relativamente grandes por efecto de la elasticidad mucho mayor del resto de la estructura.

## 1. PIEZA SIMPLE

Si en una pieza plana de directriz cualquiera, se considera un sentido positivo de avance a lo largo de ésta para definir un extremo delantero o frontal y otro dorsal —que se toman respectivamente como límites superior e inferior de las integraciones a realizar a lo largo de la directriz—, y se supone la pieza rígidamente empotrada en esos extremos, las reaccio-

nes que sobre ella ejercen dichos empotramientos vienen dadas, como es sabido, por las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} M'_{ef} &= \frac{\omega_{ef} - \mathcal{H}}{\Phi} \\ X'_{ef} &= (\mathcal{H}_y - u_{ef}) K_x - (\mathcal{H}_x + v_{ef}) K_{xy} \\ Y'_{ef} &= (\mathcal{H}_y - u_{ef}) K_{xy} - (\mathcal{H}_x + v_{ef}) K_y \\ M'_{ed} &= -M'_{ef} - \Sigma \bar{M} + \Sigma \bar{X} y - \Sigma \bar{Y} x \\ X'_{ed} &= -X'_{ef} - \Sigma X \\ Y'_{ed} &= -Y'_{ef} - \Sigma Y \end{aligned} \right\} \quad [1.1]$$

Expresiones en las que los subíndices *ef*, *ed* indican respectivamente extremo frontal y dorsal;  $u_{ef}$ ,  $v_{ef}$ ,  $\omega_{ef}$ , son respectivamente, los corrimientos y el giro, relativos, del extremo frontal respecto al dorsal, que son nulos si la pieza está rígidamente empotrada en ambos extremos;  $M'$ ,  $X'$ ,  $Y'$ , el momento respecto al centro elástico de la pieza y las componentes de la reacción exterior sobre los ejes;  $M$ ,  $X$ ,  $Y$ , los momentos y componentes de las fuerzas exteriores que pueden actuar sobre los diferentes puntos de la directriz de coordenadas *xy* respecto a dos ejes ortogonales que pasen por el centro elástico de la pieza; y los restantes símbolos, las integrales y expresiones siguientes:

$$\Phi = \int_{ed}^{ef} \frac{ds}{EI}$$

$$K_x = \frac{\int_{ed}^{ef} x^2 \frac{ds}{EI} + \int_{ed}^{ef} \sin^2 \alpha \frac{ds}{E\Omega}}{\left( \int_{ed}^{ef} xy \frac{ds}{EI} - \int_{ed}^{ef} \sin \alpha \cos \alpha \frac{ds}{E\Omega} \right)^2 - \left( \int_{ed}^{ef} x^2 \frac{ds}{EI} + \int_{ed}^{ef} \sin^2 \alpha \frac{ds}{E\Omega} \right) \cdot \left( \int_{ed}^{ef} y^2 \frac{ds}{EI} + \int_{ed}^{ef} \cos^2 \alpha \frac{ds}{E\Omega} \right)} \quad \left. \right\}$$

$$K_y = \frac{\int_{ed}^{ef} y^2 \frac{ds}{EI} + \int_{ed}^{ef} \cos^2 \alpha \frac{ds}{E\Omega}}{\left( \int_{ed}^{ef} xy \frac{ds}{EI} - \int_{ed}^{ef} \sin \alpha \cos \alpha \frac{ds}{E\Omega} \right)^2 - \left( \int_{ed}^{ef} x^2 \frac{ds}{EI} + \int_{ed}^{ef} \sin^2 \alpha \frac{ds}{E\Omega} \right) \cdot \left( \int_{ed}^{ef} y^2 \frac{ds}{EI} + \int_{ed}^{ef} \cos^2 \alpha \frac{ds}{E\Omega} \right)} \quad \left. \right\}$$

$$K_{xy} = \frac{\int_{ed}^f xy \frac{ds}{EI} - \int_{ed}^f \sin \alpha \cos \alpha \frac{ds}{E\Omega}}{\left( \int_{ed}^f xy \frac{ds}{EI} - \int_{ed}^f \sin \alpha \cos \alpha \frac{ds}{E\Omega} \right)^2 - \left( \int_{ed}^f x^2 \frac{ds}{EI} + \int_{ed}^f \sin^2 \alpha \frac{ds}{E\Omega} \right) \cdot \left( \int_{ed}^f y^2 \frac{ds}{EI} + \int_{ed}^f \cos^2 \alpha \frac{ds}{E\Omega} \right)}$$

$$\mathcal{H} = \int_{ed}^f \bar{\mathcal{M}}_f \frac{ds}{EI}$$

$$\mathcal{H}_x = \int_{ed}^f \bar{\mathcal{M}}_f x \frac{ds}{EI} - \int_{ed}^f \bar{\mathcal{N}} \sin \alpha \frac{ds}{E\Omega}$$

$$\mathcal{H}_y = \int_{ed}^f \bar{\mathcal{M}}_f y \frac{ds}{EI} + \int_{ed}^f \bar{\mathcal{N}} \cos \alpha \frac{ds}{E\Omega}$$

siendo  $\bar{\mathcal{M}}_f$  y  $\bar{\mathcal{N}}$  el momento flector y el esfuerzo axil que actúan frontalmente sobre una rebanada cualquiera por efecto solamente del sistema de fuerzas exteriores  $\bar{M}$ ,  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ , que constituyen datos del problema.

## 2. ESTRUCTURAS MÚLTIPLES DE PIEZAS CURVAS O POLIGONALES CON SOPORTES VERTICALES

Antes de entrar en el caso general, y para mejor fijar las ideas, es preferible desarrollar primero las deducciones sobre este tipo de estructuras que es el más frecuente en construcción, y en el que se puede prescindir de los corrimientos verticales de los nudos.

Recordando lo anterior y con las notaciones establecidas, considérese una estructura como la indicada en la figura 1. Cada pieza puede suponerse prolongada por sus extremos mediante barras rígidas hasta su centro elástico. Las barras concurrentes en un punto cualquiera —el  $n$  por ejemplo—, forman una estrella indeformable que sufrirá los movimientos correspondientes a las traslaciones  $u_n$ ,  $v_n$  y al giro  $\omega_n$  del nudo, los cuales son desconocidos, a priori.

Supóngase que, al mismo tiempo que se aplican las fuerzas propias que ha de soportar la estructura, se aplican, en cada extremo de pieza o punta de estrella, unas fuerzas exteriores ficticias ('') correspondientes a pieza empotrada en sus extremos, cuyos valores se han expresado anteriormente. La estructura estaría en equilibrio sin que las estrellas experimentasen movimiento alguno.

El conjunto de fuerzas de reacción ('') en una estrella cualquiera —en particular la  $n$ —, equivale a su resultante vectorial de componentes  $X'_n$ ,  $Y'_n$ ,  $M'_n$ .

Siendo los nudos fijos, como sucede con las sustentaciones exteriores, estas fuerzas serán las reacciones reales que los apoyos ejercerían sobre los

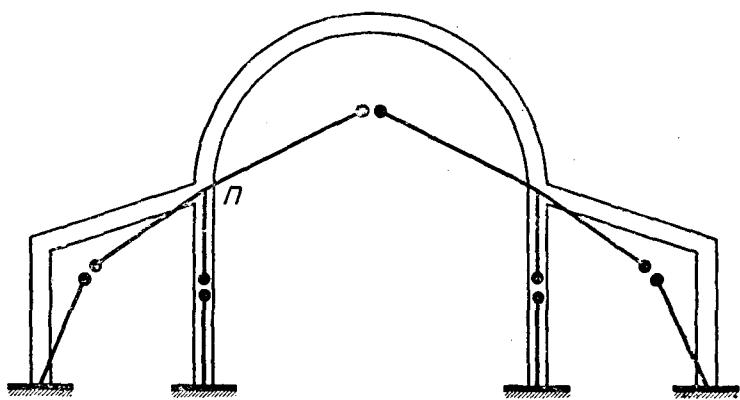


Fig. 1

extremos de las piezas. En los nudos interiores, esto no corresponde a la realidad, pues no existe ningún elemento exterior capaz de producir realmente las reacciones  $X'$ ,  $Y'$ ,  $M'$ . Es necesario, por tanto, en cada uno de esos nudos interiores  $n$ , superponer otros sistemas de fuerzas ficticias ('') aplicados en las puntas de la estrella, y cuya resultante ( $X''_n$ ,  $Y''_n$ ,  $M''_n$ ), en cada uno de los nudos sea igual y contraria a la anterior; estos sistemas de fuerzas ('') han de estar ligados, dentro de cada nudo, por la condición de que los movimientos que produzcan en cada extremidad de pieza correspondan a un movimiento sin deformación del conjunto de la estrella, suponiendo que los extremos opuestos de las piezas concurrentes en ella se mantuviessen fijos. Con estas condiciones el sistema de fuerzas ('') es determinable, como más adelante se explica.

Pero, para que puedan producirse los movimientos en estas condiciones, es necesario considerar las nuevas reacciones ('') que aparecen en los extremos opuestos de las piezas concurrentes en el nudo. Estas reacciones son iguales y contrarias a las del sistema ('') pero aplicadas, como acaba de

decirse, en el extremo opuesto de la pieza; ello se deduce directamente ya que no se han aplicado nuevas fuerzas exteriores y por consiguiente en cada pieza:

$$\left. \begin{array}{l} M_{ed}''' = -M_{ef}'' \\ X_{ed}''' = -X_{ef}'' \\ Y_{ed}''' = -Y_{ef}'' \end{array} \right\} \quad \text{o bien} \quad \left. \begin{array}{l} M_{ef}''' = -M_{ed}'' \\ X_{ef}''' = -X_{ed}'' \\ Y_{ef}''' = -Y_{ed}'' \end{array} \right\}$$

Es necesario, por tanto, introducir este nuevo sistema de fuerzas conocidas ('''') que en los apoyos vendrían a sumarse a las ('), pero que en los nudos interiores constituyen un nuevo sistema de fuerzas ficticias. Suponiendo, pues, otro nuevo sistema de fuerzas ('') que cumpla, respecto al ('''') las mismas condiciones exteriores que el (') respecto al ('); y otro (') que cumpla las mismas del ('''') respecto al (') y así sucesivamente, se pueden obtener unas series de valores aproximados de las reacciones de las esterillas sobre los extremos de las piezas.

Cuando se alcance una solución en la que las resultantes vectoriales de las fuerzas ficticias sean suficientemente pequeñas, se tendrá una solución satisfactoriamente aproximada del estado de reacciones y de esfuerzos en la estructura estudiada.

El efecto de cada operación viene a constituir una redistribución de las fuerzas ficticias hacia los apoyos exteriores donde van a constituir reacciones reales. En general, y con un número de nudos interiores relativamente pequeño, como se presenta en los casos corrientes, las series de valores convergen con suficiente rapidez hacia la solución final.

La convergencia será más o menos rápida según el tipo de estructura de que se trate; pero, puede demostrarse que la suma de valores así obtenidos tienden hacia los valores reales, apoyándose en el teorema de máximo, original del Prof. L. de Broglio (\*). En efecto; la estructura inicial de que se parte con los nudos inmovilizados, está más vinculada que la estructura real; por tanto, el trabajo  $\mathcal{T}_1$  realizado por las fuerzas exteriores será menor que el real  $\mathcal{T}$ . A cada operación de liberar un nudo, el trabajo aumenta una cantidad  $\mathcal{T}_n$  manteniéndose siempre más vinculada que la estructura real (salvo en el caso de existir un sólo nudo a liberar; pero, entonces, a la primera liberación se alcanza exactamente la solución real). Al volver a enclavar el nudo, en su nueva posición, —para pasar a liberar otro—, no se realiza trabajo, puesto que no hay corrimientos, y la estructura vuelve a quedar tan vinculada como antes.

La suma  $\mathcal{T}_1 + \Sigma \mathcal{T}_n$  aumenta en cada operación y no puede, por tanto, ser nunca mayor que  $\mathcal{T}$ , pues, por el teorema antedicho de Broglio, el

(\*) El principio del trabajo máximo. — L. de Broglio. Instituto Técnico de la Construcción. Madrid—1948.

máximo corresponde necesariamente a la solución real menos vinculada; luego, ha de tener un límite igual o inferior a  $\mathcal{T}$ .

Si fuese un límite  $\mathcal{T}_a$  inferior a  $\mathcal{T}$ , al alcanzar aquél límite, no se produciría trabajos ni corrimientos en ninguna nueva operación de liberación de nudo y, por tanto, la solución alcanzada sería la real; pero, en ese caso sería:  $\mathcal{T}_a = \mathcal{T}$ .

En consecuencia, la serie  $\mathcal{T}_1 + \Sigma \mathcal{T}_n$  tiende necesariamente al límite  $\mathcal{T}$  y las sumas de valores hallados tienden en el límite a los valores reales, al alcanzar los cuales ningún nudo sufriría nuevos movimientos y los vínculos obrarían igual que si no existiesen.

### 3. DESARROLLO DEL MÉTODO

Para dar forma al método basta estudiar cómo pueden deducirse los valores de los sistemas  $(")$  y  $(^{IV})$   $(^V)$  ... ya que los  $(")$   $(^V)$  ... se obtienen directamente de las fórmulas [2.1].

Para ello conviene tomar en cada pieza unos ejes coordenados que pasando por su centro elástico sean todos ellos paralelos a unas direcciones o ejes generales  $xx$ ,  $yy$ , y deducir los valores  $\Phi$ ,  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_{xy}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}_x$ ,  $\mathcal{H}_y$ , de cada pieza respecto a sus ejes. Con las fórmulas [1.1] se obtienen los valores  $(')$ . Para obtener los  $(")$ , y lo mismo los  $(^{IV})$   $(^V)$  ... han de estu-

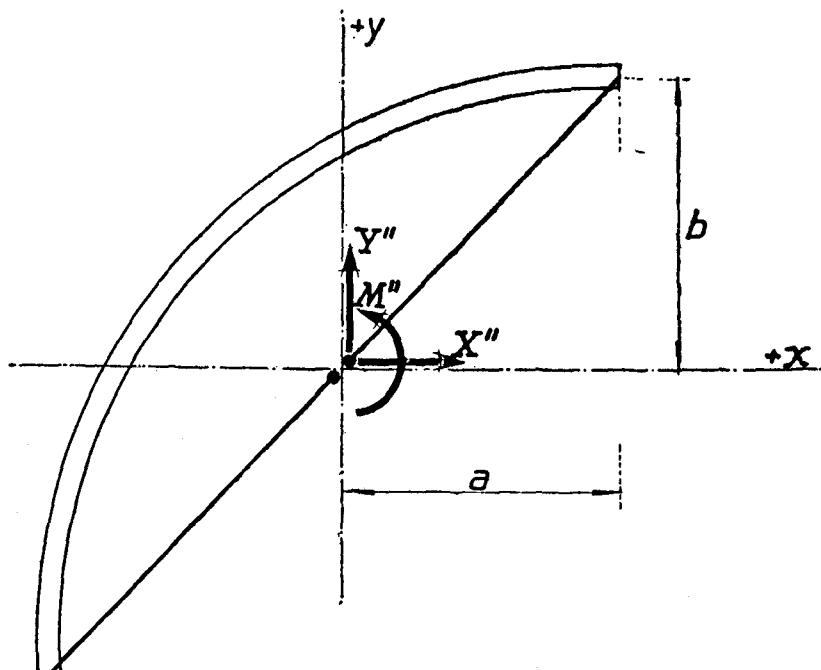


Fig. 2

diarse los movimientos que se producen en la estrella sobre la que actúan. Estos movimientos en cada punta  $m$  de la estrella  $n$  han de corresponder a una traslación horizontal  $u_m''$  y un giro  $\omega_m''$ , puesto que puede admitirse que los recorridos verticales de los nudos (no de las puntas) son nulos, dada la existencia de soportes verticales suficientemente rígidos. Se puede, por tanto, escribir

$$u_{mn}'' = u_n'' + b \omega_n'' \quad v_{mn}'' = -a \omega_n'' \quad \omega_{mn}'' = \omega_n'' \quad [3.1]$$

siendo (figura 2)  $a$ ,  $b$ , las coordenadas del nudo  $n$  respecto a los ejes coordenados de la pieza (que pasan por el centro elástico de ésta).

Estos movimientos son los debidos a la aplicación de unas fuerzas ficticias ('') en el extremo de la pieza cuando el opuesto se mantiene fijo; y, por consiguiente, vienen dados por las fórmulas [1.1] en las que han de anularse los términos  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}_x$ ,  $\mathcal{H}_y$ , puesto que no hay que considerar fuerzas exteriores a lo largo de la pieza.

Por tanto, si el extremo  $mn$  es frontal, se tiene:

$$X'' = -u_{ef}'' K_x - v_{ef}'' K_{xy} \quad , \quad Y'' = -u_{ef}'' K_{xy} - v_{ef}'' K_y \quad , \quad M'' = \frac{\omega_{ef}''}{\Phi} \quad [3.2]$$

Si el extremo  $mn$  es dorsal, es fácil ver que las fórmulas quedan las mismas, sin más que cambiar  $ef$  por  $ed$  puesto que cambian de signo, tanto las fuerzas como los movimientos.

Sustituyendo en estas expresiones los valores [3.1] queda:

$$\left. \begin{aligned} X_{mn}'' &= -(K_x)_{mn} u_n'' - (b K_x - a K_{xy})_{mn} \omega_n'' \\ Y_{mn}'' &= -(K_{xy})_{mn} u_n'' - (b K_{xy} - a K_y)_{mn} \omega_n'' \\ M_{mn}'' &= \left( \frac{1}{\Phi} \right)_{mn} \omega_n'' \end{aligned} \right\} \quad [3.3]$$

Esto enseña que el sistema de fuerzas  $X''$ ,  $Y''$ ,  $M''$ , puede suponerse descompuesto en dos, tales que:

$$(X_u'')_{mn} = -(K_x)_{mn} u_n'' \quad (Y_u'')_{mn} = -(K_{xy})_{mn} u_n'' \quad (M_u'')_{mn} = 0, \quad [3.4]$$

que sólo produciría una traslación general de la estrella sin giro y paralela al eje  $xx$ ; y otro:

$$\left. \begin{aligned} (X_{\omega}'')_{mn} &= -(b K_x - a K_{xy})_{mn} \omega_n'' = -(C_x)_{mn} \omega_n'' \\ (Y_{\omega}'')_{mn} &= -(b K_{xy} - a K_y)_{mn} \omega_n'' = -(C_y)_{mn} \omega_n'' \\ (M_{\omega}'')_{mn} &= \left( \frac{1}{\Phi} \right)_{mn} \omega_n'' \end{aligned} \right\} \quad [3.5]$$

que produciría un giro general de la estrella sin traslación de su centro. Estas fórmulas nos proporcionan las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} -u_n'' &= \left( \frac{X_u''}{K_x} \right)_{mn} = \left( \frac{Y_u''}{K_{xy}} \right)_{mn} = \dots = \frac{\Sigma_n X_u''}{\Sigma_n K_x} = \frac{\Sigma_n Y_u''}{\Sigma_n K_{xy}} = \dots = \frac{\Sigma_n (b X_u'' - a Y_u'')}{\Sigma_n C_x} \\ -\omega_n'' &= \left( \frac{X_\omega''}{C_x} \right)_{mn} = \frac{\Sigma_n X_\omega''}{\Sigma_n C_x} = \left( \frac{Y_\omega''}{C_y} \right)_{mn} = \frac{\Sigma_n Y_\omega''}{\Sigma_n C_y} = -\left( \frac{M_\omega''}{1/\Phi} \right)_{mn} = \dots = \\ &= \frac{\Sigma_n (b X_\omega'' - a Y_\omega'' + M_\omega'')}{\Sigma_n (b C_x - a C_y - 1/\Phi)} = \frac{\Sigma_n Z_\omega''}{\Sigma_n C_z} \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} Z_\omega'' &= (b X_\omega'' - a Y_\omega'' + M_\omega'')_{mn} \\ C_z &= \left( b C_x - a C_y - \frac{1}{\Phi} \right)_{mn} \end{aligned}$$

De aquí, se deduce:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_n X_u'' &= -u_n'' \Sigma_n K_x \\ \Sigma_n Y_u'' &= -u_n'' \Sigma_n K_{xy} \\ \Sigma_n (b X_u'' - a Y_u'') &= -u_n'' \Sigma_n C_x \\ \Sigma_n X_\omega'' &= -\omega_n'' \Sigma_n C_x \\ \Sigma_n Y_\omega'' &= -\omega_n'' \Sigma_n C_y \\ \Sigma_n Z_\omega'' &= -\omega_n'' \Sigma_n C_z \end{aligned} \right\} \quad [3.6]$$

Por otra, parte, la suma de los dos sistemas ( $\ddot{u}$ ) ( $\ddot{\omega}$ ) ha de equilibrar al sistema ( $\dot{u}$ ) y, por tanto, se ha de tener:

$$\left. \begin{aligned} -X_n' &= \Sigma_n X_u'' + \Sigma_n X_\omega'' \\ -M_n' &= \Sigma_n (b X_u'' - a Y_u'') + \Sigma_n Z_\omega'' \end{aligned} \right\} \quad [3.7]$$

La componente  $Y'$  corresponde a una reacción del soporte. Al no haber recorrido vertical del nudo, no ha lugar a aplicar fuerzas ( $''$ ) que la equilibren o anulen. Las fuerzas  $Y_u''$ ,  $Y_\omega''$  corresponden igualmente a la nueva reacción que provoca el soporte al producirse el giro  $\omega_n$  en el nudo. Por tanto, la tercera ecuación de equilibrio no proporciona ninguna nueva condición al sistema de fuerzas ( $''$ ).

Sustituyendo en las dos ecuaciones [3.7] los valores [3.6] se tiene:

$$\begin{aligned} X_n' &= u_n'' \Sigma_n K_x + \omega_n'' \Sigma_n C_x \\ M_n' &= u_n'' \Sigma_n C_x + \omega_n'' \Sigma_n C_z \end{aligned}$$

de donde:

$$\left. \begin{aligned} u_n'' &= -\frac{X_n' \Sigma_n C_x - M_n' \Sigma_n C_x}{(\Sigma_n C_x)^2 - (\Sigma_n K_x)(\Sigma_n C_x)} \\ \omega_n'' &= \frac{X_n' \Sigma_n C_x - M_n' \Sigma_n K_x}{(\Sigma_n C_x)^2 - (\Sigma_n K_x)(\Sigma_n C_x)} \end{aligned} \right\} \quad [3.8]$$

Una vez obtenidos, mediante estas fórmulas, los valores de  $u_n''$ ,  $\omega_n''$ , basta introducirlos en [3.8] para tener los de las fuerzas (") en las puntas de la estrella.

$$\begin{aligned} X_{mn}'' &= (X_u'' + X_\omega'')_{mn} = - (K_x)_{mn} u_n'' - (C_x)_{mn} \omega_n'' \\ Y_{mn}'' &= (Y_u'' + Y_\omega'')_{mn} = - (K_{xy})_{mn} u_n'' - (C_y)_{mn} \omega_n'' \\ M_{mn}'' &= (M_\omega'')_{mn} = \left( \frac{1}{\Phi} \right)_{mn} \omega_n'' \end{aligned}$$

El método de cálculo puede, por tanto, consistir en deducir los valores (") en función de los (') mediante las fórmulas expuestas y continuar por iteración; los valores (") son iguales y contrarios a los del extremo opuesto en cada pieza y con ellos puede repetirse el cálculo hasta llegar a la aproximación que se deseé.

En caso de simetría de las piezas respecto a uno de los ejes, el  $yy$  por ejemplo, el cálculo se simplifica ligeramente por ser  $K_{xy} = 0$ .

Si la estructura tuviese solamente un nudo interior basta llegar al sistema (") para tener la solución exacta. En general, solamente se trata de dos a tres nudos interiores y la iteración es suficientemente rápida.

#### 4. CASO GENERAL DE ESTRUCTURAS MÚLTIPLES DE PIEZAS CURVAS O POLIGONALES

El método a seguir es fundamentalmente el mismo expuesto en el Apartado anterior, por lo que no es necesario estudiar ahora más que la deducción de las nuevas fórmulas que resultan como consecuencia de considerar también los movimientos verticales de los nudos, bien sea por carencia de soportes verticales, bien porque convenga considerar la elongabilidad de éstos.

Las fuerzas (') se deducen por las mismas fórmulas del Apartado 1. Los movimientos (") son, ahora, los derivados de  $u_n''$ ,  $v_n''$ ,  $\omega_n''$ , o sea:

$$u_{mn}'' = u_n'' + b \omega_n'' \quad v_{mn}'' = v_n'' + a \omega_n'' \quad \omega_{mn}'' = \omega_n''$$

siendo, como antes,  $a$ ,  $b$ , las coordenadas del nudo  $n$  respecto a los ejes coordinados de la pieza (que pasan por el centro elástico de ésta).

Siendo estos movimientos los producidos por las fuerzas ("") aplicadas en los extremos de las piezas con sus extremos opuestos empotrados, se ha de tener, según [3.2]:

$$\left. \begin{aligned} X_{mn}'' &= -(K_x)_{mn} u_n'' - (K_{xy})_{mn} v_n'' - (b K_x - a K_{xy})_{mn} \omega_n'' \\ Y_{mn}'' &= -(K_{xy})_{mn} u_n'' - (K_y)_{mn} v_n'' - (b K_{xy} - a K_y)_{mn} \omega_n'' \\ M''_{mn} &= \left( \frac{1}{\Phi} \right)_{mn} \omega_n'' \end{aligned} \right\} \quad [4.1]$$

Es decir, que conviene descomponer el sistema en tres; uno:

$$(X_u'')_{mn} = -(K_x)_{mn} u_n'' \quad (Y_u'')_{mn} = -(K_{xy})_{mn} u_n'' \quad (M_u'')_{mn} = 0$$

que produce solamente una traslación  $u_n''$  de la estrella; un segundo,

$$(X_v'')_{mn} = -(K_{xy})_{mn} v_n'' \quad (Y_v'')_{mn} = -(K_y)_{mn} v_n'' \quad (M_v'')_{mn} = 0$$

que produce sólo la traslación  $v_n''$ ; y un tercero,

$$\begin{aligned} (X_w'')_{mn} &= -(b K_x - a K_{xy})_{mn} \omega_n'' = -(C_x)_{mn} \omega_n'' \\ (Y_w'')_{mn} &= -(b K_{xy} - a K_y)_{mn} \omega_n'' = -(C_y)_{mn} \omega_n'' \\ (M_w'')_{mn} &= \left( \frac{1}{\Phi} \right)_{mn} \omega_n'' \end{aligned}$$

que produce el giro  $\omega_n''$  de toda la estrella alrededor de su centro.

De estos grupos de ecuaciones se obtienen las igualdades

$$\begin{aligned} -u_n'' &= \left( \frac{X_u''}{K_x} \right)_{mn} = \left( \frac{Y_u''}{K_{xy}} \right)_{mn} = \dots = \frac{\Sigma_n X_u''}{\Sigma_n K_x} = \frac{\Sigma_n Y_u''}{\Sigma_n K_{xy}} = \dots = \frac{\Sigma_n (b X_u'' - a Y_u'')}{\Sigma_n C_x} \\ -v_n'' &= \left( \frac{X_v''}{K_{xy}} \right)_{mn} = \left( \frac{Y_v''}{K_y} \right)_{mn} = \dots = \frac{\Sigma_n X_v''}{\Sigma_n K_{xy}} = \frac{\Sigma_n Y_v''}{\Sigma_n K_y} = \dots = \frac{\Sigma_n (b X_v'' - a Y_v'')}{\Sigma_n C_y} \\ -\omega_n'' &= \left( \frac{X_w''}{C_x} \right)_{mn} = \frac{\Sigma_n X_w''}{\Sigma_n C_x} = \left( \frac{Y_w''}{C_y} \right)_{mn} = \frac{\Sigma_n Y_w''}{\Sigma_n C_y} = -\left( \frac{M_w''}{1/\Phi} \right)_{mn} = -\frac{\Sigma_n M_w''}{\Sigma_n 1/\Phi} = \dots = \\ &= -\frac{\Sigma_n (b X_w'' - a Y_w'' + M_w'')}{\Sigma_n (b C_x - a C_y - 1/\Phi)} = -\frac{\Sigma_n Z_w''}{\Sigma_n C_z} \end{aligned}$$

siendo:

$$Z_w'' = (b X_w'' - a Y_w'' + M_w'')_{mn}$$

$$C_z = \left( b C_x - a C_y - \frac{1}{\Phi} \right)_{mn}$$

De las igualdades anteriores se deduce:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_n X_u'' &= -u_n'' \Sigma_n K_x & \Sigma_n Y_u'' &= -u_n'' \Sigma_n K_{xy} \\
 \Sigma_n X_v'' &= -v_n'' \Sigma_n K_{xy} & \Sigma_n Y_v'' &= -v_n'' \Sigma_n K_y \\
 \Sigma_n X_\omega'' &= -\omega_n'' \Sigma_n C_x & \Sigma_n Y_\omega'' &= -\omega_n'' \Sigma_n C_y \\
 \Sigma_n (b X_u'' - a Y_u'') &= -u_n'' \Sigma_n C_x & \Sigma_n Z_\omega'' &= -\omega_n'' \Sigma_n C_z \\
 \Sigma_n (b X_v'' - a Y_v'') &= -v_n'' \Sigma_n C_y & \Sigma_n M_\omega'' &= \omega_n'' \Sigma_n \frac{1}{\Phi}
 \end{aligned}$$

Introduciendo estos valores en las ecuaciones de equilibrio, que son ahora:

$$\begin{aligned}
 -X_n' &= \Sigma_n X_u'' + \Sigma_n X_v'' + \Sigma_n X_\omega'' \\
 -Y_n' &= \Sigma_n Y_u'' + \Sigma_n Y_v'' + \Sigma_n Y_\omega'' \\
 -M_n' &= \Sigma_n (b X_u'' - a Y_u'') + \Sigma_n (b X_v'' - a Y_v'') + \Sigma_n Z_\omega''
 \end{aligned}$$

se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}
 X_n' &= u_n'' \Sigma_n K_x + v_n'' \Sigma_n K_{xy} + \omega_n'' \Sigma_n C_x \\
 Y_n' &= u_n'' \Sigma_n K_{xy} + v_n'' \Sigma_n K_y + \omega_n'' \Sigma_n C_y \\
 M_n' &= u_n'' \Sigma_n C_x + v_n'' \Sigma_n C_y + \omega_n'' \Sigma_n C_z
 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema y haciendo

$$\begin{aligned}
 A_n &= \Sigma_n C_x + \Sigma_n C_y - \Sigma_n C_z - \Sigma_n K_{xy} \\
 B_n &= \Sigma_n C_x + \Sigma_n K_y - \Sigma_n C_y + \Sigma_n K_{xy} \\
 D_n &= \Sigma_n C_x + \Sigma_n K_{xy} - \Sigma_n C_y + \Sigma_n K_x \\
 G_n &= (\Sigma_n K_{xy})^2 - \Sigma_n K_x \cdot \Sigma_n K_y \\
 S_n &= A_n G_n - B_n D_n
 \end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
 u_n'' &= \frac{-A_n \Sigma_n K_y + B_n \Sigma_n C_y}{S_n} X_n' + \frac{A_n \Sigma_n K_{xy}}{S_n} Y_n' - \frac{B_n \Sigma_n K_{xy}}{S_n} M_n' \\
 v_n'' &= \frac{A_n \Sigma_n K_{xy}}{S_n} X_n' - \frac{A_n \Sigma_n K_x + D_n \Sigma_n C_x}{S_n} Y_n' + \frac{D_n \Sigma_n K_{xy}}{S_n} M_n' \\
 \omega_n'' &= -\frac{B_n \Sigma_n K_{xy}}{S_n} X_n' + \frac{B_n \Sigma_n K_x + G_n \Sigma_n C_x}{S_n} Y_n' - \frac{G_n \Sigma_n K_{xy}}{S_n} M_n'
 \end{aligned}$$

Por último, introduciendo estos valores en [4.1], se tienen, para las dis-

tintas componentes del sistema ("") en una punta de la estrella, las expresiones:

$$\begin{aligned} X_{mn}'' &= (X_u'' + X_v'' + X_\omega'')_{mn} = -(K_x)_{mn} u_n'' - (K_{xy})_{mn} v_n'' - (C_x)_{mn} \omega_n'' \\ Y_{mn}'' &= (Y_u'' + Y_v'' + Y_\omega'')_{mn} = -(K_{xy})_{mn} u_n'' - (K_y)_{mn} v_n'' - (C_y)_{mn} \omega_n'' \\ M_{mn}'' &= (M_\omega'')_{mn} = \left(\frac{1}{\Phi}\right)_{mn} \omega_n'' \end{aligned}$$

Como siempre, el sistema ("") es igual y contrario a éste y aplicado en cada pieza sobre el extremo opuesto a aquél en que actúa la correspondiente fuerza ("").

### 5. CASO DE PIEZAS CON ARTICULACIÓN

Si alguna de las piezas está articulada, por un extremo y empotra la por el otro (figura 3) en el nudo correspondiente, resultan aplicables las fórmulas y el método expuesto en los Apartados anteriores, sin más variación

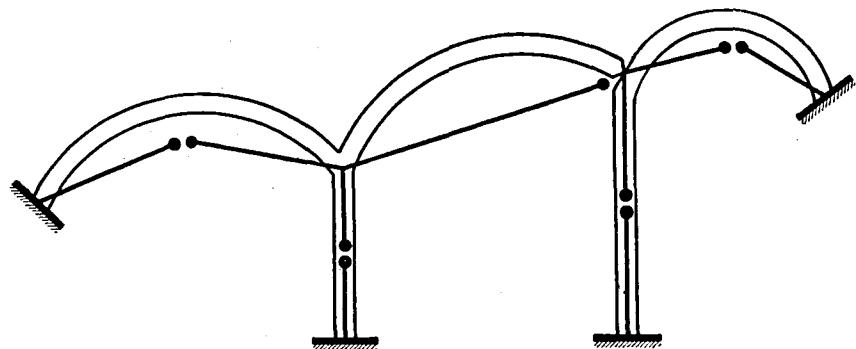


Fig. 3.

que la de llevar su origen de coordenadas a la articulación; por tanto, la estrella del nudo sobre el cual se empotra, tiene un brazo cuya punta llega hasta la articulación. Las fórmulas de las que se arranca son las mismas, sin más que cambiar los subíndices  $x, y$ , por  $x, y$ , para indicar que todos los valores se refieren a los nuevos ejes que no pasan por el centro elástico de la pieza.

El cálculo de los valores ('') se hace, pues, con arreglo al Apartado 1 y con los valores reales de la pieza. Para el cálculo de los valores ("") y siguientes se debe considerar que, en el nudo  $n$  sobre el cual la pieza  $mn$  presenta la articulación,  $\omega_{nm}$  no es ya igual a  $\omega_n$ , pero como en el extremo  $n$  de la pieza  $mn$  resulta

$$a = b = C_x = C_y = C_z = 0$$

y  $M_{mn}$  debe ser nulo, basta considerar  $\frac{1}{\Phi} = 0$  para que resulte  $M_{mn} = 0$  y las ecuaciones y expresiones estudiadas siguen siendo válidas por anularse todos los términos en que intervenía  $\omega_{nm}$ ; y como, por otra parte, se sabe que  $M_{nm} = 0$ , el problema sigue determinado y resoluble en la misma forma.

En el extremo  $m$  opuesto también queda todo válido considerando  $\frac{1}{\Phi} = 0$  en esa pieza ( $mn$ ), porque  $M'_{\omega}$  es nulo. Por efecto de las traslaciones generales de la estrella o de las particulares de sus puntas por efecto del giro, se ve claramente que todos los razonamientos y fórmulas son los mismos; por efecto, del giro, en sí, de la punta de la estrella que va a coincidir con la articulación no se produce deformación ninguna en la pieza y por tanto se comprende que el momento a aplicar sea nulo, como corresponde a un giro alrededor de la articulación; y a esta anulación de  $M''_{\omega}$  se llega considerando  $\frac{1}{\Phi} = 0$  en las fórmulas y ecuaciones establecidas.

Si la pieza está articulada por ambos extremos pueden calcularse los valores (') como se indicó en el Apartado 1. Para el cálculo de los valores (") y siguientes ha de hacerse

$$a = b = C_x = C_y = C_z = \frac{1}{\Phi} = 0$$

en ambos extremos por lo mismo que se dijo últimamente.

Si las articulaciones no están a nivel (figura 4) se toma, para el cálculo

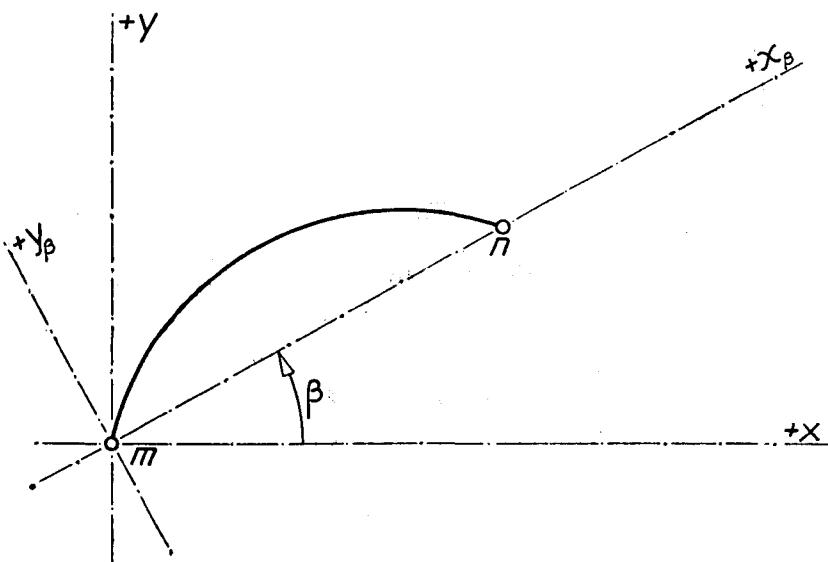


Fig. 4.

de los valores ('), el eje  $x_\beta x_\beta$  pasando por las articulaciones y una vez deducidas las reacciones, se hallan sus componentes según los ejes generales de la estructura mediante las conocidas fórmulas de transformación:

$$X' = X_\beta' \cos \beta - Y_\beta' \sin \beta \quad Y' = X_\beta' \sin \beta + Y_\beta' \cos \beta$$

En estos casos los valores de  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_{xy}$  a introducir para la deducción de los valores ('') y siguientes son:

$$K_x = K_{x_\beta} \cos^2 \beta \quad K_y = K_{x_\beta} \sin^2 \beta \quad K_{xy} = K_{x_\beta} \sin \beta \cos \beta$$

siendo

$$K_{x_\beta} = \frac{1}{\int_{cd}^{ef} (y^2 d\varphi + \cos^2 \alpha d\epsilon)_{x_\beta}}$$

La justificación de estos valores puede hacerse en la siguiente forma: Si

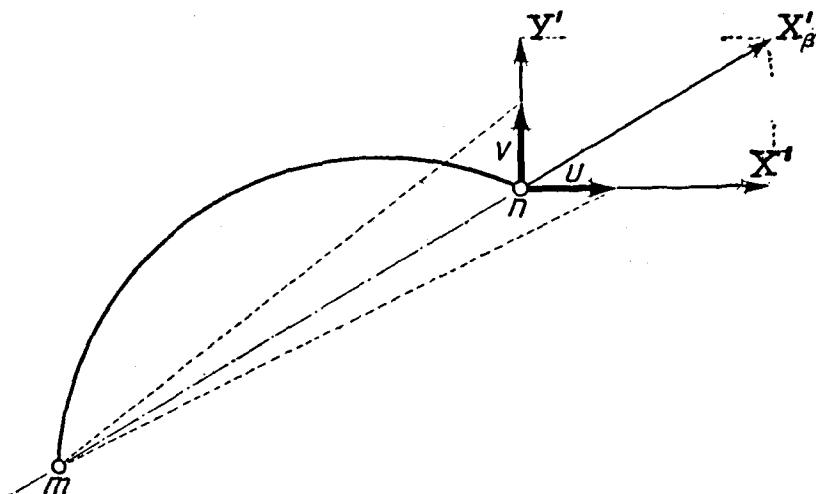


Fig. 5.

el extremo  $n$  sufre (figura 5), respecto al  $m$ , una traslación  $u$ , el alargamiento total de la longitud  $mn$  es  $u_\beta = u \cos \beta$  y se tiene:

$$u \cos \beta = - \frac{X_{u\beta}}{K_{x_\beta}}$$

Por tanto:

$$X_u' = X_{u\beta} \cos \beta = - u K_{x_\beta} \cos^2 \beta$$

$$Y_u' = X_{u\beta} \sin \beta = - u K_{x_\beta} \sin \beta \cos \beta$$

Para una traslación  $v$  resulta análogamente:

$$v \operatorname{sen} \beta = - \frac{X'_{v\beta}}{K_{x\beta}}$$

$$X'_{v\beta} = X'_{v\beta} \cos \beta = - v K_{x\beta} \operatorname{sen} \beta \cos \beta$$

$$Y'_{v\beta} = X'_{v\beta} \operatorname{sen} \beta = - v K_{x\beta} \operatorname{sen}^2 \beta$$

En consecuencia:

$$u = - \frac{X'_u}{K_{x\beta} \cos^2 \beta} = - \frac{Y'_u}{K_{x\beta} \operatorname{sen} \beta \cos \beta} \quad v = - \frac{X'_{v\beta}}{K_{x\beta} \operatorname{sen} \beta \cos \beta} = - \frac{Y'_{v\beta}}{K_{x\beta} \operatorname{sen}^2 \beta}$$

Se ve, pues, que en las igualdades [1.1] basta sustituir  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_{xy}$ , respectivamente, por  $K_{x\beta} \cos^2 \beta$ ,  $K_{x\beta} \operatorname{sen}^2 \beta$ ,  $K_{x\beta} \operatorname{sen} \beta \cos \beta$ , para que todos los razonamientos y desarrollos sigan siendo válidos.

En este caso, aún cuando no coincide un extremo de pieza con el otro por no haberse prolongado la pieza mediante barras rígidas, el sistema ("") y lo mismo los (\*), etc., también resulta  $X_m''' = - X_n''$ ,  $Y_m''' = - Y_n''$  por estar la resultante  $X_\beta''$  sobre las rectas que une las rótulas.