MEMORIAS
DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FISICAS Y NATURALES
DE
MADRID

SERIE DE CIENCIAS EXACTAS

TOMO XX

FAMILIAS DE SUBGRUPOS ESPECIALES DE GRUPOS FINITOS

POR

Juan Sancho de San Román

MADRID
DOMICILIO DE LA ACADEMIA
VALVERDE, 22 - TELEFONO 221 25 29
1985

Depósito Legal: M. 33.638 - 1986
REALIGRAF, S. A. - Burgos, 12 - 28039 Madrid

MEMORIAS
DE LA
REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES
DE
MADRID

SERIE DE CIENCIAS EXACTAS

TOMO XX

El presente texto corresponde a una conferencia pronunciada el 19 de enero de 1.983.

FAMILIAS DE SUBGRUPOS ESPECIALES DE GRUPOS FINITOS

Excelentísimos Señores Académicos, Señoras y Señores:

Quiero que mis primeras palabran sean para agradecer a los miembros de esta Ilustre Corporación, el honor que me hicieron al nombrarme Académico Corresponsal de la misma. Deseo decirles que estimo en mucho tal distinción y que desearía corresponder en consecuencia. No sé si mi capacidad estará a la altura que se merece esta Real Academia, pero intentaré que sí lo esté mi leal y sincera colaboración.

El tema de mi conferencia pertenece a la Teoría de Grupos.

La Teoría de Grupos es hoy un instrumento necesario en cualquier parte de la Matemática, en muchas de la Física y en bastantes de la Química y de las Ciencias Naturales. En algunas de ellas, su aplicación ha sido fundamental para el desarrollo de la materia en cuestión, como sucede en Física de partículas, en Estructura molecular, o en Cristalografía, por citar algunos ejemplos que no sean de Matemática pura.

Una vez descubierto el concepto de grupo, llamado al principio grupo abstracto, este aparece por doquier, mostrando ser una de las creaciones más unificadoras de la Matemática. Esto se ve ya desde las primeras ideas matemáticas del hombre: el número y el espacio. En efecto, los números enteros constituyen un grupo y los enteros pares un subgrupo del anterior; los movimientos del espacio forman un grupo y las traslaciones un subgrupo del mismo. Qué decir de los conceptos matemáticos actuales: que resulta difícil encontrar uno que no tenga un grupo en su composición.

Es realmente curioso, comprobar la enorme variedad de ejemplos de grupos que se encuentran en la Ciencia y en la Naturaleza, y que han salido a la luz con más o menos espontaneidad. Lo mismo aparecen en una ecuación algebraica, que en la estructura de una molécula, que en el dibujo de un mosaico de La Alhambra.

Esta omnipresencia del grupo en el mundo matemático y en el mundo físico, no ha sido sin embargo la causa principal de su desarrollo. Es claro que algunos problemas de la Ciencia experimental han impulsado ciertos capítulos de la Teoría de grupos;esto ha sucedido con casi todas las teorías de la Matemática. Pero el enorme desarrollo de la actual Teoría de grupos se debe en gran parte a su propia fuerza creadora, y es curioso notar que no comienza realmente hasta la década de los cuarenta, después de unos 50 años de ostracismo, pues por ejemplo, el libro de BURNSIDE sobre Teoría de Grupos Finitos se publicó en 1897.

Los grupos finitos son el origen de la Teoría general. La creación del concepto de grupo, debida al genio de GALOIS sobre 1830, surge cuando éste estudia los grupos finitos a que dan lugar las raíces de una ecuación algebraica. Pero la razón principal para destacar a la teoría particular de grupos finitos dentro de la general, reside en que la mayoría de las cuestiones sobre grupos infinitos se han estudiado primero en los finitos, siendo práctica corriente tantear los problemas en el caso finito antes de pasar al general.

Y de grupos finitos vamos a hablar. Como sucede en toda Teoría de un concepto matemático dado, el problema fundamental es hallar todos los casos particulares del concepto, no isomorfos. Aquí diríamos, un poco informalmente: hallar todos los grupos finitos distintos posibles, usando la palabra "distintos" para indicar no isomorfos.

A pesar de que eso de hallar **todos** parece una meta demasiado ambiciosa, hay casos en que se ha alcanzado sin excesivos obstáculos. Por ejemplo, sin salir de nuestros grupos finitos, en el caso particular de los abelianos, esta meta se alcanzó hace ya unos cien años. Pero en el caso general, la meta se ve lejana, muy lejana, a pesar del largo camino ya recorrido. Un botón de muestra: es fácil ver que dado un número natural **n** cualquiera, se pueden construir grupos de **n** elementos, esto es, grupos de orden **n**. Pero falta por saber todavía cuantos grupos hay distintos de orden **n**.

Como todo problema de clasificación, el nuestro conduce a estos dos: 1^0) determinar un grupo a partir de algunos de sus subgrupos, y 2^0) obtener la colección completa de los grupos más "pequeños" entre-comillas, entendiendo por tales a los grupos simples.

Vamos a fijarnos en el primero. Para considerarlo resuelto, habría que probar que todo grupo posee una familia o familias de subgrupos y unas relaciones entre ellas, suficientes para caracterizarle. Además, las familias y las relaciones deberían ser canónicas, esto es, definibles unívocamente.

En la práctica, la caracterización de un grupo mediante algunos subgrupos y relaciones estructurales, viene acompañada por ciertas propiedades globales que debe cumplir el grupo en cuestión.

Un ejemplo típico puede ser el siguiente /1/:

Sea G un grupo finito que tiene estas propiedades:

1) los subgrupos de Sylow de G, de orden potencia de 2, son abelianos.

2) G no posee subgrupos de índice 2.

3) G contiene una involución t ($t^2 = 1$) tal que el centralizador de t es el producto directo del subgrupo engendrado por t por un grupo isomorfo al alternado A_5.

Pues bien, entonces G es isomorfo al grupo de Janko J_1.

Este J_1 es un grupo simple de orden 175.560 descubierto por JANKO en 1965.

La caracterización de un grupo, o al menos un conocimiento parcial del mismo, apoyándose en la existencia de familias canónicas de subgrupos, es un método de investigación que se ha manejado sobre todo en el caso de grupos simples, véase el ejemplo anterior, y en el de los resolubles.

Los grupos resolubles son los más cómodos de estudiar y por ello los mejor conocidos. Su denominación proviene de la época del nacimiento de la teoría de grupos, cuando Galois, estudiando las ecuaciones algebraicas cuyas raíces fuesen expresables por radicales, consideradas así como resolubles, demostró que una ecuación era tal, si su grupo G de Galois posee una cadena de subgrupos de 1 a G, cada uno normal en el siguiente, cuyos factores sean cíclicos. Debido a esto, todo grupo con esa propiedad se dice resoluble.

A pesar de que la propiedad definidora parece muy restrictiva, los grupos resolubles constituyen una clase muy grande, e incluso puede asegurarse que son mayoría. En efecto, el Teorema de Feit-Thompson /2/, publicado en 1963, demuestra que todo grupo finito de orden impar es resoluble, y como también lo son muchos de orden par, la mayoría es evidente. Si bien es de notar, a título anecdótico-científico, que la demostración de FEIT-THOMPSON ocupa 274 páginas, que pocos matemáticos aseguran haberla estudiado y aceptado, y que no ha sido abreviada que sepamos. Por lo cual, el resultado de Feit-Thompson, aún hoy, solo es utilizado cuando no hay más remedio, no obstante ser aceptado sin reservas por los mejores especialistas en la materia.

En un grupo resoluble se han encontrado diversas familias canónicas de subgrupos especiales, que constituyen un medio interesante para el estudio de la estructura del grupo. En orden cronológico, las primeras, formadas por subgrupos de Sylow, datan de 1872, y las últimas son parte de una teoría que comienza en la década de los 60. Los métodos inventados y desarrollados para establecer su existencia y estudiar sus propiedades, constituyen hoy un cuerpo de doctrina coherente y que continúa creciendo. Por otra parte, admite extensiones naturales al caso de grupos próximos a los resolubles, como son los π-resolubles, donde π es un conjunto de números primos.

Dar una idea del nacimiento y evolución de este cuerpo de doctrina será el objeto de mi conferencia.

I. Teoría de Sylow.

Esta conocida teoría es aplicable a un grupo finito cualquiera, resoluble o no, y su resultado de arranque es el siguiente, publicado por SYLOW en 1872:

Sea G un grupo finito de orden **n**, p un número primo divisor de n, y p^a la máxima potencia de p que divide a **n**. Entonces G posee algún subgrupo de orden p^a, y si posee varios son conjugados en G y por ello componen una familia de conjugación de subgrupos.

A cualquiera de estos se le llama hoy p-subgrupo de Sylow de G.

Se tiene así una familia canónica de p-subgrupos para cada primo p, siendo triviales cuando p no divida al orden del grupo.

Entre las propiedades principales de dicha familia, queremos destacar las siguientes:

1) Cualquier p-subgrupo de G, es decir, cualquier subgrupo de orden potencia de p, está contenido en algún p-subgrupo de Sylow de G. Se sigue que cada p-subgrupo de Sylow es p-maximal en G.

2) Si N es un subgrupo normal de G y S_p un p-subgrupo de Sylow, la intersección de N y S_p es un p-subgrupo de Sylow de N. Además, el grupo cociente N por S_p partido por N es p-subgrupo de Sylow del cociente G partido por N. En resumen, la propiedad de ser p-subgrupo de Sylow se hereda por intersección y por paso al cociente.

3) Sea U un subgrupo de G que contiene a un p-subgrupo de Sylow S_p. Entonces, si un grupo cociente U sobre K es p-grupo, U es el producto de K por S_p, y se dice que S_p **cubre** a dicho cociente.

También son de resaltar algunas propiedades que poseen los normalizadores de los p-subgrupos de Sylow de un grupo G. El normalizador de un S_p es el máximo subgrupo de G para el cual S_p es subgrupo normal. Citemos las que siguen.

1) Si U es un subgrupo de G que contiene a un normalizador de un S_p, dicho U coincide con su propio normalizador N(U), lo cual se expresa brevemente diciendo que es autonormalizante. En particular, los normalizadores de los p-subgrupos de Sylow son autonormalizantes.

2) La intersección de los normalizadores de todos los p-subgrupos de Sylow de un grupo G es igual a la intersección de todos los subgrupos autonormalizantes de G. Dicha intersección es un subgrupo notable de G, el **hipercentro.**

Vamos a citar un ejemplo, tomado de los grupos finitos lineales. Un tal grupo es el formado por las matrices cuadradas n por n inversibles, sobre un cuerpo finito. Si el número de elementos del cuerpo es q, se sabe que q es potencia de primo. Así, el grupo lineal de grado **n** sobre el cuerpo de p^m elementos, es el grupo lineal general del espacio vectorial de dimensión **n** sobre el cuerpo mencionado.

Pues bien, un p-subgrupo de Sylow del grupo anterior, es el formado por las matrices triangulares cuyos términos por debajo de la diagonal principal son ceros, y cuya tal diagonal está formada por unos. Recibe el nombre de grupo triangular unitario. Los demás p-subgrupos de Sylow son los conjugados de este.

II. Teoría de Hall.

Es aplicable a cualquier grupo resoluble, aunque algunos de sus resultados son válidos para un grupo arbitrario.

En la década de los años treinta, publica PHILLIP HALL sus trabajos fundamentales sobre esta teoría, partiendo de la idea siguiente. Un p-subgrupo S_p de Sylow de un grupo G, puede caracterizarse por estas dos propiedades: 1ª) tiene orden potencia de p, y 2ª) el índice de S_p respecto de G, esto es, el cociente de los órdenes de G y S_p, es un número primo con p.

Si sustituimos el primo p por un conjunto π de primos, se obtiene un concepto que generaliza el de Sylow, consistente en un subgrupo H de G que cumple: 1º) tiene un orden cuyos factores primos están en π, y 2º) el índice de H respecto de G es un número cuyos factores primos no están en π, y por ello es primo con el orden de H.

Un tal subgrupo se dice hoy subgrupo de Hall de G, o π-subgrupo de Hall si se desea precisar.

El resultado inicial de la teoría es éste:

Sea G un grupo finito resoluble de orden **n**, y **m** un divisor de n tal que el cociente n/m es primo con **m**. Entonces, G posee algún subgrupo de orden m, y si posee varios, son conjugados en G.

Con lenguaje de π-grupos (grupos cuyo orden tiene todos sus factores primos en π), el resultado anterior se puede expresar así:

Para cada conjunto de primos π, todo grupo G finito resoluble posee algún π-subgrupo de Hall, y si posee varios, son conjugados.

En efecto, dado π, basta hallar el máximo divisor **m** del orden de G cuyos factores primos estén en π.

De este modo se tiene que, para cada conjunto π de números primos, todo grupo finito resoluble posee una familia canónica de π-subgrupos de Hall, que será trivial cuando π no contenga ningún divisor del orden del grupo.

Es notable el hecho de que se cumple el recíproco del resultado anterior, esto es, que si un grupo finito G posee algún π-subgrupo de Hall para cada conjunto π de primos, es resoluble.

Este recíproco puede afinarse, pues para que G sea resoluble, basta que posea π_i-subgrupos de Hall para los conjuntos π_1, ..., π_r de primos que resultan de suprimir en el conjunto [p_1, ..., p_r] de primos divisores del orden de G, el p_1, el p_2, ..., el p_r. Notemos que el π_1-subgrupo de Hall es complemento del p_1-subgrupo de Sylow, y se dice que es un p_1-complemento de Sylow de G. Con este lenguaje, se puede decir que un G finito es resoluble si posee algún p-complemento de Sylow para cada primo p.

Fijado un π, la familia canónica de π-subgrupos de Hall citada, posee diversas propiedades análogas a las de los p-subgrupos de Sylow. En particular, las análogas a las mencionadas en el apartado anterior, que enunciamos brevemente a continuación.

1) Cualquier π-subgrupo de G está contenido en algún π-subgrupo de Hall, y por ello cada π-subgrupo de Hall es π-maximal en G.

2) La propiedad de ser π-subgrupo de Hall es hereditaria para la intersección con un subgrupo normal y para el paso al cociente.

3) Sea U un subgrupo de G que contiene a un π-subgrupo de Hall S_π. Entonces, si un grupo cociente de U sobre K es π-subgrupo, U = K por S_π.

También los normalizadores de los π-subgrupos de Hall tienen propiedades similares a los de los p-subgrupos de Sylow.

Por ejemplo, si U es un subgrupo de G que contiene al normalizador de un S_π, dicho U es autonormalizante. En particular, lo es el normalizador de S_π.

Tanto la teoría de Hall como la de Sylow, establecen la existencia de subgrupos de un grupo finito G, de ciertos órdenes, naturalmente divisores del orden del grupo. La de Sylow nos dice que existen subgrupos de orden p^a para cualquier p^a divisor del orden de G; la de Hall, que existen de orden **m** para cualquier número **m** divisor del orden **n** de G tal que el cociente n/m sea primo con **m**, si G es resoluble.

En resumen, un grupo finito resoluble posee subgrupos de muchos órdenes divisores del suyo, pero en general no de todos. Es decir, no cumple el recíproco del teorema de Lagrange. Pero merece señalarse que está cerca de cumplirlo, ya que McLain demostró /3/ en 1957 que si G es resoluble, existe un grupo abeliano A tal que el grupo producto directo de G por A cumple dicho recíproco.

III. Normalizadores de sistemas.

La teoría de Hall dio nacimiento, además de a los subgrupos de su nombre, a una notable familia canónica de subgrupos de un grupo resoluble, que vamos a considerar.

Recordemos que un grupo resoluble G posee al menos un p-complemento de Sylow para cada número primo p, pudiendo limitarnos a los que sean divisores del orden de G. Sea K_1,..., K_r un sistema completo de tales complementos, esto es, uno por cada p, al que llamaremos por brevedad un **sistema de complementos.**

Un tal sistema está íntimamente relacionado con un conjunto $S_1,\dots, S_r$ de p-subgrupos de Sylow de G, uno para cada primo p, de modo que cada dos S_i son permutables respecto del producto. Un tal conjunto se dirá que es una **base de Sylow** de G. Pues bien, si a partir del sistema de complementos anterior, definimos el subgrupo S_1 como la intersección de todos los K_i menos el K_1, y en general el S_j como la de los K_i menos el K_j, se obtiene un conjunto $S_1,\dots, S_r$ que es una base de Sylow.

Recíprocamente, esta base de Sylow permite definir el sistema de complementos del cual procede, pues K_j es igual al producto de todos los S_i menos el S_j.

Dado un sistema de complementos K de G, se dice **normalizador de sistema** de G al subgrupo definido como intersección de los normalizadores de todos los K_i de K, que es igual a la intersección de los normalizadores de los S_i de la base de Sylow S asociada a K. Por ello, dicho subgrupo se suele escribir N(S) o N(K) indistintamente.

El resultado principal sobre el concepto es que todos los normalizadores de sistemas de G son conjugados, esto es, constituyen una clase de conjugación de subgrupos. Se ha obtenido así una familia canónica de subgrupos de G, distinta en general de las anteriores.

Entre las propiedades de los subgrupos de dicha familia, queremos citar las siguientes.

1) Un normalizador N de sistema es nilpotente, esto es, existe una cadena de subgrupos de 1 a N, cada uno normal en el siguiente, cuyos factores H/M son **centrales**, lo cual significa que H/M está contenido en el centro de N/M.

2) Si es N(K) el normalizador del sistema K de un grupo G, y N un subgrupo normal de G, el grupo cociente N(K)N/N es normalizador de sistema de G/N, y precisamente del sistema de complementos KN/N de G/N.

3) Cualquier normalizador de sistema de G no está contenido en ningún subgrupo normal propio de G. En cambio, cada subgrupo maximal no normal de G, contiene al menos un normalizador de sistema.

Aparte merecen considerarse las propiedades que poseen los normalizadores de sistema respecto de los factores principales del grupo G. Sabemos que éstos están determinados salvo isomorfismos, y que dicen mucho sobre la estructura del grupo. Baste mencionar que los conceptos fundamentales de grupo resoluble, nilpotente, supersoluble, se refieren exclusivamente a propiedades de los factores principales.

Un factor principal H/M se dice **excéntrico** si no es central, esto es, si no está contenido en el centro de G/M. Pues bien, cada normalizador de sistema de G **cubre** a cualquier factor principal central y **evita** a cualquier factor principal excéntrico. Recordemos que se dice que N cubre a H/M cuando H está contenido en N por M. Y se dice que lo evita si $N \cap H$ está en M, lo cual indica que los cogrupos de $N \cap H$ módulo M son triviales.

IV. Subgrupos de Carter.

En un trabajo publicado en 1961 /4/, el matemático inglés CARTER establece la existencia de una nueva familia canónica de subgrupos de un grupo resoluble, utilizando exclusivamente la estructura normal del mismo, sin conectarla con la aritmética como se hace en los casos anteriores.

Carter demuestra que todo grupo resoluble G posee subgrupos nilpotentes autonormalizantes, y que constituyen una familia de conjugación en G, por lo tanto canónica. Estos subgrupos son conocidos con el nombre de **subgrupos de Carter** de G.

Tienen una relación muy estrecha con los normalizadores de sistemas, como veremos enseguida.

Pero en la línea en que nos movemos, lo que les hace especialmente interesantes es que juegan un papel, entre los subgrupos nilpotentes de G, análogo al que juegan los p-subgrupos de Sylow entre los p-subgrupos de G. En particular, cumplen:

1) Son subgrupos nilpotentes maximales.

2) Si U es un subgrupo de G que contiene a un subgrupo C de Carter, y el grupo cociente U sobre K es nilpotente, entonces es U = K por C.

3) Si N es subgrupo normal de G, y C es de Carter, entonces CN/N es subgrupo de Carter de G sobre N.

El descubrimiento de Carter tiene sin duda sus raíces en la teoría de Algebras de Lie, donde en el caso clásico de cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, se sabía que poseen subálgebras nilpotentes autonormalizantes, las llamadas subálgebras de Cartan. Claro que aquí no es preciso que el álgebra de Lie sea resoluble para asegurar que posee subálgebras de Cartan, lo cual sí es necesario en el caso de grupos finitos. Por ello, la analogía entre dichas subálgebras y los subgrupos de Carter, no va mucho más allá de su definición.

La relación que tienen con los normalizadores de sistemas se pone de manifiesto en una serie de resultados, de los que destacamos los siguientes:

1) Si G es un grupo que posee un subgrupo normal N nilpotente tal que el grupo cociente G sobre N también lo es, o dicho técnicamente, si G es extensión de nilpotente

por nilpotente, los normalizadores de sistemas de G son también sus subgrupos de Carter. En particular ésto sucede si G es supersoluble, pues en tal caso, el subgrupo G' derivado de G es nilpotente, y el cociente G sobre G' se sabe siempre abeliano, luego nilpotente.

2) Cada subgrupo de Carter de un G resoluble contiene al menos un normalizador de sistema de G. Se sigue que, recíprocamente, cada normalizador de sistema está contenido en al menos un subgrupo de Carter, ya que ambas familias son clases de conjugación.

En un trabajo de Alperin /5/, dado un subgrupo C de Carter y un normalizador de sistema D contenido en C, se da el número de éstos contenidos en C, y el número de aquéllos que contienen a D, en función de C y del normalizador de D en G.

Otra propiedad notable de cualquier subgrupo de Carter es la de ser abnormal. Un subgrupo U de un grupo G se dice **abnormal**, si para todo elemento **a** de G, **a** pertenece al grupo engendrado por U y el conjugado U^a. Recordemos que en el caso de U normal, esto sucede solamente si **a** es un elemento de U.

Se deduce de lo anterior que un G resoluble posee más de un subgrupo de Carter, excepto si G es nilpotente, caso trivial en el que solo hay un subgrupo de Carter que es el mismo G.

V. F–subgrupos o Proyectores.

El matemático alemán GASCHÜTZ, estudiando la demostración de Carter para la obtención de los subgrupos de su nombre, observó que se apoya únicamente en ciertas propiedades que posee el conjunto de los grupos finitos nilpotentes. Dedujo entonces, que cualquier clase F de grupos que tenga esas propiedades, dará lugar a la existencia, en cualquier grupo resoluble, de subgrupos pertenecientes a F, y que formarán una familia de conjugación.

Al igual que sus precedentes inmediatos, supone siempre que todos los grupos considerados, en particular los de F, son resolubles.

Esta teoría marca un hito muy importante en el tema que nos ocupa, porque es el punto de partida de una verdadera nube de trabajos que de alguna manera se apoyan en dicha teoría. En lo que respecta a los resultados anteriores, muchos aparecen como caso particular del de Gaschütz; así, cuando F es la clase de los p-grupos, salen los p-subgrupos de Sylow, y cuando F es la de los nilpotentes surgen los subgrupos de Carter.

Gaschütz publica su trabajo fundamental en 1963 /6/, cuyas ideas y resultados principales exponemos a continuación, más o menos actualizados.

Las propiedades que observa en la clase de los grupos nilpotentes, suficientes para obtener los subgrupos de Carter, son las siguientes:

1) Si un grupo G pertenece a la clase, cualquier imagen de G por un homomorfismo, también pertenece. En particular, los grupos isomorfos a G y los grupos cociente G sobre N, para cualquier subgrupo normal N de G.

2) Si N_1 y N_2 son dos subgrupos normales de un grupo G, y los grupos cociente G/N_1 y G/N_2 pertenecen a la clase, el cociente $G/N_1 \cap N_2$ también pertenece.

3) Si un grupo G no pertenece a la clase y el cociente G/M sí pertenece, siendo M subgrupo normal minimal de G, entonces M posee al menos un complemento en G, y todos ellos son conjugados.

Lo anterior le lleva a las siguientes definiciones:

Una clase de grupos que posea las propiedades 1) y 2) se dirá una **formación.** Y una formación no vacía que cumpla la propiedad 3) se dirá **saturada.**

Más adelante se vió que esta última propiedad equivale a la siguiente, cuyo enunciado es más simple.

3') Si el grupo cociente G/Φ pertenece a la clase, siendo Φ el subgrupo de Frattini de G, entonces el grupo G también pertenece.

Recordemos que el subgrupo de Frattini de un grupo es la intersección de los subgrupos maximales del mismo.

Siguiendo la analogía con los nilpotentes, y recordando las propiedades características de los subgrupos de Carter, Gaschütz da la siguiente definición:

Siendo F una formación y G un grupo cualquiera (resoluble), se dirá **F-subgrupo** de G a un subgrupo T que cumple: 1) pertenece a F; 2) si T es subgrupo de U y éste lo es de G, cualquier grupo cociente U/K que esté en F es cubierto por T, es decir, U = K por T.

Se sigue inmediatamente que T es maximal entre los subgrupos de G que están en F.

A un tal F-subgrupo se le llama hoy **F-envoltura,** en la terminología alemana, y **F-proyector** en la inglesa que es la más extendida.

Pues bien, el resultado clave de Gaschütz es que si F es una formación saturada, cualquier grupo resoluble G posee algún F-proyector, y que si posee varios, componen una familia de conjugación de G.

Se tienen así, de una vez, tantas familias canónicas de subgrupos conjugados como formaciones saturadas existan, aunque la mayoría pueden quizá reducirse al grupo trivial.

Como era de esperar, los F-proyectores poseen las propiedades básicas de sus precedentes particulares, entre las que merecen destacarse:

1) La cualidad de F-proyector es hereditaria por paso al cociente.

2) Recíprocamente, si T_1/N es un F-proyector del grupo G/N y T es un F-proyector de T_1, entonces también es T un F-proyector de G.

Las clases formadas por los p-grupos, o por los π-grupos, o por los nilpotentes, son formaciones saturadas, y por ello, las familias canónicas de subgrupos respectivas, son casos particulares de las de F-proyectores.

Pero podría pensarse que no existen muchos más ejemplos de formaciones saturadas, añadiendo la de los resolubles y algunas ya conocidas. Sin embargo, en el mismo artículo que estamos glosando se da un método de construcción de formaciones saturadas, mediante un concepto que resultó ser más fecundo todavía que el de saturación: es el de formación local.

Una formación F se dice **local** o **definida localmente**, cuando puede definirse del modo siguiente:

Se da una formación f(p) para cada número primo p. Y se define F como el conjunto de los grupos G que cumplen con la condición de que el grupo de los G-automorfismos de cualquier p-factor principal de G, pertenece a la formación f(p).

Si es H/K un tal factor, el grupo de sus G-automorfismos es isomorfo al cociente de G sobre el centralizador de H/K respecto de G.

La definición parece un tanto rebuscada, pero su origen es bastante natural, ya que un grupo nilpotente viene caracterizado por el hecho de que cualquiera de sus factores principales es central, esto es, su G-centralizador es el grupo G, con lo que sus G-automorfismos se reducen a 1, y por ello, la formación de los grupos nilpotentes viene definida localmente por la función f tal que f(p) = 1 para todo primo p.

Pues bien, Gaschütz prueba que toda formación local es saturada, y como es fácil construir formaciones locales diversas, resulta que el conjunto de formaciones saturadas es muy amplio. Veamos algunos ejemplos interesantes, aparte del nilpotente recién citado, como pequeña muestra de esta gran diversidad.

1^0) Sea p_1 un número primo fijo, y definamos f(p) = vacío para todo $p \neq p_1$, y $f(p_1) = 1$. Entonces se obtiene la formación de los p-grupos, cuyos proyectores son los p-subgrupos de Sylow.

2^0) Sea π un conjunto dado de números primos, y sea f(p) = conjunto de los π-grupos para todo p de π, y f (p) = vacío en caso contrario. Ahora f define la formación de los π-grupos, y los proyectores son los π-subgrupos de Hall.

3^0) Sea f (p) el conjunto de los grupos abelianos cuyo exponente divide a (p-1); entonces f define la formación de los grupos super-resolubles, donde los proyectores de un grupo G son los subgrupos super-resolubles T de G tales que, si T es subgrupo de K, K de H, y H de G, el índice H:K no es primo.

Una observación a destacar en el conjunto de las formaciones locales, es que si f (p) es distinta del vacío para todo p, la formación definida contiene al conjunto de los grupos nilpotentes, ya que al no ser f (p) vacía contiene al grupo 1 trivial. Se sigue que entonces, los proyectores son autonormalizantes, como sucede en el caso particular de Carter, lo que da a éste una importancia especial.

La relación de dependencia entre formación saturada y local quedó totalmente determinada en el mismo año 1963 del trabajo de Gaschütz, ya que en él demostró Lubeseder /7/ que recíprocamente una formación saturada de grupos resolubles es local, y en 1977 Schmid /8/ demuestra lo mismo para una formación saturada de grupos cualesquiera.

VI. F-normalizadores.

En un trabajo publicado en 1967, Carter y Hawkes /9/ establecen la existencia y propiedades de una familia canónica de subgrupos de un G resoluble, deducidos de una formación dada F, como veremos.

Teniendo en cuenta la estrecha relación que hay entre los normalizadores de sistemas de un grupo G y sus subgrupos de Carter, los autores consideran razonable investigar la existencia de una familia de subgrupos definida por una formación local F dada, que coincida con los normalizadores de sistemas en el caso de que F sea la clase de los nilpotentes, y estudiar su relación con los F-proyectores.

En consecuencia, guiados por el concepto original, obtienen definiciones y resultados que responden positivamente a la investigación apuntada.

Al efecto, dada una formación local definida por una función f, se dice que un p-factor principal H/M de un grupo G es **f-central** si el grupo de G-automorfismos de H/M pertenece a la formación f (p). Y se define el subgrupo C_p de G como la intersección de los centralizadores de todos los p-factores principales f-centrales.

Entonces, si (K_p) es un sistema completo de complementos de G, se dice **f-sistema** de G al formado por los subgrupos $T_p = K_p \cap C_p$, para todo p divisor del orden de G. Y se define el **f-normalizador** de G relativo al sistema (K_p), como la intersección de los normalizadores N (T_p) en G.

Por supuesto, se garantiza que los conceptos y subgrupos definidos no dependen de la función f sino de la formación local correspondiente.

Pues bien, como cada dos sistemas de complementos son conjugados en G, lo mismo sucede con los f-normalizadores respectivos, y por ello, éstos constituyen una familia canónica de subgrupos conjugados.

Es inmediato que, si la formación local es la de los nilpotentes, se puede considerar f (p) = 1 para todo p, con lo que f-central se convierte en central, y f-normalizador de G relativo a (K_p) en normalizador del sistema (K_p) de G.

No resulta pues extraño, sino esperado, que las propiedades de los f-normalizadores sean gemelas de las de sus antecesores nilpotentes. Por ejemplo:

1ª) Un f-normalizador es un grupo de la formación dada F.

2ª) Si D es un f-normalizador de G, y N es subgrupo normal de G, entonces DN/N es f-normalizador de G/N.

3ª) Cualquier f-normalizador de G cubre a cada factor principal f-central de G y evita cada factor f-excéntrico.

En cuanto a su relación con los F-proyectores, es también análoga a la que existe entre los normalizadores de sistemas y los subgrupos de Carter. Citemos al respecto, un par de propiedades.

1ª) Si un grupo G posee un subgrupo normal nilpotente N tal que el cociente G/N pertenece a la formación F, los f-normalizadores de G coinciden con los F-proyectores.

2ª) Cada f-proyector de un grupo G resoluble contiene un f-normalizador de G, y cada f-normalizador es subgrupo de algún f-proyector.

En definitiva, dada una formación saturada, quedan definidas dos familias canónicas de subgrupos conjugados. Queda en el aire el problema de saber si siempre existirá una formación para cada familia de conjugación de subgrupos, respecto de la cual sea esta familia una de aquellas dos.

VII. Inyectores.

El concepto de formación de GASCHÜTZ y la teoría correspondiente, ha dado lugar a una teoría que es considerada como "dual" de la primera, escribiendo dual entrecomillas y dando a esta palabra un alcance particular, que solo puede entenderse cuando se va viendo el caso que nos ocupa.

El punto de partida es la Tesis doctoral de FISCHER /10/, leída en 1966, cuyos conceptos básicos son el de clase de Fitting y el de F-inyector (digamos duales del de formación y F-proyector, respectivamente).

Una **clase de Fitting** es un conjunto F de grupos, no vacío, que con cada grupo contiene sus isomorfos, y que posee las propiedades siguientes:

1) Si un grupo pertenece a F, todos sus subgrupos normales también son de F.

2) Si dos subgrupos normales de un grupo G están en F, también está el subgrupo producto de ambos.

De la primera se sigue que si un grupo G es de F, lo son asimismo todos los subgrupos N de G unidos a éste mediante una cadena de subgrupos, cada uno de los cuales es normal en el siguiente. Un tal N se dice subgrupo **subnormal** de G.

De la segunda se deduce que, dado un grupo G, el producto de todos sus subgrupos normales pertenecientes a F es un subgrupo normal máximo entre los anteriores, y se dice **F-radical** de G.

Ahora, se dirá **F-inyector** de G a un subgrupo V del mismo, que cumple: Dado cualquier subgrupo N subnormal de G, el subgrupo $N \cap V$ es F-maximal en N, esto es, maximal entre todos los subgrupos de N contenidos en F.

Pues bien, en un artículo de Fischer, Gaschütz y Hartley /11/ se demuestra que dada cualquier clase de Fitting F, todo grupo G resoluble posee F-inyectores y que éstos son conjugados en G.

De este modo se ha obtenido una nueva familia canónica de subgrupos de un G resoluble, para cada clase de Fitting dada.

La clase C_π de los π-grupos es de Fitting, y se ve enseguida que los C_π-inyectores de un grupo G dado, son sus π-subgrupos de Hall. En particular, si π se reduce a un solo primo p, se tienen de nuevo los p-subgrupos de Sylow.

Pero solo en estos ejemplos especiales y en algunos otros de tipo aritmético, coinciden los F-proyectores y los F-inyectores, en el caso de que F sea **formación de Fitting**, es decir, formación y clase de Fitting a la vez.

En el caso de los nilpotentes, que hemos visto es fundamental en estas teorías, ya no se da la anterior coincidencia. En efecto, la clase N de los nilpotentes es una formación de Fitting, pero los N-inyectores de un grupo G no son los N-proyectores, o sea no son los subgrupos de Carter. Los N-inyectores son los subgrupos nilpotentes maximales que contienen al subgrupo de Fitting de G, esto es, al N-radical de G.

Entre las propiedades que presentan los F-inyectores, vamos a citar las siguientes:

1) Si V es F-inyector de un grupo G, y V está contenido en un subgrupo H de G, también es V un F-inyector de H.

2) Si H es un subgrupo de G perteneciente a F, y el F-inyector V es subgrupo del normalizador N_G (H), se sigue que H es subgrupo de V.

3) Si V está contenido en un subgrupo H de G, se tiene que el F-radical de H es subgrupo de V.

Un subgrupo V de G perteneciente a F, tiene la propiedad 2) si y solo si tiene la 3), como demostró Martínez Verduch /12/, y recibe el nombre de **F-subgrupo de Fischer,** concepto creado por Hartley /13/.

Es claro que todo F-inyector de un grupo G es F-subgrupo de Fischer de G, pero el recíproco se cumple si y solo si los subgrupos de Fischer constituyen una familia de conjugación en G.

Finalmente, entre los resultados de Hartley merece citarse la propiedad de que todo F-inyector de un grupo G, cubre o evita a cada factor principal del grupo, lo cual pone de relieve su relación con la estructura normal del mismo.

VIII. Grupos no resolubles.

Excepto la familia de p-subgrupos de Sylow, recordemos que todas las demás anteriormente consideradas solo tienen garantizada su existencia en los grupos resolubles.

Resulta obvio el interés que tiene la investigación de la posible existencia de dichas familias de subgrupos, en grupos no resolubles.

Hasta ahora, ello se ha realizado sobre todo en la dirección que vamos a señalar.

Indicando como siempre con π un conjunto de números primos, se dice que un grupo G es **π-resoluble** si sus factores principales son π'-grupos o π-grupos resolubles.

Decimos π'-grupo a un grupo cuyo orden no tiene ningún divisor primo contenido en π.

Es claro que cualquier grupo G es π-resoluble para algún π, al menos para cualquier conjunto de primos disjunto con el de los factores primos de su orden. Por ello, el concepto definido tiene una aplicación general.

Un primer resultado es que todo grupo π-resoluble posee π-subgrupos de Hall, que forman una familia canónica de subgrupos conjugados.

Pero lo más importante es que se encontró un tipo muy amplio de formaciones, respecto de las cuales un grupo π-resoluble posee proyectores. Y lo mismo sucedió con el estudio "dual" sobre clases de Fitting e inyectores.

En efecto, Enguehard en 1969 /14/, define un tipo de formación que da resultado. Dado un grupo G, se llama π-Frattini de G al subgrupo intersección de todos los subgrupos maximales de G cuyo índice G:M es un número cuyos divisores primos están en π. Entonces, llama formación π-saturada en una clase C de grupos, a una formación F tal que, para todo grupo G de la clase, si el cociente de G sobre su π-Frattini pertenece a F, se sigue que G está en F.

Y demuestra que si F es una formación π-saturada en la clase de los π-resolubles, entonces todo grupo π-resoluble posee F-proyectores y éstos componen una familia de conjugación de F, canónica.

Más tarde, en 1972, Brewster /15/ da un concepto de formación, parecido al anterior, pero que quizá es más general. Llama formación **π-saturada** a una formación F que sea saturada en el sentido de Gaschütz y que cumpla con la siguiente condición: si un grupo G tiene un π'-subgrupo normal N tal que el cociente G/N pertenece a F, entonces G también pertenece.

Se prueba que dada cualquier formación F saturada, el producto de la clase de los π'-grupos por F, es una formación π-saturada, con lo cual este concepto tiene tanta generalidad como el de saturación.

Pues bien, Brewster demuestra que si una F es π-saturada, cualquier grupo π-resoluble tiene F-proyectores y que cada dos son conjugados.

De este modo, se asegura la existencia de una familia canónica de subgrupos en el caso de grupos π-resolubles, para cada formación de un conjunto análogo al de las saturadas.

Por otra parte, también establece Enguehard, en cualquier grupo π-resoluble, la existencia de π-sistemas de Sylow y de normalizadores de sistemas análogos a los que hay en el caso resoluble. Y como allí, estos normalizadores de π-sistemas constituyen una familia canónica de subgrupos conjugados.

Asimismo, prueba la existencia de F-normalizadores, gemelos de los dados en el caso resoluble, obteniéndose así una nueva familia de subgrupos con propiedades gemelas de las de aquéllos, tanto respecto a los factores principales del grupo, como respecto a los F-proyectores.

La situación en que los F-normalizadores coinciden con los F-proyectores, es también análoga a la precedente., pues ocurre en el caso de que el grupo G tenga un subgrupo normal π-nilpotente N, tal que el cociente G/N esté en F. Se dice π-nilpotente a un grupo cuyos π-factores principales sean centrales.

Pasemos por último, a mencionar brevemente lo que sucede al estudiar la existencia de inyectores en grupos π-resolubles.

En 1974, Martínez Verduch /12/ da una definición de clase de Fitting que sirve para el objeto, del modo siguiente:

Dado un grupo G, llamemos radical π-generado de G al subgrupo R engendrado por todos los elementos de G cuyo orden tenga todos sus factores primos en π. Pues bien, una clase de Fitting F se dice **π-saturada** si un grupo G pertenece a F siempre que su radical π-generado esté en F.

Se ve que si F es una clase de Fitting cualquiera, el producto de F por la clase de los π'-grupos es una Fitting π-saturada, lo que indica la generalidad de este concepto.

Y se demuestra que dada una clase de Fitting π-saturada, todo grupo π-resoluble posee F-inyectores, los cuales forman una familia de subgrupos conjugados. También se prueba que las propiedades de éstos son análogas a las mostradas en el caso de grupo resoluble.

Hemos llegado al final de esta exposición. Quiero hacer notar que existen varios centenares de trabajos sobre el particular, repartidos por todas las Revistas matemáticas del mundo, y que me he limitado a tocar algunos puntos básicos del tema, en los casos resoluble y π-resoluble.

En la actualidad, la mayoría de las investigaciones sobre el asunto, van encaminadas a estudiar en grupos infinitos, condiciones suficientes para que posean familias de subgrupos semejantes a las que existen en el caso finito. Esto se hace en grupos localmente finitos, que son los que presentan una mejor posibilidad de ampliar a su clase, lo hecho en la de los finitos. Pero ésto es el comienzo de otra historia. Y la de hoy ha terminado. Muchas gracias por su atención.

BIBLIOGRAFIA

JANKO Z., A new finite simple group with abelian Silow 2-subgroups and its characterization, J. Algebra **3** (1966) 147–186.

FEIT–THOMPSON, Solvability of groups of odd order, Pacific J. Math. **13** (1963) 755–1029.

Mc LAIN D.H., The existence of subgroups of given order in finite groups, Proc. Cambridge Phil. Soc. **53** (1957) 278–285.

CARTER R.W., Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups, Math. Zeit. **75** (1961) 136–139.

ALPERIN J.L., System normalizers and Carter subgroups, J. Algebra **1** (1964) 355–366.

GASCHUTZ W., Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen, Math. Zeit. **80** (1963) 300–305.

LUBESEDER U., Formationbildungen in endlichen auflösbaren Gruppen, Doctoral Diss., Kiel, 1963.

SCHMID P., Every saturated formation is a local formation, J. Algebra **51** (1978) 144–148.

CARTER–HAWKES, The F-normalizers of a finite soluble group, J. Algebra **5** (1967) 175–202.

FISCHER B., Klassen Konjugierten Untergruppen in end lichen auflösbaren Gruppen, Habilitationschrift Univ. Frankfurt (M), 1966.

FISCHER–GASCHUTZ–HARTLEY, Injektoren endlichen auflösbaren Gruppen, Math. Zeit. **102** (1967) 337–339.

MARTINEZ VERDUCH J.R., Clases de Fitting y Fischer en grupos finitos, Tesis Doctoral Zaragoza, 1974.

HARTLEY B., On Fischer's Dualization of Formation Theory, Proc. London Math. Soc. (3) **19** (1969) 193–207.

ENGUEHARD M., Formations dans les groupes π-resolubles, C. Rendus Acad. Sc. Paris **268** (1969) 937–940.

BREWSTER B., F-projectors in finite π-solvable groups, Arch. Math. (Basel) **23** (1972) 133–138.

* * * *