

MEMORIAS
DE LA
REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES
DE
MADRID
SERIE DE CIENCIAS EXACTAS
TOMO III

MEMORIAS
DE LA
REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
DE
MADRID

SERIE DE CIENCIAS EXACTAS

TOMO III

COMPROBACION Y COMPORTAMIENTO
DE UNA ESTRUCTURA LAMINAR

POR

D. EDUARDO TORROJA MIRET
INGENIERO DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS



MADRID
Domicilio de la Academia:
VALVERDE, 24 — TELEFONO 12529

ESPROPIEDAD DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

C. Bermejo, Impresor. Fernando VI, 13. Teléfono 31199.—MADRID

A los colaboradores de la obra,

JOSE ANGEL PETRIRENA

Y

MARIO ARLEGUI

CAIDOS POR DIOS Y POR ESPAÑA

PRESENTACIÓN

Aun cuando esta Memoria se refiere al caso particular de una construcción, los problemas teóricos o de carácter científico que en la misma se han resuelto y los trabajos de investigación que se han desarrollado sobre la estructura tanto en el estudio sobre modelo reducido como por la medida de deformaciones y tensiones en la obra misma, de los que se han comprobado la concordancia con las teorías empleadas y las observaciones de los fenómenos de deformación por onda explosiva y de hundimiento posterior con pandeo lento, nos han hecho pensar que pudiera ser interesante reunir este conjunto de estudios y observaciones que rara vez pueden hacerse en estructuras de este género, para presentarlo al Concurso abierto por esa Real Academia, facilitando con ello su publicación en el caso de que su superior autoridad los considere de interés para el avance de esta técnica. Hubiésemos podido suprimir de la Memoria toda la parte práctica o expositiva de la construcción, limitando el trabajo a los capítulos teóricos o puramente experimentales, pero entendemos que también esos otros temas son de interés y que, incluídos en capítulos bien diferenciados, pueden en todo caso considerarse desglosados del resto como anejos de la parte más fundamental desde un punto de vista científico, a cuya mejor comprensión ayudan por el valor de realidad práctica que indudablemente aportan.

CAPITULO I

CONSIDERACIONES GENERALES

La cubierta puede definirse estructuralmente como una lámina cilíndrica de generatrices horizontales, de hormigón armado, con la directriz formada por dos arcos de círculo desiguales que, arrancando con tangentes verticales en los bordes, se encuentran ortogonalmente, y en parte de los cuales se sustituye la lámina continua por celosías triangulares del mismo material.

La longitud a lo largo de las generatrices es de 55 metros; la anchura entre bordes o generatrices extremas, 32,5 metros; el espesor, 8 centímetros; las celosías están formadas por triángulos equiláteros de 1,40 metros de lado y 15 × 30 centímetros de escuadria y ocupan sobre el cilindro o lóbulo menor la zona inmediata a la generatriz de borde, y sobre el mayor la inmediata a la generatriz de intersección entre ambos.

Para permitir la libre dilatación longitudinal, la lámina se sujetó por los puntos medios de las generatrices de borde, mientras las directrices extremas apoyan sobre entramados verticales embutidos en los muros huecos de piñón, con elasticidad suficiente para permitir el libre desplazamiento de estas directrices rigidizadas; y las generatrices de borde, aparte de los anclajes antedichos, apoyan sobre pequeñas bielas que permiten la dilatación longitudinal. La dilatación transversal no es problema, dada la enorme flexibilidad de la lámina en este sentido.

Aun cuando la justificación del tipo estructural de cubierta roza problemas arquitectónicos y correspondería, por tanto, al arquitecto

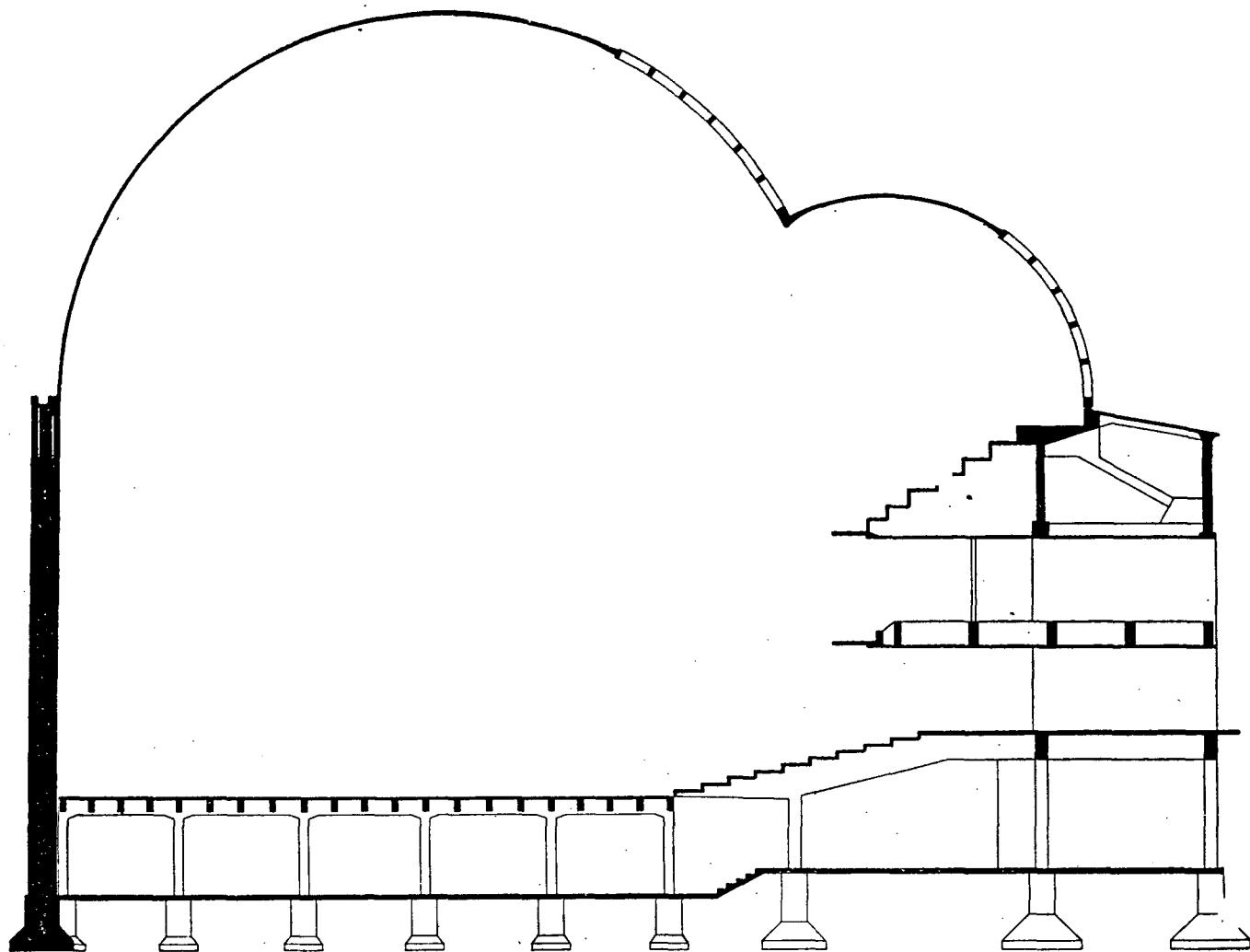


Fig. 1.—Sección transversal del Frontón.

autor del proyecto, quien me llamó a prestar mi colaboración técnica en el mismo y al que se debe la parte fundamental del éxito en el conjunto de la obra, el haber estado presente también durante el proceso de concepción general y haber coadyuvado a la íntima fusión que es característica de esta obra, entre los elementos esenciales del conjunto arquitectónico que iba surgiendo de sus manos, me autoriza, en parte, a hacer algunas consideraciones sobre este punto. A ello, por otra parte, me obligan las circunstancias actuales, en estas horas de aislamiento que utilizo para poner en orden las cuartillas y las ideas, ya olvidadas, del proyecto.

Llama a primera vista la atención la total disimetría de la sección, nueva en este género de estructuras, pero que en nuestro caso viene claramente impuesta por la necesidad funcional de abrir dos grandes ventanales, situados precisamente en esa posición y con esa inclinación, para dar paso a la luz norte e iluminar directamente la cancha con el más alto, mientras que el otro envía luz complementaria a las tribunas altas, sin perjudicar a la visibilidad sobre la zona de juego.

La cubierta tenía, pues, como puntos de paso obligados, además de los arranques, los cuatro bordes de esos ventanales; el valor arquitectónico de la sala impedía colocar tirantes o cerchas vistas por el interior que afearan el conjunto o restaran amplitud a los volúmenes de la sala, y dificultaba el empleo de otros tipos más corrientes de cubierta; por otra parte, el deseo, cumplido en toda la sala, de suprimir elementos superfluos que pudieran ocultar o alterar la forma estructural pura directamente derivada de la imposición funcional o fundida con ella, impusieron, a juicio de los autores del proyecto, la cubierta laminar cilíndrica de doble lóbulo, que con la máxima ligereza permite cubrir ese enorme vano, permitiendo y asimilándose, por así decir, los lucernarios, y realzando, con el contraste y disimetría de sus volúmenes y con el valiente volteo de sus arcos, la disimetría y contraste de la cancha y las tribunas, esencial en la sala, y el gracioso y eficaz trazado de las curvas, igualmente valientes, de los antepechos.

En algunas estructuras de tipo análogo se ha dispuesto una viga laminar de gran altura bajo la arista de intersección de los lóbulos, con objeto de disminuir la importancia de la armadura; pero aquí se ha suprimido, no sólo porque hubiera roto con su sensación de pesadez la armonía de líneas del conjunto y hubiera alterado las condiciones de visibilidad, sino porque la economía de hierro que ello puede representar viene corrientemente contrarrestada en gran parte, y aun a veces

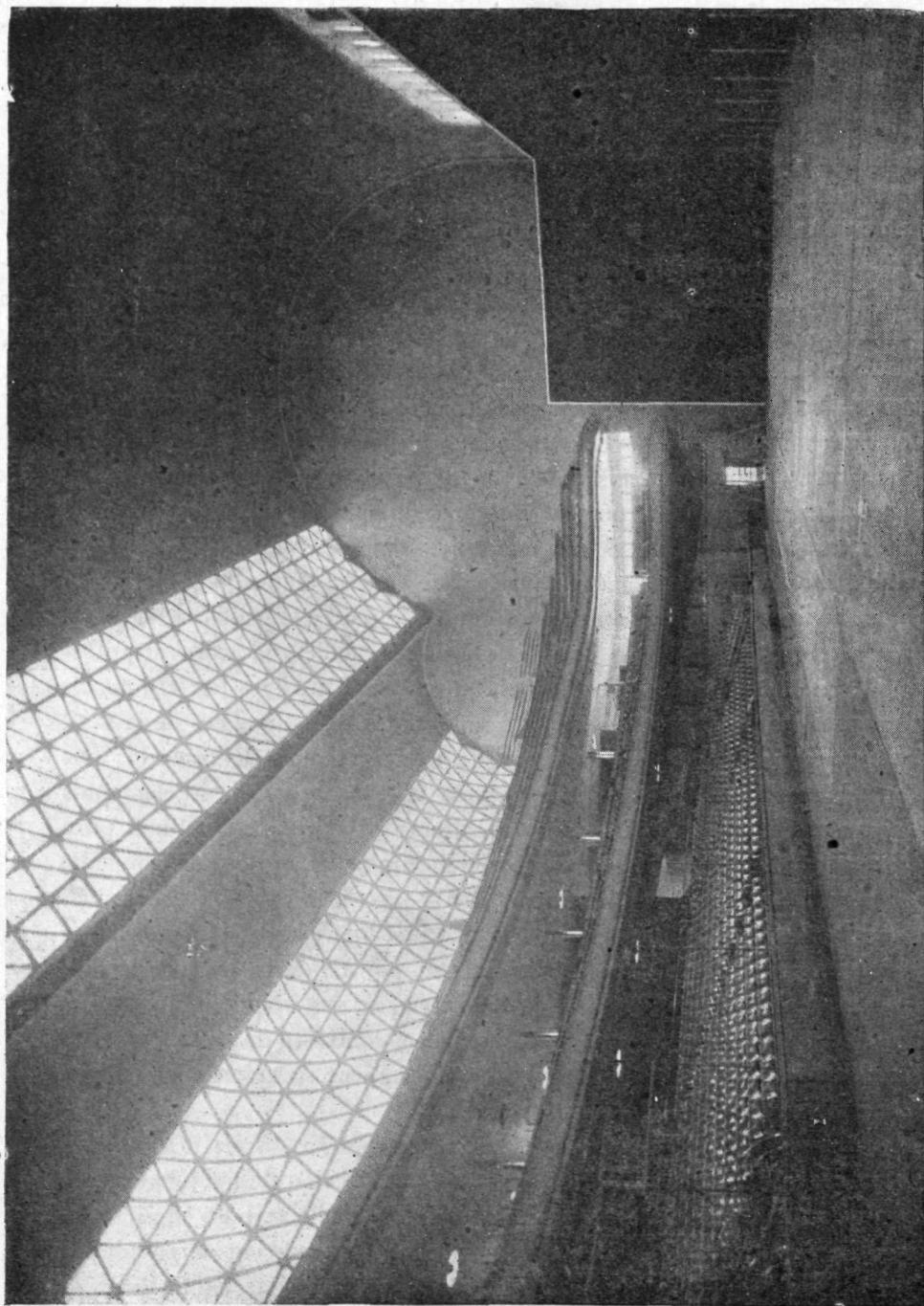


Fig. 2.—Vista interior de la sala.

a las tres semanas de haber terminado el hormigonado de las tribunas inferiores y a los tres meses y medio de iniciarse los trabajos de cimentación del edificio, que tiene cinco plantas.

Era, por consiguiente, inútil y contraproducente pensar en aquel momento en soluciones más económicas de cimbra a costa de un retraso en la obra; soluciones, sin embargo, que son perfectamente posibles y con las que el coste de este tipo de cubierta vuelve a reducirse enormemente, pero que se salen ahora del marco de esta monografía.

Por otra parte, habiéndose ejecutado toda la obra por administración y no correspondiéndome en ella más que la dirección técnica, no se incluyen en esta monografía datos ni consideraciones de orden económico.

El cálculo de la lámina se ha hecho siguiendo el método propuesto y utilizado por Dischinger y Finsterwalder para estructuras análogas, como las cubiertas de Francfort y Budapest, si bien con algunas modificaciones y particularidades impuestas por la mayor importancia de ésta y por lo original y disímétrico de su perfil, pues los lóbulos de la cubierta de Budapest, por ejemplo (mayor que la de Francfort), tienen solamente 40 metros de longitud y 11,80 metros de separación entre bordes, con perfil simétrico, mientras que ésta tiene 55 metros de longitud y 23 metros de anchura entre bordes del lóbulo grande. A más de ello, los lóbulos de Budapest enlazan con grandes vigas de descarga, mientras que aquí el enlace de los dos lóbulos se hace, como ya se ha dicho, en gaviota pura sin viga de apoyo, y, sobre todo, el conjunto de la directriz tiene un peralte mucho mayor, y ni puede, por consiguiente, prescindirse del empuje del viento sobre la lámina, ni puede asimilarse la carga de nieve a la del peso muerto, y es necesario establecer leyes separadas para cada una de estas tres cargas exteriores.

Por otra parte, el suprimir la viga de descarga en la gaviota y adoptar el perfil impuesto por las necesidades funcionales y estéticas de la obra obliga a colocar un fuerte tirante o cordón a lo largo del vértice de la gaviota, el cual representa una parte importante del conjunto de armaduras de la cubierta. Así, pues, para no encarecer inútilmente la obra nos impusimos la condición de que la carga máxima de trabajo de esta armadura bajo la acción simultánea del peso, el viento y la nieve fuera sensiblemente de 9 kg/mm², aun a trueque de la complicación de cálculo que ello representa.

La novedad e importancia de esta cubierta decidieron a la Empresa

a solicitar el informe de los eminentes ingenieros D. J. Eugenio Ribera y D. J. M.^a Aguirre, quienes, aprobando en sus líneas generales el proyecto, marcaron algunas modificaciones y normas que convenía adoptar, referentes en su mayor parte a la ejecución; aconsejando también el

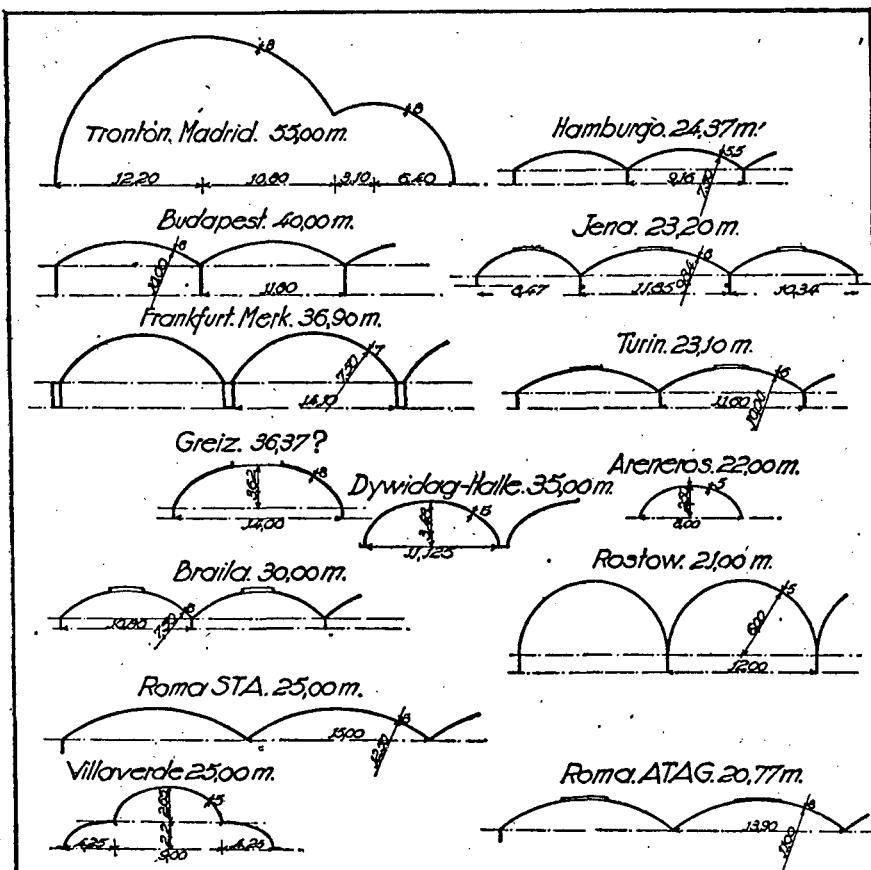


Fig. 3.— Gráfico comparativo de láminas cilíndricas de más de 20 metros de luz.

estudio de las succiones de viento, que no se habían tenido en cuenta, la comprobación de los resultados del cálculo, sobre un modelo reducido para mayor garantía y el establecimiento, en fin, de una instalación de control en la obra para conocer los movimientos y cargas de trabajo sufridos.

Todo ello es lo que constituye los diferentes capítulos de esta monografía y lo que le presta mayor interés, pues en pocos casos se ha lanzado el cálculo a procedimientos de la complicación de éstos, para

avalar una extrapolación tan fuerte sobre la serie reducidísima de obras construídas de su tipo, y en menos casos todavía ha podido la técnica acumular tantos medios de comprobación para garantizar los resultados del cálculo y las previsiones del proyectista. Porque, a nuestro juicio, la enseñanza y utilidad fundamentales que podemos sacar de esta obra, más que el amplio horizonte que para nuevas construcciones abre el tipo estructural lanzado, son la demostración ofrecida de que es hoy perfectamente posible comprobar práctica y experimentalmente los resultados del cálculo y obtener con ello una mayor garantía en las condiciones resistentes de la obra que se desea construir.

CAPITULO II

DESARROLLO TEÓRICO DEL CÁLCULO DE LA LÁMINA

Hipótesis.

El cálculo se desarrolla con arreglo a las teorías de la mecánica elástica, admitiendo las hipótesis establecidas para esta clase de cálculos por los maestros y sancionadas por la práctica, las cuales en el cálculo presente son las que a continuación se indica:

- a) La ley de Hooke.
- b) La ley de Kirchoff, que establece que los puntos de la lámina situados en una recta cualquiera normal a la superficie media se mantienen en una recta normal a la misma después de la deformación.
- c) Nulidad del módulo de Poisson, siguiendo en esto a Dischinger en su obra de Budapest.

En realidad, no hay simplificación especial de cálculo por esta hipótesis; pero la influencia del módulo de Poisson es también pequeña en estos casos y su valor siempre aleatorio.

d) Nulidad de los esfuerzos de torsión y de los de flexión alrededor de la tangente a la directriz en cada elemento diferencial de la lámina a todo espesor, los cuales, dada la delgadez de la lámina en relación con sus dimensiones superficiales, son evidentemente despreciables.

La nulidad de esta flexión (que no debe confundirse con la flexión longitudinal general de la lámina) implica además la nulidad de los esfuerzos cortantes correspondientes a la misma.

- e) Uniformidad de reparto en todo el espesor de la lámina del

esfuerzo cortante en el plano tangente al cilindro. Aparte de que es lógico que así sea, el suponer otra ley de reparto equivaldría a admitir una carga de trabajo o esfuerzo cortante un poco mayor, sin que tenga importancia dentro de las cargas resultantes.

f) Uniformidad de sección y momento de inercia alrededor de la generatriz en toda la lámina, incluso lucernarios. Los valores correspondientes a la lámina llena y a los lucernarios se indican en el capítulo III, cuadro 12, en el que pueden verse las diferencias resultantes.

g) Las cargas máximas de trabajo se fijan en las siguientes cifras:

Para el hormigón.....	50 kg/cm ²
Para la armadura en general.....	1.100 kg/cm ²
Para el cordón de la gaviota.....	900 kg/cm ²

Consideramos conveniente disminuir a 900 kg. la carga del cordón por la enorme cuantía de este elemento prácticamente metálico, por la dificultad de sus empalmes y por evitar deformaciones excesivas de la gaviota.

h) Las fuerzas exteriores se suponen uniformes a lo largo de la generatriz y distribuidas con arreglo a las siguientes leyes según la directriz:

$$\begin{aligned} \text{Peso muerto} &= \text{carga vertical de valor} = 250 \text{ kg/m}^2 \\ \text{Viento} &= \text{carga normal de valor} = 100 \text{ sen } \varphi \text{ kg/m}^2 \\ \text{Nieve} &= \text{carga vertical de valor} = 65 \text{ cos } \varphi \text{ kg/m}^2, \end{aligned}$$

siendo φ el ángulo de la normal con la vertical.

Haciéndose todo el cálculo mediante desarrollo de las cargas a lo largo de las generatrices en series de Fourier, se ha limitado éste a los dos primeros términos de cada serie, por observarse que los valores del segundo término son ya suficientemente pequeños en relación con los del primero para autorizar el desprecio de los siguientes.

El peso real de la lámina, contando con 9 centímetros de espesor por posibles errores y 20 kg/m² para uralita, corcho y madera, es de 212 kg/m², y el de los lucernarios, con vidrio de 3 milímetros, 254 kg/m², considerándose que la diferencia entre ambos pesos no justificaba la complicación de cálculo que hubiera llevado consigo el establecer cargas de cálculo distintas.

En cuanto al empuje del viento, es difícil establecer su valor a

priori sobre una superficie de directriz asimétrica y extraña como ésta, particularmente en lo que se refiere a la ley de variación o distribución del empuje a lo largo de la directriz, por cuya razón se adoptó la cifra de 100 kg/m² por ser la indicada en la *Instrucción para estructuras urbanas* (Mendizábal) a la altitud de Madrid.

La dirección de las generatrices es sensiblemente este-oeste, y la de los vientos, NE. y SO.

Por el lado sur las edificaciones se elevan muy próximas hasta cerca de la clave, y, en cambio, por el norte la fachada de la Biblioteca Nacional queda bastante más distanciada. Por otra parte, la anchura del paseo de Recoletos y de la plaza de Colón da un fácil acceso al viento por este lado, con importante componente norte.

No es posible, a nuestro entender, establecer una ley de esfuerzos sobre la directriz en estas condiciones, a no ser con un detenido estudio sobre modelo reducido en túnel aerodinámico, y aun así el efecto de las ráfagas y remolinos, siempre frecuentes en las proximidades del suelo y más en zonas edificadas, restaría interés a los resultados.

Por todo ello nos limitamos a admitir en cada punto un esfuerzo centrípeto proporcional al seno del ángulo de la normal con la vertical, no porque consideremos esta fórmula exacta, ni muchísimo menos, sino porque permite desarrollar los cálculos más cómodamente que otras, la de Duschemin, por ejemplo, que tampoco es, a nuestro juicio, aplicable al caso del cilindro.

Ello equivale a suponer esfuerzos nulos en la clave y compresiones en los faldones; hipótesis que parece perfectamente verosímil, y a admitir la no existencia de succiones, cuya importancia en la práctica, caso de existir, ha de venir muy mermada con relación al caso clásico del cilindro, de un lado por la altura y proximidad de las edificaciones, y de otro por la forma escalonada de los lóbulos, que necesariamente ha de disminuir los remolinos de salida.

Por otra parte, las formas de trabajo de esta lámina son tales que hacen prever un mejoramiento más que un empeoramiento de las condiciones resistentes bajo la acción de estas succiones, que en todo caso vendrían, en cierto modo, a equivaler a una disminución del peso muerto y un incremento de las compresiones laterales.

El cálculo se hace suponiendo simultáneas las compresiones de los faldones opuestos, porque, como puede verse por los diagramas de esfuerzos resultantes, las de un lado no tienen influencia sensible en el otro, y, por otra parte, esta simultaneidad, absurda a primera vista, no

resulta tal en la práctica por la presencia de las edificaciones colindantes ya indicadas.

Sin embargo, el indicarse en el informe de los Sres. Ribera y Agui-

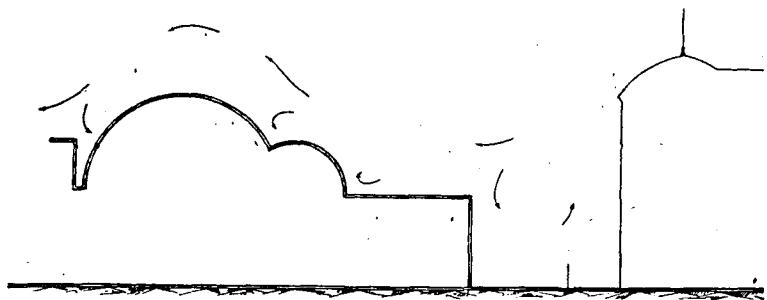


Fig. 4.—Alzado del Frontón y edificios colindantes.

rre, que más adelante se transcribe, la conveniencia de tener en cuenta estas sucesiones sin precisar sus leyes, nos indujo a cambiar de criterio y admitir una ley similar a la determinada experimentalmente para el

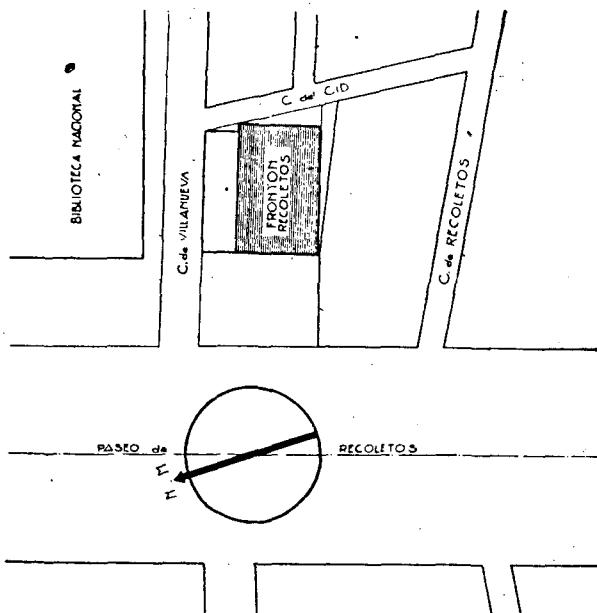


Fig. 5.—Planta de la urbanización colindante.

caso de un cilindro, en el que se producen en la zona de clave succiones triples sensiblemente de las compresiones laterales; y aunque en nuestro caso la forma de doble cilindro y la presencia de las edifica-

ciones colindantes ha de disminuir estas desigualdades, hemos adoptado para la ley de reparto de las presiones sobre la directriz (fig. 6) la expresión analítica:

$$-3 \cos \varphi + v \operatorname{sen} \varphi$$

que, como puede verse, expresa con gran aproximación este nuevo criterio.

Naturalmente, para esta ley ya no es válido el valor de la presión fijado por la *Instrucción* antes mencionada, pues las cifras que en ella

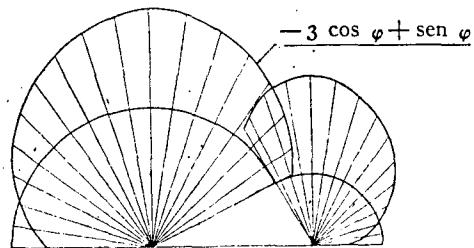


Fig. 6.—Empujes y succiones de viento según la ley:
 $-3 \cos \varphi + v \operatorname{sen} \varphi$

se dan se refieren a presiones efectivas en superficies planas incluyendo ya la succión.

Por otra parte, solicitado del Servicio Meteorológico español, Sección de Climatología, información sobre las velocidades máximas del viento en Madrid, este organismo nos indicó que "la velocidad máxima media es de 18 m/s, y se han registrado velocidades máximas de 22 y hasta 30 m/s, pero esto en días excepcionales".

Para deducir la presión máxima sobre el cilindro en la zona de superficie normal a la dirección del viento podemos aplicar, para esta velocidad máxima, las fórmulas de Stanton y de Dines, que dan la presión efectiva en superficies planas, y tomar para la compresión en el lado del viento el 0,70 de la efectiva, como es corriente; así se tienen los valores:

$$0,70 \times 0,064 \times 30^2 = 40 \text{ kg/m}^2$$

$$0,70 \times 0,060 \times 30^2 = 37 \text{ kg/m}^2,$$

y con la fórmula de Nipher:

$$0,050 \times 30^2 = 45 \text{ kg/m}^2.$$

Resultan, pues, compresiones del orden de 40 kg/m^2 y succiones de 120 kg/m^2 , y con objeto de simplificar el cálculo, que, como decimos, ya estaba terminado al emitirse el informe mencionado, se tomaron las cifras de 40 y 130 kg/m^2 , respectivamente, con lo que la ley se puede escribir:

$$40 \sin \varphi - 130 \cos \varphi,$$

es decir, el 0,40 de la carga de viento considerada anteriormente, menos el doble de la carga de nieve, y la sustitución se pudo hacer sobre las curvas o diagramas finales de los esfuerzos, utilizando todos los resultados del cálculo analítico primitivo; y en esta misma forma se presentan en esta monografía.

Por último, la carga de nieve se ha supuesto de 65 kg/m^2 , también de acuerdo con la *Instrucción* antes citada. Como la nieve no puede sostenerse en las partes laterales de los lóbulos, se ha supuesto repartida a lo largo de la directriz proporcionalmente al coseno del ángulo de la normal con la vertical y con el máximo antedicho en la clave.

Hemos seguido, pues, en el establecimiento de las sobrecargas un criterio francamente conservador.

Notación.

Mayúsculas:

- A Constante de integración de la función de borde.
- B Idem.
- C Idem.
- D Idem.
- E Coeficiente de elasticidad.
- F Función en general.
- G Constante de integración de la función de borde.
- H Idem.
- I Momento de inercia.
- J = J_1 Parte real de m .
- $J_n = J_{n-1} J_1 - K_{n-1} K_1$.
- K = K_1 Parte imaginaria de m .
- $K_n = J_{n-1} K_1 + J_1 K_{n-1}$.
- L Constante de integración de la función de borde.
- M Momento flector alrededor de la generatriz por unidad de longitud; positivo al disminuir la curvatura de la directriz.

- N Esfuerzo cortante alrededor de la generatriz por unidad de longitud y a todo espesor; positivo con el par dextrógiro vertical (1).
- O Constante de integración de la función de borde.
- Q Esfuerzo según la tangente a la directriz por unidad de longitud y todo espesor; positivo en tensión.
- R Radio de la directriz de la cubierta.
- S Esfuerzo cortante alrededor de la normal; positivo cuando el par según las tangentes a la directriz es dextrógiro visto desde arriba.
- T Esfuerzo según la generatriz por metro lineal de directriz y todo espesor; positivo en tensión.
- X Proyección de las fuerzas exteriores sobre la generatriz.
- Y Idem sobre las tangentes a la directriz; positivo en dextrógiro respecto al centro de la directriz (1).
- W Término independiente de la ecuación característica.
- Z Proyección sobre la normal; positivo centrípeto.

Minúsculas :

$$a_{\omega} = \alpha e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega + \beta e^{J_1 \omega} \sin K_1 \omega.$$

$$b_{\omega} = \beta e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega - \alpha e^{J_1 \omega} \sin K_1 \omega.$$

$$c_{\omega} = \gamma e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega + \delta e^{j_1 \omega} \sin k_1 \omega.$$

$$d_{\omega} = \delta e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega - \gamma e^{j_1 \omega} \sin k_1 \omega.$$

f Función solución del sistema de ecuaciones diferenciales.

g Espesor de la cubierta.

h Expresión general de un término de la serie de Fourier, en que se desarrollan las cargas.

j = j_1 Parte real de m.

$j_{\tilde{n}} = j_{\tilde{n}-1}$ $j_1 - k_{\tilde{n}-1}$ k_1 .

k = k_1 Parte imaginaria de m.

$k_{\tilde{n}} = j_{\tilde{n}-1}$ $k_1 + j_1$ $k_{\tilde{n}-1}$.

l = Longitud o luz teórica según las generatrices.

m Expresión general del coeficiente de ω en el exponente de e en la función de borde.

n Carga teórica de nieve en una superficie horizontal unidad.

p Idem de peso propio y carga muerta en cualquier punto.

(1) La sección se supone mirada siempre con el lóbulo pequeño a la derecha.

- q.* Expresión general de los términos de la serie integral segunda de h .
r. Idem de la integral cuarta de h .
s. Expresión general de los términos de la serie integral primera de h .
t. Carga unitaria virtual o reducida a hormigón del cordón o armadura del borde común.
u. Expresión general de los términos de la serie integral tercera de h .
v. Empuje teórico de viento sobre una superficie vertical unidad.
w. Constante indeterminada.
x. Abscisa a lo largo de la generatriz a partir del centro de la luz.
 z_1 Coeficiente de la ecuación característica $= z_1 = 2 \times (1 - v)$.
 z_2 Coeficiente de la ecuación característica $= z_2 = (1 - 4v + v^2)$.
 z_3 Coeficiente de la ecuación característica $= z_3 = -(2v - v^2)$.

Griegas:

- α Coeficientes de la expresión general de los esfuerzos y corrimientos por efecto de borde.
 β Idem.
 γ Idem.
 δ Idem.
 Δ Incremento.
 φ Ángulo de la normal en un punto de la cubierta con la normal en clave; positivo dextrógiro a partir de ésta.
 Φ Expresión general de un esfuerzo o corrimiento en el borde para $x = 0$.
 ψ Expresión general de un ángulo.
 ξ Corrimiento según la generatriz; positivo en el sentido positivo de las x .
 χ Variación de curvatura de la directriz.
 ζ Corrimiento según la normal; positivo hacia el centro de la directriz.
 η Corrimiento según la tangente a la directriz; positivo dextrógiro respecto al centro de la directriz.

$$\lambda = \frac{R}{g} V_3^-.$$

μ Expresión general de los términos de la serie π , — 3 π , 5 π . . .

$$\nu = \mu^2 \frac{R^2}{l^2}.$$

θ Corrimiento o variación angular; positivo dextrógiro.

ρ Valor aritmético de $\sqrt[8]{w} = \sqrt[4]{2\nu\lambda}$.

ω Ángulo de la normal en un punto con la normal en el borde;
positivo con el borde izquierdo, negativo con el derecho.

Ω Valor total de ω de borde a borde o abertura angular del lóbulo.

$$\tau = \sqrt[8]{-w}$$

Exponentes :

I Referente al lóbulo izquierdo o de mayor radio.

II Idem al lóbulo derecho o de menor radio.

' Idem a los primeros términos de las series de Fourier.

" Idem segundos términos de las series.

Subíndices :

M Referente al momento M .

N Idem esfuerzo N .

P Idem peso P .

S Idem esfuerzo S .

T Idem esfuerzo T .

v Referente a $\omega = 0$.

d Idem al borde derecho del lóbulo.

i Idem al borde izquierdo del lóbulo.

n Idem a carga de nieve.

\tilde{n} Idem a la derivada o expresión de orden \tilde{n} .

o Idem a $x = 0$.

p Idem a carga muerta o peso p .

v Idem a la carga de viento.

w Idem a la coordenada del punto ω .

η Idem al corrimiento η en su valor $Eg\eta$.

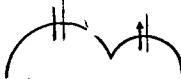
ζ Idem al corrimiento ζ en su valor $Eg\zeta$.

θ Idem al corrimiento θ en su valor $Eg\theta$.

m Idem a efecto de membrana continua.

NOTA ACLARATORIA DE SIGNOS

N Positivo



η idem.



θ idem.



M idem.

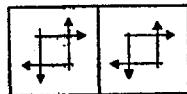


ξ idem.



Q y T idem, en tensión

S y $\frac{\delta s}{\delta x}$ Positivo



ξ Positivo en alargamiento.

Nota.—Las magnitudes $= \gamma, \theta, N, S$ y $\frac{\delta s}{\delta x}$ varían de signo al variar el sentido del ángulo, por ser función del seno de este ángulo.

Planteamiento del problema.

Antes de abordarlo, y por razones que se verán más adelante, conviene desarrollar en series de Fourier las cargas de peso, viento, nieve, etc., uniformes a lo largo de las generatrices, mediante el siguiente conocido artificio. La relación

$$I = + \frac{4}{\pi} \cos \psi - \frac{4}{3\pi} \cos 3\psi + \frac{4}{5\pi} \cos 5\psi \dots \dots \quad [1]$$

válida, como es sabido, en el intervalo de

$$\psi = -\frac{\pi}{2} \text{ a } \psi = +\frac{\pi}{2},$$

puede transformarse, haciendo

$$\psi = \frac{\pi x}{l}$$

en esta otra

$$I = \frac{4}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} - \frac{4}{3\pi} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots [2]$$
$$+ \frac{4}{5\pi} \cos \frac{5\pi x}{l} \dots = h' + h'' + \dots = h$$

que es válida en el intervalo

$$x = -\frac{l}{2}, \quad x = +\frac{l}{2}$$

y designamos simbólicamente por medio de las h . Mediante ella, los desarrollos de las cargas uniformes p , v y n se obtienen sin más que multiplicar la serie anterior por p , v y n , respectivamente, siendo válidos los desarrollos obtenidos en el intervalo

$$x = -\frac{l}{2}, \quad x = +\frac{l}{2}$$

o sea en toda la longitud de la cubierta (1).

Como consecuencia de estos desarrollos, interesan también para los cálculos posteriores las series siguientes, que representamos también simbólicamente :

$$+\int h dx = \frac{4l}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{4l}{9\pi^2} \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots [3]$$
$$\dots = s' + s'' + \dots = s$$

$$-\int s dx = \frac{4l^2}{\pi^3} \cos \frac{\pi x}{l} - \frac{4l^2}{27\pi^3} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots [4]$$
$$\dots = q' + q'' + \dots = q$$

$$+\int q dx = \frac{4l^3}{\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{4l^3}{81\pi^4} \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots [5]$$
$$\dots = u' + u'' + \dots = u$$

(1) Como origen de las x se toma el punto medio de la generatriz.

$$+\int u \, dx = \frac{4 l^4}{\pi^5} \cos \frac{\pi x}{l} - \frac{4 l^4}{243 \pi^5} \cos \frac{3 \pi x}{l} + \dots \\ \dots = r' + r'' + \dots = r \quad [6]$$

Considerando ahora un elemento diferencial de la lámina a todo espesor, cuyas dimensiones son: g , dx y $Rd\varphi$, podemos escribir las nueve ecuaciones diferenciales siguientes:

Proyección de fuerzas sobre la generatriz:

$$R \frac{d'T}{dx} + \frac{dS}{d\varphi} + RX = 0 \quad [7]$$

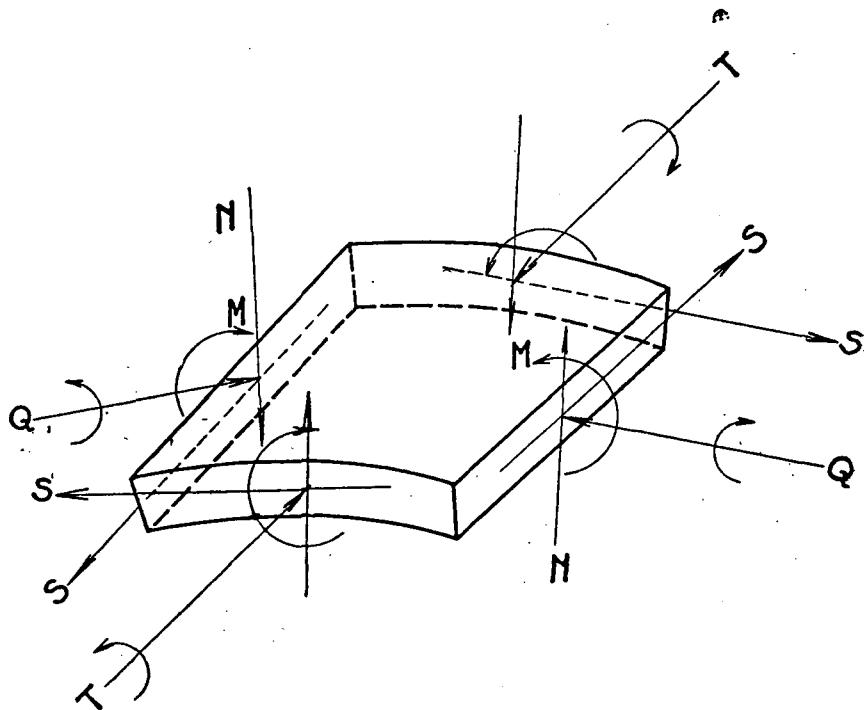


Fig. 7.—Elemento diferencial de lámina a todo espesor.

Proyección de fuerzas sobre la tangente a la directriz:

$$\frac{dQ}{d\varphi} + R \frac{dS}{dx} - N + RY = 0 \quad [8]$$

Proyección de fuerzas sobre la normal:

$$\frac{dN}{d\varphi} + Q + RZ = 0 \quad [9]$$

Equilibrio de momentos alrededor de la generatriz:

$$\frac{dM}{d\varphi} - RN = 0 \quad [10]$$

Alargamiento según la generatriz:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{T}{Eg} \quad [11]$$

Alargamiento según la tangente a la directriz:

$$\frac{d\eta}{R d\varphi} - \frac{\zeta}{R} = \frac{Q}{Eg} \quad [12]$$

Deformación angular alrededor de la normal:

$$\frac{d\xi}{R d\varphi} + \frac{d\eta}{dx} = \frac{2S}{Eg} \quad [13]$$

Giro de la normal:

$$\theta = \frac{d\zeta}{R d\varphi} + \frac{\eta}{R} \quad [14]$$

Variación de la curvatura:

$$\chi = \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2\zeta}{d\varphi^2} + \zeta \right) = - \frac{12}{Eg^3} M \quad [15]$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales define la variación de los esfuerzos y corrimientos en cada elemento de la cubierta, y su integración permite, por consiguiente, conocerlos en cada punto, siempre que se hayan determinado las constantes de integración mediante las condiciones en los límites o condiciones de sustentación de la cubierta. Pero como las dificultades matemáticas del problema no permiten su resolución directa, para lograr ésta, y siguiendo los métodos aplicados por Dischinger y Finsterwalder en trabajos bien conocidos, se descompone la cuestión en dos problemas parciales, en los cuales se consideran separadamente las cargas exteriores en uno y los efectos de borde en otro, según vamos a recordar brevemente.

Comiéñzase para ello por suponer que cada uno de los dos lóbulos que forman la cubierta forman parte de un cilindro *completo* sometido en toda su superficie a las cargas de peso propio, viento y nieve expresadas por las leyes anteriormente establecidas. En esta hipótesis el lóbulo puede soportar dichas cargas trabajando sólo como membrana, es decir, sin esfuerzo de flexión en ninguno de sus puntos (se prescinde de las regiones próximas a los muros frontales de apoyo, en los cuales las flexiones son despreciables), y los valores de la tracción o compresión y esfuerzo cortante Q , T y S y de los corrimientos ξ , ζ y η vienen dados por el sistema de ecuaciones antes establecido, cuya integración en la hipótesis presente $M = 0$ es inmediata, así como la determinación de las constantes de integración correspondientes, mediante las condiciones de sustentación del sistema. Ahora bien; como los lóbulos que forman la cubierta no son cilindros completos, esta solución no coincide con el estado real. Para que así fuera sería preciso sustituir el efecto de la parte de cilindro no existente por los corrimientos y esfuerzos en las generatrices de borde dados para ellas por el cálculo de cada lóbulo como membrana. Pero como en la práctica no es fácil realizar estas condiciones, se hace necesario, para tener la solución real, superponer a los resultados que se deducen del cálculo como membrana los que se obtienen suponiendo nulas las cargas exteriores y aplicando en las generatrices de borde un sistema de esfuerzos y deformaciones iguales a la diferencia entre los que da para ellas el cálculo de membrana y los que realmente producen las condiciones de sustentación. En esta forma el lóbulo no trabaja ya como membrana, sino como lámina, es decir, trabajando a flexión en sus diferentes puntos, y la integración del sistema de ecuaciones diferenciales no es inmediata, por no ser $M = 0$, y exige artificios de cálculo que oportunamente indicaremos. Realizada esta integración, para tener el estado real de esfuerzos y deformaciones basta componer en cada punto los que resultan de resolver uno y otro de los dos problemas parciales indicados.

Y aún puede simplificarse más la cuestión, descomponiendo en tres cada uno de estos problemas y calculando por separado el estado de membrana para cada una de las cargas de peso propio, viento y nieve, así como los efectos de borde que a cada uno de éstos corresponden.

Conviene advertir que en todos estos problemas se supone que las condiciones de sustentación de la cubierta en sus extremos son tales que, como anteriormente se ha indicado, las directrices extremas de ésta

son indeformables, pero pueden moverse libremente sus puntos en la dirección de las generatrices de la misma.

Determinación de los esfuerzos y corrimientos por efecto de membrana.

Las componentes del peso según X, Y, Z son:

$$X_p = 0$$

$$Y_p = p h \sin \varphi \quad [16]$$

$$Z_p = p h \cos \varphi \quad [17]$$

Introduciendo estas expresiones en las ecuaciones diferenciales y recordando que en el estado de membrana $M = 0$, se pueden integrar inmediatamente las ecuaciones diferenciales y obtener sucesivamente las expresiones siguientes, que nos permiten conocer los esfuerzos y corrimientos:

$$Q_{pm} = -R p h \cos \varphi \quad [18]$$

$$\frac{d S_{pm}}{dx} = -2 p h \sin \varphi \quad [19]$$

$$S_{pm} = -2 p s \sin \varphi \quad [20]$$

$$\frac{d T_{pm}}{dx} = \frac{2}{R} p s \cos \varphi \quad [21]$$

$$T_{pm} = -\frac{2}{R} p q \cos \varphi \quad [22]$$

$$E g \frac{d \xi_{pm}}{dx} = -\frac{2}{R} p q \cos \varphi \quad [23]$$

$$E g \xi_{pm} = -\frac{2}{R} p u \cos \varphi \quad [24]$$

$$E g \frac{d \eta_{pm}}{dx} = -4 p s \sin \varphi - \frac{2}{R^2} p u \sin \varphi \quad [25]$$

$$E g \eta_{pm} = \left(\frac{2}{R^2} p r + 4 p q \right) \sin \varphi \quad [26]$$

$$E g \zeta_{pm} = \left[\left(\frac{2}{R^2} p r + 4 p q \right) + R^2 p h \right] \cos \varphi \quad [27]$$

$$E g \theta_{pm} = -R p h \sin \varphi \quad [28]$$

Ha de advertirse que las constantes de integración, que son funciones arbitrarias de φ , se anulan en las expresiones de S_{pm} y ξ_{pm} , porque siendo estas expresiones series de senos en x , cambian de signo y no de valor al cambiar x en $-x$; y, por otra parte, la simetría de la estructura respecto de su plano medio normal a las generatrices impone la condición

$$[S_{pm}]_{x=x_1} = - [S_{pm}]_{x=-x_1} ; \quad [\xi]_{x=x_1} = - [\xi]_{x=-x_1}$$

o sea:

$$[-2\rho s \operatorname{sen} \varphi + \text{const.}] = -[-2\rho(-s) \operatorname{sen} \varphi + \text{const.}]$$

$$\left[-\frac{2}{R} \rho u \cos \varphi + \text{const.} \right] = -\left[-\frac{2}{R} \rho(-u) \cos \varphi + \text{const.} \right]$$

condición que se ha de cumplir para todos los valores de φ ; todo lo cual implica: const. = 0. Y para las expresiones de T_{pm} y η_{pm} , que son series de cosenos de $\frac{\pi x}{l}$, $\frac{3\pi x}{l}$, también se anulan las constantes de integración por anularse estas series para $x = \pm \frac{l}{2}$, esto es, en los extremos de las generatrices, y anularse también en ellos T_{pm} y η_{pm} , dadas las condiciones de sustentación de la cubierta.

En todas estas expresiones hay que poner por cada término de la serie los valores correspondientes; pero téngase en cuenta que en los términos impares debe atenderse a que el signo es ($-$). También debe tenerse cuidado de que, si bien los signos de las expresiones que dependen de $\cos \varphi$ no se alteran para el lado izquierdo de la bóveda, los de las expresiones que dependen de $\operatorname{sen} \varphi$ cambian en dicho lado izquierdo, es decir, al cambiar φ en ($-\varphi$).

Para la carga de viento se tiene análogamente:

$$X_v = 0$$

$$Y_v = 0$$

$$Z_v = v h \operatorname{sen} \varphi \quad [29]$$

$$Q_{vm} = -R h v \operatorname{sen} \varphi \quad [30]$$

$$\frac{d S_{vm}}{dx} = v h \cos \varphi \quad [31]$$

$$S_{vm} = v s \cos \varphi \quad [32]$$

$$\frac{d T_{v m}}{d x} = \frac{1}{R} v s \operatorname{sen} \varphi \quad [33]$$

$$T_{v m} = -\frac{1}{R} v q \operatorname{sen} \varphi \quad [34]$$

$$E g \frac{d \xi_{v m}}{d x} = -\frac{1}{R} v q \operatorname{sen} \varphi \quad [35]$$

$$E g \xi_{v m} = -\frac{1}{R} v u \operatorname{sen} \varphi \quad [36]$$

$$E g \frac{d \eta_{v m}}{d x} = v \left(2 s + \frac{1}{R^2} u \right) \cos \varphi \quad [37]$$

$$E g \eta_{v m} = -v \left(2 q + \frac{r}{R^2} \right) \cos \varphi \quad [38]$$

$$E g \zeta_{v m} = v \left[\left(2 q + \frac{r}{R^2} \right) + h R^2 \right] \operatorname{sen} \varphi \quad [39]$$

$$E g \theta_{v m} = v R h \cos \varphi \quad [40]$$

Y del mismo modo para la carga de nieve:

$$X_n = 0$$

$$Y_n = n h \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \quad [41]$$

$$Z_n = n h \cos^2 \varphi \quad [42]$$

$$Q_{n m} = -n R h \cos^2 \varphi \quad [43]$$

$$\frac{d S_{n m}}{d x} = -3 n h \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \quad [44]$$

$$S_{n m} = -3 n s \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \quad [45]$$

$$\frac{d T_{n m}}{d x} = \frac{3}{R} n s (2 \cos^2 \varphi - 1) \quad [46]$$

$$T_{n m} = -\frac{3}{R} n q (2 \cos^2 \varphi - 1) \quad [47]$$

$$E g \frac{d \xi_{n m}}{d x} = -\frac{3}{R} n q (2 \cos^2 \varphi - 1) \quad [48]$$

$$E g \xi_{n m} = -\frac{3}{R} n u (2 \cos^2 \varphi - 1) \quad [49]$$

$$E g \frac{d \eta_{n m}}{d x} = -3 n \left(2 s + \frac{4}{R^2} u \right) \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \quad [50]$$

$$E g \eta_{nm} = 3n \left(2q + \frac{4}{R^2} r \right) \cos \varphi \sin \varphi \quad [51]$$

$$E g \zeta_{nm} = 3n \left(2q + \frac{4}{R^2} r \right) (2 \cos^2 \varphi - 1) + R^2 n h \cos^2 \varphi \quad [52]$$

$$E g \theta_{nm} = -n \left(\frac{18}{R} q + \frac{36}{R^3} r + 2R h \right) \cos \varphi \sin \varphi \quad [53]$$

Integración de las ecuaciones diferenciales para efecto de borde.

Para llevar a cabo el cálculo de la cubierta como lámina tenemos que abordar la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales [7] a [15] inclusive, con cargas exteriores nulas, pues sólo se trata en él de determinar los efectos de borde.

Como estas ecuaciones son independientes del origen que se tome para las variables independientes x φ , y para mayor comodidad del cálculo, tomaremos como origen de la variable angular (dejando inalterado el de la x) el borde izquierdo de cada lóbulo, designando por ω la nueva coordenada angular, que está obligada con la anterior por la relación

$$\varphi = \omega - \varphi_1$$

donde φ_1 es el valor absoluto de φ correspondiente al borde izquierdo.

La integración de este sistema de ecuaciones diferenciales, inabordable por métodos directos, puede lograrse mediante la adecuada aplicación del desarrollo en serie de Fourier a los esfuerzos y deformaciones.

Obsérvese para ello que el momento flector M a lo largo de cada generatriz de la cubierta es una función de x , simétrica respecto de su punto medio y cuyo desarrollo en serie de Fourier carece, por tanto, de términos en seno. Si además se toma el intervalo $-\frac{l}{2}, +\frac{l}{2}$ como representativo de un semiperíodo de la función M , siendo simétrico de éste respecto de su extremo el semiperíodo siguiente, se anulan los coeficientes de los términos en seno de los múltiplos pares del argumento fundamental, que es $\frac{\pi x}{l}$; con lo cual dicho desarrollo puede relacionarse término a término con el de las cargas expresadas mediante la serie [2] y las que de ella se deducen. Por otra parte, los coeficientes

de este desarrollo de M , que tienen valores fijos para cada generatriz, varían al pasar de una a otra y son, por tanto, funciones de ω . Puede, pues, escribirse como expresión del momento flector en un punto cualquiera de la cubierta:

$$M = - \sum f \mu (\omega) \times \cos \frac{\mu x}{l} \quad [54]$$

donde el factor μ toma los valores $\pi, -3\pi, 5\pi, \dots$

Sentado esto, de la ecuación [10] se deduce:

$$N = - \frac{I}{R} \sum \frac{df\mu}{d\omega} \cos \frac{\mu x}{l} \quad [55]$$

De la [9],

$$= \sum \frac{I}{R} \frac{d^2 f \mu}{d \omega^2} \cos \frac{\mu x}{l} \quad [56]$$

De la [8],

$$\frac{dS}{dx} = - \sum \frac{I}{R^2} \left(\frac{df\mu}{d\omega} + \frac{d^3 f \mu}{d \omega^3} \right) \cos \frac{\mu x}{l} \quad [57]$$

e integrando y teniendo en cuenta que en virtud de la simetría del sistema la constante de integración es nula,

$$S = - \sum \frac{l}{\mu R^2} \left(\frac{df\mu}{d\omega} + \frac{d^3 f \mu}{d \omega^3} \right) \sin \frac{\mu x}{l} \quad [58]$$

De la [7],

$$\frac{dT}{dx} = \frac{I}{R} \frac{dS}{d\omega}$$

e integrando y recordando que la constante de integración es nula, por serlo T y $\cos \frac{\mu x}{l}$ para $x = \pm \frac{l}{2}$,

$$T = - \sum \frac{l^2}{\mu^2 R^3} \left(\frac{d^2 f \mu}{d \omega^2} + \frac{d^4 f \mu}{d \omega^4} \right) \cos \frac{\mu x}{l} \quad [59]$$

De la [11],

$$E g \frac{d\xi}{dx} = - \sum \frac{l^2}{\mu^3 R^3} \left(\frac{d^2 f \mu}{d \omega^2} + \frac{d^4 f \mu}{d \omega^4} \right) \cos \frac{\mu x}{l}$$

y teniendo en cuenta que la constante es nula por simetría,

$$E g \xi = - \Sigma \frac{l^3}{\mu^3 R^3} \left(\frac{d^2 f \mu}{d \omega^2} + \frac{d^4 f \mu}{d \omega^4} \right) \sin \frac{\mu x}{l} \quad [60]$$

De la [13],

$$\begin{aligned} E g \frac{d \eta}{d x} &= \Sigma \left[- \frac{2 l}{\mu^2 R^2} \left(\frac{d f \mu}{d \omega} + \frac{d^3 f \mu}{d \omega^3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l^3}{\mu^3 R^4} \left(\frac{d^3 f \mu}{d \omega^3} + \frac{d^5 f \mu}{d \omega^5} \right) \right] \sin \frac{\mu x}{l} \\ E g \eta &= \Sigma \left[\frac{2 l^2}{\mu^2 R^2} \left(\frac{d f \mu}{d \omega} + \frac{d^3 f \mu}{d \omega^3} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{l^4}{\mu^4 R^4} \left(\frac{d^3 f \mu}{d \omega^3} + \frac{d^5 f \mu}{d \omega^5} \right) \right] \cos \frac{\mu x}{l} \end{aligned} \quad [61]$$

anulándose la constante de integración por ser cero η y $\cos \frac{\mu x}{l}$ para $x = \pm \frac{l}{2}$.

De la [12],

$$\begin{aligned} E g \zeta &= \Sigma \left[- \frac{d^2 f \mu}{d \omega^2} + \frac{2 l^2}{\mu^2 R^2} \left(\frac{d^2 f \mu}{d \omega^2} + \frac{d^4 f \mu}{d \omega^4} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{l^4}{\mu^4 R^4} \left(\frac{d^4 f \mu}{d \omega^4} + \frac{d^6 f \mu}{d \omega^6} \right) \right] \cos \frac{\mu x}{l} \end{aligned} \quad [62]$$

De la [14],

$$\begin{aligned} E g \theta &= \Sigma \left[- \frac{1}{R} \frac{d^3 f \mu}{d \omega^3} + \frac{2 l^2}{\mu^2 R^3} \left(\frac{d^3 f \mu}{d \omega^3} + \frac{d^5 f \mu}{d \omega^5} \right) - \right. \\ &\quad - \frac{l^4}{\mu^4 R^5} \left(\frac{d^5 f \mu}{d \omega^5} + \frac{d^7 f \mu}{d \omega^7} \right) + \frac{2 l^2}{\mu^2 R^3} \left(\frac{d f \mu}{d \omega} + \frac{d^3 f \mu}{d \omega^3} \right) - \\ &\quad \left. - \frac{l^4}{\mu^4 R^5} \left(\frac{d^3 f \mu}{d \omega^3} + \frac{d^5 f \mu}{d \omega^5} \right) \right] \cos \frac{\mu x}{l} \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} E g \theta &= \Sigma \left[- \frac{1}{R} \frac{d^3 f \mu}{d \omega^3} + \frac{2 l^2}{\mu^2 R^3} \left(\frac{d f \mu}{d \omega} + 2 \frac{d^3 f \mu}{d \omega^3} + \frac{d^5 f \mu}{d \omega^5} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{l^4}{\mu^4 R^5} \left(\frac{d^3 f \mu}{d \omega^3} + 2 \frac{d^5 f \mu}{d \omega^5} + \frac{d^7 f \mu}{d \omega^7} \right) \right] \cos \frac{\mu x}{l} \end{aligned} \quad [62']$$

De la [15],

$$\begin{aligned}
 E g \chi &= \Sigma \frac{1}{R^2} \left[-\frac{d^2 f \mu}{d \omega^2} + \frac{2 l^2}{\mu^2 R^2} \left(\frac{d^2 f \mu}{d \omega^2} + \frac{d^4 f \mu}{d \omega^4} \right) - \right. \\
 &\quad - \frac{l^4}{\mu^4 R^4} \left(\frac{d^4 f \mu}{d \omega^4} + \frac{d^6 f \mu}{d \omega^6} \right) - \frac{d^4 f \mu}{d \omega^4} + \\
 &\quad \left. + \frac{2 l^2}{\mu^2 R^2} \left(\frac{d^4 f \mu}{d \omega^4} + \frac{d^6 f \mu}{d \omega^6} \right) - \frac{l^4}{\mu^4 R^4} \left(\frac{d^6 f \mu}{d \omega^6} + \frac{d^8 f \mu}{d \omega^8} \right) \right] \cos \frac{\mu x}{l} = \\
 &= E g \frac{I^2}{E g^3} \Sigma f \mu \cos \frac{\mu x}{l} \tag{63}
 \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned}
 \Sigma \frac{1}{R^2} \left[-\frac{l^4}{\mu^4 R^4} \frac{d^8 f \mu}{d \omega^8} - \left(\frac{2 l^4}{\mu^4 R^4} - \frac{2 l^2}{\mu^2 R^2} \right) \frac{d^6 f \mu}{d \omega^6} + \right. \\
 \left. + \left(\frac{4 l^2}{\mu^2 R^2} - \frac{l^4}{\mu^4 R^4} - 1 \right) \frac{d^4 f \mu}{d \omega^4} + \right. \\
 \left. + \left(\frac{2 l^2}{\mu^2 R^2} - 1 \right) \frac{d^2 f \mu}{d \omega^2} - \frac{12 R^2}{g^3} f \mu \right] \cos \frac{\mu x}{l} = 0 \tag{64}
 \end{aligned}$$

Ordenando y haciendo

$$v = \mu^2 \frac{R^2}{l^2} \quad y \quad \lambda = \frac{R}{g} \sqrt{3} \tag{64'}$$

queda, por último,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R^2} \Sigma \left(\left[\left(\frac{d^8 f \mu}{d \omega^8} + 2(1-v) \frac{d^6 f \mu}{d \omega^6} + (1-4v+v^2) \frac{d^4 f \mu}{d \omega^4} - \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. - (2v-v^2) \frac{d^2 f \mu}{d \omega^2} + 4v^2 \lambda^2 f \mu \right] \cos \frac{\mu x}{l} \right) \right) = 0 \tag{65}
 \end{aligned}$$

Ahora bien; como esta condición ha de cumplirse para todos los puntos de la cubierta y, por tanto, para todos los valores de x , es preciso que los paréntesis cuadrados (que son independientes de x) sean todos nulos, quedando así definida, finalmente, cada una de las funciones $f \mu$ mediante la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
 \frac{d^8 f \mu}{d \omega^8} + 2(1-v) \frac{d^6 f \mu}{d \omega^6} + (1-4v+v^2) \frac{d^4 f \mu}{d \omega^4} - \\
 - (2v-v^2) \frac{d^2 f \mu}{d \omega^2} + 4v^2 \lambda^2 f \mu = 0 \tag{66}
 \end{aligned}$$

en la cual el parámetro ν varía con la función al dar a μ los valores ya indicados $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$.

Esta ecuación diferencial es lineal, homogénea y de coeficientes constantes; su integral general es, por consiguiente, de la forma:

$$f\mu(\omega) = \Gamma_1 e^{m_1 \omega} + \Gamma_2 e^{m_2 \omega} + \dots + \Gamma_8 e^{m_8 \omega} \quad [66']$$

donde $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_8$ son las constantes de integración y m_1, m_2, \dots, m_8 las raíces de la ecuación característica:

$$\begin{aligned} m^8 + 2(1-\nu)m^6 + (1-4\nu+\nu^2)m^4 - \\ -(2\nu-\nu^2)m^2 + 4\nu^2\lambda^2 = 0 \end{aligned} \quad [67]$$

Dadas las dimensiones que suelen tener las cubiertas de este tipo, los coeficientes de las potencias de m en esta ecuación son pequeños respecto del término independiente, y las raíces de la misma son, por tanto, todas imaginarias, conjugadas dos a dos, naturalmente. Y por carecer la ecuación de los términos en potencias impares de la variable, dichas raíces son también dos a dos iguales y de signo contrario. Los ocho valores de m se obtienen, pues, haciendo todas las combinaciones de signos en dos expresiones del tipo

$$\begin{aligned} m_{1, 2, 3, 4} &= \pm J_1 \pm K_1 i \\ m_{5, 6, 7, 8} &= \pm j_1 \pm k_1 i \end{aligned} \quad [68]$$

Teniendo en cuenta estas relaciones y aplicando la transformación de Euler, para evitar el manejo de elementos imaginarios, la integral general antes indicada puede ponerse en la conocida forma:

$$\begin{aligned} f\mu(\omega) &= e^{J_1 \omega} (A \sin K_1 \omega + B \cos K_1 \omega) \\ &+ e^{j_1 \omega} (C \sin k_1 \omega + D \cos k_1 \omega) \\ &+ e^{-J_1 \omega} (G \sin K_1 \omega + L \cos K_1 \omega) \\ &+ e^{-j_1 \omega} (H \sin k_1 \omega + O \cos k_1 \omega) \end{aligned} \quad [69]$$

El cálculo de los valores de J_1, K_1, j_1 y k_1 , partes reales e imaginarias de las raíces de la ecuación característica, puede hacerse por el método de Dischinger, empleado en el cálculo de las cubiertas de Francfort y Budapest, por ejemplo; pero es más sencillo y rápido el que proponemos a continuación, basado, como aquél, en la circunstancia de ser muy pequeños, respecto del término independiente, los demás coeficientes de la ecuación característica.

Sea

$$m^8 + z_1 m^6 + z_2 m^4 + z_3 m^2 + W = 0$$

dicha ecuación característica. Despejando m en el primer término, se tiene:

$$m = \sqrt[8]{-W - z_1 m^6 - z_2 m^4 - z_3 m^2}$$

Haciendo $\tau = \sqrt[8]{-W}$ y desarrollando por la fórmula de Newton,

$$\begin{aligned} m &= (\tau^8 - z_1 m^6 - z_2 m^4 - z_3 m^2)^{\frac{1}{8}} = \tau - \\ &\quad - \frac{1}{8} \tau^{-7} (z_1 m^6 + z_2 m^4 + z_3 m^2) - \\ &\quad - \frac{\frac{1}{8} \times \frac{7}{8}}{1 \times 2} \tau^{-15} (z_1 m^6 + z_2 m^4 + z_3 m^2) + \dots \end{aligned}$$

Tomando los dos primeros términos del desarrollo, se obtiene como valor aproximado

$$m = \tau - \frac{1}{8} z_1 \tau^{-7} m^6 \cong \tau - \frac{z_1}{8 \tau}$$

Y sustituyendo este valor en lugar de m en el desarrollo, y limitando éste en los términos en τ^{-3} , resulta, finalmente, como valor de m

$$m = \tau - \frac{z_1}{8 \tau} + \left(\frac{5 z_1^2}{16} - z_2 \right) \frac{1}{8 \tau^3} \quad [70]$$

El error cometido al limitar así el desarrollo, representado aproximadamente por los términos en τ^{-5} de éste, vale

$$\varepsilon \cong \frac{z_1^3 - 2,4 z_1 z_2 - 6,4 z_3}{50 \tau^5} \quad [71]$$

Haciendo ahora $\rho = \sqrt[8]{W}$ (valor aritmético); recordando que

$$\tau = \sqrt[8]{-W} = \rho \left(\cos \frac{(2n+1)\pi}{8} + i \sin \frac{(2n+1)\pi}{8} \right)$$

teniendo en cuenta que estos seno y coseno sólo tienen dos valores numéricamente distintos, que corresponden a $n=0$ y $n=1$; sustituyendo.

estos valores de τ en las fórmulas anteriores; separando la parte real y la imaginaria de m (que son las J_1 , K_1 , j_1 y k_1 antes consideradas), y sustituyendo los valores numéricos de las líneas trigonométricas que intervienen en las fórmulas, resulta, finalmente:

$$\begin{aligned} \pm J_1 &= 0,9238795 \left(\rho - \frac{z_1}{8\rho} \right) + 0,0478354 \left(\frac{5z_1^2}{16} - z_2 \right) \frac{1}{\rho^3} \\ \pm K_1 &= 0,3826834 \left(\rho + \frac{z_1}{8\rho} \right) - 0,1154849 \left(\frac{5z_1^2}{16} - z_2 \right) \frac{1}{\rho^3} \\ \pm j_1 &= 0,3826834 \left(\rho - \frac{z_1}{8\rho} \right) - 0,1154849 \left(\frac{5z_1^2}{16} - z_2 \right) \frac{1}{\rho^3} \\ \pm k_1 &= 0,9238795 \left(\rho + \frac{z_1}{8\rho} \right) + 0,0478354 \left(\frac{5z_1^2}{16} - z_2 \right) \frac{1}{\rho^3} \end{aligned} \quad [72]$$

siendo los errores respectivos del orden de

$$\begin{aligned} \epsilon_{J_1} = \epsilon_{K_1} &\cong 0,008 \frac{z_1^3 - 2,4z_1z_2 - 6,4z_3}{\rho^5} \\ \epsilon_{j_1} = \epsilon_{k_1} &\cong 0,02 \frac{z_1^3 - 2,4z_1z_2 - 6,4z_3}{\rho^5} \end{aligned} \quad [73]$$

Una vez calculados los valores de J_1 , K_1 , j_1 y k_1 correspondientes a cada $f \mu$, es preciso, para conocer completamente estas funciones y con ellas los esfuerzos y deformaciones, determinar las constantes de integración que entran en ellas mediante las condiciones en los bordes. Antes de abordar este cálculo conviene, sin embargo, hacer dos observaciones que le simplifican en gran manera (1).

(1) Aunque los errores dados por las fórmulas anteriores serán de ordinario muy inferiores a los producidos por la inexactitud de los datos, puede tener interés observar que en el caso de que estas fórmulas no den garantía de aproximación suficiente, puede ésta comprobarse y aumentarse calculando nuevamente m por la fórmula

$$m = \sqrt[8]{[-W - z_1 J_6 - z_2 J_4 - z_3 J_2] + [-z_1 K_6 - z_2 K_4 - z_3 K_2]}$$

que resulta de sustituir en la primera expresión de m el valor ya obtenido y hacer

$$J_n + K_n i = (J_1 + K_1 i) \hat{n}$$

El cálculo de dicha fórmula, como también el de las J_n y K_n , puede hacerse trigo-

Una es que de los ocho términos que componen cada función $f \mu$, los cuatro que tienen negativo el exponente de e son funciones periódicas decrecientes con los valores crecientes de ω , y los otros cuatro son funciones crecientes con estos valores; o, lo que es igual: si se toma un borde de la cubierta como origen de la variable ω y se designa por Ω el ángulo total de la cubierta, los cuatro primeros términos representan ondas amortiguadas desde el bordé $\omega = 0$ al $\omega = \Omega$, y los otros cuatro términos, ondas amortiguadas de $\omega = \Omega$ a $\omega = 0$. Cuando el espesor de la cubierta es pequeño y su ángulo grande, como sucede en nuestro caso, los exponentes son grandes y las ondas, por tanto, muy amortiguadas. Si además las condiciones en ambos bordes son comparables en magnitud, la influencia en cada una de las ondas que parten del otro es despreciable al lado de las que nacen en aquél, y se puede, por consiguiente, reducir a los cuatro términos correspondientes la expresión de cada función $f \mu$, al tratar de determinar sus constantes por las condiciones en los bordes; quedando así reducida la expresión de $f \mu$ a la siguiente:

$$f \mu(\omega) = e^{j_1 \omega} (A \sin K_1 \omega + B \cos K_1 \omega) + \\ + e^{i_1 \omega} (C \sin k_1 \omega + D \cos k_1 \omega) \quad [76]$$

en la cual j_1 y i_1 son los valores negativos y K_1 y k_1 los positivos de estos coeficientes.

La otra observación se refiere al planteamiento de estas condiciones. Conocida la forma de estas funciones $f \mu$, a reserva de determinar sus constantes de integración, las ecuaciones [7] a [15] de equilibrio y deformación del elemento de cubierta permiten expresar en forma análoga los esfuerzos y corrimientos M , N , T , Q , S , ξ , η , ζ y θ , obteniéndose para cada uno de ellos un desarrollo de la forma

$$\sum \psi_\mu \cos \frac{\mu x}{l}, \quad \text{o bien,} \quad \sum \psi_\mu \sin \frac{\mu x}{l},$$

en el cual los coeficientes ψ_μ de los senos o cosenos son funciones sólo de ω , cuya forma será deducida oportunamente. Y las condiciones en

métricamente. También pueden calcularse las J_n y K_n , que de todos modos son necesarias para los cálculos posteriores, por las conocidas fórmulas de recurrencia

$$J_n = J_{n-1} J_1 - K_{n-1} K_1 \quad [74]$$

$$K_n = J_{n-1} K_1 + J_1 K_{n-1} \quad [75]$$

que resultan de igualar las partes reales y las imaginarias en la fórmula que sirve de definición a estas cantidades.

los bordes se reducen a igualar dos desarrollos de este tipo en senos o dos en cosenos. Pero como estas condiciones han de cumplirse para todos los puntos de la generatriz de borde, es decir, para todos los valores de x , ello implica la igualdad de los coeficientes correspondientes dos a dos. Lo cual quiere decir que el cálculo de las funciones f y de los esfuerzos y deformaciones del sistema puede hacerse término a término, combinando por separado los términos que ocupan el mismo lugar en los desarrollos de las cargas, esfuerzos y corrimientos. No es preciso insistir en la importancia de esta simplificación, que hace posible un cálculo que de otro modo no lo sería prácticamente; siendo de advertir que de ordinario bastará considerar los dos o tres primeros términos de cada desarrollo para obtener una aproximación suficiente.

*Formación de las expresiones de esfuerzos y corrimientos
por efecto de borde.*

Con la expresión [76] es fácil formarlas, pues basta llevar el valor de f a las ecuaciones [54] a [63] inclusive.

La primera derivada de f según [76] es

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\omega} = & A (J_1 e^{J_1 \omega} \operatorname{sen} K_1 \omega + K_1 e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega) + \\ & + B (J_1 e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega - K_1 e^{J_1 \omega} \operatorname{sen} K_1 \omega) + \\ & + C (j_1 e^{j_1 \omega} \operatorname{sen} k_1 \omega + k_1 e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega) + \\ & + D (j_1 e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega - k_1 e^{j_1 \omega} \operatorname{sen} k_1 \omega) \end{aligned} \quad [77']$$

y teniendo presente la ley de deformación de J_n y K_n que expresan las fórmulas [74] y [75], puede verse como expresión general de cualquier derivada de f :

$$\begin{aligned} \frac{d^n f}{d\omega^n} = & A (J_n e^{J_1 \omega} \operatorname{sen} K_1 \omega + K_n e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega) + \\ & + B (J_n e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega - K_n e^{J_1 \omega} \operatorname{sen} K_1 \omega) + \\ & + C (j_n e^{j_1 \omega} \operatorname{sen} k_1 \omega + k_n e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega) + \\ & + D (j_n e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega - k_n e^{j_1 \omega} \operatorname{sen} k_1 \omega) \end{aligned} \quad [77]$$

Por la forma de la expresión de las derivadas y por la de las ecuaciones [54] a [63], antes citadas, se comprende que los esfuerzos y

corrimientos en un punto cualquiera ($x \omega$) de la lámina pueden encuadrarse bajo esta forma general para cada término de las series:

$$\left(\sin \frac{\mu x}{l} \text{ ó } \cos \frac{\mu x}{l} \right) \times \begin{cases} A (\alpha e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega + \beta e^{J_1 \omega} \sin K_1 \omega) \\ + B (\beta e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega - \alpha e^{J_1 \omega} \sin K_1 \omega) \\ + C (\gamma e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega + \delta e^{j_1 \omega} \sin k_1 \omega) \\ + D (\delta e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega - \gamma e^{j_1 \omega} \sin k_1 \omega) \end{cases}$$

o bien:

$$\left(\sin \frac{\mu x}{l} \text{ ó } \cos \frac{\mu x}{l} \right) [A a_\omega + B b_\omega + C c_\omega + D d_\omega] \quad [78]$$

siendo

$$\begin{aligned} a_\omega &= \alpha e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega + \beta e^{J_1 \omega} \sin K_1 \omega \\ b_\omega &= \beta e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega - \alpha e^{J_1 \omega} \sin K_1 \omega \\ c_\omega &= \gamma e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega + \delta e^{j_1 \omega} \sin k_1 \omega \\ d_\omega &= \delta e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega - \gamma e^{j_1 \omega} \sin k_1 \omega \end{aligned} \quad [79]$$

Y los valores de los coeficientes α, β, γ y δ , que se deducen desarrollando las expresiones [54] a [63] y teniendo presente la [77], son:

$$a_M = -I$$

$$a_N = -\frac{I}{R} K_1$$

$$a_Q = +\frac{I}{R} K_2$$

$$*a_S = -\frac{I}{R^2} (K_1 + K_3) \quad [80]$$

$$a_T = -\frac{I}{\nu R} (K_2 + K_4)$$

$$a_\eta = +\frac{2}{\nu} (K_1 + K_3) - \frac{I}{\nu^2} (K_3 + K_5)$$

$$a_\zeta = -K_2 + \frac{2}{\nu} (K_2 + K_4) - \frac{I}{\nu^2} (K_4 + K_6)$$

$$a_\theta = -\frac{K_3}{R} + \frac{2}{R\nu} (K_1 + 2K_3 + K_5) - \frac{I}{R\nu^2} (K_3 + 2K_5 + K_7)$$

Los β son idénticos sustituyendo K por J, y los δ y γ se forman poniendo j y k , respectivamente.

Determinación de las constantes de integración en la gaviota.

Para poder formar las expresiones [78] que nos han de dar los valores de M, N, Q, S, T, Eg η , Eg θ y Eg ζ que nos interesan, nos falta solamente conocer los valores de las constantes A, B, C, D, que vienen impuestos por las condiciones límites o condiciones de sustentación en los bordes,

Ya dijimos que todos estos esfuerzos y corrimientos producidos por el efecto de cada uno de los bordes han de sumarse a los del efecto del otro borde y a los correspondientes del efecto membrana para formar los valores reales. Recordemos también que cada una de las constantes A, B, C, D representa o está formada por los seis valores A_p' A_v' A_n' , A_p'' A_v'' A_n'' , B_p' B_v' correspondientes a las cargas de peso, viento y nieve, cuyas leyes de repartición son distintas, y a los dos primeros términos de las series de Fourier si, como dijimos al principio, nos basta con estos dos primeros términos.

Como consecuencia de ello, en el borde común nos resultan las 48 incógnitas siguientes:

$$\begin{array}{cccc} A_{dp}' & B_{dp}' & C_{dp}' & D_{dp}' \\ A_{dv}' & B_{dv}' & C_{dv}' & D_{dv}' \\ A_{dn}' & B_{dn}' & C_{dn}' & D_{dn}' \\ \hline A_{ip}^{II} & B_{ip}^{II} & C_{ip}^{II} & D_{ip}^{II} \\ A_{iv}^{II} & B_{iv}^{II} & C_{iv}^{II} & D_{iv}^{II} \\ A_{in}^{II} & B_{in}^{II} & C_{in}^{II} & D_{in}^{II} \\ \hline A_{dp}'' & B_{dp}'' & C_{dp}'' & D_{dp}'' \\ A_{dv}'' & B_{dv}'' & C_{dv}'' & D_{dv}'' \\ A_{dn}'' & B_{dn}'' & C_{dn}'' & D_{dn}'' \\ \hline A_{ip}^{III} & B_{ip}^{III} & C_{ip}^{III} & D_{ip}^{III} \\ A_{iv}^{III} & B_{iv}^{III} & C_{iv}^{III} & D_{iv}^{III} \\ A_{in}^{III} & B_{in}^{III} & C_{in}^{III} & D_{in}^{III} \end{array}$$

a las que hay que añadir las seis tensiones parciales:

$$t_p' \quad t_v' \quad t_n' \quad t_p'' \quad t_v'' \quad t_n''$$

cuya suma se fija como dato del problema por razones económicas y de seguridad, pero cuyos valores e importancias relativas se desconocen *a priori*; son, pues, 54 incógnitas.

Recordando que la gaviota es ortogonal y que en un borde cualquiera se desprecia el efecto del borde opuesto del mismo lóbulo, por llegar sobradamente amortiguado, las condiciones de equilibrio o sus-

tentación en este borde común de ambos lóbulos plantean los siete grupos siguientes de ecuaciones, con el total necesario de 54.

1) El corrimiento radial del borde de cada lóbulo tiene que ser igual al tangencial del otro y, por consiguiente (pasado el término de membrana al segundo miembro), se tiene:

$$\begin{aligned} A_d^I a_\zeta + B_d^I b_\zeta + C_d^I c_\zeta + D_d^I d_\zeta &= -\zeta_{m_d}^I - \eta_i^{II} \\ A_i^{II} a_\zeta + B_i^{II} b_\zeta + C_i^{II} c_\zeta + D_i^{II} d_\zeta &= -\zeta_{m_i}^{II} - \eta_i^{II} \end{aligned} \quad [81]$$

ecuaciones que, repartidas para

$$\begin{array}{cccccc} & & & " & " & " \\ p & v & n & p & v & n \end{array}$$

dan un conjunto de doce ecuaciones.

Observemos que, además de las constantes desconocidas, se descubren también los valores de η^I y η^{II} , que han de estar a su vez formados por expresiones de la forma:

$$A a_\eta + B b_\eta + C c_\eta + D d_\eta + \eta$$

2) El equilibrio entre las fuerzas Q , N y P da igualmente las 12 ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} A_d^I a_Q + B_d^I b_Q + C_d^I c_Q + D_d^I d_Q &= -Q_{m_d}^I + N_i^{II} \\ A_i^{II} a_Q + B_i^{II} b_Q + C_i^{II} c_Q + D_i^{II} d_Q &= -Q_{m_i}^{II} + N_d^I \end{aligned} \quad [82]$$

3) El equilibrio de momento da:

$$\begin{aligned} A_d^I a_M + B_d^I b_M + C_d^I c_M + D_d^I d_M &= -M^{II} \\ A_i^{II} a_M + B_i^{II} b_M + C_i^{II} c_M + D_i^{II} d_M &= -M^I \end{aligned} \quad [83]$$

En realidad, estas ecuaciones son una misma, porque el primer miembro de la primera es precisamente la expresión del segundo de la otra, y viceversa; de modo que se obtienen solamente seis ecuaciones.

4) La tensión unitaria de la generatriz de borde en cada lóbulo tiene que ser igual a la del tirante común:

$$\begin{aligned} A_d^I a_T + B_d^I b_T + C_d^I c_T + D_d^I d_T &= -T_{m_d}^I + \text{tg} \\ A_i^{II} a_T + B_i^{II} b_T + C_i^{II} c_T + D_i^{II} d_T &= -T_{m_i}^{II} + \text{tg} \end{aligned} \quad [84]$$

Son 12 ecuaciones.

5) La igualdad del corrimiento angular de las normales en la gaviota da otras seis ecuaciones de la forma:

$$\theta_d^I = \theta_i^{II} \quad [85]$$

6) Las tensiones unitarias según la generatriz correspondientes a peso, viento y nieve para el primer término de la serie de Fourier han de satisfacer la condición:

$$t' g = \iint_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{dS_d^I}{dx} - \frac{dS_i^{II}}{dx} \right) dx^2 = \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{dS_d^I}{dx} - \frac{dS_i^{II}}{dx} \right)$$

y para el segundo término de la serie la condición:

$$t'' g = \iint_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{dS_d^{II}}{dx} - \frac{dS_i^{III}}{dx} \right) dx^2 = \frac{l^2}{9\pi^2} \left(\frac{dS_d^{II}}{dx} - \frac{dS_i^{III}}{dx} \right)$$

Por consiguiente, se tiene las cinco ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{t'_p}{t'_v} &= \frac{\frac{dS_d^I}{dx} - \frac{dS_i^I}{dx}}{\frac{dS_d^{II}}{dx} - \frac{dS_i^{II}}{dx}} & \frac{t'_p}{t''_v} &= \frac{\frac{dS_d^I}{dx} - \frac{dS_i^I}{dx}}{\frac{dS_d^{III}}{dx} - \frac{dS_i^{III}}{dx}} \\ \frac{t'_p}{t''_v} &= \frac{\frac{dS_d^{II}}{dx} - \frac{dS_i^{II}}{dx}}{\frac{dS_d^{III}}{dx} - \frac{dS_i^{III}}{dx}} & \frac{t''_p}{t''_v} &= \frac{\frac{dS_d^{II}}{dx} - \frac{dS_i^{II}}{dx}}{\frac{dS_d^{III}}{dx} - \frac{dS_i^{III}}{dx}} \\ \frac{t'_p}{t''_p} &= 9 \times \frac{\frac{dS_d^I}{dx} - \frac{dS_i^I}{dx}}{\frac{dS_d^{III}}{dx} - \frac{dS_i^{III}}{dx}} \end{aligned} \quad [86]$$

a las que se añade, por último:

$$t'_p + t'_v + t'_n + t'_p + t'_v + t'_n = t \quad [87]$$

con la que se establece en el tirante la tensión unitaria prevista como más conveniente y con la que se tiene el total de 54 ecuaciones.

Esta carga unitaria t está referida al material de la lámina, y ha de ser, por tanto, igual a la carga prevista para el acero por el cociente de los E de hormigón y acero.

La tensión total en el cordón será:

$$\begin{aligned} & \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{dS_{dp}^{(1)}}{dx} - \frac{dS_{ip}^{(11)}}{dx} + \frac{dS_{dv}^{(1)}}{dx} - \frac{dS_{iv}^{(11)}}{dx} + \frac{dS_{dn}^{(1)}}{dx} - \frac{dS_{in}^{(11)}}{dx} \right) + \\ & + \frac{1}{9} \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{dS_{dp}^{(11)}}{dx} - \frac{dS_{ip}^{(111)}}{dx} + \frac{dS_{dv}^{(11)}}{dx} - \frac{dS_{iv}^{(111)}}{dx} + \frac{dS_{dn}^{(11)}}{dx} - \frac{dS_{in}^{(111)}}{dx} \right) \end{aligned} \quad [88]$$

Para resolver este sistema formemos los sistemas auxiliares que se indica a continuación:

$$\begin{array}{l|l|l|l} A a_\zeta + B b_\zeta + C c_\zeta + D d_\zeta = 1 & = 0 & = 0 & = 0 \\ A a_Q + B b_Q + C c_Q + D d_Q = 0 & = 1 & = 0 & = 0 \\ A a_M + B b_M + C c_M + D d_M = 0 & = 0 & = 1 & = 0 \\ A a_T + B b_T + C c_T + D d_T = 0 & = 0 & = 0 & = 1 \end{array} \quad [89]$$

repetidos con los índices $(\frac{1}{d})$, $(\frac{11}{i})$, $(\frac{111}{d})$ y $(\frac{1111}{i})$;

y para distinguir sus resultados demos a las soluciones del primer sistema el subíndice $\zeta = 1$, a las de los otros sucesivamente $Q = 1$, $M = 1$, $T = 1$.

Es evidente que si conociéramos los valores de los segundos miembros de los grupos de ecuaciones del sistema general 1), 2), 3) y 4), el valor de una cualquiera de las constantes desconocidas vendría dado por la suma de los productos de los valores de estas incógnitas en los sistemas auxiliares por los segundos miembros antedichos. Un ejemplo aclarará esta idea mejor que cualquier explicación: $A_d^{(1)}$ vendrá dado por

$$\begin{aligned} A_d^{(1)} = & A_{dp}^{(1)}(\zeta=1) \times (-\zeta_m^{(1)} - \gamma_{ip}^{(11)}) + A_{dp}^{(1)}(Q=1) \times (-Q_m^{(1)} + N_{ip}^{(11)}) + \\ & + A_{dp}^{(1)}(M=1) \times (-M_{ip}^{(11)}) + A_{dp}^{(1)}(T=1) \times (-T_m^{(1)} + t_p g) \end{aligned} \quad [90]$$

Análoga expresión podría escribirse para B, C, y D y para los índices y subíndices

$$\left(\begin{smallmatrix} 'I \\ d_p \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 'I \\ d_y \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 'I \\ d_n \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 'II \\ i_p \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 'II \\ i_v \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 'II \\ i_n \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} "I \\ d_p \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} "I \\ d_y \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} "I \\ d_n \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} "II \\ i_p \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} "II \\ i_v \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} "II \\ i_n \end{smallmatrix} \right)$$

pero para formar el valor antedicho A'_{dp}^I nos faltan por conocer η'_{ip}^{II} , N'_{ip}^{II} , M'_{ip}^{II} y t_p , en cuyas expresiones están las mismas constantes desconocidas; análogas expresiones se obtendrían para los valores correspondientes a los otros subíndices.

Por otra parte, el conjunto de valores ha de satisfacer los grupos de ecuaciones [85] y [86].

Podemos resolver el problema por aproximaciones sucesivas, una vez resueltos los sistemas auxiliares. Damos unos valores cualquiera a los η , N, M y t que entran en las expresiones [90], cero, por ejemplo (o, mejor, unos valores que a ojo nos parezca que pueden coincidir con la realidad); con estos valores podemos formar los valores aproximados de las diferentes constantes A, B, C, D, aplicando las expresiones [90], y con ellas los nuevos valores de η , N, θ y $\frac{dS}{dx}$ dados por las expresiones

$$\begin{aligned}\eta &= A a_\eta + B b_\eta + C c_\eta + D d_\eta + \gamma m \\ N &= A a_N + B b_N + C c_N + D d_N + N m \\ \theta &= A a_\theta + B b_\theta + C c_\theta + D d_\theta + \theta m \\ \frac{dS}{dx} &= A a_s + B b_s + C c_s + D d_s + \frac{dS m}{dx}\end{aligned}\quad [91]$$

Para obtener la segunda aproximación de valores A, B, C, D basta repetir el cálculo de las expresiones [90] introduciendo estos nuevos valores de η y de N, unos nuevos valores de M fijados a sentimiento para que los dos valores θI y θII últimamente deducidos tiendan a igualarse, como exigen las ecuaciones del grupo [85], y unos nuevos valores de t , que tiendan igualmente a satisfacer la ecuación del grupo [86], en cuyo denominador entre la t en cuestión, y simultáneamente la [87]. Volviendo a formar las expresiones de η , N, θ y $\frac{dS}{dx}$ se puede repetir el tanteo hasta obtener la aproximación deseada.

La fijación de estos valores por tanteos sucesivos es relativamente fácil; M influye muy directamente en los valores de θ resultantes y no

es necesario que éstos se igualen exactamente, bastando con que las variaciones de M que hacen cambiar de signo el valor de $\theta I - \theta II$ en dos tanteos sucesivos esté dentro de los límites prácticamente admisibles para M ; en cuanto a los valores de t , los tanteos son breves porque tampoco es necesario que la ecuación [87] cierre exactamente, bastando con que el valor o carga unitaria del material sea aceptable.

*Determinación de las constantes de integración
en los bordes exteriores.*

Los bordes exteriores van articulados y con libre dilatación longitudinal, pero sin posibilidad de movimientos transversales, ni horizontal ni verticalmente.

No se dispone en ellos tirante supletorio de la lámina, como en la gaviota, porque la armadura resultante es pequeña y no sobrepasa la sección virtual de la lámina; lo cual permite simplificar mucho el problema, pues pueden establecerse por separado los sistemas de ecuaciones para peso, viento y nieve y para cada término de la serie.

En efecto, para cada uno de estos casos han de verificarse las cuatro condiciones siguientes: nulidad del corrimiento tangencial, nulidad del momento flector, nulidad del corrimiento radial y nulidad del esfuerzo cortante por no haber tirante ni elemento que lo absorba.

Resultan, pues, sistemas independientes de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} A a_\zeta + B b_\zeta + C c_\zeta + D d_\zeta &= -\zeta m \\ A a_\eta + B b_\eta + C c_\eta + D d_\eta &= -\eta m \\ A a_M + B b_M + C c_M + D d_M &= 0 \quad [92] \\ A a_s + B b_s + C c_s + D d_s &= -\frac{dS}{dx} m \end{aligned}$$

repetidos para (p') (v') (n') (p'') (v'') (n'') , con los que se determinan las incógnitas A, B, C, D correspondientes a cada uno de estos seis casos.



Determinación de los esfuerzos y corrimientos totales.

Estos valores son en cada punto suma de los correspondientes a los efectos de los dos bordes y al efecto de membrana.

Estos últimos se deducen de las fórmulas [16-53], aplicando los valores correspondientes a los dos primeros términos de las series.

Basta hallar los valores para $x=0$ ó para $x=\frac{l}{2}$ según que las expresiones contengan $\cos \frac{\mu x}{l}$ o $\sin \frac{\mu x}{l}$, pues con ello quedan determinados para otros valores de x (1).

Como se trata de leyes sinusoidales sobre la directriz, es más práctico hallar sólo los máximos y trazar gráficamente los diagramas. Recuérdese que es necesario hallar los valores correspondientes a los dos primeros términos de la serie ('') (") .

Para la determinación de los esfuerzos correspondientes a un efecto de borde se calculan primeramente los valores de

$$e^{j_1 \omega} \cos K_1 \omega \quad e^{j_1 \omega} \sin K_1 \omega \quad e^{j_1 \omega} \cos k_1 \omega \quad y \quad e^{j_1 \omega} \sin k_1 \omega$$

para distintos valores de ω , y se dibujan en cuatro curvas, haciendo coincidir las abscisas, con lo que se pueden apreciar los puntos o valores particulares de ω más importantes, esto es, los puntos que mejor han de definir el trazado de las curvas [79] formadas por las sumas de los productos de estos valores por constantes diferentes.

Para esos valores particulares de ω se hallan los de a, b, c, d , correspondientes a las distintas cargas y corrimientos que interesan, de acuerdo con las expresiones [79], para cuya formación se habrán formado primeramente los de α, β, γ y δ deducidos de las [80] (2).

Una vez obtenidos estos valores en cada lóbulo para ('') y (''), se pueden formar las expresiones [78] de los esfuerzos y corrimientos debidos a los efectos de cada borde para los valores particulares de ω ante-

(1) ω se refiere no a S , sino a $\frac{d S}{d x}$

(2) Recordamos, como ya se ha dicho en el capítulo de "Hipótesis", que en el cálculo numérico y gráfico siguiente se han trazado también estas curvas tomando 0,40 de los valores correspondientes al viento, y el 2,0 de los de nieve, para incluir la nueva hipótesis de succiones de viento propuesta en el informe de los Sres. Ribera y Aguirre.

dichos a partir del borde correspondiente, y trazar con ellos las curvas completas.

Tendremos así para cada esfuerzo o corrimiento y para cada carga exterior (peso, viento o nieve) las nuevas curvas correspondientes a los efectos de ambos bordes y al de membrana y a los dos términos de la serie, cuya suma algébrica nos dará el valor real.

Trazadas estas curvas sumas, ha de hacerse todavía la combinación más desfavorable de los valores de peso, de viento y de nieve, para obtener la curva de valores máximos positivos y negativos de cada esfuerzo o corrimiento a lo largo de la directriz.

Para determinar los diferentes valores en otras directrices, o sea para valores de x distintos de 0 y de $\frac{l}{2}$ parece necesario aplicar las leyes (\sin o \cos) $\frac{\pi x}{l}$ y (\sin o \cos) $\frac{3\pi x}{l}$ por separado para cada término o parte del esfuerzo o corrimiento; pero podemos admitir para el conjunto que las leyes de variación a lo largo de la generatriz sean parabólicas para T y para M , lineal para S , constante para Q , etc.

De este modo podemos acotar sobre una planta desarrollada de una lámina los valores que interesan principalmente, esto es, los de T , Q , S y M , pues los de N son pequeños y los de los corrimientos en cada punto interesan menos.

Conocidos los valores de T , Q y S en un punto cualquiera, puede ya trazarse el círculo de Mohr correspondiente y gráficamente la dirección y magnitud de los dos esfuerzos principales en el plano tangente a la lámina y con ello los planos de isostáticas y de isobaras de compresiones, tensiones principales máximas.

Con éstos y con los planos de isobaras de M se fijan definitivamente las direcciones y cuantías de las armaduras y cargas de trabajo en toda la lámina.

Por último, los valores de S , Q y N en todo el contorno permiten proyectar las estructuras de sustentación.

Comprobación de las estructuras sustentantes.

Habiéndose prescindido de la flexión longitudinal en las hipótesis adoptadas, debemos ahora admitir que las reacciones de los frentes rígidos sobre la lámina se reducen a los esfuerzos cortantes S en el plano tangente; como, por otra parte, hemos admitido una ley lineal para S , sus valores en la directriz extrema vienen dados por:

$$S = \frac{1}{2} \int \frac{dS}{dx} R d\varphi$$

en la que la integral extendida a los trozos de arco que corresponden a cada nudo de la palizada que rigidiza el arco o directriz extrema puede hallarse gráficamente sobre el diagrama de $\frac{dS}{dx}$ a lo largo de la directriz.

Como la variación de pendiente en cada trozo de arco es pequeña, puede admitirse que estas fuerzas actúan sobre cada nudo según la tangente a la directriz, y, descomponiéndolas vertical y horizontalmente, tener las cargas axiales sobre pilares y riostras.

Además de estas cargas axiales, actúa sobre las cabezas de los pilares el esfuerzo correspondiente a un corrimiento en la dirección de las generatrices, cuyo valor máximo podemos fijar en dos centímetros, correspondiendo uno a las deformaciones térmicas y de fraguado en los 27,5 metros de generatriz, y otro a deformación elástica de la misma por los esfuerzos longitudinales, que pasan de un máximo acortamiento hacia las claves a otro de alargamiento en la gaviota y bordes exteriores. Es fácil comprobar que para cualquiera de estos fenómenos la deformación fijada es suficientemente holgada.

Con estos datos se pueden comprobar a flexión compuesta las bases de los pilares que están empotrados en la base y articulados en su unión con el arco de rigidez de la lámina.

Este arco se descompone en pequeños trozos elásticamente empotrados, de los que el más importante es el que corresponde a la clave del lóbulo mayor, en el que podría comprobarse por el simple trazado del funicular de fuerzas el exceso de resistencia que se le da para asegurar la rigidez.

Los pilares o bielas extremas de estos marcos, de rigidez igual que

las que sujetan las generatrices extremas o de borde, van semiarticuladas en sus dos extremos, de forma que las dilataciones de la generatriz no producen en ellas flexiones apreciables; la lámina está también articulada sobre ellas, de modo que sólo soportan dos pequeños empujes, uno vertical Q y otro horizontal N, que, dadas las dimensiones y armaduras de las bielas, no requieren comprobación especial, y lo mismo sucede con los anclajes en los centros o puntos medios de estas generatrices extremas.

CAPITULO III

DESARROLLO NUMÉRICO Y GRÁFICO DEL CÁLCULO

Resumen de expresiones que entran en el cálculo numérico (1) (presentadas por su orden de utilización).

$$\mu'_0 = + \pi \quad \mu''_0 = - 3 \quad [\text{not}]$$

$$h'_0 = \frac{4}{\pi} \quad h''_0 = - \frac{4}{3\pi} \quad [2]$$

$$s'_0 = \frac{4l}{\pi^2} \quad s''_0 = - \frac{4l}{9\pi^2} \quad [3]$$

$$q'_0 = \frac{4l^2}{\pi^3} \quad q''_0 = - \frac{4l^2}{27\pi^3} \quad [4]$$

$$u'_0 = \frac{4l^3}{\pi^4} \quad u''_0 = - \frac{4l^3}{81\pi^4} \quad [5]$$

$$r'_0 = \frac{4l^4}{\pi^5} \quad r''_0 = - \frac{4l^4}{243\pi^5} \quad [6]$$

$$\nu = \frac{\mu^2 R^2}{L^2} \text{ repetido para } (') (") (') (") \quad [\text{not}]$$

$$\lambda = \frac{R}{g} \sqrt{3} \text{ repetido para } (') (") \quad [\text{not}]$$

(1) Los números entre paréntesis corresponden a los de las fórmulas de donde se deducen. [Not] indica que su fórmula es la de la notación correspondiente a cada símbolo.

$$Z_1 = 2(1 - v)$$

$$Z_2 = (1 - 4v + v^2)$$

$$Z_3 = -(2v - v^2)$$

[not]

$$\rho = \sqrt[4]{2vI}$$

se repiten para ('I) ("I) ('II) ("II)

$$Q_{\rho m} = -R \dot{\rho} h \cos \varphi \quad [18]$$

$$S_{\rho m} = -2 \dot{\rho} s \sin \varphi \quad [20]$$

$$T_{\rho m} = -\frac{2}{R} \dot{\rho} q \cos \varphi \quad [22]$$

$$E_\xi \dot{\rho} m = -\frac{2}{R} \dot{\rho} u \cos \varphi \quad [24]$$

$$E_\xi \eta \dot{\rho} m = \left(\frac{2}{R^2} \dot{\rho} r + 4 \dot{\rho} q \right) \sin \varphi \quad [26]$$

$$E_\xi \zeta \dot{\rho} m = \left[\left(\frac{2}{R^2} \dot{\rho} r + 4 \dot{\rho} q \right) + R^2 \dot{\rho} h \right] \cos \varphi \quad [27]$$

$$E_\xi \theta \dot{\rho} m = -R \dot{\rho} h \sin \varphi \quad [28]$$

$$Q_{v m} = -R v h \sin \varphi \quad [30]$$

$$S_{v m} = v s \cos \varphi \quad [32]$$

$$T_{v m} = -\frac{I}{R} v q \sin \varphi \quad [34]$$

$$E_\xi \dot{\xi} v m = -\frac{I}{R} v u \sin \varphi \quad [36]$$

$$E_\xi \eta v m = -v \left(2q + \frac{r}{R^2} \right) \cos \varphi \quad [37]$$

$$E_\xi \zeta v m = v \left[\left(2q + \frac{r}{R^2} \right) + R^2 h \right] \sin \varphi \quad [39]$$

$$E_\xi \theta v m = -v R h \cos \varphi \quad [40]$$

$$Q_{n m} = -n R h \cos^2 \varphi \quad [43]$$

$$S_{n m} = -3 n s \cos \varphi \sin \varphi \quad [45]$$

$$T_{n m} = -\frac{3}{R} n q (2 \cos^2 \varphi - 1) \quad [47]$$

$$E_g \xi n m = -\frac{3}{R} n u (2 \cos^2 \varphi - 1) \quad [49]$$

$$E_g \eta n m = 3 n \left(2 q + \frac{4}{R^2} r \right) \cos \varphi \sin \varphi \quad [51]$$

$$E_g \zeta n m = 3 n \left(2 q + \frac{4}{R^2} r \right) (2 \cos^2 \varphi - 1) + R^2 n h \cos^2 \varphi \quad [52]$$

$$E_g \theta n m = -n \left(\frac{18}{R} q + \frac{36}{R^3} r + 2 R h \right) \cos \varphi \sin \varphi \quad [53]$$

Todas estas expresiones de 18 a 53 se repiten para ('I) (''I) ('II) ('''II).

$$\begin{aligned} J_1 &= -0,9238795 \left(\rho - \frac{Z_1}{8 \rho} \right) - 0,0478354 \left(\frac{5 Z_1^2}{16} - Z_2 \right) \frac{1}{\rho^3} \\ K_1 &= -0,3826834 \left(\rho + \frac{Z_1}{8 \rho} \right) + 0,1154849 \left(\frac{5 Z_1^2}{16} - Z_2 \right) \frac{1}{\rho^3} \end{aligned} \quad [72]$$

$$\begin{aligned} j_1 &= -0,3826834 \left(\rho - \frac{Z_1}{8 \rho} \right) + 0,1154849 \left(\frac{5 Z_1^2}{16} - Z_2 \right) \frac{1}{\rho^3} \\ k_1 &= -0,9238795 \left(\rho + \frac{Z_1}{8 \rho} \right) - 0,0478354 \left(\frac{5 Z_1^2}{16} - Z_2 \right) \frac{1}{\rho^3} \end{aligned} \quad [73]$$

Se repiten para ('I) (''I) ('II) ('''II).

$$\begin{aligned} J_{\bar{n}} &= J_{\bar{n}-1} J_1 - K_{\bar{n}-1} K_1 \\ j_{\bar{n}} &= j_{\bar{n}-1} j_1 - k_{\bar{n}-1} k_1 \end{aligned} \quad [74]$$

$$\begin{aligned} K_{\bar{n}} &= J_{\bar{n}-1} K_1 + J_1 K_{\bar{n}-1} \\ k_{\bar{n}} &= j_{\bar{n}-1} k_1 + j_1 k_{\bar{n}-1} \end{aligned} \quad [75]$$

Se repiten para ('I) (''I) ('II) ('''II).

$$\begin{aligned} a_M &= -1 \\ a_N &= -\frac{1}{R} K_1 \\ a_Q &= +\frac{1}{R} K_2 \\ a_S &= -\frac{1}{R^2} (K_1 + K_2) \end{aligned} \quad [80]$$

$$\begin{aligned}
 a_T &= -\frac{1}{\nu R} (K_2 + K_4) \\
 a_\eta &= +\frac{2}{\nu} (K_1 + K_3) - \frac{1}{\nu^2} (K_3 + K_5) \\
 a_\zeta &= -K_2 + \frac{2}{\gamma} (K_2 + K_4) - \frac{1}{\nu^2} (K_4 + K_6) \\
 a_\theta &= -K_3 + \frac{2}{\nu} (K_1 + 2K_3 + K_5) - \frac{1}{\nu^2} (K_3 + 2K_5 + K_7)
 \end{aligned} \tag{80}$$

Idénticas expresiones para β , γ , δ , sustituyendo K por Jkj .

$$\begin{aligned}
 a\omega &= \alpha e^{J_i^\omega} \cos K_1 \omega + \beta e^{J_i^\omega} \sin K_1 \omega \\
 b\omega &= \beta e^{J_i^\omega} \cos K_1 \omega - \alpha e^{J_i^\omega} \sin K_1 \omega \\
 c\omega &= \gamma e^{J_i^\omega} \cos k_1 \omega + \delta e^{J_i^\omega} \sin k_1 \omega \\
 d\omega &= \delta e^{J_i^\omega} \cos k_1 \omega - \gamma e^{J_i^\omega} \sin k_1 \omega
 \end{aligned} \tag{79}$$

Se repiten para ('I) ("I) ('II) ("II) y para $M_1 N_1 Q_1 S_1 T_1 \eta_1 \zeta_1 \theta_1$.

$$\begin{aligned}
 A a_0 \zeta + B b_0 \zeta + C c_0 \zeta + D d_0 \zeta &= 1 = o = o = o \\
 A a_0 Q + B b_0 Q + C c_0 Q + D d_0 Q &= o = 1 = o = o \\
 A a_0 M + B b_0 M + C c_0 M + D d_0 M &= o = o = 1 = o \\
 A a_{0T} + B b_{0T} + C c_{0T} + D d_{0T} &= o = o = o = 1
 \end{aligned} \tag{89}$$

Se repiten para ('I) ("I) ('II) ("II).

$$\begin{aligned}
 A'_{d_p} &= A'_d (\zeta = 1) \times (-\zeta'_{m d_p} - \eta'_{i p}) + A'_{d_p} (Q = 1) \times \\
 &\quad \times (-Q'_{m d_p} + N'_{i p}) + A'_{d_p} (M = 1) \times (-M'_{i p}) + \\
 &\quad + A'_{d_p} (T = 1) \times (-T'_{m d_p} + t'_p g)
 \end{aligned} \tag{90}$$

Análogas expresiones B, C y D.

Se repiten para ('I_d) ("I_d) ('II_i) ("II_i) y para (_p) (_v) (_n).

Para los valores II se invierten los signos de η y N .

$$\begin{aligned}
 \eta &= A a_\eta + B b_\eta + C c_\eta + D d_\eta + \eta_m \\
 N &= A a_N + B b_N + C c_N + D d_N + N_m \\
 \theta &= A a_\theta + B b_\theta + C c_\theta + D d_\theta + \theta_m \\
 \frac{dS}{dx} &= A a_S + B b_S + C c_S + D d_S + \frac{dS_m}{dx}
 \end{aligned}$$

Se repiten para ($'I_d$) ($''I_d$) ($'II_i$) ($''II_i$) y para ($_p$) ($_v$) ($_n$).

$$\theta_d^1 = \theta_i^{11}$$

Se repiten para ($'I_d$) ($''I_d$) ($'II_i$) ($''II_i$) y para ($_p$) ($_v$) ($_n$). [85]

$$\begin{aligned} \frac{t'_p}{t'_v} &= \frac{\frac{dS_{dp}^{11}}{dx} - \frac{dS_{ip}^{11}}{dx}}{\frac{dS_{dv}^{11}}{dx} - \frac{dS_{iv}^{11}}{dx}} \\ \frac{t'_p}{t'_n} &= \frac{\frac{dS_{dp}^{11}}{dx} - \frac{dS_{ip}^{11}}{dx}}{\frac{dS_{dn}^{11}}{dx} - \frac{dS_{in}^{11}}{dx}} \\ \frac{t''_p}{t''_v} &= \frac{\frac{dS_{dp}^{11}}{dx} - \frac{dS_{ip}^{11}}{dx}}{\frac{dS_{dv}^{11}}{dx} - \frac{dS_{iv}^{11}}{dx}} \\ \frac{t''_p}{t''_n} &= \frac{\frac{dS_{dp}^{11}}{dx} - \frac{dS_{ip}^{11}}{dx}}{\frac{dS_{dn}^{11}}{dx} - \frac{dS_{in}^{11}}{dx}} \\ \frac{t'_p}{t''_p} &= \frac{q \left(\frac{dS_{dp}^{11}}{dx} - \frac{dS_{ip}^{11}}{dx} \right)}{\frac{dS_{dp}^{11}}{dx} - \frac{dS_{ip}^{11}}{dx}} \end{aligned} \quad [86]$$

$$t'_p + t'_v + t'_n + t''_p + t''_v + t''_n = t \quad [87]$$

$$A a_\zeta + B b_\zeta + C c_\zeta + D d_\zeta + \zeta_m = 0$$

$$A a_\eta + B b_\eta + C c_\eta + D d_\eta + \eta_m = 0$$

$$A a_s + B b_s + C c_s + D d_s + \frac{dS_m}{dx} = 0 \quad [91]$$

$$A a_M + B b_M + C c_M + D d_S = 0$$

Se repite para ('I) ("I) ('II) ("II) y para (ρ) (ν) (η).

$$\begin{aligned} & \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{dS_{dt}^{(I)}}{dx} - \frac{dS_{ip}^{(I)}}{dx} + \frac{dS_{dv}^{(I)}}{dx} - \frac{dS_{iv}^{(II)}}{dx} + \frac{dS_{dn}^{(I)}}{dx} - \frac{dS_{in}^{(II)}}{dx} \right) + \\ & + \frac{1}{9} \frac{l}{\pi^2} \left(\frac{dS_{dt}^{(II)}}{dx} - \frac{dS_{ip}^{(II)}}{dx} + \frac{dS_{dv}^{(II)}}{dx} - \frac{dS_{iv}^{(II)}}{dx} + \frac{dS_{dn}^{(II)}}{dx} - \frac{dS_{in}^{(II)}}{dx} \right) . \end{aligned} \quad [88]$$

$$M = A a_m + B b_m + C c_m + D d_m \quad [78]$$

Se repiten para N, Q, S, T, η , ζ , θ , para ('I) ("I) ('II) ("II), para (ρ) (ν) (η), para distintos ω y para ambos bordes de cada lóbulo.

CUADRO NUM. I

Datos y parámetros auxiliares.

$$\begin{array}{lll} l = 55,00 \text{ m.} & p = 250 \text{ kg/m}^2 \\ R^I = 12,50 \text{ m.} & v = 100 \rightarrow & [1] \\ R^{II} = 6,40 \text{ m.} & n = 65 \rightarrow \\ g = 0,08 \text{ m.} & t = 7.800,000 \text{ kg/m}^2 \end{array}$$

$$\varphi_i^I = 90^\circ \text{ m.}$$

$$\varphi_d^I = 60^\circ \text{ m.}$$

$$\varphi_i^{II} = 30^\circ \text{ m.}$$

$$\varphi_d^{II} = 90^\circ \text{ m.}$$

$\mu'_o =$	3,14	$\mu''_o =$	— 9,42	[not]
$h'_o =$	1,27	$h''_o =$	— 0,42	[2]
$s'_o =$	22,29	$s''_o =$	— 2,48	[3]
$q'_o =$	390,24	$q''_o =$	— 14,43	[4]
$u'_o =$	6.832,82	$u''_o =$	— 84,35	[5]
$r'_o =$	119.606,90	$r''_o =$	— 492,21	[6]
$v'^I =$	0,51	$v''^I =$	4,62	[not]
$v'^{II} =$	0,13	$v''^{II} =$	— 1,21	»
$\lambda'^I =$	270,64	$\lambda''^I =$	270,64	»
$\lambda''^{II} =$	138,57	$\lambda''^{II} =$	138,57	»
$Z'_1 =$	0,974	$Z''^I_1 =$	— 7,24	»
$Z''^{II}_1 =$	— 1,74	$Z''^{II}_1 =$	— 0,42	»
$Z'_2 =$	— 0,78	$Z''^I_2 =$	3,86	»
$Z''^{II}_2 =$	— 0,50	$Z''^{II}_2 =$	— 2,38	»
$Z'_3 =$	— 0,763	$Z''^I_3 =$	12,12	»
$Z''^{II}_3 =$	— 0,24	$Z''^{II}_3 =$	0,96	»
$\rho'^I =$	4,07	$\rho''^I =$	7,07	»
$\rho''^{II} =$	2,45	$\rho''^{II} =$	4,28	»

CUADRO NUM. 2

Esfuerzos y corrimientos por efecto de membrana

	Borde i.	Clave	Borde d.	Borde i.	Clave	Borde d.
$Q'_{\rho m}$	o	-3.979	-1.989	$Q''_{\rho m}$	-1.764	-2.307
$\frac{dS'_{\rho m}}{dx}$	637	o	-551	$dS''_{\rho m}$	318	o
$T'_{\rho m}$	o	-15.610	-7.805	$T''_{\rho m}$	-26.402	-30.487
$E_g \eta'_{\rho m}$	-772.982	o	669.403	$E_g \gamma'_{\rho m}$	-924.722	o
$E_g \zeta'_{\rho m}$	o	822.717	411.359	$E_g \zeta''_{\rho m}$	1.612.910	1.862.482
$E_g \theta'_{\rho m}$	-3.979	o	3.446	$E_g \theta''_{\rho m}$	-1.019	o
$Q''_{\rho m}$	o	1.326	663	$Q''_{\rho m}$	588	679
$\frac{dS''_{\rho m}}{dx}$	-212	o	184	$dS''_{\rho m}$	-106	o
$T''_{\rho m}$	o	578	289	$T''_{\rho m}$	978	1.129
$E_g \eta''_{\rho m}$	-16.028	o	-13.880	$E_g \gamma''_{\rho m}$	10.231	o
$E_g \zeta''_{\rho m}$	o	-32.606	-16.303	$E_g \zeta''_{\rho m}$	-21.483	-24.807
$E_g \theta''_{\rho m}$	-1.326	o	-1.149	$E_g \theta''_{\rho m}$	339	o

Formulas num.

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

46

47

48

49

50

51

52

53

54

55

56

57

58

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

71

72

73

74

75

76

77

78

79

80

81

82

83

84

85

86

87

88

89

90

91

92

93

94

95

96

97

98

99

100

101

102

103

104

105

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

126

127

128

129

130

131

132

133

134

135

136

137

138

139

140

141

142

143

144

145

146

147

148

149

150

151

152

153

154

155

156

157

158

159

160

161

162

163

164

165

166

167

168

169

170

171

172

173

174

175

176

177

178

179

180

181

182

183

184

185

186

187

188

189

190

191

192

193

194

195

196

197

198

199

200

201

202

203

204

205

206

207

208

209

210

211

212

213

214

215

216

217

218

219

220

221

222

223

224

225

226

227

228

229

230

231

232

233

234

235

236

237

238

239

240

241

242

243

244

245

246

247

248

249

250

251

252

253

254

255

256

257

258

259

260

261

262

263

264

265

266

267

268

269

270

271

272

273

274

275

276

277

278

279

280

281

282

283

284

285

286

287

288

289

290

291

292

293

294

295

296

C U A D R O N U M . 2 . — (Continuación)

	Borde i.	Clave	Borde d.		Borde i.	Clave.	Borde d.
$Q'_v m$	1.592	0	— 1.379	$Q''_{v m}$	407	0	— 815
$\frac{dS'_v m}{dx}$	0	127	64	$\frac{dS''_{v m}}{dx}$	110	127	0
$T'_v m$	3.122	0	— 2.704	$T''_{v m}$	3.049	0	— 6.098
$E_g \zeta'_{v m}$	0	— 154.696	— 77.348	$E_g \eta_{v m}$	— 320.427	— 370.068	0
$E_g \zeta''_{v m}$	— 174.590	0	151.195	$E_g \zeta'_{v m}$	— 187.611	0	375.223
$E_g \theta'_{v m}$	0	1.592	796	$E_g \theta''_{v m}$	— 706	— 815	0
$Q''_v m$	— 530	0	459	$Q''_{v m}$	— 136	0	272
$\frac{dS''_{v m}}{dx}$	0	— 44	— 22	$\frac{dS''_{v m}}{dx}$	— 38	— 44	0
$T''_v m$	— 116	0	100	$T''_{v m}$	— 113	0	220
$E_g \eta''_{v m}$	0	3.206	1.603	$E_g \eta''_{v m}$	3.544	4.092	0
$E_g \zeta''_{v m}$	9.657	0	— 8.363	$E_g \zeta''_{v m}$	— 2.915	0	— 5.831
$E_g \theta''_{v m}$	0	— 530	— 265	$E_g \theta''_{v m}$	— 233	— 271	0

Fórmulas numéricas.

CUADRO NUM. 2. — (Conclusión)

	Borde i.	Clave	Borde d.	Borde i.	Clave	Borde d.
$Q'_{n,m}^1$	0	- 1.034	- 259	$Q''_{n,m}^1$	- 397	- 530
$dS'_{n,m}^1$ dx	0	0	- 107	$dS''_{n,m}^1$ dx	107	0
$T'_{n,m}^1$	6.088	- 6.088	3.044	$T''_{n,m}^1$	- 5.945	- 11.890
$E_g \gamma_{n,m}^1$	0	0	324.435	$E_g \gamma_{n,m}^1$	- 1.052.135	0
$E_g \zeta_{n,m}^1$	- 749.272	+ 762.203	- 371.403	$E_g \zeta_{n,m}^1$	5.819.872	- 2.429.872
$E_g \theta_{n,m}^1$	0	0	- 1.370	$E_g \theta_{n,m}^1$	7.333	0
$Q''_{n,m}^1$	0	345	86	$Q''_{n,m}^1$	132	177
$dS''_{n,m}^1$ dx	0	0	36	$dS''_{n,m}^1$ dx	- 36	0
$T''_{n,m}^1$	- 225	- 113	$T''_{n,m}^1$	220	440	- 440
$E_g \gamma_{n,m}^{\prime\prime 1}$	0	0	- 3.580	$E_g \gamma_{n,m}^{\prime\prime 1}$	6.3584	0
$E_g \zeta_{n,m}^{\prime\prime 1}$	- 8.289	- 12.599	- 10.671	$E_g \zeta_{n,m}^{\prime\prime 1}$	- 8.450	- 16.335
$E_g \theta_{n,m}^{\prime\prime 1}$	0	0	803	$E_g \theta_{n,m}^{\prime\prime 1}$	- 254	0

Fórmulas numéricas

C U A D R O N U M . 3
 Valores de J_4 , K_1 , j_1 y k_1
 (Fórmulas núm. 72)

$J'_1 = -3.744$	$J''_1 = -6.650$	$J'_1 II = -2.204$	$J''_1 II = -3.967$
$K'_1 = -1.571$	$K''_1 = -2.649$	$K'_1 II = 0.963$	$K''_1 II = -1.627$
$j'_1 = -1.546$	$j''_1 = -2.755$	$j'_1 II = -0.883$	$j''_1 II = -1.645$
$k'_1 = 3.801$	$k''_1 = -6.418$	$k'_1 II = 2.364$	$k''_1 II = -3.948$

C U A D R O N U M . 4
 Valores de J_n , K_n , j_n y k_n .
 (Fórmulas núms. 74 y 75)

	S u b í n d i c e s					
	2	3	4	5	6	7
J'_1	11.55	24.75	-5.07	446.0	-3.256	17.029
$J'_1 II$	3.93	-4.56	-2.64	38.0	-152	451
J''_1	37.22	-154.03	141.49	6.010.6	-87.190	851.653
$J''_1 II$	13.09	-30.92	4.66	531.5	-4.302	24.365
j'_1	-12.05	63.29	7.19	-1.088.0	3.243	8.291
$j'_1 II$	-4.81	14.22	5.51	-100.3	142	388
j''_1	-33.60	319.84	-123.20	-14.923.3	88.237	241.783
$j''_1 II$	-12.88	72.48	-2.80	-1.316.6	4.383	9.664
K'_1	-11.77	62.21	-271.81	1.009.7	-3.079	6.415
$K'_1 II$	-4.26	13.17	-33.43	71.1	-120	118
K''_1	-35.29	333.26	-2.624.19	17.825.6	-102.618	451.445
$K''_1 II$	-12.91	72.53	-338.03	1.348.6	-4.485	10.792
k'_1	-11.75	-27.63	283.29	-410.6	-3.500	17.737
$k'_1 II$	-4.22	-7.64	40.37	-22.6	-217	527
k''_1	-35.41	-118.10	2.378.10	-7.342.3	-75.549	774.443
$k''_1 II$	-12.99	-29.49	334.64	-561.5	-4.274	24.334

C U A D R O N U M . 5

Valores de α , β , γ y δ .

(Fórmulas núm. 80)

	M	N	Q	S	T			
α' I	— I	0,299	0,924	0,182	— 1,01	— 1.712	12.406	— 66.498
β' I	0	— 0,126	— 0,942	— 0,408	44,24	— 3.824	11.641	— 27.920
γ' I	— I	0,124	— 0,964	— 0,395	0,758	4.134	— 12.357	— 27.298
δ' I	0	— 0,304	— 0,940	— 0,152	— 42,36	1.572	13.295	— 65.949
α'' II	— I	0,344	0,614	0,165	— 1,51	— 1.963	8.638	— 28.703
β'' II	0	— 0,151	— 0,666	— 0,345	43,94	— 4.484	7.988	— 13.638
γ'' II	— I	0,138	— 0,752	— 0,326	— 0,821	4.993	— 8.201	— 10.155
δ'' II	0	— 0,369	— 0,659	0,129	— 42,16	1.606	10.390	— 26.956
α''' I	— I	0,532	2,98	1,03	— 3,10	— 344	4.124	— 37.886
β''' I	0	— 0,212	— 2,83	— 2,15	46,09	— 706	3.820	— 15.186
γ''' I	— I	0,220	— 2,69	— 2,03	2,72	822	— 4.168	— 16.465
δ''' I	0	— 0,513	— 2,83	0,715	— 40,60	302	4.483	— 38.797
α''' II	— I	0,620	2,05	0,852	— 2,29	— 399	2.952	— 16.547
β''' II	0	— 0,254	— 2,02	— 1,81	45,32	— 848	2.727	— 6.864
γ''' II	— I	0,257	— 2,01	1,73	2,02	966	— 3.005	— 6.864
δ''' II	0	— 0,617	— 2,03	0,62	— 41,53	361	3.235	— 16.824

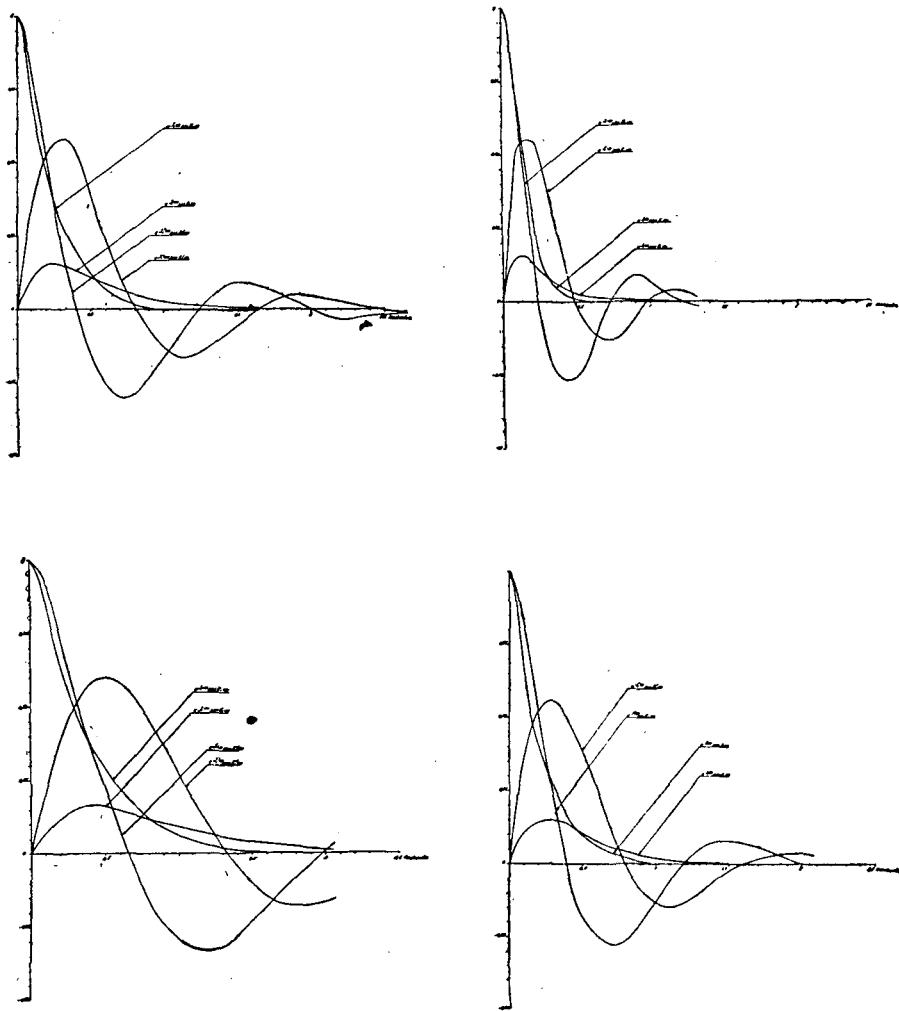


Fig. 8.—Curvas $= e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega$ y $= e^{j_1 \omega} \sin K_1 \omega$.

C U A D R O N U M. 6

Valores de $e^{J_1 \omega} \cos K_1 \omega$ y $e^{J_1 \omega} \sin K_1 \omega$ para los valores principales de ω
(deducidos de la fig. núm. 8)

	0°	14° 25'	43°	72°	94° 35'	115°
$e^{J_1' 100} \cos K_1' \omega$	1	0,39	0	0	0	0
$e^{J_1' 100} \sin K_1' \omega$	0	0,16	0	0	0	0
$e^{J_1' 100} \cos k_1' \omega$	1	0,38	-0,32	0	-0,09	0
$e^{J_1' 100} \sin k_1' \omega$	0	0,58	0	-0,17	0	0,05

	0°	28° 50'	66°	108°		
$e^{J_1'' 100} \cos K_1'' \omega$	1	0,30	0	0		
$e^{J_1'' 100} \sin K_1'' \omega$	0	0,16	0,085	0		
$e^{J_1'' 100} \cos k_1'' \omega$	1	0,24	-0,32	-0,05		
$e^{J_1'' 100} \sin k_1'' \omega$	0	0,60	0	-0,20		

	0°	9° 15'	25° 40'	42° 30'	57° 20'	69°
$e^{J_1''' 100} \cos K_1''' \omega$	1	0,45	0	0	0	0
$e^{J_1''' 100} \sin K_1''' \omega$	0	0,18	0	0	0	0
$e^{J_1''' 100} \cos k_1''' \omega$	1	0,35	-0,28	0	0,09	0
$e^{J_1''' 100} \sin k_1''' \omega$	0	0,56	0	-0,13	0	-0,04

	0°	17° 30'	46°	68° 30'	92°	112°
$e^{J_1'''' 100} \cos K_1'''' \omega$	1	0,25	0	0	0	0
$e^{J_1'''' 100} \sin K_1'''' \omega$	0	0,15	0	0	0	0
$e^{J_1'''' 100} \cos k_1'''' \omega$	1	0,28	-0,28	0	0,18	0
$e^{J_1'''' 100} \sin k_1'''' \omega$	0	0,56	0	-0,15	0	0,04

C U A D R O N U M. 7
Valores de a , b , c y d
(Fórmulas núm. 79)

	0°	$14^\circ 25'$	43°	72°	$94^\circ 35'$	115°
a'^{I_M}	o	-0,16	o	o	o	o
b'^{I_M}	-1	-0,39	o	o	o	o
c'^{I_M}	o	-0,58	o	+0,17	o	-0,05
d'^{I_M}	-1	-0,38	+0,32	o	+0,09	o

	0°	$28^\circ 50'$	66°	103°		
a'^{II_M}	o	-0,16	-0,085	o		
b'^{II_M}	-1	-0,30	o	o		
c'^{II_M}	o	-0,60	o	+0,20		
d'^{II_M}	-1	-0,24	+0,32	+0,05		

	0°	$9^\circ 15'$	$25^\circ 40'$	$42^\circ 30'$	$57^\circ 20'$	69°
a''^{I_M}	o	-0,18	o	o	o	o
b''^{I_M}	-1	-0,45	o	o	o	o
c''^{I_M}	o	-0,56	o	+0,13	o	-0,04
d''^{I_M}	-1	-0,35	+0,28	o	-0,09	o

	0°	$17^\circ 30'$	46°	$68^\circ 30'$	92°	112°
a''^{II_M}	o	-0,15	o	o	o	o
b''^{II_M}	-1	-0,25	o	o	o	o
c''^{II_M}	o	-0,15	o	o	o	o
d''^{II_M}	-1	-0,28	+0,28	o	-0,18	o

NOTA.—En todas las tablas del cuadro 7 los signos son para el borde izquierdo; para el derecho multiplicar por -1.

CUADRO NUM. 7.—(*Continuación*)

	0°	$14^{\circ} 25'$	43°	72°	$94^{\circ} 33'$	115°
a'^I_{N}	-0,13	-0,003	0	0	0	0
b'^I_{N}	+0,3	+0,357	0	0	0	0
c'^I_{N}	-0,30	-0,285	+0,096	-0,019	+0,027	+0,006
d'^I_{N}	+0,12	+0,218	-0,038	-0,048	-0,010	+0,015

	0°	$28^{\circ} 50'$	66°	108°		
a'^{II}_{N}	-0,15	+0,009	+0,029	0		
b'^{II}_{N}	+0,34	+0,126	+0,012	0		
c'^{II}_{N}	-0,37	-0,05	+0,118	-0,010		
d'^{II}_{N}	+0,14	+0,255	-0,045	-0,081		

	0°	$9^{\circ} 15'$	$25^{\circ} 40'$	$43^{\circ} 30'$	$57^{\circ} 20'$	69°
a''^I_{N}	-0,212	+0,085	0	0	0	0
b''^I_{N}	+0,532	-0,334	0	0	0	0
c''^I_{N}	-0,513	-0,057	+0,144	-0,029	-0,046	-0,009
d''^I_{N}	+0,220	+0,364	-0,062	-0,067	+0,020	-0,021

	0°	$17^{\circ} 30'$	46°	$68^{\circ} 30'$	92°	112°
a''^{II}_{N}	-0,254	+0,030	0	0	0	0
b''^{II}_{N}	+0,620	+0,188	0	0	0	0
c''^{II}_{N}	-0,617	-0,028	+0,172	-0,038	-0,110	+0,010
d''^{II}_{N}	+0,257	+0,417	-0,072	-0,093	+0,046	+0,025

CUADRO NUM. 7. — (*Continuación*)

	0°	$14^{\circ} 25'$	43°	72°	$94^{\circ} 35'$	115°
a'^{I}_{Q}	— 0,94	— 0,22	o	o	o	o
b'^{I}_{Q}	+ 0,92	+ 0,508	o	o	o	o
c'^{I}_{Q}	— 0,94	— 0,208	+ 0,3	+ 0,157	+ 0,081	— 0,048
d'^{I}_{Q}	— 0,96	+ 0,188	+ 0,307	— 0,150	+ 0,086	+ 0,047

	0°	$28^{\circ} 50'$	66°	108°		
a'^{II}_{Q}	— 0,67	— 0,104	+ 0,052	o		
b'^{II}_{Q}	+ 0,61	+ 0,29	+ 0,057	o		
c'^{II}_{Q}	— 0,66	— 0,608	+ 0,210	+ 0,183		
d'^{II}_{Q}	— 0,75	+ 0,216	+ 0,240	— 0,095		

	0°	$9^{\circ} 15'$	$25^{\circ} 40'$	$48^{\circ} 30'$	$57^{\circ} 20'$	69°
a''^{I}_{Q}	— 2,823	— 0,773	o	o	o	o
b''^{I}_{Q}	+ 2,978	+ 1,849	o	o	o	o
c''^{I}_{Q}	— 2,883	— 1,611	+ 0,808	+ 0,350	— 0,260	+ 0,108
d''^{I}_{Q}	— 2,688	+ 0,678	+ 0,753	— 0,375	— 0,242	— 0,115

	0°	$17^{\circ} 30'$	46°	$68^{\circ} 30'$	92°	112°
a''^{II}_{Q}	— 2,018	— 0,197	o	o	o	o
b''^{II}_{Q}	+ 2,045	+ 0,818	o	o	o	o
c''^{II}_{Q}	— 2,03	— 1,639	+ 0,514	+ 0,302	— 0,365	— 0,080
d''^{II}_{Q}	— 2,013	+ 0,628	+ 0,512	— 0,305	— 0,362	+ 0,081

CUADRO NUM. 7.—(Continuación)

	0°	14° 25'	43°	72°	94° 33'	115°
a'1s	-0,408	-0,131	0	0	0	0
b'1s	+0,182	+0,137	0	0	0	0
c'1s	+0,152	-0,172	-0,048	-0,067	-0,013	+0,02
d'1s	-0,395	-0,238	+0,127	+0,026	+0,035	+0,007

	0°	28° 50'	66°	108°		
a''1s	-0,345	-0,079	+0,014	0		
b''1s	+0,165	+0,100	+0,029	0		
c''1s	+0,129	-0,164	-0,041	0		
d''1s	-0,326	-0,156	+0,104	+0,042		

	0°	9° 15'	25° 40'	42° 30'	57° 20'	69°
a''''1s	-2,15	-0,782	0	0	0	0
b''''1s	+1,028	-0,849	0	0	0	0
c''''1s	+0,715	-0,885	-0,200	+0,264	+0,064	+0,081
d''''1s	-2,029	-1,120	+0,575	+0,093	-0,183	+0,029

	0°	17° 30'	46°	68° 30'	92°	112°
a''''1s	-1,81	-0,085	0	0	0	0
b''''1s	+0,852	+0,484	0	0	0	0
c''''1s	+0,624	-0,793	-0,715	+0,259	+0,112	-0,069
d''''1s	-1,729	+0,135	+0,484	+0,094	-0,311	-0,025

CUADRO NUM. 7.—(Continuación)

	$^{\circ} 0$	$14^{\circ} 25'$	43°	72°	$94^{\circ} 35'$	113°
a'^{I_T}	+ 44,24	+ 19,04	o	o	o	o
b'^{I_T}	- 1,01	- 7,59	o	o	o	o
c'^{I_T}	- 42,36	+ 15,81	+ 13,60	- 0,128	+ 3,81	+ 0,037
d'^{I_T}	+ 0,758	+ 24,89	- 0,242	- 7,20	- 0,068	+ 2,118

	0°	$28^{\circ} 50'$	65°	108°		
a'^{II_T}	+ 43,94	+ 10,06	- 0,121	o		
b'^{II_T}	- 1,508	- 7,454	- 3,720	o		
c'^{II_T}	- 42,16	- 10,49	- 13,50	+ 2,27		
d'^{II_T}	- 0,821	+ 25,10	+ 0,265	- 8,04		

	0°	$9^{\circ} 15'$	$25^{\circ} 40'$	$43^{\circ} 30'$	$57^{\circ} 20'$	69°
a''^{I_T}	+ 46,089	+ 20,182	o	o	o	o
b''^{I_T}	- 3,097	- 9,69	o	o	o	o
c''^{I_T}	- 40,599	- 12,687	+ 11,368	- 0,351	- 0,365	- 0,109
d''^{I_T}	+ 2,717	+ 23,688	- 0,762	- 5,528	+ 0,245	- 1,624

	0°	$17^{\circ} 30'$	46°	$68^{\circ} 30'$	92°	112°
a''^{II_T}	+ 45,32	+ 10,98	o	o	o	o
b''^{II_T}	- 2,29	- 7,17	o	o	o	o
c''^{II_T}	- 41,53	- 10,49	+ 11,62	- 0,304	- 7,48	+ 0,81
d''^{II_T}	+ 2,025	+ 23,83	- 0,567	- 6,23	+ 0,365	+ 1,66

CUADRO NUM. 7.—(Continuación)

	0°	14° 25'	18°	72°	94° 35'	115°
a'_ζ^I	+ 11,641	+ 2,625	0	0	0	0
b'_ζ^I	+ 12,406	+ 2,975	0	0	0	0
c'_ζ^I	+ 13,295	- 2,458	- 5,052	+ 2,101	- 1,197	- 618
d'_ζ^I	- 12,357	- 12,407	+ 3,954	+ 2,260	+ 1,113	- 665

	0°	28° 50'	66°	108°		
a''_ζ^{II}	+ 7,988	+ 3,778	+ 692	0		
b''_ζ^{II}	+ 8,638	+ 1,313	- 639	0		
c''_ζ^{II}	+ 10,390	- 2,426	- 3,325	+ 1,120		
d''_ζ^{II}	- 8,201	- 8,201	+ 2,624	+ 2,488		

	0°	9° 15'	25° 40'	42° 30'	57° 20'	60°
a''_ζ^I	+ 3,820	+ 2,467	0	0	0	0
b''_ζ^I	+ 4,124	+ 1,168	0	0	0	0
c''_ζ^I	+ 4,483	- 765	- 1,255	+ 542	+ 403	+ 168
d''_ζ^I	- 4,168	- 3,969	+ 1,167	+ 583	- 375	+ 179

	0°	17° 30'	46°	68° 30'	92°	112°
a''_ζ^{II}	+ 2,727	+ 830	0	0	0	0
b''_ζ^{II}	+ 2,952	+ 329	0	0	0	0
c''_ζ^{II}	+ 3,235	- 777	- 906	+ 451	+ 582	- 120
d''_ζ^{II}	- 3,005	- 2,653	+ 841	+ 485	- 541	- 129

CUADRO NUM. 7. — (*Continuación*)

	0°	$14^\circ 25'$	43°	72°	$04^\circ 35'$	115°
a'_η^I	— 3,824	— 1,766	0	0	0	0
b'_η^I	— 1,712	— 56	0	0	0	0
c'_η^I	+ 1,572	— 2,994	— 503	— 703	+ 141	+ 207
d'_η^I	+ 4,134	+ 659	— 1,323	+ 267	— 372	— 79
	0°	$28^\circ 20'$	66°	108°		
a''_η^{II}	— 4,484	— 1,659	— 167	0		
b''_η^{II}	— 1,963	+ 128	+ 381	0		
c''_η^{II}	+ 1,606	+ 3,381	— 514	+ 919		
d''_η^{II}	+ 4,993	+ 235	+ 1,598	+ 71		
	0°	$9^\circ 15'$	$25^\circ 40'$	$42^\circ 30'$	$57^\circ 20'$	69°
a''_η^I	— 706	+ 334	0	0	0	0
b''_η^I	— 344	— 163	0	0	0	0
c''_η^I	+ 302	+ 567	— 84	— 107	+ 27	— 33
d''_η^I	+ 822	+ 119	— 230	+ 39	+ 74	+ 12
	0°	$17^\circ 30'$	46°	$68^\circ 30'$	92°	112°
a''_η^{II}	— 848	— 272	0	0	0	0
b''_η^{II}	— 399	+ 27	0	0	0	0
c''_η^{II}	+ 361	+ 642	— 101	— 145	+ 65	+ 39
d''_η^{II}	+ 967	+ 69	— 271	+ 54	+ 174	— 14

CUADRO NUM. 7.—(Conclusion)

	0°	$14^{\circ} 25'$	43°	72°	$94^{\circ} 35'$	115°
a'_θ^I	— 27,920	— 21,529	0	0	0	0
b'_θ^I	— 66,398	— 21,467	0	0	0	0
c'_θ^I	— 65,949	— 40,894	+ 21,104	+ 4,641	+ 5,935	— 1,465
d'_θ^I	— 27,298	+ 27,878	+ 8,735	— 11,211	— 2,457	+ 3,297
	0°	$28^{\circ} 50'$	66°	108°		
a''_θ^{II}	— 13,638	— 8,683	— 2,440	0		
b''_θ^{II}	— 28,703	— 6,429	+ 1,159	0		
c''_θ^{II}	— 26,956	— 12,562	+ 8,626	+ 3,379		
d''_θ^{II}	— 10,155	+ 13,737	+ 3,250	— 4,833		
	0°	$9^{\circ} 15'$	$25^{\circ} 40'$	$42^{\circ} 30'$	$57^{\circ} 20'$	69°
a''_θ^I	— 15,186	— 13,653	0	0	0	0
b''_θ^I	— 37,886	— 14,306	0	0	0	0
c''_θ^I	— 38,797	— 22,800	+ 10,863	+ 2,141	— 3,492	+ 659
d''_θ^I	— 16,466	+ 15,963	+ 4,511	— 5,044	— 1,482	— 1,552
	0°	$17^{\circ} 30'$	46°	$68^{\circ} 30'$	92°	112°
a''_θ^{II}	— 6,864	— 4,198	0	0	0	0
b''_θ^{II}	— 16,547	— 3,107	0	0	0	0
c''_θ^{II}	— 16,824	— 8,555	+ 4,711	+ 1,030	— 3,028	— 275
d''_θ^{II}	— 6,864	+ 7,499	+ 1,922	— 2,524	— 1,236	— 673

C U A D R O N U M . 8

Sistemas de ecuaciones auxiliares para borde común

(Fórmulas núm. 89)

Sistemas de ecuaciones ('I)	1	2	3	4
+ 11,641 A + 12,406 B + 13,295 C - 12,357 D =	1	0	0	0
- 0,94 A + 0,92 B - 0,94 C - 0,96 D =	0	1	0	0
— B — D =	0	0	1	0
+ 44,24 A - 1,01 B - 42,36 C + 0,758 D =	0	0	0	1

Sistemas de ecuaciones ('II)	5	6	7	8
+ 7,988 A + 8,638 B + 10,390 C - 8,201 D =	1	0	0	0
- 0,67 A + 0,61 B - 0,66 C - 0,75 D =	0	1	0	0
— B — D =	0	0	1	0
+ 43,94 A - 1,51 B - 42,16 C - 0,82 D =	0	0	0	1

Sistemas de ecuaciones ("I)	9	10	11	12
+ 3,820 A + 4,124 B + 4,483 C - 4,168 D =	1	0	0	0
- 2,82 A + 2,98 B - 2,88 C - 2,69 D =	0	1	0	0
— B — D =	0	0	1	0
+ 46,09 A - 3,10 B - 40,60 C + 2,72 D =	0	0	0	1

Sistemas de ecuaciones ("II)	13	14	15	16
+ 2,727 A + 2,952 B + 3,235 C - 3,005 D =	1	0	0	0
- 2,02 A + 2,05 B - 2,03 C - 2,01 D =	0	1	0	0
— B — D =	0	0	1	0
+ 45,32 A - 2,29 B - 41,53 C + 2,02 D =	0	0	0	1

C U A D R O N U M . 8

(Conclusión)

Soluciones de los sistemas	Valores de las incógnitas			
	A	B	C	D
1	+ 0,00002	+ 0,00002	+ 0,00002	- 0,00002
2	- 0,253	+ 0,267	- 0,277	- 0,267
3	+ 0,00449	- 0,505	+ 0,0079	- 0,495
4	+ 0,012	+ 0,000387	- 0,0112	- 0,000387
5	+ 0,000028	+ 0,000028	+ 0,000029	- 0,000028
6	- 0,343	+ 0,389	- 0,366	- 0,389
7	+ 0,0158	- 0,522	+ 0,0446	- 0,478
8	+ 0,0124	+ 0,000828	- 0,0109	- 0,000828
9	+ 0,00006	+ 0,00006	+ 0,00006	- 0,00006
10	- 0,0759	+ 0,0884	- 0,0988	- 0,0884
11	- 0,0146	- 0,489	- 0,0135	- 0,511
12	+ 0,012	+ 0,0004	- 0,011	- 0,0004
13	+ 0,000085	+ 0,000084	+ 0,000084	- 0,000084
14	- 0,111	+ 0,124	- 0,134	- 0,124
15	- 0,0056	- 0,500	- 0,00289	- 0,500
16	+ 0,012	+ 0,00047	- 0,011	- 0,000473

C U A D R O N U M . 9

Aproximaciones sucesivas de A, B, C y D en el borde común

(Fórmulas núms. 85, 86, 87, 90 y 91)

Primer tanteo

	Primer término de la serie			Segundo término de la serie		
	Peso	Viento	Nieve	Peso	Viento	Nieve
M	— 850	— 400	— 25	+ 100	+ 30	+ 30
tg	+ 98,000	+ 5,000	+ 14,800	— 4,000	— 550	— 1,360
A ^I	+ 826	— 470,5	+ 124,1	+ 1,5	+ 27,12	— 8,0
B ^I	+ 1,589	+ 598	+ 255,3	— 126,5	— 54,5	— 27,1
C ^I	— 1,699	— 511,4	— 159,8	+ 118,6	+ 53,15	+ 23,5
D ^I	— 739	— 197,8	— 230,3	+ 30,6	+ 24,50	— 2,7
A ^{II}	+ 892	+ 44,4	+ 131,1	+ 9,2	— 14,92	— 3,09
B ^{II}	+ 1,804	+ 233,7	+ 284,6	— 144,0	— 8,06	— 35,27
C ^{II}	— 2,064	— 10,6	— 359,7	+ 140,0	— 8,88	— 36,79
D ^{II}	— 954	+ 171,3	— 260,7	+ 44,0	— 21,94	+ 3,43
θ ^I	— 3.000,000	— 12.000,000	+ 3.720,000	+ 282,600	+ 810,000	— 275,500
η ^I	+ 10.890,000	+ 773,000	+ 2.448,435	— 117,320	— 34,120	— 23,430
N ^I	— 795	— 369,5	— 81,9	+ 122	+ 57,05	+ 25,4
$\left(\frac{dS}{dx}\right)^I$	— 537	— 237	— 171,3	+ 295	+ 103,4	+ 24,35
θ ^{II}	+ 1.400,000	— 8.740,000	+ 2.440,000	— 343,000	+ 536,000	— 38,000
η ^{II}	— 16.575,000	— 147,627	— 4.077,135	+ 153,000	— 5,350	+ 39,820
N ^{II}	+ 1,114	+ 100,7	+ 173,4	— 187,2	— 1,4	— 42,94
$\left(\frac{dS}{dx}\right)^{II}$	+ 350	— 144,1	+ 148,5	— 232,7	+ 14,2	— 43,4

NOTA.—Para que la carga del acero en el cordón sea 900 kg/cm² ha de ser:

$$tg = 900 \frac{300,000}{2.100,000} \times 800 = 100,000$$

siendo 300,000, 2.100,000 y 800, respectivamente, los coeficientes de elasticidad de hormigón y acero, y la sección de la lámina por metro lineal.

CUADRO NUM. 9

(Continuación)

Segundo tanto

	Primer término de la serie			Segundo término de la serie		
	Peso	Viento	Nieve	Peso	Viento	Nieve
M	-830	-480	-130	+125	+20	+19
tg	+90,000	+10,300	+29,000	-6,500	-1,440	-750
A ^I	+699,5	-530	+281,9	-26,9	+15	+0,2
B ^I	+1.611,2	+657,3	+280,5	-149,6	-48,86	-27,7
C ^I	-1.633,2	-573,6	-317,5	+147,70	+61,2	+17,8
D ^I	-781,2	-177,3	-150,4	+24,60	+28,96	+3,7
A ^{II}	+807	+108,1	+282,5	-19	-27,05	+4,51
B ^{II}	+1,791	+278,1	+316,1	-167,2	-5,18	-30,71
C ^{II}	-1,967	-74,1	-520,8	+170,4	+2,04	+30,38
D ^{II}	-961	+200,9	-186,1	+42,2	-14,82	-11,71
θ ^I	-1.900,000	-13.450,000	+1.500,000	+81,000	+1.246,000	-106,000
η ^I	+10.580,000	+633,000	+3.069,435	-13,880	-47,000	-19,689
N ^I	-810	-414,5	-124	+140,9	+54,4	+20,35
$\left(\frac{dS}{dx}\right)^I$	-620	-253,35	-60,5	+224,8	+74,4	+53,57
θ ^{II}	-300,000	-9.460,000	+2.840,000	+275,000	+339,000	+116,000
η ^{II}	-16.025,000	-474,000	-4.702,133	+195,831	+15,000	+37,330
N ^{II}	+1,085	+144,5	+230,9	-192,4	-1,45	-35,75
$\left(\frac{dS}{dx}\right)^{II}$	+396	-176,5	+55,5	-179,6	+36,00	-71,6

C U A D R O N U M . 9

(Conclusión)

Tercer tanteo

	Primer término de la serie			Segundo término de la serie		
	Peso	Viento	Nieve	Peso	Viento	Nieve
M	— 850	— 490	— 85	+ 120	+ 30	+ 23
tg	+ 90,000	+ 7,700	+ 21,000	— 5,200	— 880	— 1,000
A ^I	+ 698,5	— 506,02	+ 189,4	— 12,85	+ 22,92	— 3,24
B ^I	+ 1.600,3	+ 659,28	+ 270,8	— 143,8	— 55,23	— 24,15
C ^I	— 1.634,4	— 536,72	— 236,9	+ 132,36	+ 56,25	+ 20,13
D ^I	— 750,3	— 169,28	— 185,8	+ 23,30	+ 24,83	+ 1,25
A ^{II}	+ 796,6	+ 73,86	+ 193,7	— 1,87	— 21,56	+ 1,31
B ^{II}	+ 1,792	+ 284,87	+ 303,4	— 160,9	— 8,16	— 31,83
C ^{II}	— 1,988	— 49,53	— 441,3	+ 154,63	— 6,69	+ 32,97
D ^{II}	— 942	+ 211,12	— 217,9	+ 40,9	— 21,84	+ 8,83
θ ^I	— 1.900,000	— 9.750,000	+ 2.550,000	— 94,000	+ 885,000	— 164,000
η ^I	+ 10.430,000	+ 652,652	+ 2.654,000	— 130,980	— 8,900	— 21,320
N ^I	— 799	— 404	— 106	— 136,1	+ 57,8	+ 22,43
$\left(\frac{dS}{dx}\right)^I$	— 601	— 246,35	— 117,7	+ 254,2	+ 92,9	+ 41,80
θ ^{II}	+ 400,000	— 10.000,000	+ 2.760,000	— 207,100	+ 546,000	— 100,000
η ^{II}	— 15.875,000	— 240,000	— 4.322,000	+ 171,331	+ 1,780	+ 38,560
N ^{II}	+ 1,098	+ 134,1	+ 208,8	— 183,5	— 1,05	— 38,04
$\left(\frac{dS}{dx}\right)^{II}$	+ 392	— 164,16	+ 104,5	— 213,5	+ 27,2	— 60,0

Tensión total del cordón (fórmula 88) = 367.000 kgs.

Sección de acero = 400 cm².

C U A D R O N U M . I O

Valores de A, B, C, y D en los bordes extremos

(Fórmulas núm. 92)

Sistemas de ecuaciones ('I)	Peso — 1	Viento — 2	Nieve — 3
$11,641 A + 12,406 B + 13,295 C - 12,357 D =$	0	174,590	749,272
$- 3,825 A - 1,712 B + 1,573 C + 4,134 D =$	772,982	0	0
$- 0,41 A + 0,18 B + 0,15 C - 0,39 D =$	- 637	0	0
$- B - D =$	0	0	0

Sistemas de ecuaciones ('II)	Peso — 4	Viento — 5	Nieve — 6
$7,937 A + 8,639 B + 10,390 C - 8,201 D =$	0	- 375,223	2,429,872
$4,484 A + 1,963 B - 1,606 C - 4,993 D =$	1,849,446	0	0
$0,35 A - 0,16 B - 0,13 C + 0,33 D =$	637	0	0
$- B - D =$	0	0	0

Sistemas de ecuaciones (''I)	Peso — 7	Viento — 8	Nieve — 9
$3,820 A + 4,124 B + 4,483 C - 4,168 D =$	0	- 9,657	- 8,289
$- 706 A + 344 B + 302 C - 822 D =$	- 16,028	0	0
$- 2,15 A + 1,03 B + 0,72 C - 2,03 D =$	212	0	0
$- B - D =$	0	0	0

Sistemas de ecuaciones (''II)	Peso — 10	Viento — 11	Nieve — 12
$2,727 A + 2,952 B + 3,236 C - 3,005 D =$	0	5,831	- 15,205
$848 A + 400 B - 362 C - 967 D =$	20,461	0	0
$1,81 A - 0,85 B - 0,62 C + 1,73 D =$	212	0	0
$- B - D =$	0	0	0

C U A D R O N U M . 1 0

(*Conclusion*)

Soluciones de los sistemas	Valores de las incógnitas			
	A	B	C	D
1	853,86	— 954,19	339,14	594,19
2	3,75	0,13	9,61	— 0,13
3	16,11	0,54	41,23	— 0,54
4	949,93	— 761,70	504,39	761,70
5	— 10,99	0,53	— 28,36	— 0,53
6	71,19	— 3,45	183,69	3,45
7	— 52,66	38,68	— 26,72	— 38,68
8	— 0,59	— 0,047	— 1,56	— 0,047
9	— 0,507	— 0,04	— 1,34	0,04
10	— 62,8	45,69	— 31,19	— 45,69
11	0,501	0,036	1,313	— 0,036
12	— 1,307	— 0,094	— 3,424	0,094

C U A D R O N U M . I I

Valores componentes de M, S, T, N, Q, ζ y η

(Fórmulas núm. 78)

$=$	0°	$14^{\circ} 23'$	43°	72°	$94^{\circ} 35'$	115°
$M_{i,p}^{'} 1$	0	— 3,38	190	61,0	53,5	— 17,9
$S_{i,p}^{'} 1$	— 635	— 393	58,3	39,4	16,2	3,02
$T_{i,p}^{'} 1$	23,650	27,800	4,756	— 4,326	1,328	1,272
$N_{i,p}^{'} 1$	— 320	— 188	11,9	— 35,13	3,75	11,06
$Q_{i,p}^{'} 1$	— 2,263	— 453	290	— 32,9	80,2	10,78
$\zeta_{i,p}^{'} 1$	0	— 7,717,000	545,000	2,103,000	230,000	— 618,000
$\eta_{i,p}^{'} 1$	768,000	— 12,000	— 955,000	— 94,000	— 170,000	27,000
$M_{i,v}^{'} 1$	0	— 6,18	— 0,040	— 1,64	— 0,012	— 0,480
$S_{i,v}^{'} 1$	0,005	— 2,11	— 0,478	0,639	— 0,124	— 0,191
$T_{i,v}^{'} 1$	— 240	— 92,4	131	— 0,29	36,63	0,08
$N_{i,v}^{'} 1$	— 3,36	— 2,73	0,92	— 0,17	0,261	0,055
$Q_{i,v}^{'} 1$	— 12,3	— 2,77	2,84	1,53	0,768	— 0,466
$\zeta_{i,v}^{'} 1$	175,030	— 11,790	— 49,315	20,105	— 11,614	— 5,384
$\eta_{i,v}^{'} 1$	0	22,010	— 4,680	— 6,785	1,308	2,010
$M_{i,n}^{'} 1$	0	— 26,5	— 0,173	7,00	— 0,005	— 2,06
$S_{i,n}^{'} 1$	— 0,037	— 9,02	— 2,05	2,75	— 0,549	0,824
$T_{i,n}^{'} 1$	— 1,038	— 395	360	— 1,40	157	0,380
$N_{i,n}^{'} 1$	— 14,5	— 11,7	3,98	— 0,750	1,12	0,232
$Q_{i,n}^{'} 1$	— 53,0	— 12,0	12,2	6,56	3,29	— 2,01
$\zeta_{i,n}^{'} 1$	751,400	— 51,500	— 212,130	86,280	— 50,110	— 25,140
$\eta_{i,n}^{'} 1$	0	94,615	19,080	— 29,144	6,000	8,593

CUADRO NUM. 11

(Continuación)

	0°	14° 25'	43°	72°	94° 35'	115°
M'1 d _p	— 850	+ 495	— 240	— 276	— 67	+ 181
S'1 d _p	+ 48	— 586	+ 17	+ 129,5	+ 5,4	+ 27,8
T'1 d _p	+ 97,832	+ 8,700	— 21,919	+ 5,610	— 6,149	— 1,660
N'1 d _p	— 789	— 971	+ 128	— 67,2	+ 36,5	+ 21,1
Q'1 d _p	+ 3.080,0	+ 857,0	— 720,0	— 143,0	— 196,0	+ 43,0
Z'1 d _p	+ 15.400.000	+ 19.880.000	— 5.290.000	— 5.000.000	+ 1.140.000	+ 1.510.000
η'1 d _p	+ 11.060.000	+ 7.460.000	— 1.810.000	+ 85.000	— 49.000	+ 279.000
M'1 d _v	— 490	+ 202	— 54	— 91	— 15,2	+ 26,8
S'1 d _v	— 310	— 289	— 4,5	+ 40,4	+ 1,1	+ 9,5
T'1 d _v	— 287	— 9.600	— 7,259	+ 1,279	— 2.038,5	— 380
N'1 d _v	— 406	— 354	+ 45,4	— 18,2	+ 12,8	+ 5,78
Q'1 d _v	— 174,1	— 521,0	+ 213,0	+ 58,6	+ 57,5	— 18,0
Z'1 d _v	— 2.690.000	+ 4.030.000	+ 2.040.000	— 1.500.000	+ 450.000	+ 441.000
η'1 d _v	+ 710.000	+ 857.000	— 492.000	— 335.000	+ 13.000	+ 441.000
M'1 d _n	— 85	+ 72	— 59,5	— 40	— 16,8	+ 11,8
S'1 d _n	+ 6,1	— 3,8	+ 3,3	— 6,4	+ 1,0	— 5,2
T'1 d _n	+ 17,987	+ 740	— 3,175	+ 1,650	— 887,4	— 403,8
N'1 d _n	— 105	— 123	+ 220	— 13,5	+ 4,6	+ 4,2
Q'1 d _n	+ 471,0	+ 109,0	— 128,0	— 9,0	— 35,0	+ 2,7
Z'1 d _n	+ 4.670.000	+ 4.170.000	+ 470.000	— 915.000	+ 70.000	+ 270.000
η'1 d _n	+ 2.328.000	+ 1.171.100	— 365.000	— 116.500	+ 102.200	— 34.400

CUADRO NUM. II

(Continuación)

=	0°	28° 50'	66°	108°
M _{iP} ^{II}	- 850	+ 739	- 472	- 442,5
S _{iP} ^{II}	+ 77	+ 591	+ 46	+ 40
T _{iP} ^{II}	+ 25,380	+ 7,700	- 33,896	+ 2,100
N _{iP} ^{II}	+ 1,084	+ 97,2	- 150	+ 265
Q _{iP} ^{II}	+ 2.570,0	+ 1.433,0	- 500,5	- 275,0
C _{iP} ^{II}	+ 8.900,000	+ 17.900,0	+ 3.530,000	- 4.550,000
η _{iP} ^{II}	- 15.010,000	- 8.024,000	+ 73,000	- 1.887,000
M _{iv} ^{II}	- 495,99	- 117,6	+ 61,8	+ 0,7
S _{iv} ^{II}	- 53,6	- 2,2	+ 33,29	+ 8,9
T _{iv} ^{II}	+ 4.695,0	+ 4.480,0	- 1.682,9	- 1.832,0
N _{iv} ^{II}	+ 134	+ 93,1	- 9,8	- 16,71
Q _{iv} ^{II}	- 0,9	+ 150,8	+ 60,8	- 29,1
C _{iv} ^{II}	+ 780,000	- 969,000	+ 588,000	+ 464,000
η _{iv} ^{II}	+ 90,000	- 202,500	+ 458,200	- 30,100
M _{in} ^{II}	- 85,5	+ 194,2	- 86,4	- 99
S _{in} ^{II}	- 3,0	+ 120,9	+ 5,92	- 9,1
T _{in} ^{II}	+ 10.030,0	- 1.040,0	- 7.170,9	+ 750
N _{in} ^{II}	+ 208	+ 6,75	- 35,15	+ 22,1
Q _{in} ^{II}	+ 514,0	+ 290,8	- 117,6	- 60,4
C _{in} ^{II}	+ 1.410,000	+ 3.985,000	+ 840,000	- 1.040,000
η _{in} ^{II}	- 3.255,000	- 1.822,000	- 33,500	- 420,500

C U A D R O N U M : I I

(Continuación)

∞	0°	$23^\circ 50'$	66°	108°
M'_{dp}^{II}	0	— 419	163	139
S'_{dp}^{II}	638	353	— 23,1	32,0
T'_{dp}^{II}	20,722	29,890	9,748	— 4,985
N'_{dp}^{II}	489	— 104	— 43,7	66,6
Q'_{dp}^{II}	— 2,004	— 462	295	20,0
ζ'_{dp}^{II}	0	— 4,900,000	1,460,000	2,465,000
η'_{dp}^{II}	— 1,860,000	— 436,500	— 511,500	— 518,000
M'_{dv}^{II}	0	18,73	0,76	— 5,71
S'_{dv}^{II}	— 0,38	— 5,65	— 0,97	0,02
T'_{dv}^{II}	718	170	— 384	— 60
N'_{dv}^{II}	— 12,21	0,04	3,65	0,07
Q'_{dv}^{II}	26,62	18,38	— 6,61	— 5,14
ζ'_{dv}^{II}	— 372,520	69,455	84,960	— 33,120
η'_{dv}^{II}	— 210	77,850	— 15,780	26,040
M'_{dn}^{II}	0	— 121	— 4,95	36,8
S'_{dn}^{II}	2,60	36,5	6,24	— 0,145
T'_{dn}^{II}	— 4,598	— 1,088	2,475	387
N'_{dn}^{II}	794	— 0,170	— 23,6	— 0,540
Q'_{dn}^{II}	— 173	— 119	42,8	33,2
ζ'_{dn}^{II}	2,465,600	— 152,100	— 567,500	196,900
η'_{dn}^{II}	0	— 583,370	102,150	— 168,750

CUADRO NUM. II

(Continuación)

	0°	9° 15'	23° 40'	43° 50'	57° 20'	69°
M _{i,p} ¹	0	20,1	— 10,8	— 3,45	3,45	1,06
S _{i,p} ¹	212	142	— 16,8	— 10,68	5,40	— 1,04
T _{i,p} ¹	— 1,564	— 2,014	— 274	223	0,20	65,62
N _{i,p} ¹	37,7	— 30,3	— 1,43	3,35	0,46	1,05
Q _{i,p} ¹	444	127	— 50,8	5,15	16,3	1,57
Z _{i,p} ¹	0	89,700	— 11,600	— 37,100	3,700	— 11,400
η _{i,p} ¹	— 16,150	— 43,900	11,140	1,350	— 3,600	418
M _{i,v} ¹	0	0,986	0,013	— 2,03	— 0,004	0,062
S _{i,v} ¹	0	1,749	0,339	— 0,109	— 0,109	— 0,125
T _{i,v} ¹	36,57	9,48	— 17,74	0,29	0,58	0,09
N _{i,v} ¹	0,910	0,073	— 0,228	0,042	0,073	0,013
Q _{i,v} ¹	5,90	2,93	— 1,22	— 0,527	0,394	— 0,173
Z _{i,v} ¹	— 9,641	— 511	2,015	— 823	— 648	— 254
η _{i,v} ¹	0	— 1,064	120	170	— 38,60	57,10
M _{i,n} ¹	0	0,845	0,011	— 0,175	0,004	0,053
S _{i,n} ¹	0	1,50	0,291	— 0,351	— 0,093	— 0,107
T _{i,n} ¹	31,0	8,34	— 15,28	— 0,690	— 0,480	— 0,211
N _{i,n} ¹	0,789	0,062	— 0,193	0,037	0,063	0,011
Q _{i,n} ¹	5,08	2,49	— 1,06	— 0,487	0,340	— 0,153
Z _{i,n} ¹	— 8,272	— 425	1,732	— 707	— 556	— 219
η _{i,n} ¹	— 3,20	— 916	103	145	— 33,2	44,5

CUADRO NUM. 11

(Continuación)

=	0°	9° 15'	25° 40'	45° 50'	57° 20'	69°
M ^{"1} _{dP}	+ 120,5	- 15,3	+ 6,5	+ 17,10	- 2,1	- 5,3
S ^{"1} _{dP}	+ 73,5	+ 12,9	+ 13	- 37,2	- 4,3	- 11,4
T ^{"1} _{dP}	- 436,2	+ 1.140,0	+ 1.482,2	- 176,5	- 42,3	- 52,4
N ^{"1} _{dP}	+ 137	- 47,9	- 17,6	+ 5,39	+ 5,64	+ 1,69
Q ^{"1} _{dP}	- 836,5	- 452,7	+ 123,5	+ 37,2	- 40,1	+ 11,7
ζ ^{"1} _{dP}	- 151,000	- 466,300	- 138,600	+ 85,100	+ 44,400	+ 26,260
η ^{"1} _{dP}	- 117,100	- 96,660	+ 16,350	+ 13,290	- 5,300	+ 1,120
M ^{"1} _{dv}	+ 30,4	- 19,4	+ 6,9	+ 7,3	- 2,25	- 2,26
S ^{"1} _{dv}	+ 115,5	+ 48,0	- 2,8	+ 17,3	+ 0,9	- 5,3
T ^{"1} _{dv}	- 992,5	+ 880,0	- 621,0	- 156,0	- 14,5	- 46,1
N ^{"1} _{dv}	+ 57,9	- 26,2	- 6,51	+ 3,29	+ 2,10	+ 1,03
Q ^{"1} _{dv}	- 459,2	- 192,4	+ 64,4	+ 10,7	- 20,6	+ 3,25
ζ ^{"1} _{dv}	- 6,000	- 149,500	- 41,500	+ 44,600	+ 13,300	+ 13,900
η ^{"1} _{dv}	- 40,400	- 51,320	+ 10,420	+ 5,040	- 3,300	+ 1,555
M ^{"1} _{dn}	+ 22,90	- 0,15	+ 0,35	+ 2,61	- 0,11	- 0,81
S ^{"1} _{dn}	+ 6,1	- 3,8	+ 3,3	+ 6,4	+ 1,0	- 5,2
T ^{"1} _{dn}	- 892,1	- 56,9	+ 227,04	- 14,0	- 7,09	- 4,24
N ^{"1} _{dn}	+ 22,45	- 7,18	- 2,82	+ 0,66	+ 0,90	+ 0,31
Q ^{"1} _{dn}	- 124,15	- 73,46	+ 17,24	+ 6,53	- 5,5	+ 2,06
ζ ^{"1} _{dn}	- 28,200	- 56,300	- 23,750	+ 11,640	+ 7,630	+ 3,574
η ^{"1} _{dn}	- 17,830	- 14,409	+ 1,986	+ 2,101	- 633,0	+ 645,0

CUADRO NUM. 11

(Continuación)

	0°	17° 30'	46°	68° 30'	92°	112°
M _{i,p} ^{II}	+ 120	- 57,13	+ 11,5	+ 23	- 7,35	- 6,2
S _{i,p} ^{II}	- 106,6	- 193,3	- 89,0	+ 43,3	+ 4,5	- 11,6
T _{i,p} ^{II}	- 6.033,7	+ 484,5	+ 1.776,8	- 303,0	+ 3,3	+ 193,0
N _{i,p} ^{II}	- 184	- 18	+ 23,6	- 9,70	- 15,1	+ 16,5
Q _{i,p} ^{II}	- 720,25	- 357,83	+ 100,0	+ 34,5	- 71,40	- 9,10
ζ _{i,p} ^{II}	- 103,150	- 280,360	- 105,500	- 89,900	+ 67,900	- 23,750
η _{i,p} ^{II}	+ 161,200	+ 98,970	- 26,700	- 20,200	+ 17,100	+ 5,425
M _{i,v} ^{II}	+ 30,00	+ 15,14	- 6,1	- 1,0	+ 3,9	+ 0,27
S _{i,v} ^{II}	+ 65,5	+ 1,8	- 5,8	- 3,75	+ 6,05	+ 1,01
T _{i,v} ^{II}	- 727,4	- 628,0	- 65,6	+ 139,05	+ 42,00	- 41,62
N _{i,v} ^{II}	- 1,15	- 11,2	+ 0,42	+ 2,29	- 0,26	- 0,61
Q _{i,v} ^{II}	+ 84,8	- 5,0	- 14,55	+ 4,7	+ 10,35	- 1,22
ζ _{i,v} ^{II}	- 38,600	+ 42,590	- 12,400	- 13,650	+ 8,000	+ 3,600
η _{i,v} ^{II}	+ 2,160	- 130	+ 6,580	- 10,830	- 4,235	+ 50
M _{i,n} ^{II}	+ 23,0	- 13,13	+ 2,5	+ 4,9	- 1,6	- 1,3
S _{i,n} ^{II}	- 24,1	- 40,4	- 19,2	+ 9,2	+ 0,85	- 2,47
T _{i,n} ^{II}	- 1.214,5	+ 113,2	+ 329,5	- 65,5	- 212,5	- 41,3
N _{i,n} ^{II}	- 37,9	- 3,16	+ 4,96	- 2,07	- 3,19	+ 0,54
Q _{i,n} ^{II}	- 151,6	- 74,04	+ 21,6	+ 7,3	- 15,25	+ 1,9
ζ _{i,n} ^{II}	- 11,730	- 58,400	- 22,400	+ 19,250	+ 14,250	- 5,090
η _{i,n} ^{II}	+ 32,090	+ 20,530	- 5,720	- 4,280	+ 3,670	+ 1,165

CUADRO NUM. II

(Conclusión)

=	e°	17° 30'	46°	68° 30'	92°	112°
M _{dρ} ^{II}	0	28,6	— 12,8	— 4,78	8,25	1,28
S _{dρ} ^{II}	— 212	— 46,3	— 3,30	12,55	— 10,63	— 3,34
T _{dρ} ^{II}	— 1,713	— 1,768	— 347	295	221	— 102
N _{dρ} ^{II}	— 52	11,6	2,05	— 5,43	1,30	1,45
Q _{dρ} ^{II}	373	71,9	— 39,2	4,5	27,9	— 1,20
ζ _{dρ} ^{II}	0	109,300	— 9,600	— 36,600	6,100	9,740
η _{dρ} ^{II}	— 6,700	4,920	— 15,520	— 2,060	9,970	570
M _{dν} ^{II}	0	— 0,81	— 0,01	0,197	0,006	— 0,052
S _{dν} ^{II}	0	1,07	0,937	— 0,337	— 0,158	0,094
T _{dν} ^{II}	— 31,8	— 9,34	15,3	— 0,180	9,86	— 1,01
N _{dν} ^{II}	0,923	0,030	— 0,227	0,046	0,146	— 0,012
Q _{dν} ^{II}	— 3,51	— 2,21	0,651	0,411	— 0,488	— 0,107
ζ _{dν} ^{II}	5,815	— 496	— 1,220	574	744	— 153
η _{dν} ^{II}	— 19,4	— 702	122	192	— 78,8	— 51,5
M _{dη} ^{II}	0	2,02	0,030	— 0,520	— 0,020	0,140
S _{dη} ^{II}	0,02	— 2,08	— 2,50	— 0,870	0,410	— 0,240
T _{dη} ^{II}	83,6	24,6	— 40,00	0,460	25,80	— 2,64
N _{dη} ^{II}	— 2,42	— 0,080	0,600	— 0,120	— 0,380	0,032
Q _{dη} ^{II}	9,60	5,84	— 1,71	— 1,07	1,22	0,280
ζ _{dη} ^{II}	— 15,159	1,259	3,179	— 1,495	— 2,051	398
η _{dη} ^{II}	53,0	1,841	— 319	— 500	205	134

CUADRO NUM. 12

Secciones, pesos y rigideces reales de láminas y lucernarios
en diferentes sentidos

Tipo de sección	Sección virtual	Momento de inercia	Espesor virtual
Lámina de 8 cm., con sección llena a compresión . . .	800	4.200	8
Lámina con $7\Phi 25$, $m = 12$, a tensión sin contar el hormigón tendido.....	1.040		10,4
Lámina a flexión de 8 cm., con $7\Phi 10$, $m = 12$, sin contar el hormigón tendido.....	800	1.600	6
Lámina especial en puntos de máxima flexión con 11 cm., y a doble armadura de $7\Phi 15$, $m = 12$. . .	1.100	7.000	9,5
Lucernario en sentido longitudinal trabajando a compresión con $\frac{(15 \times 30) 2 + (4\Phi 25 + 4\Phi 15) 7}{1,20}$. . .	900		9
Idem id. a tensión $\frac{(6\Phi 35 + 4\Phi 15) 12}{1,20}$	640		6,4
Lucernario en sentido transversal trabajando a flexión con $2\Phi 15$, $m = 12$, y canto de 20 cm., multiplicando esta sección con $\frac{\cos 30^\circ}{0,70}$ para obtener la composición por metro de ancho.....		11.000	11
Lucernario en sentido diagonal trabajando a tensión con $\frac{(4\Phi 35) 12}{1,20} \times 2$	780		7,8
Lucernario en sentido diagonal trabajando a compresión con $\frac{(15 \times 30) 2 + (94\Phi 15 + 4\Phi 25) 7}{1,20}$. . .	900		9

El peso de la lámina, contando con 8 cm. y con 20 kg. para uralita y madera, da 212 kg/m², y el del lucernario, con 10 kg. para el vidrio, = 254 kg/m²; todo ello con peso específico de 2.400. Se toma $m = 7$ para compresión, y $m = 12$ para las secciones a flexión y barras de lucernario a tensión.

C U A D R O N U M . 1 3

Comprobación de secciones

(Fig. núm. 20)

Secciones resistentes

Número	Tensión	Compresión	Flexión	Tensión	Com- presión	Flexión m/kg.
1	5Φ15	—	—	1	0	0
2	5Φ15	8 X 100	—	4	7	0
3	7Φ15	8 X 100	—	12	14	0
4	6Φ15	8 X 100	—	9	15	0
5	6Φ15	8 X 100	—	4	9	0
6	4Φ10	11 X 100	—	11	17	0
7	$\frac{1}{1,2}(4\Phi35 + 4\Phi20)$	$\frac{1}{1,2}15 \times 30 \times 2 + (4\Phi15 + 4\Phi30) 7$	—	25	26	0
8	$\frac{1}{1,2}(4\Phi35 + 4\Phi20)$	$\frac{1}{1,2}15 \times 30 \times 2 + (4\Phi15 + 4\Phi30) 7$	—	18	16,5	0
8'	8Φ15	11 X 100	—	15	14,0	0
9	8Φ15	8 X 100	—	15	15	0
10	7Φ15	8 X 100	—	1	3	0

NOTA.—Los números de la izquierda corresponden a los indicados en la figura 20.

CUADRO NUM. 13. — (*Continuación*)

Número	Tensión	Compresión	Flexión	Tensión	Com-	Flexión
					presión	m/kg.
11	$\frac{1}{1,2}(4\Phi_{25} + 4\Phi_{20})$	$\frac{1}{1,2} 15 \times 30 \times 2 + (4\Phi_{25} + 4\Phi_{20}) 7$	—	5	1	0
12	$\frac{1}{1,2}(4\Phi_{25} + 4\Phi_{20})$	—	—	10	0	0
13	7Φ15	—	—	14	0	0
14	$\frac{1}{2}(7\Phi_{25} + 7\Phi_{15})$	8 X 100	—	18	4	196
15	6Φ15	8 X 100	—	10	10	78
16	4Φ10	8 X 100	—	1	19	61
17	4Φ10	8 X 100	—	0	14	210
18	4Φ10	11 X 100	—	0	29	84
19	$\frac{1}{1,2}(4\Phi_{25} + 4\Phi_{20})$	$\frac{1}{1,2} 15 \times 30 \times 2 + (4\Phi_{15} + 4\Phi_{20}) 7$	—	9	20	280
20	$\frac{1}{1,2}(6\Phi_{35} + 4\Phi_{15})$	—	$a = 100 \ d = 1 \ c = 9,5 \ m = 12 \ t = 6\Phi_{15}$	38	3	356
20'	5Φ35	9 X 100	$a = 100 \ d = 11 \ c = 9,5 \ m = 12 \ t = 6\Phi_{15}$	28	4	0
21	6Φ15	9 X 100	—	1	9	580
22	—	9 X 100	—	0	22	280

DIAGRAMAS DE ESFUERZOS Y CORRIENTES *

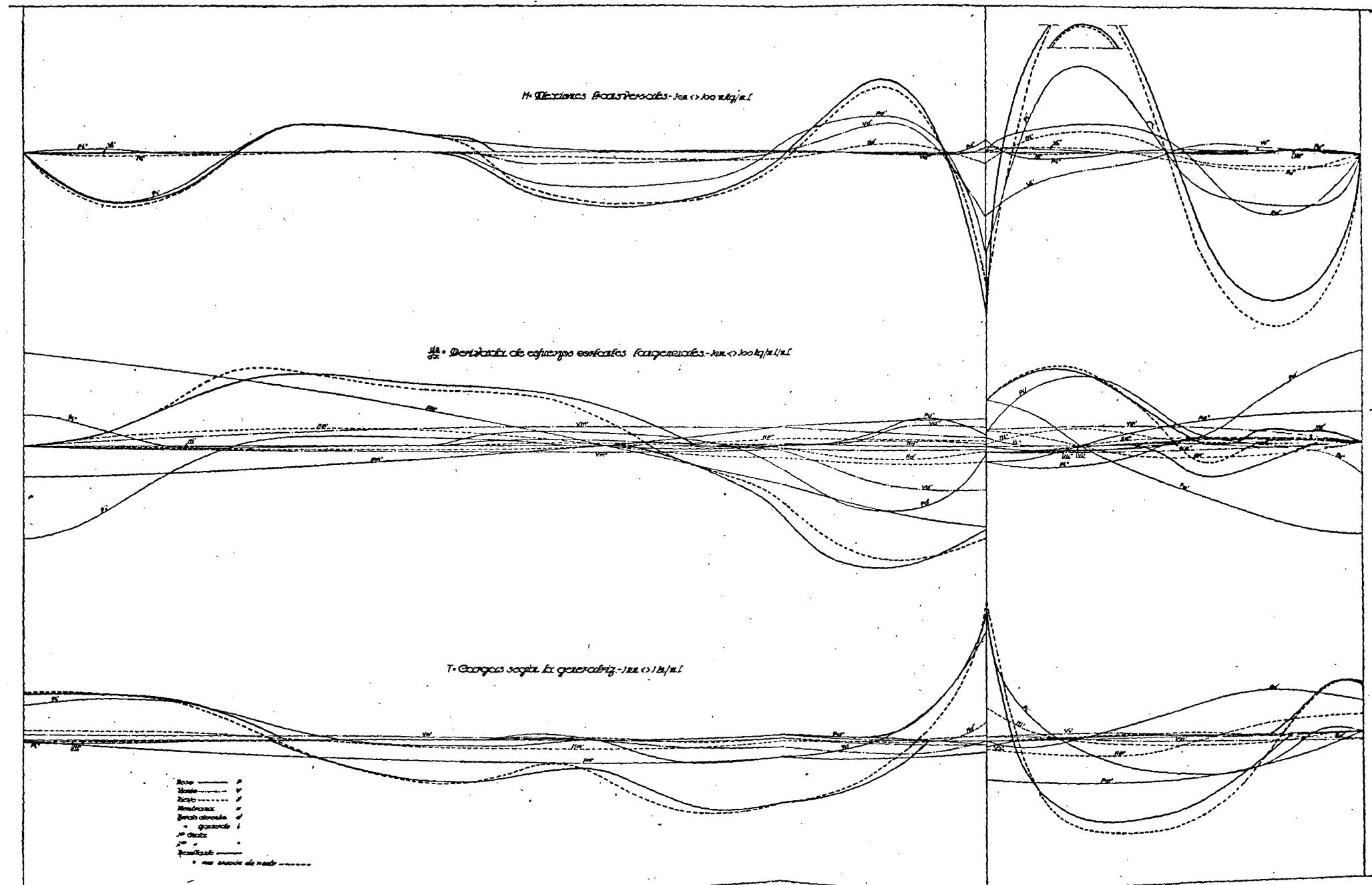


Fig. 19.—Diagramas de M , $\frac{dS}{dx}$ y T .

En el cuadro anterior se han corregido algunos errores de escasa importancia que se mantienen en estos diagramas, no siendo, por tanto, exacta la correspondencia.

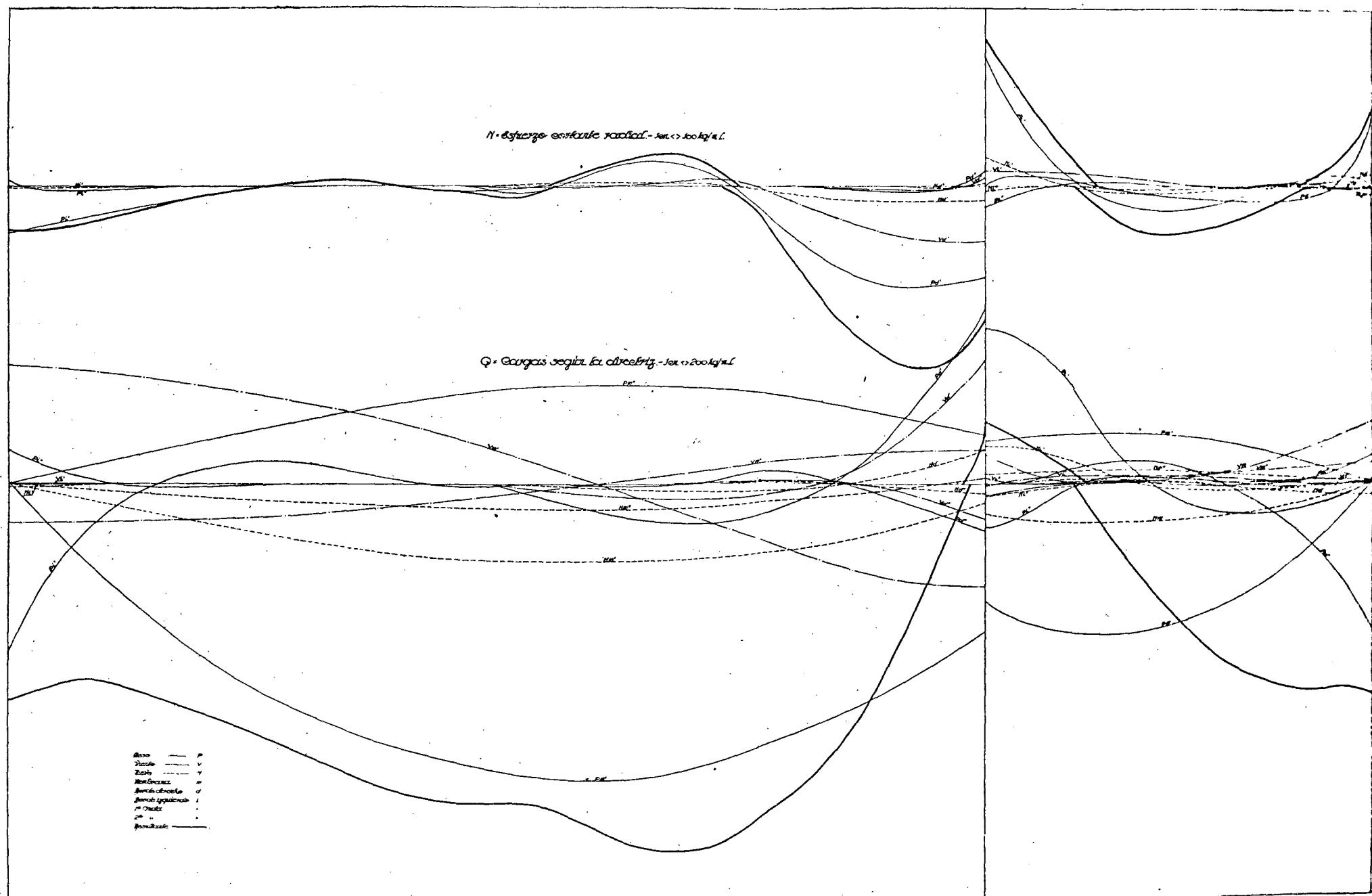


Fig. 10.—Diagramas de N y Q.

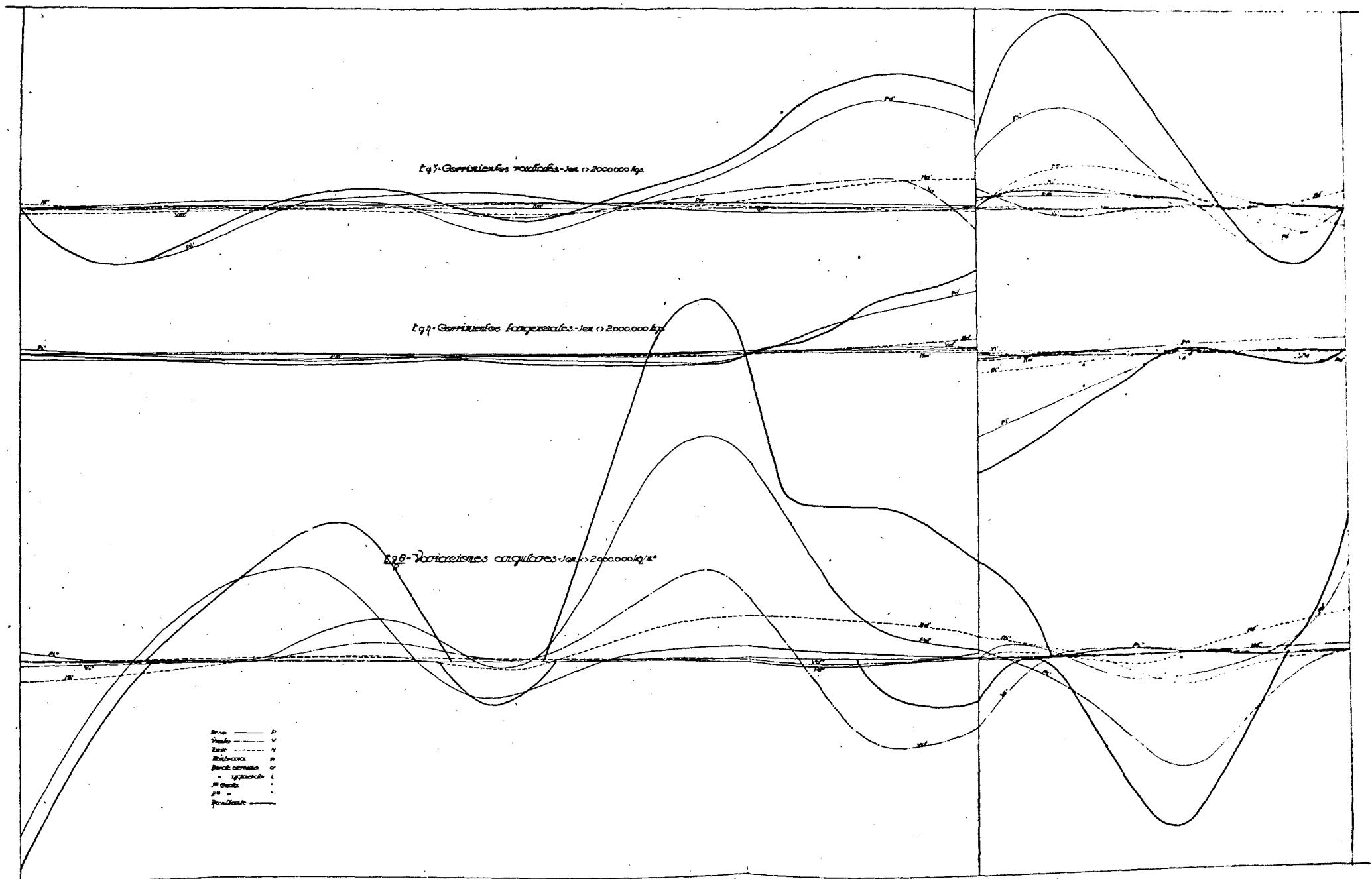


Fig. 11.—Diagramas de E_6 , E_7 y $\frac{E_8}{R}$

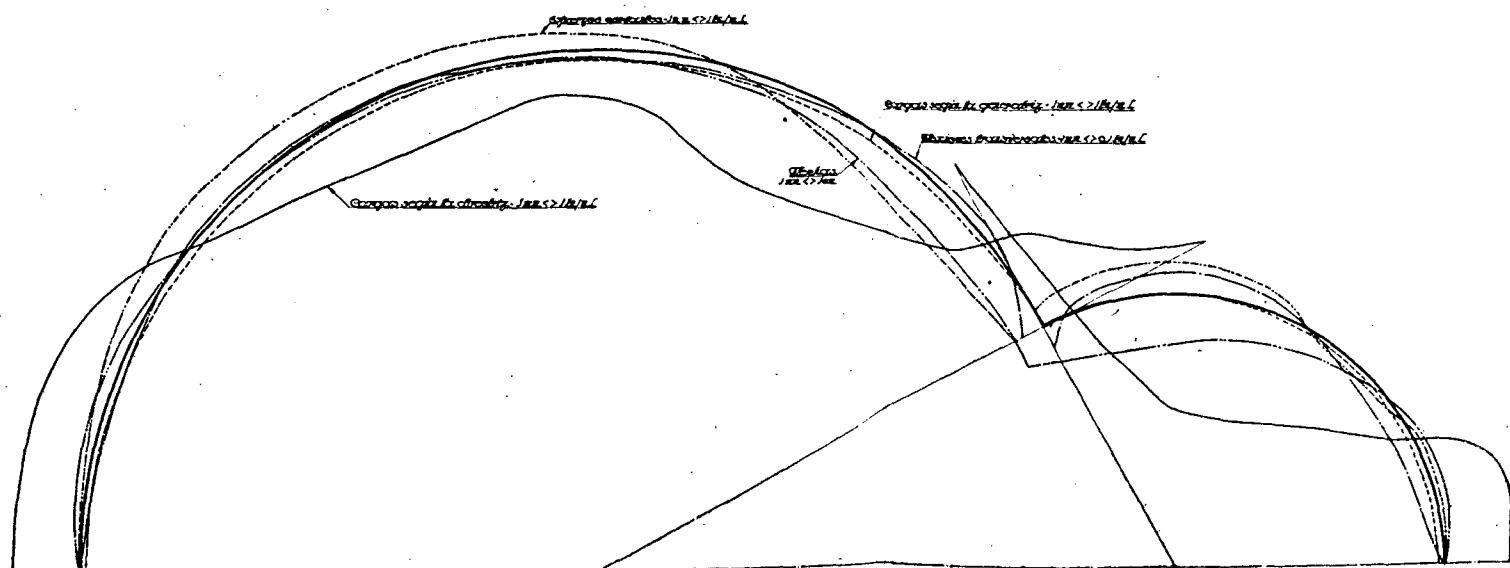


Fig. 12.—Diagramas reunidos de esfuerzos y corrimientos.

PLANOS DE ISOSTATICAS, ISOBARAS Y ARMADURAS

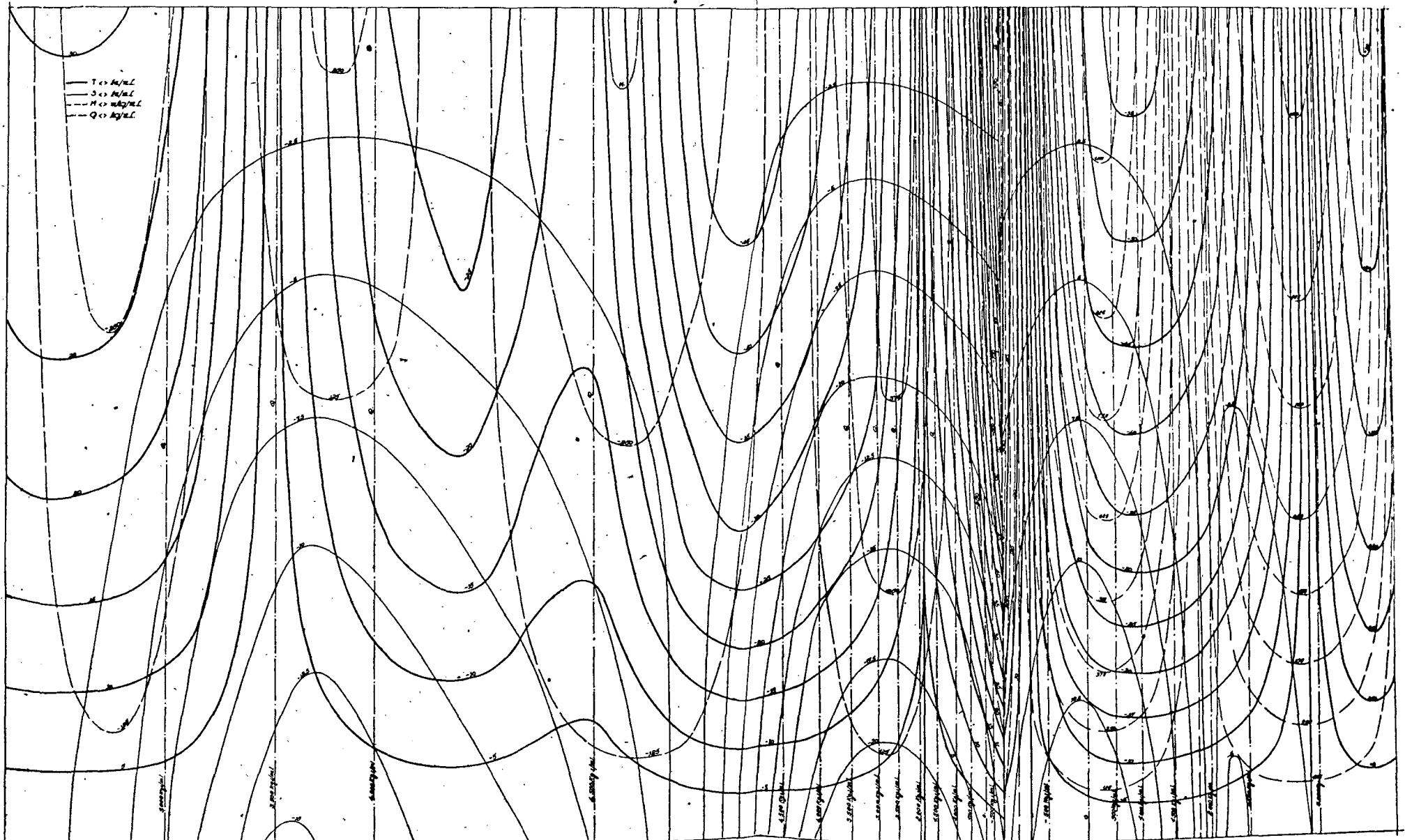


Fig. 13.—Isobaras de T, Q, S y M sobre la lámina desarrollada.

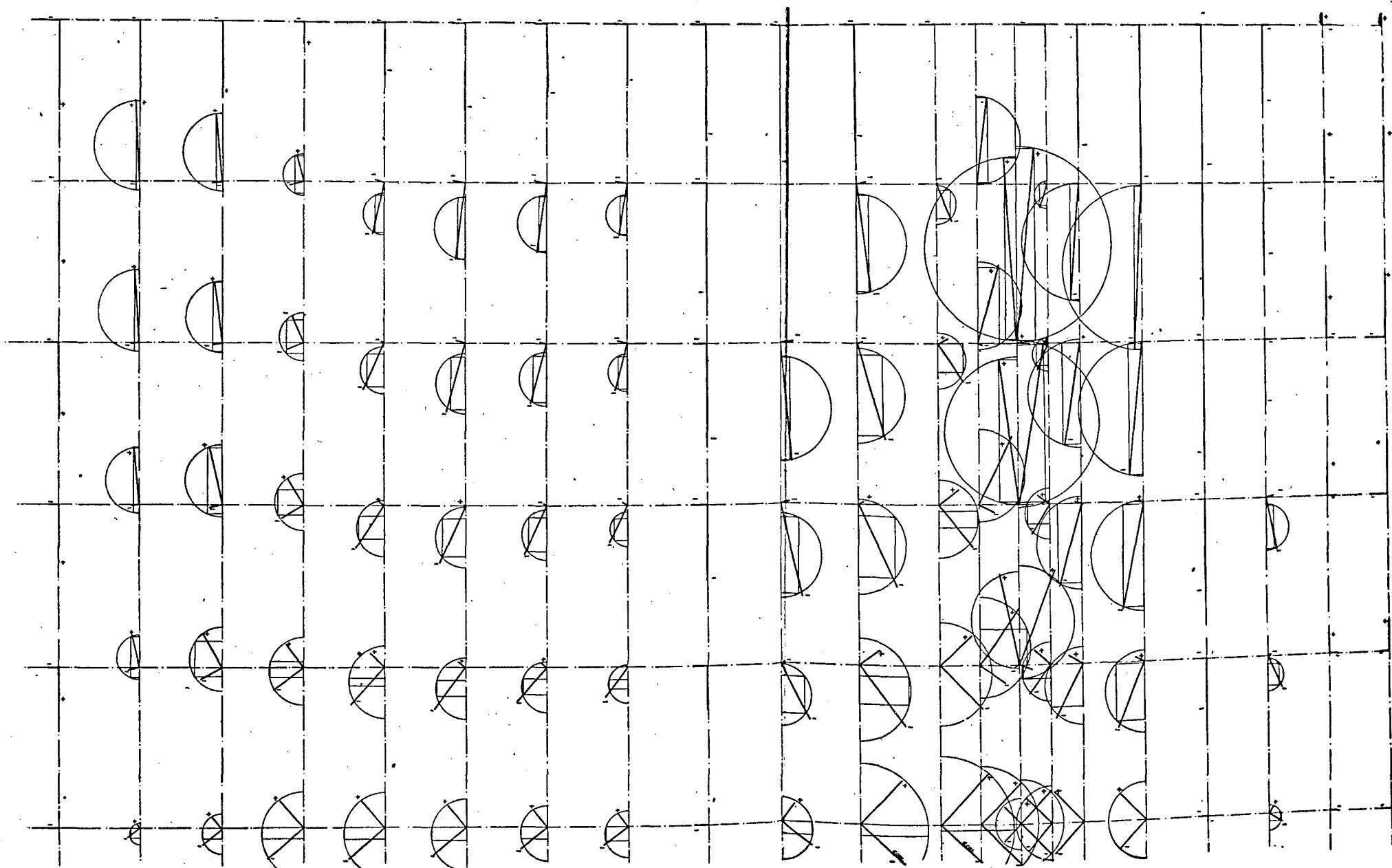


Fig. 14.—Trazado de círculos de Morin.

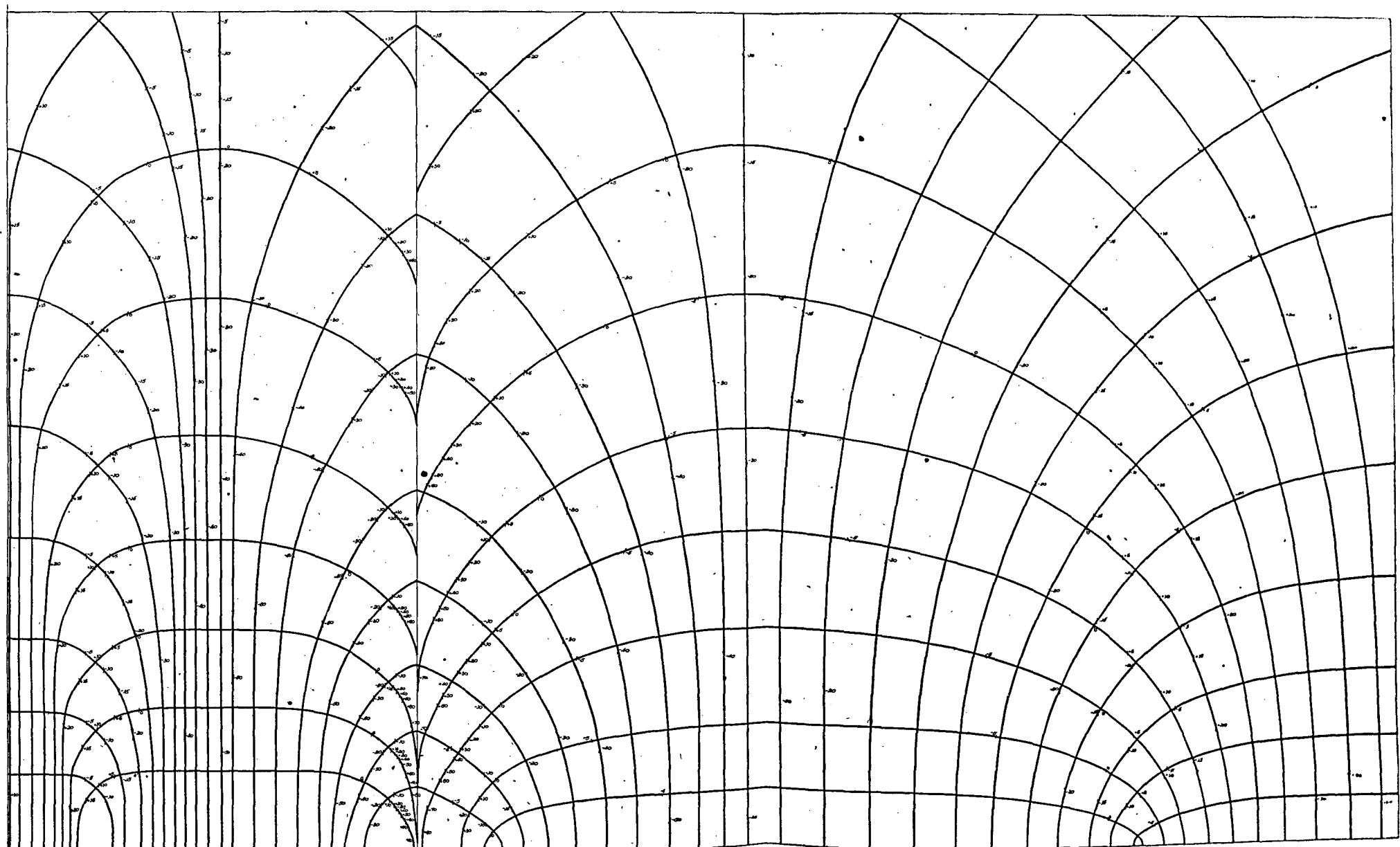


Fig. 15.—Isostáticas en la superficie media desarrollada.

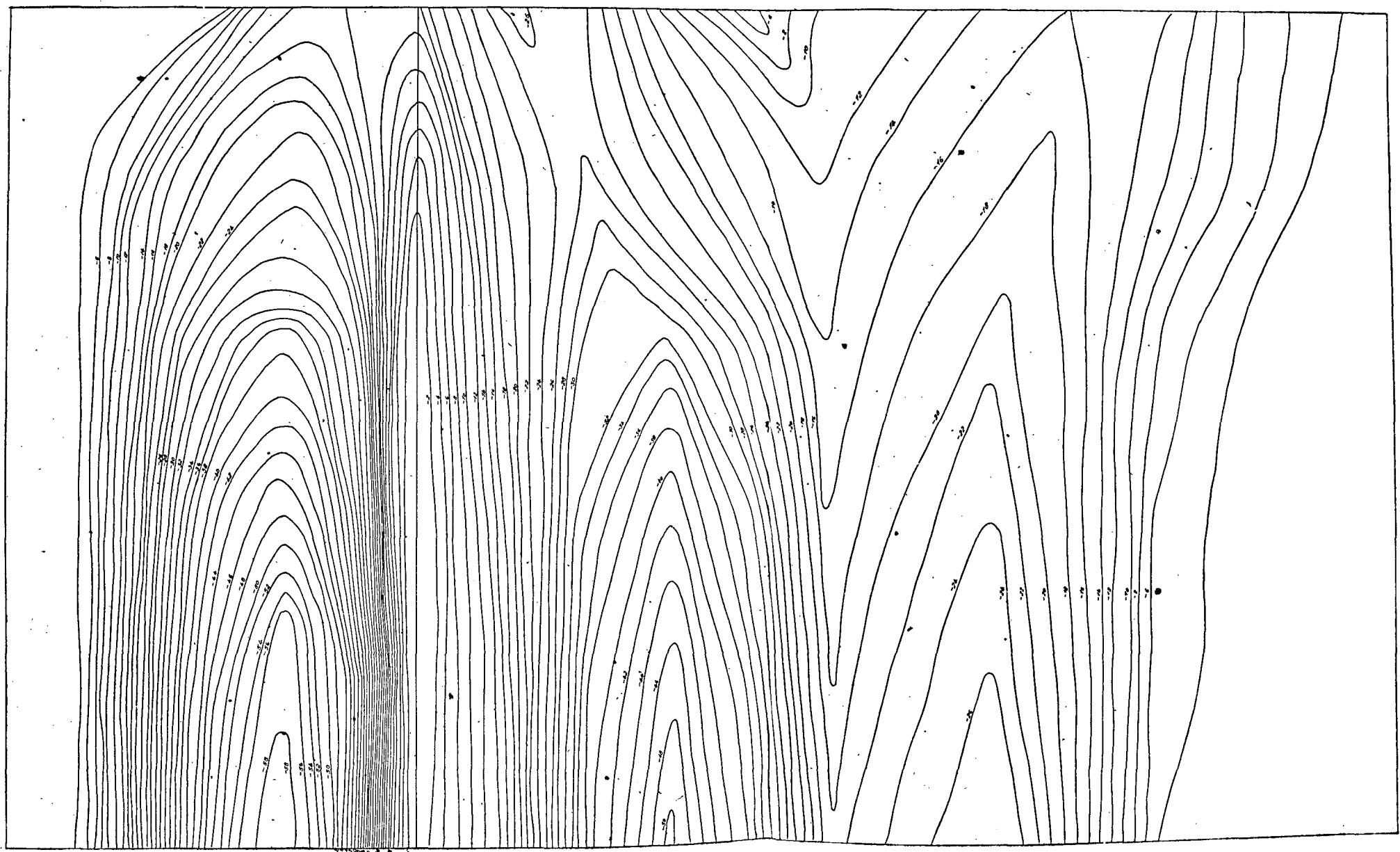


Fig. 16.—Isobaras de máximas compresiones en la superficie media desarrollada.

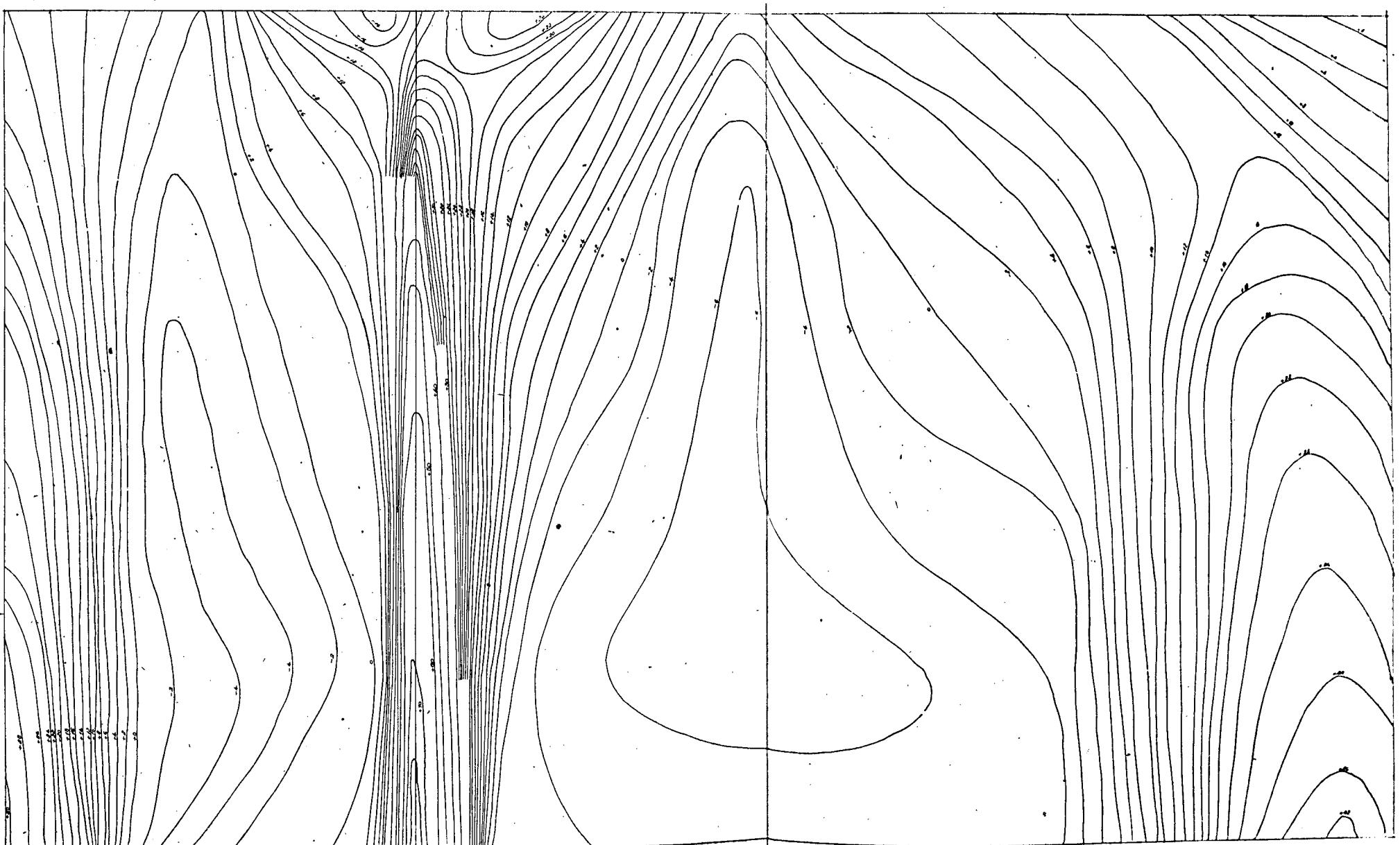


Fig. 17.—Isobaras de máximas tensiones en la superficie media desarrollada.

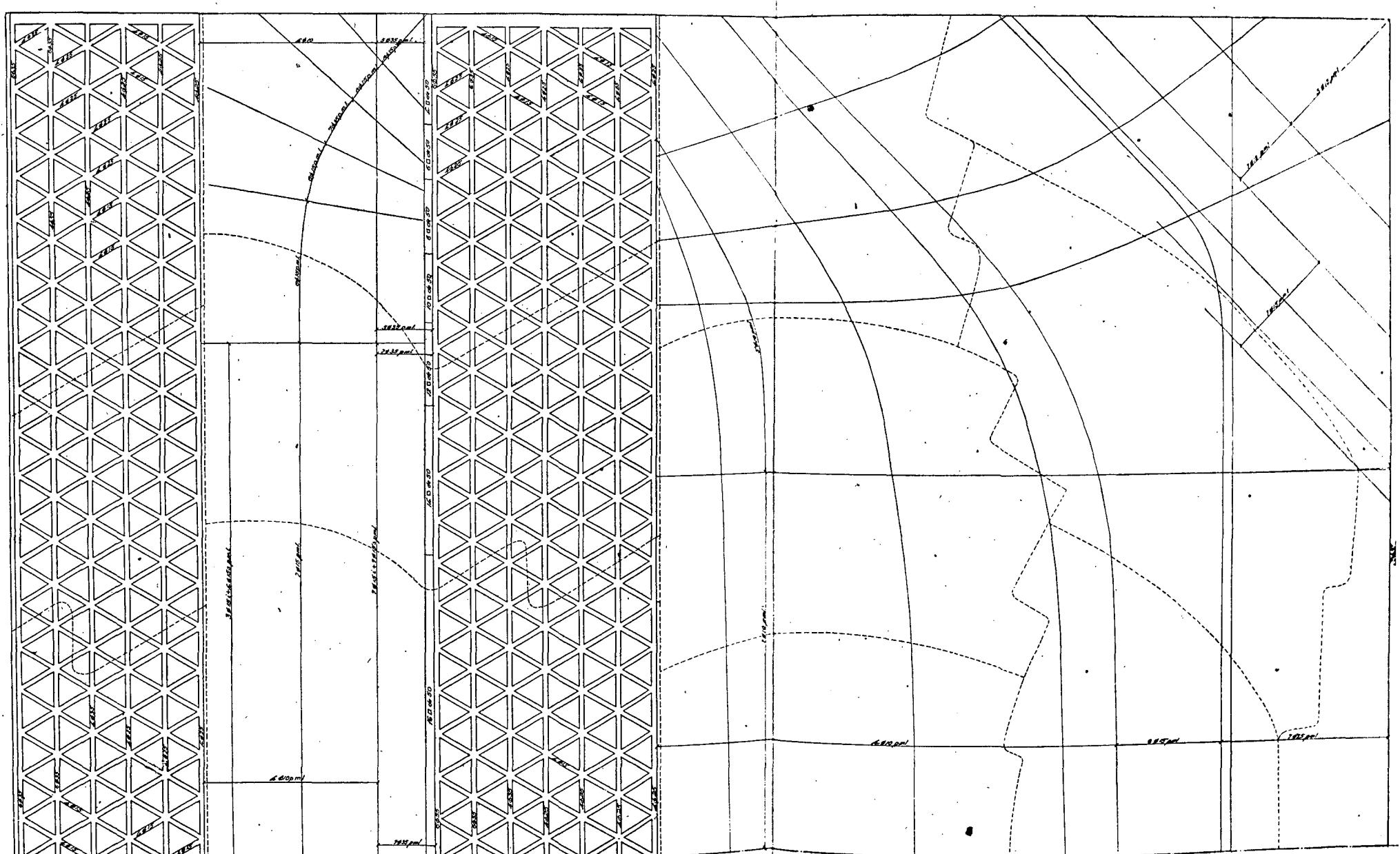


Fig. 18.—Planta desarrollada de armaduras y juntas de hormigonado.

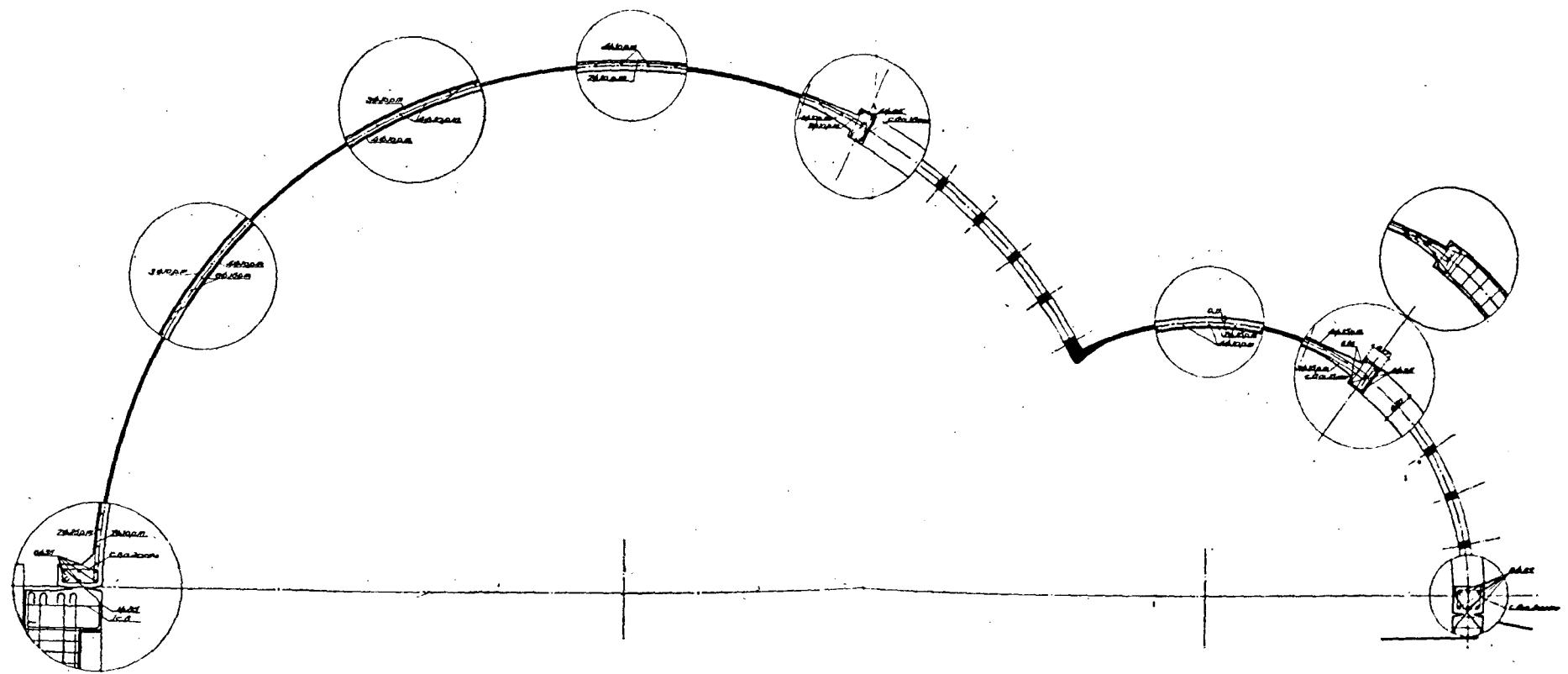


Fig. 19.—Sección transversal de armaduras.

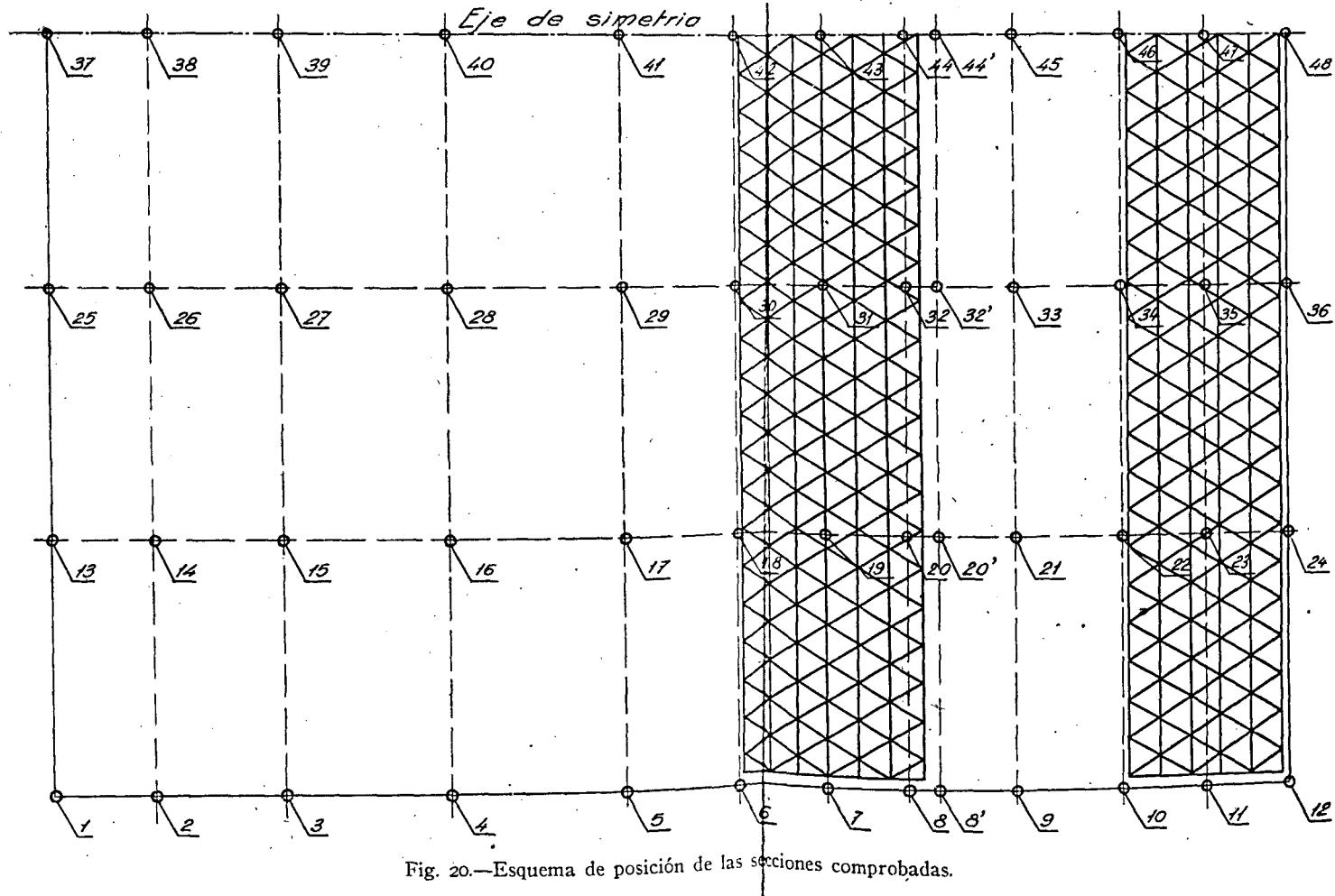


Fig. 20.—Esquema de posición de las secciones comprobadas.

C U A D R O N U M . 1 3 . — (C o n t i n u a c i ó n)

— 97 —

Número	Tensión	Compresión	Flexión	Tensión	Com-	Flexión
					presión	m/kg.
23	$\frac{1}{1,2} (4\Phi_{15} + 4\Phi_{20})$	$\frac{1}{1,2} 15 \times 30 \times 2 + (4\Phi_{15} + 4\Phi_{20}) 7$	$15 \times 20 (2\Phi_{15} \times 12) \frac{\cos 30^\circ}{0,70}$	5	5	570
24	$\frac{1}{1,2} (6\Phi_{35} + 4\Phi_{15})$	—	—	18	0	0
25	7Φ25	—	—	24	0	0
26	7Φ25	8 × 100	a = 100 d = 8 c = 6,5 m = 12 t = 7Φ10	25	3	310
27	6Φ15	8 × 100	»	11	5	125
28	4Φ 0	8 × 100	»	0	24	98
29	4Φ 10	8 × 100	»	0	23	330
30	4Φ 0	11 × 100	»	0	41	134
31	$\frac{1}{1,2} (4\Phi_{25} + 4\Phi_{20})$	$\frac{1}{1,2} 15 \times 30 \times 2 + (4\Phi_{15} + 4\Phi_{20}) 7$	$15 \times 20 (2\Phi_{15} \times 12) \frac{\cos 30^\circ}{0,70}$	1	19	445
32	$\frac{1}{1,2} (6\Phi_{35} + 4\Phi_{15})$	—	»	6	1,5	510
32'	7Φ35	11 × 100	a = 100 d = 11 c = 9,5 m = 12 t = 7Φ15	35	4	0
33	—	10 × 100	$15 \times 20 (2\Phi_{15} \times 12) \frac{\cos 30^\circ}{0,70}$	0	49	920
34	—	10 × 100	a = 100 d = 11 c = 9,5 m = 12 t = 3Φ15	0	37	445
-35	$\frac{1}{1,2} (4\Phi_{15} + 4\Phi_{20})$	$\frac{1}{1,2} 15 \times 30 \times 2 + (4\Phi_{15} + 4\Phi_{20}) 7$	$15 \times 20 (2\Phi_{15} \times 12) \frac{\cos 30^\circ}{0,70}$	9	36	900

CUADRO NUM. 13.—(Conclusion)

Número	Tensión	Compresión	Flexión	Tensión	Compresión	Flexión
						m/mg.
36	$\frac{1}{1,2} (6\Phi_{35} + 4\Phi_{15})$	—	—	24	0	0
37	7\Phi_{25}	—	—	30	0	0
38	7\Phi_{25}	—	$a = 100 \quad d = 8 \quad c = 6,5 \quad m = 12 \quad t = 7\Phi_{10}$	30	0	350
39	6\Phi_{15}	8×100	*	9	4	140
40	—	8×100	*	0	25	110
41	—	8×100	*	0	28	375
42	—	11×100	*	0	46	150
43	—	$\frac{1}{1,2} 15 \times 30 \times 2 + (4\Phi_{15} + 4\Phi_{20}) 7$	$15 \times 20 (2\Phi_{15} \times 12) \frac{\cos 30^\circ}{0,70}$	0	17	500
44	$\frac{1}{1,2} (6\Phi_{35} + 6\Phi_{15})$	—	*	66	2	620
44'	7\Phi_{35}	11×100	$a = 100 \quad d = 11 \quad c = 9,5 \quad m = 12 \quad t = v = 7\Phi_{15}$	48	5	70
45	—	11×100	*	0	56	1030
46	—	11×100	$a = 100 \quad d = 11 \quad c = 9,5 \quad m = 12 \quad t = 4\Phi_{15} \quad v = 3\Phi_{15}$	0	24	500
47	$\frac{1}{1,2} (4\Phi_{15} + 4\Phi_{20})$	$\frac{1}{1,2} 15 \times 30 \times 2 + (4\Phi_{15} + 4\Phi_{20}) 7$	$15 \times 20 (2\Phi_{15} \times 12 - 2\Phi_{15} \times 12) \frac{\cos 30^\circ}{0,70}$	12	7	1020
48	$\frac{1}{1,2} (6\Phi_{35} + 4\Phi_{15})$	—	—	30	0	0

CUADRO NUM. 14

Cargas unitarias de trabajo en kg/cm²

Número (Fig. n°)	Tensión	Compresión	Flexión	
			Hormigón	Hierro
1	114	—	—	—
2	450	8,8	—	—
3	960	17,6	—	—
4	850	18,8	—	—
5	380	12,2	—	—
6	1.140	21,2	—	—
7	550	27,6	—	—
8	400	17,4	—	—
8'	1.000	12,8	—	—
9	1.000	18,8	—	—
10	81	3,8	—	—
11	155	1,3	—	—
12	310	—	—	—
13	1.130	—	—	—
14	790	5	—	—
15	950	12,5	—	—
16	125	24	—	—
17	—	17,5	—	—
18	—	26,5	—	—
19	280	23,5	—	—
20	700	—	22,6	410
20'	590	—	—	—
21	94	32	38	660
22	—	24,5	17,8	320
23	330	—	—	—



CUADRO NUM. 14.—(*Conclusión*)

Número (Fig. 20)	Tensión	Compresión	Flexión	
			Hormigón	Hierro
24	330	—	—	—
25	700	—	—	—
26	720	3,7	48	980
27	1.030	6,2	19	400
28	—	30,0	15	310
29	—	29,0	51	1.040
30	—	37	21	420
31	32	22	27	320
32	1.120	—	30	360
32'	—	3,6	—	—
33	—	40	45	900
34	—	37	29	760
35	168	—	54	650
36	710	—	—	—
37	880	—	—	—
38	880	—	54	1.100
39	850	5	21,5	440
40	—	31	17	350
41	—	35	50,7	1.190
42	—	42	23	480
43	—	20	30	360
44	1.210	—	37,5	450
44'	720	4,5	3,3	70
45	—	51	48	10,1
46	—	22	33	8,5
47	740	8,2	49	720
48	560	—	—	—

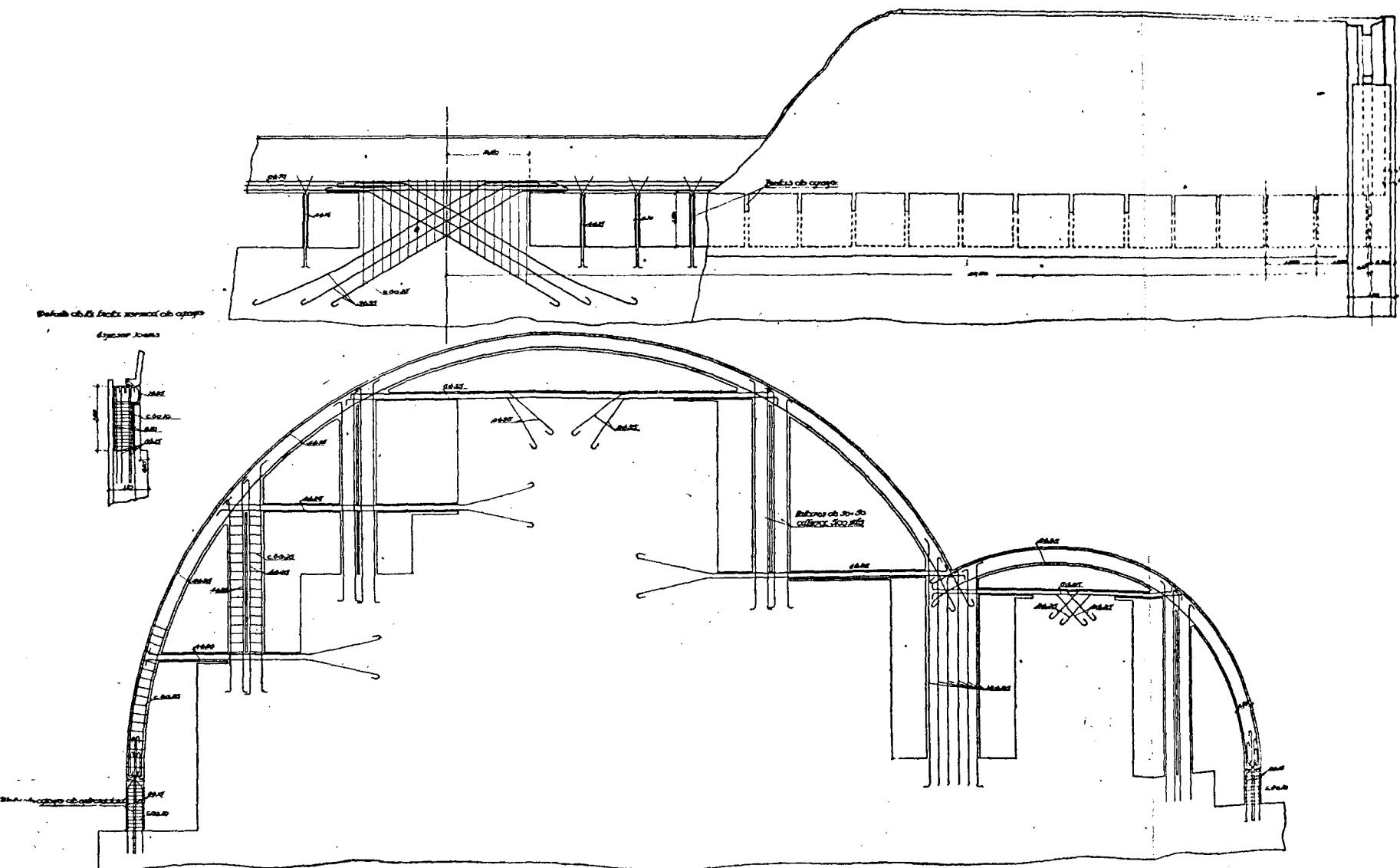


Fig. 21.—Plano de las estructuras sustentantes

C U A D R O N U M . 15

Comprobación de las palizadas del marco rígido

(Figura núm. 21)

Número de la pieza (fig. 21).....	2	4	5
Altura en m.....	6,00	6,00	6,00
Ancho en m.....	50		150
Espesor en cm.....	30	30	30
Canto útil en cm.....	25	25	25
Momento de inercia a sección llena en cm^4	90,000		225,000
Armadura de tensión.....	2/25	2/25	6/25
Idem de compresión.....	2/25	2/25	6/25
Carga axial en kg.....	26,500		88,000
Flecha obligada en cm.....	2	2	2
Carga transversal resultante en kg.....	630	420	1,570
Momento flector en la base en mkg^2	3,780	2,510	9,500
Profundidad de la fibra neutra en cm.....	15	15,5	13
Momento de inercia real en cm^4	86,400	92,000	194,000
Carga de trabajo del hormigón en kg/cm^2	66	43,5	52
Idem de la armadura en kg/cm^2	660	400	720

Los otros pilares tienen cargas menores.

En el 2 la carga del hormigón de $66 \text{ kg}/\text{cm}^2$ se admite porque la flecha obligada de este pilar es mucho menor por corresponder este nudo a una generatriz muy poco cargada longitudinalmente.

Las riestras tienen solamente 30 cm. de anchura, con armadura muy centrada, y su sección se ha fijado holgadamente para la carga axial.

CAPITULO IV

INFORME SOBRE EL PROYECTO Y PRESCRIPCIONES COMPLEMENTARIAS

Una vez terminado el proyecto, el Consejo de la Empresa estimó oportuno solicitar un informe sobre el mismo a dos especialistas de reconocida competencia y autoridad, y aceptada gustosamente la idea por los autores del proyecto, la Empresa solicitó de D. J. E. Ribera y D. J. M. Aguirre un informe, cuyo contenido copiamos a continuación.

"Informe sobre el proyecto de cubierta para el frontón denominado Recoletos, por los ingenieros D. J. E. Ribera y D. J. M. Aguirre.

Se trata del proyecto de cubrir una planta rectangular de 32×55 metros, con una bóveda cilíndrica de generatrices horizontales que se apoya en todo el perímetro y que pertenece al grupo de las llamadas bóvedas membranas, por su pequeño espesor. La directriz es continua y está compuesta por dos arcos secantes dentro de la planta, y además se establece otra discontinuidad con dos claraboyas inclinadas para dar paso a la luz norte.

El material de que se proyecta es el hormigón armado.

Esta solución de cubierta difiere mucho de las soluciones que pudiéramos llamar clásicas, en las que las bóvedas, aunque fuesen de hormigón armado, se calculaban con las mismas normas y tenían todo el aspecto de las bóvedas de fábrica de piedra o de ladrillo.

Posteriormente, a fin de aligerar las construcciones, se proyectaron las bóvedas de hormigón armado, haciéndolas en forma de bóvedas, en

las que los nervios se calculaban como la parte verdaderamente resistente, y las pantallas que unían unos nervios a otros para cerrar la bóveda, que se calculaban resistiendo como forjados corrientes.

Se vió en esta clase de bóvedas que la forma de trabajo de las mismas no respondía a las hipótesis de cálculo, pues los forjados o membranas que iban de unos nervios a otros transmitían a los apoyos la mayor parte de las cargas de la bóveda, y la solicitudación a la flexión trabajando como forjados entre dos nervios era muy pequeña.

Generalizándose este concepto, se llegó a las bóvedas membranas actuales, de las que, aunque hay en España algunos ejemplos, todavía producen una sensación de asombro al verlas proyectadas y construidas.

Sin embargo, la técnica de estas bóvedas membranas ya se encuentra muy avanzada, habiendo salido del campo teórico, y para no hablar más que de las bóvedas membranas de tipo cilíndrico, como la que nos ocupa, y que por su forma de cálculo se denomina Zeiss-Dywidag, puede citarse el mercado de Francfort, en el que se cubre una superficie de $220 \times 36,70$ m. por 15 bóvedas de esta clase, dispuestas transversalmente y teniendo cada una 14 metros de luz.

Mayor es todavía la cubierta del mercado de Budapest, de solución parecida a la anterior, pero en la que la longitud de la bóveda entre timpanos es de 41 metros, con un espesor de membrana de seis centímetros.

Hay otros ejemplos, como los hangares de Hamburgo y Turín; pero el de Budapest es el que tiene mayor longitud entre los ejecutados.

En España se han construido en este tipo las bóvedas de la Escuela Elemental de Trabajo, en la calle de Alberto Aguilera, de Madrid, con 22 metros de longitud, y la de la iglesia de Villaverde Alto (Madrid), formada por tres lóbulos secantes entre sí, parecida a la de la cubierta que informamos, cubriendo una planta de 25×17 metros con espesor de cinco centímetros.

Saliendo de las bóvedas cilíndricas, se han cubierto con membranas de hormigón salas octogonales hasta de 76 metros de luz, como las de Leipzig y Basilea, con espesores de siete centímetros, y en España, la del mercado de Algeciras, con planta octogonal de 48 metros de luz y nueve centímetros de espesor.

Todas estas cubiertas se han construido sin el menor contratiempo, aunque ninguna de ellas llegue a las dimensiones de la proyectada, que creemos será la mayor del mundo entre las de su tipo.

No obstante, nos parece que los resultados obtenidos en las anteriores

citadas, sobre todo en las pruebas de las dos cubiertas existentes en España, que hemos presenciado personalmente, permite que se pueda construir sin excesivo atrevimiento la cubierta proyectada, teniendo mucho cuidado en adoptar especiales precauciones de que después hablaremos.

En el proyecto que nos ocupa el cálculo está hecho en la misma forma en que se encuentran hechos los cálculos de la cubierta que acabamos de citar.

Se basa este cálculo en los principios de la resistencia de materiales y de la mecánica elástica, que hoy viene siendo de general aplicación en el cálculo de problemas constructivos de alguna importancia.

En el cálculo que desarrollan los autores del proyecto hay dos peticiones de principio, a saber:

Nulidad de la flexión longitudinal en la membrana.

Nulidad del módulo de Poisson.

A nuestro juicio, ambas peticiones de principio pueden admitirse, pues la flexión longitudinal ha de ser relativamente muy pequeña para poder admitirla como nula, y la nulidad del módulo de Poisson es clásica en todos estos cálculos, y no hay inconveniente en admitirla, puesto que realmente el espesor puede considerarse infinitamente pequeño con respecto a las otras dimensiones. No nos es posible, dada la premura de tiempo, rehacer todos los cálculos que han hecho los autores del proyecto para su debida comprobación respecto de errores materiales de cálculo que pudieran contener; pero el aspecto perfectamente concordante de los diagramas de esfuerzos que se obtienen, así como la vista de las isostáticas e isobaras de la cubierta, son completamente satisfactorias, por lo que no parece que en estos cálculos se hayan cometido graves errores materiales.

Se desarrolla por separado el cálculo para el peso propio, el viento y la nieve, cosa que no suele hacerse por la complicación que representa, pero que, naturalmente, constituye una mayor garantía sobre el cálculo.

Las sobrecargas se han calculado a razón de 250 kg/m² para las cargas propias, 100 kgs. para el viento y 65 kgs. para la nieve, siendo aceptables, pues corresponden a las instrucciones normales para el clima de Madrid.

Los autores prescinden de los esfuerzos de temperatura, suponiéndolos anulados por medio de dispositivos que permiten la libre dilatación de la membrana sin perjuicio de la estabilidad de la misma.

En cuanto al cálculo de los esfuerzos en los bordes, que es una cosa

sumamente delicada, se han calculado por un método similar al Fínster-Wálder, empleado para el cálculo del mercado de Budapest, que consiste en establecer, por el método de las funciones de Airy, una función que se considera *a priori* como integral segunda de los esfuerzos de flexión, y dándole forma de exponencial, que transforma con arreglo al teorema de Euler en trascendente, se llega a obtener la expresión de un efecto cualquiera de borde, como la suma de cuatro ondas senoidales amortiguadas que nacen en el borde que se estudia, y sus cuatro reflejos en el borde opuesto. El gran ángulo con que se cortan en el centro las directrices de las bóvedas y su pequeño espesor hacen que el amortiguamiento de las ondas sea tal que al llegar al borde opuesto, su valor, al ser prácticamente despreciable, permite a su vez despreciar las ondas reflejas; pero a pesar de esta simplificación, debida a la forma geométrica de la directriz, la resolución de los sistemas de ecuaciones que dan las constantes de integración con arreglo a las condiciones de restricción de los bordes, resultan muy numerosas, representando, por consiguiente, un gran trabajo su resolución; dominada esta dificultad, y pudiendo comprobarse los resultados por la verificación de las ecuaciones correspondientes, parece que la determinación de todos los coeficientes que entran en estos efectos de borde están suficientemente asegurados y libres de error.

En cuanto a las cargas de trabajo, se obtienen unos máximos de 50 kg/cm² para el hormigón, 1.100 kg/cm² para el hierro en general, que se reduce a 800 kgs. para el armado del encuentro central. A nuestro juicio, estas cargas son corrientes y perfectamente admisibles.

De esto resulta que tratándose de una bóveda proyectada basándose en un sistema que tiene suficiente número de aplicaciones para confirmar la bondad del mismo, y estando hechos los cálculos con arreglo a la mejor técnica actual de la mecánica elástica y únicamente con unas peticiones de principio corrientemente admitidas en esta clase de obras, creemos que es perfectamente factible la construcción de esta bóveda, según se desprende de los resultados del cálculo; pero dado lo excepcional de sus dimensiones, deben tomarse especiales precauciones para que su realización completa se aproxime cuanto sea posible a las hipótesis de cálculo, evitando en cuanto se pueda las imperfecciones inherentes a la misma.

Esto tiene gran importancia, porque lo que ocurre en realidad en las obras es que se originan esfuerzos secundarios, debidos a que las deformaciones reales y, por tanto, las cargas de trabajo originadas no

son las supuestas en el cálculo. Para hacer frente a estos esfuerzos secundarios y a los defectos de los materiales, se introduce en los cálculos el coeficiente de seguridad, que suele ser suficiente para absorber los trabajos suplementarios, porque en obras corrientes los esfuerzos secundarios no adquieren proporciones exageradas; pero en este caso hay que tener mucho más cuidado, porque esas inadaptaciones de la obra al cálculo, si pasan de ciertos límites, pueden originar cargas de trabajo que lleguen a la rotura.

En primer lugar, entendemos que sería preferible que las claraboyas se prolongaran hasta los tímpanos (1), haciéndolas continuas de uno a otro en dirección de las generatrices, o bien subdividirlas formando varias claraboyas pequeñas separadas unas de otras por la membrana continua que forma la bóveda. Con la primera solución se establecería una mayor continuidad en la superficie y se impedirían los esfuerzos secundarios que necesariamente tiene que haber, en la parte de membrana que en la disposición actual existe entre los tímpanos y el arranque de las claraboyas, sirviendo de estribo a las mismas.

En la segunda solución, de hacer varias claraboyas pequeñas separadas por trozos de membranas, se disminuiría el valor de estos esfuerzos secundarios, haciéndolos así menos peligrosos.

Creemos que sería conveniente la ejecución de la obra con cemento aluminoso, porque, tratándose de espesores muy pequeños, es preciso obtener en lo posible un mayor coeficiente de seguridad, ya que en estas secciones pequeñas el aumento de cargas por deficiencias en una sección puede llegar a alcanzar proporciones enormes; además, esto tendría la ventaja de disminuir la contracción del fraguado, cosa muy importante, dadas las dimensiones de estas membranas, y permitir un descimiento más rápido; con lo que se consigue la disminución de plazo que tanto interesa a la Sociedad.

Es esencial la cimbra que se vaya a emplear. Esta cimbra debe ser perfectamente rígida y entera, en forma que permita el hormigonado de toda la bóveda de una sola vez. Habría de tenerse especialísimo cuidado en que no haya alabeo ninguno de las generatrices, sino que éstas sean perfectamente horizontales, y llamamos particularmente la atención sobre este punto, pues en esto una falta de cuidado podría acarrear la ruina de la obra, debido a los esfuerzos secundarios que se producen

(1) En la figura 22 puede verse la disposición que se había ideado primeramente para las claraboyas.

y no tenidos en cuenta. El descimbramiento debe estar perfectamente estudiado para que sea continuo, sin golpes ni sacudidas, y como se trata de una bóveda de dimensiones excepcionales, creemos que debe proyectarse esto en tal forma que la cimbra, después de separarse unos centímetros de la bóveda, conserve toda su rigidez y resistencia, a fin de que se pueda probar la cubierta y se pueda volver a cimbrar con mucha rapidez en caso de que se presentaran deformaciones anormales.

La sobrecarga debe ser por lo menos una vez y media la supuesta en los cálculos.

Como hoy día existen procedimientos para medir las deformaciones que se producen en una estructura, con una precisión enorme, creamos que sería muy conveniente poner algunos testigos, para comprobar las deformaciones reales con las del cálculo, por medio de auscultadores con el procedimiento de vibraciones sintonizadas, y que los que suscriben han tenido ocasión de emplear con éxito en otras obras.

Los cambios de sección que necesariamente origina la existencia de las claraboyas son zonas muy peligrosas; por consiguiente, al hormigonar deberá tenerse esto muy presente para que de ninguna manera resulten muy debilitadas estas secciones durante el hormigonado.

Se supone en los cálculos, como ya hemos dicho, que la bóveda trabaja a libre dilatación. Esta libre dilatación debe estar perfectamente asegurada para que se produzca libremente el movimiento sin originar reacciones, adoptando disposiciones que lo garanticen. Se disminuirían naturalmente las dilataciones por temperatura y además es conveniente, desde el punto de vista de comodidad, el aislar térmicamente esta bóveda con una capa de corcho, una cámara de aire u otro aislante.

Por otra parte, se supone que la membrana se apoya en unos apoyos indeformables. Como esto no ocurre en uno de los lados, en que se apoya en una estructura, es preciso darle a la viga de apoyo superior de esta estructura toda la rigidez que precisa para que prácticamente pueda cumplir aquellas condiciones de cálculo.

Por último, como la membrana puede quedar bastante suelta, sería necesario comprobar en su caso y tomar las precauciones necesarias para que no pueda ser elevada por efecto de succión del viento.

Resumiendo todo lo dicho, nos parece que el proyecto es perfectamente viable, en suficientes condiciones de seguridad, siempre que se tenga un escrupulosísimo cuidado en su construcción, siendo, a nuestro juicio, conveniente:

1.º Modificar las claraboyas, o bien prolongarlas hasta los tímpa-

nos, de modo que sea enteriza de tímpano a tímpano, o bien subdividirlas en varias claraboyas pequeñas, dejando entre ellas trozos de membrana que aislen una de otra.

2.^º Que se emplee cemento aluminoso.

3.^º Que la cimbra sea bien rígida y que se compruebe escrupulosísimamente la horizontalidad perfecta de todas las generatrices, dando, antes del hormigonado, las contraflechas necesarias para que se cumpla esta condición.

4.^º Que se asegure un descimbramiento fácil, sin sacudidas ni esfuerzos secundarios, que pudiera ser obtenido, por ejemplo, mediante el empleo de gatos hidráulicos o de tornillo.

5.^º Que se pruebe, después de separar unos centímetros la cimbra, con una sobrecarga que sea, por lo menos, vez y media la del cálculo. Esta prueba debe hacerse con las generatrices interiores del Frontón cargadas y sin cargar. También aconsejamos como muy conveniente que se pongan unos testigos para poder medir las deformaciones reales producidas en los diversos estados de carga.

6.^º Que se tenga especial cuidado en el hormigonado de las zonas contiguas a las claraboyas; y en el borde interior que resulta del encuentro de las dos bóvedas.

7.^º Que se emplee una disposición que asegure la libre dilatación.

8.^º Que se aísle térmicamente.

9.^º Que la carrera sobre la que se apoya uno de los bordes de la membrana sea muy rígida.

10. Que se compruebe, a los posibles efectos del levante por succión del viento.

Adoptando estos cuidados, creemos que la ejecución de la obra proyectada no solamente es viable, sino que el éxito de la misma será un nuevo prestigio de nuestra técnica arquitectónica, siendo digna de todo elogio la decisión de los autores del proyecto de cubrir este espacio con una bóveda como la proyectada, que, al ser la mayor del mundo, colocará a España en lugar preeminente en los avances de la técnica, y que además supone en sus autores un espíritu esforzado y moderno de buscar nuevas soluciones y orientaciones que reflejen un avance progresivo, en lugar de seguir por los moldes rutinarios y manidos, más cómodos para proyectar y de menor responsabilidad.

LOS INGENIEROS,

J: Eugenio Ribera J. M.^a Aguirre."

CUMPLIMIENTO DE LAS PRESCRIPCIONES DEL INFORME

Pasado este informe tanto a la Empresa como al constructor y a la Dirección técnica, se aceptaron todas las especificaciones que en el mismo se indican, en la siguiente forma:

1.º Las claraboyas, que se habían proyectado primeramente como se ve en la figura (22, a), sin llegar a las directrices extremas, se prolongaron hasta éstas (22, b) por considerarlo ventajoso desde todos los puntos de vista: estético, funcional y resistente.

2.º El hormigonado se hizo con cemento aluminoso Electroland

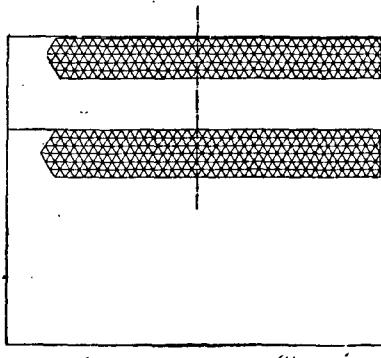


Fig. 22.—Disposición inicial (a) y final (b) de las claraboyas.

para todos los elementos de la cubierta y de las palizadas y bielas sustentantes.

3.º La cimbra se construyó completa, con arreglo al proyecto de la casa constructora. En cuanto a las contraflechas, se calcularon con el 20 por 100 de las deducidas del cálculo para carga simultánea de peso, viento y nieve, más una contraflecha supletoria variable linealmente de los arranques al cordón de la gaviota, empezando en cero en aquéllos y llegando a cinco centímetros en éste, con objeto de mantener algo de contraflecha final en esta arista para mejorar su efecto estético y permitir el desagüe.

Tanto esta última contraflecha supletoria como el exceso del 20 por 100 de las contraflechas sobre las del cálculo, producen tendencia a elevar las zonas comprimidas de claves y a descender el cordón de gaviota; pero como ninguna de las dos cosas resulta perjudicial, particu-

larmente con la intensidad pequeñísima que les corresponde para esas contraflechas, se consideró preferible el riesgo de obtener flechas finales positivas, cuya influencia, aunque pequeña, disminuiría la posible tendencia al pandeo.

4.^º El descimbramiento se dispuso por medio de cajas de arena, que por facilidad de construcción y seguridad de manejo se consideraron por el constructor preferibles a los gatos; y para establecer un sistema de posible recuperación en el descenso se montaron pares de cuñas gruesas sobre cada caja de arena, con las que hubiera podido levantarse nuevamente la cimbra unos diez centímetros.

Más adelante detallamos la operación de descimbramiento y la marcha seguida en los descensos.

5.^º La carga de prueba se hizo con sacos de arena sobre la lámina, no pudiendo aplicarse naturalmente el equivalente de la carga de viento, si bien a los pocos días sopló un violento vendaval que vino a hacer estos efectos de prueba; la carga simultánea del graderío se hizo con la misma madera de la cimbra desmontada, y en el capítulo correspondiente se detallan las flechas obtenidas.

6.^º El hormigonado resultó efectivamente laborioso, particularmente entre los hierros del paquete de la gaviota, lográndose llenar perfectamente todos los espacios, gracias a la mayor cantidad de agua que admite el cemento fundido y al golpeteo o ligera vibración supletoria al apisonado que se dió por la parte interior del encofrado. Para cumplir la última prescripción se dispuso una instalación de testigos de control que se detalla más adelante.

7.^º El sistema de libre dilatación, que se estaba todavía estudiando al entregar el proyecto y cálculo de la lámina a los ingenieros asesores, es el que se ha detallado ya anteriormente; con él se obtiene una libertad completa de dilatación longitudinal de las generatrices, pues la dilatación transversal está de por sí más que asegurada en todas estas láminas; pero además, como allí se ve, se permite también el libre movimiento de las estructuras de tímpano o piñón.

8.^º El aislamiento térmico, aun cuando en realidad, a juicio del proyectista, interesaba solamente el necesario para evitar fuertes desnivelaciones térmicas en el espesor de la lámina, se dispuso con una capa de corcho comprimido de una pulgada por encima de la lámina y otra por el interior de corcho poroso de medio centímetro, provista principalmente para mejorar las condiciones acústicas de la sala.

9.^º La carrera sobre la que se apoya la lámina en el lado de las

tribunas es la viga maestra que sostiene, no solamente los voladizos del graderío alto y la entreplanta que dejan, sino también el piso inferior de palcos colgados; salva esta viga en su parte central una luz libre de 22 metros, y bajo el peso propio y el de las estructuras de los tres pisos descendió siete milímetros solamente. Ahora bien; como el peso de estas estructuras es de veintiuna toneladas, y la sobrecarga de cálculo de diez toneladas por metro lineal, las flechas correspondientes a estas últimas, que son las únicas que ha de soportar con la cubierta ya construida, se han de reducir a 3,3 milímetros, que en una luz de 22 metros y con una estructura tan elástica como la de la cubierta, cuyas flechas ya conocemos, se consideraron más que suficientes para cumplir la prescripción en cuestión del informe.

10. Por último, los efectos de succión de viento, que no se habían tenido en cuenta en el cálculo inicial, se estudiaron de acuerdo con la ley

$$0,40 v \operatorname{sen} \varphi - 2 n \cos \varphi \text{ (kg/m}^2\text{)}$$

que corresponde a la velocidad de 30 m/s, máxima de las registradas en Madrid, según se ha dicho al establecer las hipótesis (cap. II, ap. 1). Esta modificación sobre la primitiva ley $= 100 \operatorname{sen} \varphi$ se introdujo en el cálculo gráfico solamente, con lo que se simplificó mucho el trabajo. En las figuras 9 y 10 se han dibujado las curvas resultantes con esta ley, que dan valores menores que con la ley tenida en cuenta anteriormente, a base de presiones centrípetas solamente.

En cumplimiento de la indicación última del apartado 5.^o del informe, se pidió a "Investigaciones de la Construcción, S. A." una propuesta de instalación completa de control, que fué la siguiente:

"Propuesta de instalación de control presentada por "Investigaciones de la Construcción, S. A."

Hemos estudiado esta cubierta con el especial interés que corresponde a la importancia de la obra, y vista sobre los planos de cálculo del Sr. Torroja, y particularmente sobre el plano de isostáticas, la distribución de los esfuerzos principales, consideramos que la instalación de control debe responder a las tres necesidades siguientes:

1.^a Determinación rápida de las flechas y corrimientos de la cubierta durante el descimbramiento.

2.^a Determinación de las cargas reales de trabajo en los puntos

principales de la estructura, no solamente durante el descimbramiento y pruebas de la estructura, sino durante el primer período de vida de la misma.

3.^a Determinación de los corrimientos radiales y transversales de la placa en toda su superficie y con suficiente densidad de control para poder acusar cualquier deformación excesiva que se produjera localmente y que pudiera indicar la aproximación, aunque lejana, de una anormalidad en las condiciones existentes del conjunto.

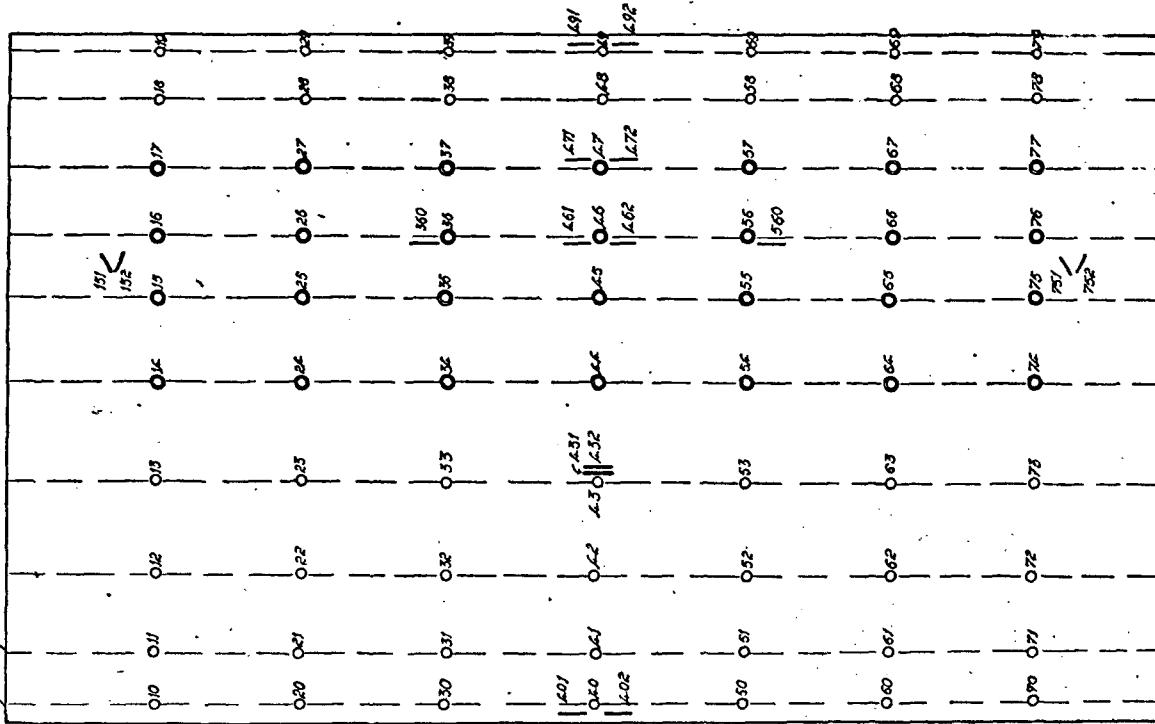
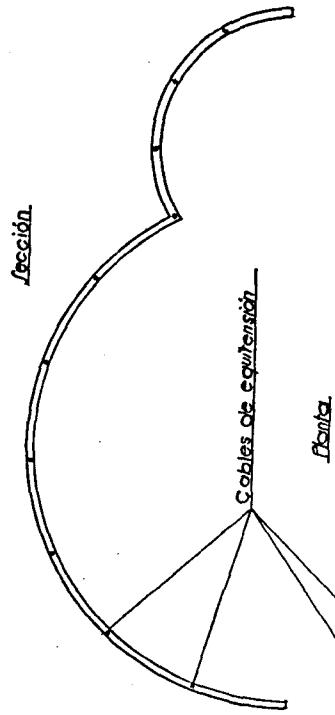
Para la primera finalidad consideramos que, dada la gran altura de la cubierta sobre el suelo y la falta de puntos fijos fuera de los muros de contorno, no es aconsejable el empleo de flexímetros corrientes sobre la cimbra; ya que los movimientos de ésta pueden perjudicar grandemente a la exactitud y seguridad de la lectura.

El empleo de péndulos, que hemos utilizado en la cubierta similar de Algeciras, resulta también muy incómodo para el personal que tiene que andar por la cimbra, particularmente durante el descimbramiento, produciéndose golpes y errores frecuentes.

Por este motivo consideramos preferible el empleo de cables de equitensión sujetos a los frentes o tímpanos en los que apoya la estructura, y que, siguiendo las generatrices rectas de los lóbulos, permitirá tener puntos de referencia a lo largo de la bóveda para medir las flechas, tanto radial como tangencialmente, con el empleo de un cuadro de calibre especial, pudiendo asegurar la exactitud de la lectura con errores menores de un milímetro, que consideramos suficiente para esta clase de trabajos.

Para la segunda finalidad proponemos el empleo de auscultadores de deformación interna micrométricos del tipo "Icon BH 5", que por su mínimo diámetro y las condiciones particulares de la envolvente, permiten ser alojados en espesores tan pequeños como los de esta placa sin debilitarla.

La colocación de estos auscultadores se proyecta en la siguiente forma (fig. 23): cuatro en la arista, por ser un elemento esencial de la estructura, donde las tensiones son máximas; dos en cada una de las claves de los dos lóbulos, para acusar las máximas compresiones longitudinales; dos en cada uno de los faldones donde se producen nuevamente esfuerzos de tensión importantes, y cuatro en diagonal en la claraboya central junto a los arranques, para acusar los esfuerzos transversales. Simétricamente con éstos, en el lóbulo pequeño se propone el empleo de dos auscultadores triples de superficie, tipo BM 3, que per-



- Auscultador de deformación interna.
- △ " triple de superficie.
- Teleflexímetro de simple coordenada.
- ◎ " doble "

Fig. 23.—Disposición de los aparatos de control.

miten un mejor estudio de los esfuerzos diagonales, ya que, dado el poco espesor de la placa, no aconsejamos colocar en este sitio los auscultadores internos de triple dirección. De este modo serán detectados los

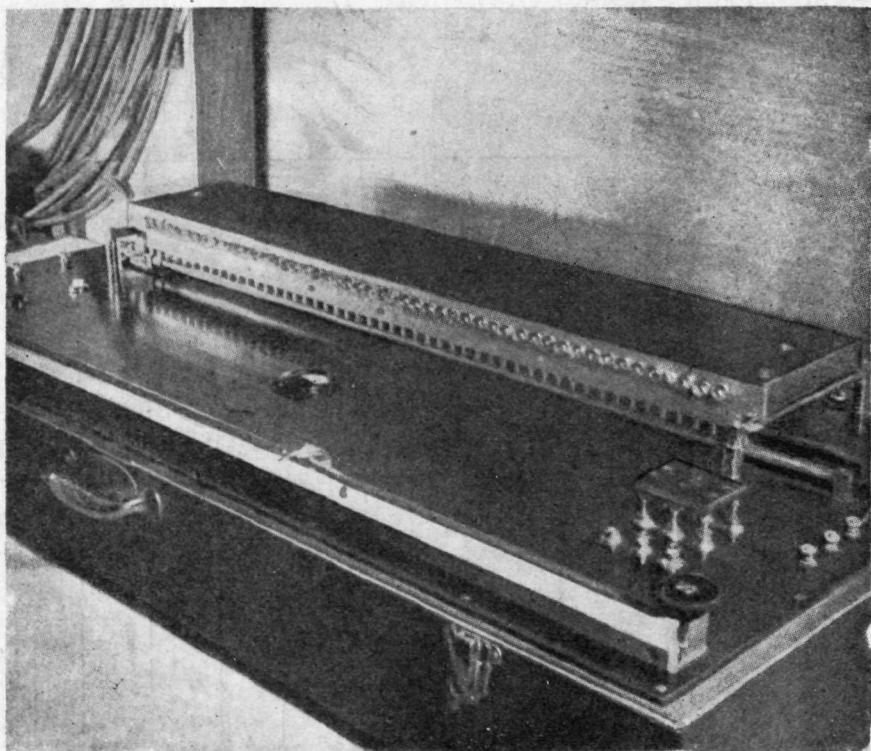


Fig. 24.—Vista del telecorrimetro en la cabina de control.

esfuerzos principales en los puntos donde tienen más importancia de toda la estructura.

Por último, para la determinación de las deformaciones de la estructura durante su período de trabajo por tiempo indefinido, proponemos el empleo del teleflexímetro de resistencia eléctrica con referencia sobre estos mismos cables de equitensión.

Siendo la parte más delicada de la obra la correspondiente a la gaviota, podrían colocarse estos teleflexímetros de forma que acusen los corrimientos radial y tangencial en esta parte y solamente el corrimiento radial en el resto de la cubierta.

Disponiendo los cables de equitensión en número de diez, según las generatrices, y colocando los teleflexímetros en siete líneas, según siete directrices equidistantes, resulta un total de 70 teleflexímetros, que con-

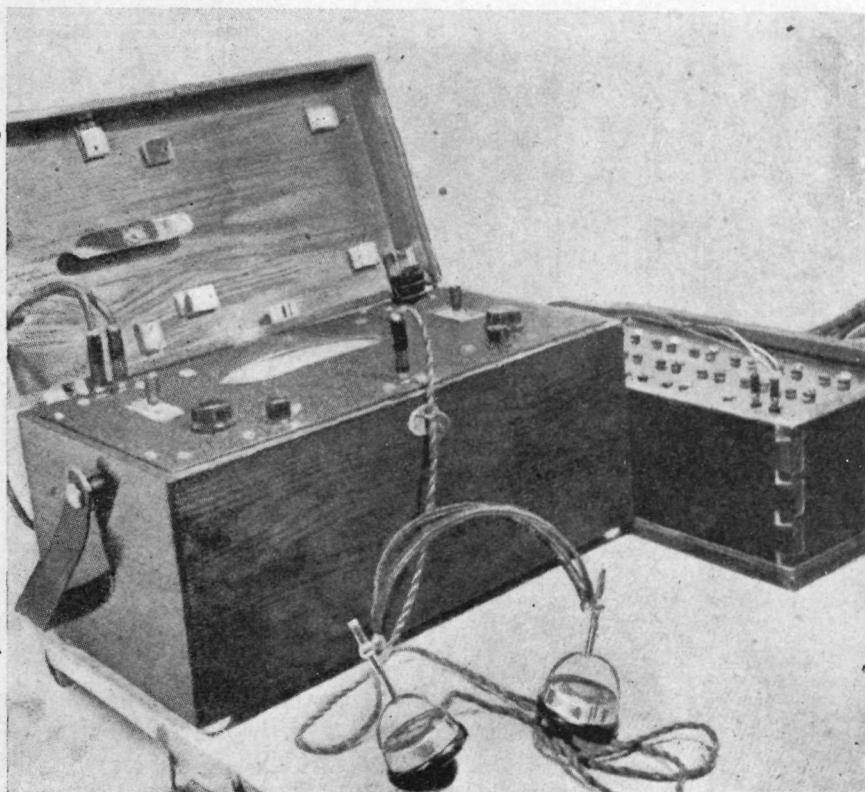


Fig. 25.—Telemicrodefórmetro para lectura de los auscultadores.

sideramos ya suficiente para que se acuse con seguridad cualquier deformación local interesante.

Todos estos aparatos irán conectados eléctricamente con un puesto de lectura central, desde el que podrán leerse mediante los aparatos correspondientes tanto los auscultadores de deformación interna como los teleflexímetros.

Madrid, noviembre de 1935."

CAPITULO V

Estudio experimental en modelo reducido.

A propuesta de la Empresa se estudió, de acuerdo con la casa "Investigaciones de la Construcción, S. A.", la fabricación de un modelo reducido, sobre el cual pudiera no solamente comprobarse la resistencia a la rotura con una carga superior a la del cálculo, sino también la correspondencia de los resultados de éste con la realidad, en la medida de lo posible.

Estudiadas las diferentes posibilidades de materiales y métodos de fabricación, se decidió construir el modelo en mortero o material armado, con arreglo a las condiciones siguientes:

Pliego de condiciones del modelo.

Las características físicas del material serán:

Carga de rotura a compresión: de 200 a 250 kg/cm².

Idem a tracción: 30 =— 50 kg/cm².

Coeficiente de dilatación térmica: entre 1 y 0,5 de la armadura.

Módulo de Poisson: entre 0,10 y 0,20.

Coeficiente de elasticidad: entre 250 y 350,000 kg/cm².

Adherencia a las armaduras: normal, sin especificarse límites.

NOTA.—Todas estas cifras fueron propuestas por la casa ICON y aceptadas por la Dirección, entendiéndose que aun cuando hubieran podido aceptarse otras totalmente distintas, siempre que las proporciones relativas y con las cargas fueran las debidas, se consideraban preferibles éstas, no sólo por facilidad de ejecución, sino principalmente por amoldarse a las de los materiales reales.

Las armaduras serán de acero dulce con las características siguientes:

- Carga de rotura a tracción..... 35-45 kg/mm²
- Límite elástico..... 20-25 kg/mm²
- Alargamiento..... 25-30

Todas las dimensiones lineales del modelo, incluso las armaduras, estarán en la escala 1/10, admitiéndose errores de un 10 por 100.

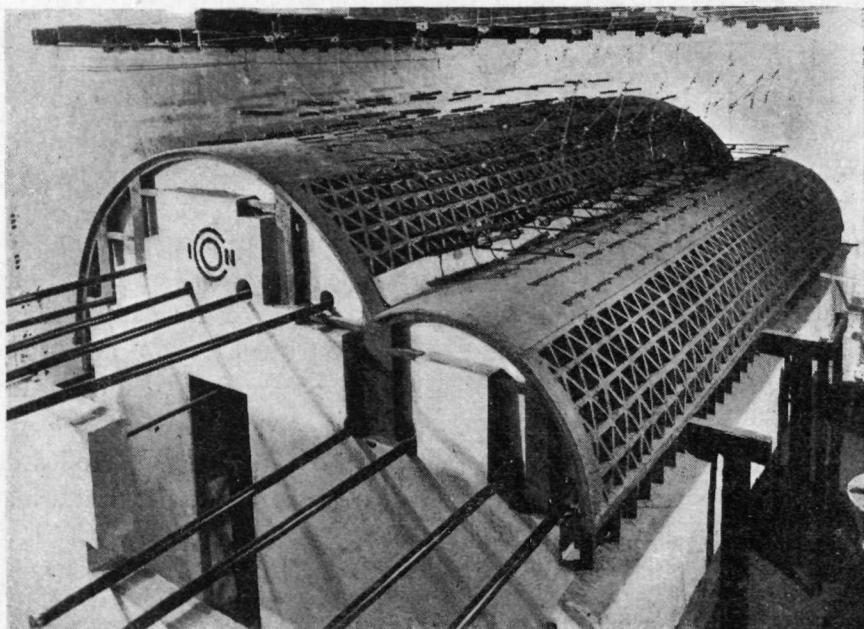


Fig. 26.—Vista exterior del modelo.

Las sobrecargas de peso muerto, viento y nieve podrán establecerse conjunta ó separadamente.

Todas las operaciones de carga y de observación se harán sin necesidad de entrar debajo del modelo cargado, para evitar toda posibilidad de accidentes.

En caso de rotura, la carga de peso muerto, que es la principal, desaparecerá automáticamente al sobreponerse el descenso de un centímetro, para poderse estudiar la iniciación y desarrollo de la rotura, deteniendo ésta en los primeros momentos.

El establecimiento de las cargas será suave.

Las cargas repartidas podrán sustituirse por pequeñas cargas con-

centradas equivalentes, no espaciadas en ningún sentido a más de 20 centímetros.

La rotura o el fallo de un elemento que provoque la desaparición de cualquiera de estas sobrecargas provocará, obligada e instantáneamente, la de todas las demás, o por lo menos las de toda la directriz, para evitar la rotura del modelo por desigualdad de carga no realizable en la obra.

Las sobrecargas se ajustarán a las leyes de repartición sobre la di-

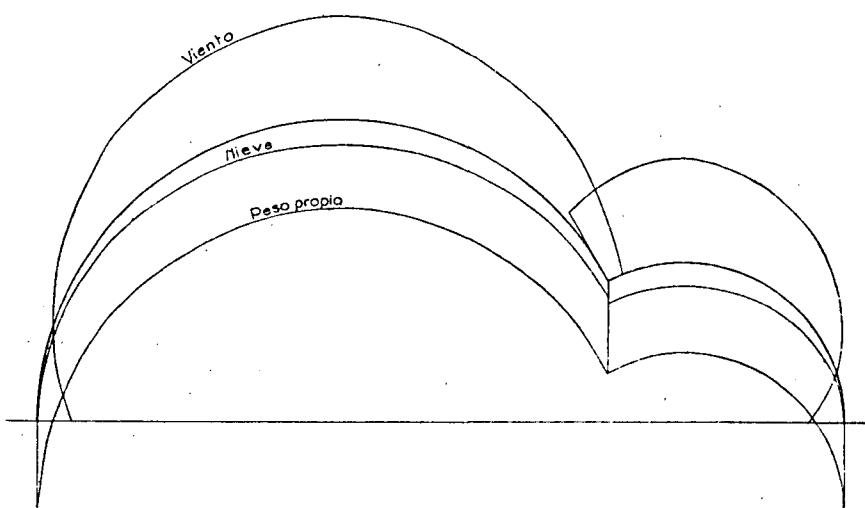


Fig. 27.—Leyes de distribución teórica de las cargas sobre el modelo.

rectriz indicada en el croquis (fig. 27), con variaciones menores del 15 por 100, y serán uniformes a lo largo de las generatrices.

Los valores indicados para el peso muerto podrán sobrepasarse en un 50 por 100.

Los valores correspondientes al viento podrán aceptar cualquiera de las leyes dibujadas en el croquis.

El modelo comprenderá no sólo la lámina, sino las palizadas de sustentación de los piñones y el sistema de bielas y anclajes, montándose todo ello sobre muros o vigas similares al marco de apoyo real.

Los aparatos de observación permitirán determinar transversalmente los corrimientos de la directriz media, con apreciaciones de décima de milímetro, y longitudinalmente el alargamiento de la gaviota con apreciaciones de la milésima de milímetro.

La casa ICON pondrá el modelo, los aparatos y medios de observa-

ción y un ayudante operador durante quince días, a disposición de la Dirección técnica y del personal de observadores que ésta designe.

Todos los planos y detalles del modelo serán aprobados previamente por la Dirección, pero ICON se reserva la composición del mortero y los métodos de ejecución y puesta en obra.

Descripción de la instalación.

En la figura 28 se ve la disposición propuesta y desarrollada para el establecimiento de las sobrecargas.

La de peso muerto se estableció por medio de una serie de balancines, de tal modo dispuestos que la rotura de un hilo cualquiera llevaba consigo la descarga de todo el sistema, como tuvo ocasión de comprobarse por dos veces durante el desarrollo de las observaciones.

La carga total de peso muerto viene representada por la losa inferior de hormigón armado, que, unida a la vigueta del mismo material, quedaba suspendida de los balancines al accionarse desde el exterior los gatos hidráulicos.

La descarga se hacía rápidamente con sólo accionar la llave de escape de los gatos; pero, además, como éstos sólo se cargaban hasta despegar la losa del suelo, el menor asiento de la cubierta bastaba para descargarla, volviéndose entonces a elevar los gatos para recuperar la carga a voluntad.

Las succiones de viento se establecían en una forma análoga, suspendiendo los muertos exteriores por medio de otros dos gatos hidráulicos, y las leyes de distribución de los esfuerzos se podían variar trasladando en los balancines de estos muertos el punto de suspensión.

Las presiones centrípetas de viento se establecían por medio de pequeños pesos interiores, que tensaban los balancines correspondientes a estas cargas en los extremos de los faldones, pesos que por su menor importancia se colocaban a mano antes de establecer en cada ensayo la carga de peso muerto.

Por último, la carga de nieve se establecía directamente sustituyéndola por arena colocada sobre la lámina.

Para la determinación de las dilataciones de la gaviota se dispuso longitudinalmente un auscultador micrométrico en comunicación con un telemicrodefórmetro ICON, que permitía apreciar en los 20 cen-

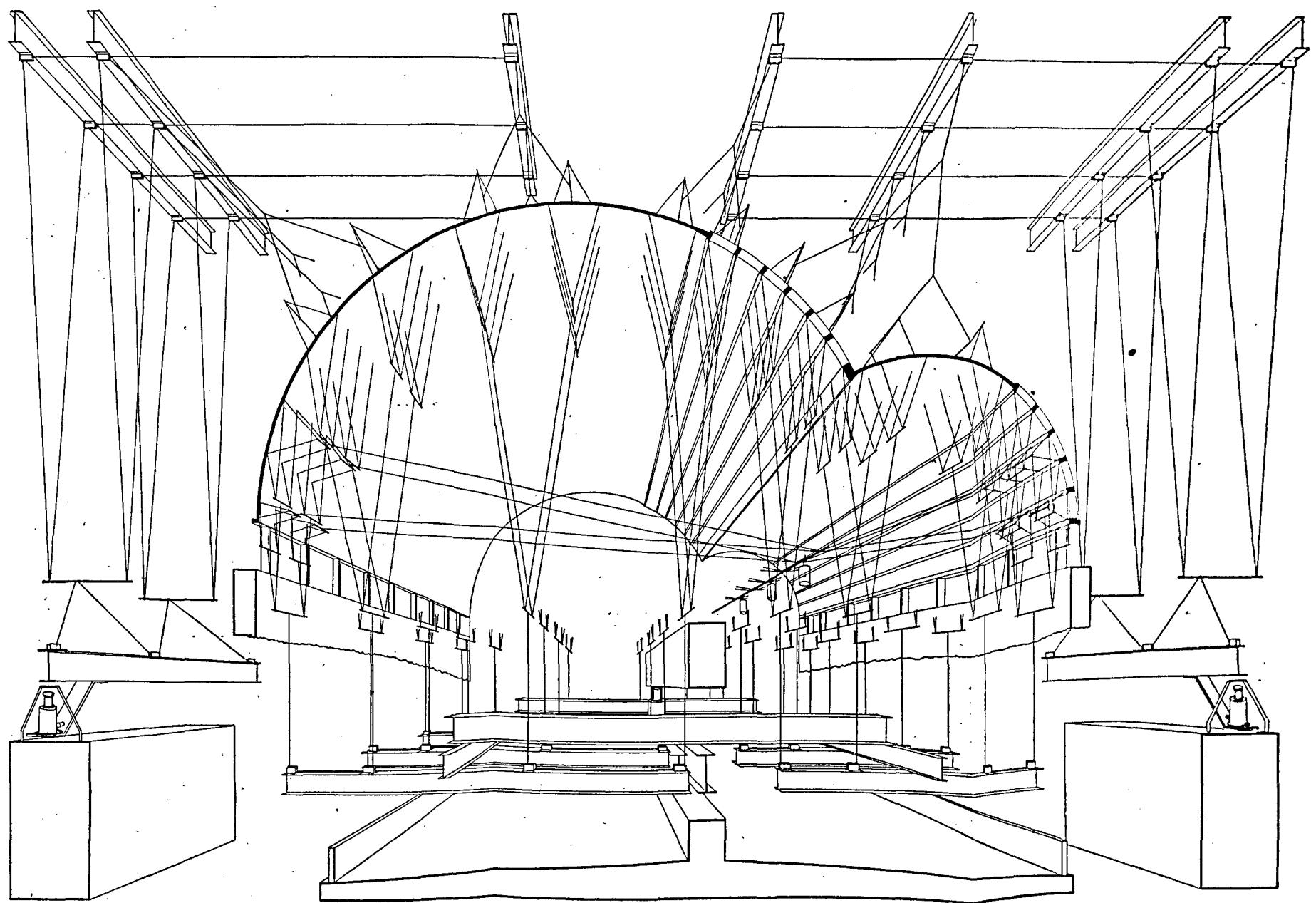


Fig. 28.—Dispositivo para el establecimiento de las cargas.

tímetros centrales de la gaviota dilataciones del orden 2×10^{-7} metros, o sea el quinto de micra.

Habiéndose considerado preferibles para la determinación de las flexiones transversales, particularmente interesantes de comprobar, la

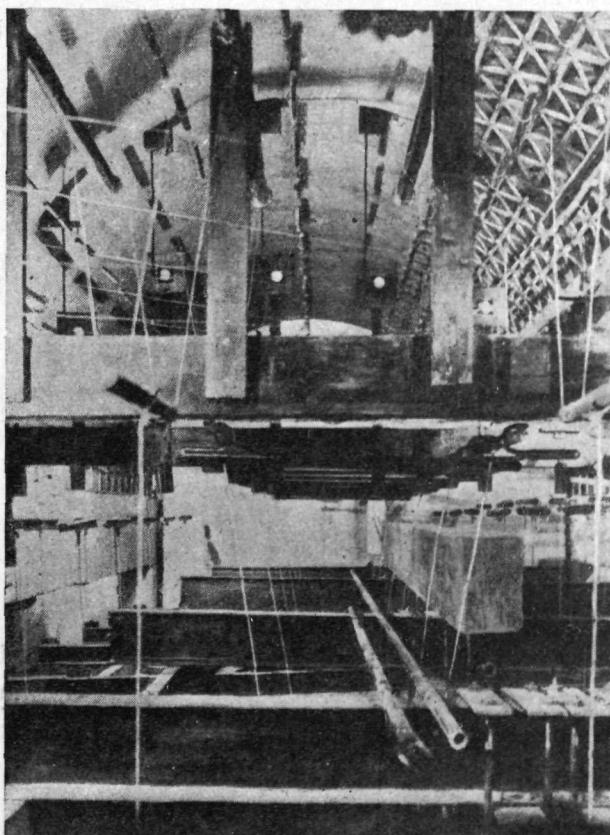


Fig. 29.—Vista interior del modelo con las instalaciones de carga y lectura.



determinación de la elástica de la directriz central, se dispusieron en doce puntos de ésta doce sistemas formados por una plomada y una aguja vertical sujetas a la cubierta y cuyos movimientos se observaban sobre un retículo fijo al marco base. De este modo se conoce por el movimiento de la plomada el corrimiento horizontal del punto en cuestión; por el movimiento vertical de la aguja, el corrimiento vertical del punto, y por el movimiento horizontal de la aguja con relación a la plo-

mada (dividiéndole por la longitud de la misma), el giro de la normal o de la tangente a la directriz.

La lectura sobre los retículos desde el exterior se hacía por medio de grandes anteojos, o mejor dicho, microscopios, ya que el sistema óptico es el de éstos, gracias a los cuales se apreciaban los movimientos en

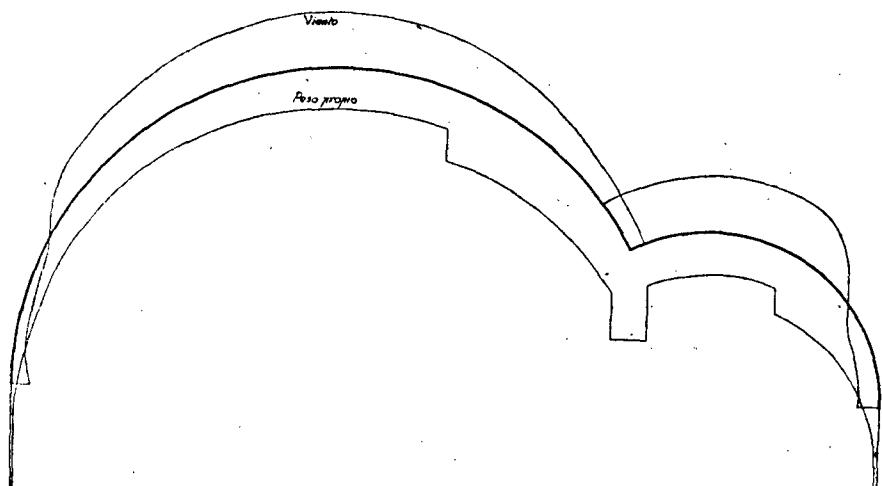


Fig. 30.—Distribución real de las cargas sobre el modelo.

décimas de milímetro; como los corrimientos se salían normalmente del campo de los microscopios, éstos eran móviles, y para facilitar las lecturas, las divisiones de los retículos llevaban colores diferentes cada dos milímetros, con lo que la localización y lectura era suficientemente rápida.

Construído el modelo todo él a escala, es necesario, para obtener las mismas cargas de trabajo en el material, mantener por metro cuadrado de superficie real del modelo los mismos pesos o presiones que por metro cuadrado de obra.

En la figura 30 se indican las cargas reales que resultaban sobre el modelo partiendo de los datos suministrados por las pesadas de los distintos elementos (losa inferior, viguetería, arena, muertos, etc.) que constituyan las cargas totales.

Desarrollo de los ensayos.

Las pruebas efectuadas sobre probetas de los materiales empleados en la fabricación del modelo dieron los siguientes resultados:

Carga media de rotura a compresión.....	213 kg/cm ²
Idem a tracción.....	37 kg/cm ²
Coeficiente de elasticidad.....	340.000 kg/cm ²
Carga de rotura de las armaduras.....	38 kg/mm ²
Límite elástico.....	22 kg/mm ²
Alargamiento.....	28

A continuación se expone un cuadro detalle de la posición de las agujas y los de las diferentes lecturas efectuadas.

Las varillas 5' 6' 7' 9' se fueron colocando a medida que el desarrollo de los ensayos aconsejaba su colocación para completar las observaciones.

Las lecturas que se indican en los cuatro cuadros siguientes corresponden a las siguientes cargas y tipos de ensayos.

Ensayos efectuados el 10 de noviembre de 1935:

- a) Carga de peso propio.
- b) Repetición del anterior.

Ensayos efectuados el día 14 de noviembre de 1935:

- c) Carga de nieve.
- d) Nieve más peso propio.

e) Igual carga que la anterior más sobrecarga; pero como las lecturas se hicieron sin quitar previamente la carga de nieve, corresponden en realidad a peso propio más sobrecarga solamente.

f) Nieve solamente; las lecturas indican, por tanto, la deformación remanente después de quitar las cargas de peso propio y sobrecarga.

- g) Repetición del caso e.
- h) Repetición del f.
- i) Repetición del e.

Ensayos efectuados el día 15 de noviembre de 1935:

j) Repetición del e, efectuado en presencia del arquitecto director, del constructor y de la representación técnica de éste.

P u n t o s	1	2	3	4	5	5'	6	6'	7	7'	8	9	9'	10	11	12
Distancias en centímetros al arranque izquierdo.....	0	15	33	72	113	130	150	172								
Distancias en centímetros al arranque de recho								153	136	116	100	77	56	32	3	0
Longitud de varilla en centímetros	50	59,7	46,3	53	64,5	55	1,6	54	59	58	47	58	50	51	35	49

Ensayos efectuados el día 21 de noviembre de 1935:

Para asegurar el trazado de la elástica de directriz se colocaron las agujas 5' 7' y 9'.

k) Carga de peso propio y sobrecarga.

l) Repetición del anterior.

m) Remanentes después de la descarga.

Ensayos efectuados el día 22 de noviembre de 1935:

n) Peso más sobrecarga.

o) Peso más sobrecarga más las succiones de viento en el lado de la gaviota.

p) Peso más sobrecarga más succiones del viento simultáneas en ambos faldones.

q) Peso más sobrecarga más las succiones completas, y simultáneamente los empujes centrípetos de viento sobre los faldones.

r) Peso más sobrecarga más las compresiones centrípetas sin succiones.

s) Compresiones centrípetas de viento solamente.

t) Remanentes después de la descarga completa.

Ensayos efectuados el día 2 de diciembre de 1935:

u) Peso más mitad de la sobrecarga a 12° centígrados.

v) La misma anterior a 47° centígrados.

Ensayos efectuados el día 5 de diciembre de 1935:

Con objeto de acabar de definir la elástica, se colocó la aguja 6' y se hicieron los últimos ensayos parciales.

w) Peso más mitad de la sobrecarga.

x) Peso más mitad de la sobrecarga.

Los corrimientos se dan en milímetros, y los giros en miliradianes, positivos hacia abajo y hacia la derecha (en la sección transversal, con el lóbulo pequeño a la derecha) y en el sentido dextrógiro.

CORRIENTES VERTICALES EN MILIMETROS

Ensayos o estados de cargas

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	
1	0,0	0,0	0,0	+ 0,6	+ 0,3	+ 0,1	+ 0,3	+ 0,3	+ 0,1	+ 0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	+ 0,4	+ 0,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
2	0,0	+ 0,5	0,0	0,0	+ 0,2	0,0	+ 0,2	0,0	+ 0,2	+ 0,3	+ 0,3	- 0,3	0,0	+ 0,3	+ 0,3	+ 0,3	0,0	+ 0,3	+ 0,5	+ 0,5	+ 0,4	+ 0,4	+ 0,4	0,0	
3	0,0	- 0,2	- 0,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	+ 0,5	0,0	- 0,2	0,0	0,0	+ 0,3	+ 1,0	+ 0,5	+ 0,5	+ 0,3	
4	- 0,8	- 0,7	- 0,2	- 2,7	- 1,5	0,0	- 1,5	- 0,3	- 1,2	- 1,0	- 1,0	- 1,0	0,0	+ 0,8	0,0	- 0,4	- 0,8	- 1,0	- 0,3	0,0	- 0,2	+ 0,1	- 0,7	- 0,6	
5	- 0,8	- 0,8	+ 1,2	+ 0,9	- 1,5	0,0	- 1,4	- 0,5	- 1,0	- 1,0	- 1,0	- 1,0	0,0	-	1,7	- 0,7	- 0,7	- 1,5	- 0,5	- 0,2	- 0,5	- 1,0	- 0,7	- 0,6	
5'																									
6	+ 4,2	+ 3,2	+ 1,0	+ 4,0	+ 4,0	0,0	+ 5,0	+ 5,0	+ 4,0	+ 4,5	+ 4,0	+ 3,8	0,0	+ 1,0	+ 1,5	0,0	+ 1,0	+ 0,5	+ 0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	+ 2,7	
6'																								+ 6,0	
7	+ 6,0	+ 5,2	+ 0,8	+ 6,5	+ 9,5	+ 0,5	+ 9,7	+ 1,2	+ 9,0	+ 9,3	+ 8,2	+ 7,5	0,0	+ 7,0	+ 7,5	+ 7,5	+ 9,0	+ 9,0	+ 0,7	+ 0,5	+ 7,2	+ 8,4	+ 6,8	+ 6,4	
7'											+ 8,0	+ 8,0	- 0,5	+ 11,0	+ 7,5	+ 7,5	+ 8,5	+ 8,5	+ 0,5	+ 0,5	+ 7,0	+ 7,0	+ 6,5		
8	+ 5,5	+ 5,0	+ 1,0	+ 6,0	+ 8,8	+ 1,0	+ 8,3	+ 2,2	+ 8,3	+ 8,5	+ 8,1	+ 7,8	- 0,1	+ 8,2	+ 6,5	+ 6,6	+ 8,2	+ 8,2	+ 0,2	+ 0,3	+ 0,2	+ 6,3	+ 9,6	+ 6,7	+ 6,3
9	+ 5,0	+ 4,0	+ 1,5	+ 5,5	+ 7,0	+ 0,2	+ 7,0	+ 1,4	+ 6,7	+ 7,0	+ 6,5	+ 6,8	0,0	+ 6,8	+ 5,8	+ 5,7	+ 5,7	+ 6,7	+ 0,3	+ 0,2	+ 5,5	+ 8,5	+ 5,4	+ 5,0	
9'																									
10	+ 3,0	+ 2,5	+ 0,3	+ 2,5	+ 3,8	+ 0,3	+ 3,5	+ 0,9	+ 3,6	+ 3,5	+ 3,7	+ 3,6	0,0	+ 4,0	+ 3,3	+ 3,3	+ 3,1	+ 3,7	0,0	+ 0,2	+ 3,0	+ 4,6	+ 3,0	+ 3,0	
11	+ 4,0	+ 4,0	+ 0,3	+ 1,2	+ 1,6	+ 0,1	+ 1,7	+ 0,1	+ 1,8	+ 1,9	+ 1,4	+ 1,5	0,0	+ 1,3	+ 1,2	+ 1,3	+ 1,3	+ 1,3	- 0,2	- 0,2	+ 1,2	+ 1,2	+ 1,8	+ 1,6	
12	+ 1,5	0,0	0,0	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,2	0,0	+ 0,1	+ 0,3	+ 0,3	+ 0,1	+ 0,2	0,0	+ 0,7	+ 0,7	+ 0,7	+ 0,7	+ 0,7	0,0	+ 0,2	+ 0,5	+ 0,5	+ 0,3		

C O R R I E N T O S H O R I Z O N T A L E S

E n s a y o s o e s t a d o s d e c a r g a

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	
1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-	
2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
3	-0,5	-0,4	+0,6	+0,6	0,0	0,0	-0,3	0,0	-0,3	-0,3	-0,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
4	+0,5	+0,6	+1,0	-2,0	+0,3	0,0	+1,0	-0,7	+1,0	+0,8	+0,6	0,0	+0,5	+0,5	+0,5	+0,5	+0,7	+0,4	+0,2	+0,2	+0,3	+0,5	+0,5	+0,5	
5	-0,5	+0,3	+0,6	+1,6	+1,7	0,0	+2,3	-0,5	+2,2	+2,2	+1,8	+1,5	0,0	+1,5	+0,6	+1,1	+1,1	+1,5	+0,3	+0,3	+1,0	+0,5	+1,0	+0,8	
5'	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
6	+2,5	+2,5	0,0	+2,3	+3,0	0,0	+4,2	-1,0	+4,0	+2,2	+4,0	+3,5	0,0	+4,0	+0,5	+3,0	+3,0	+4,0	+0,5	+0,3	+2,7	+4,0	+2,7	+2,5	
6'	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
7	+6,0	+3,0	0,0	+3,5	+0,5	+4,5	-0,5	+4,4	-1,4	+4,1	+4,0	0,0	+4,1	+3,0	+3,3	+3,3	+4,2	+0,2	+0,2	+3,2	+4,2	+3,2	+3,0	+4,0	
7'	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
8	+5,5	+0,5	+0,5	+1,5	+1,5	+1,0	+1,0	+1,7	-0,5	+1,8	+1,5	+1,2	+1,2	-0,1	+1,5	+1,3	+1,5	+1,3	+1,5	+1,5	+1,3	+1,3	+1,0	+2,0	
9	+5,0	0,0	+3,0	+1,0	+1,5	+0,2	+1,7	-0,4	+1,8	+1,8	+1,7	+1,5	0,0	+1,7	+1,4	+1,4	+1,4	+1,2	+1,7	+0,1	0,0	+1,5	+1,3	+1,0	
9'	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
10	+3,0	0,0	-0,2	0,0	+0,5	+0,3	+0,0	-0,2	+0,7	+0,5	+0,5	0,0	-0,2	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
11	+4,0	0,0	-0,5	-1,5	+0,2	-0,1	-0,8	-0,3	-0,7	-0,9	-0,9	+0,4	0,0	-0,7	-0,7	-0,9	0,7	0,9	0,0	-0,4	-1,3	-0,5	-0,8	-	
12	+1,5	0,0	-0,5	-0,5	-1,2	+1,2	0,0	-1,3	-1,3	-1,2	-1,3	-1,4	+0,5	0,0	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	-1,7	0,0	-0,2	-1,0	-1,5	-0,6	-0,7

CORRIMIENTOS HORIZONTALES DE LAS AGUJAS EN mm. VALORES AUXILIARES PARA LA DETERMINACION DE LOS GIROS

Ensayos o estados de carga

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	
1	0,0	0,0	- 0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	+ 0,5	+ 0,3	- 0,2	+ 0,5	0,0	+ 0,2	+ 0,5	+ 0,5	+ 0,3	+ 0,3	0,0	- 2,0	+ 0,1	+ 0,2	
2	- 0,5	+ 2,0	- 0,5	0,0	+ 1,2	+ 0,2	+ 1,0	+ 0,2	+ 1,0	+ 1,0	+ 1,0	+ 1,0	- 0,3	+ 1,0	- 0,5	- 1,0	0,0	- 1,0	- 0,3	+ 1,1	+ 1,3	+ 1,0	+ 1,0		
3	- 1,0	+ 0,7	0,0	- 0,7	- 1,2	+ 0,2	- 1,0	- 0,2	- 1,0	- 0,5	- 0,5	- 0,1	0,0	- 1,0	- 1,0	- 0,5	- 0,5	- 1,0	- 1,0	0,0	0,0	+ 0,2	1,0	- 0,5	
4	0,8	+ 0,2	+ 2,8	+ 2,5	- 1,0	- 0,3	- 0,7	- 0,5	- 0,5	- 0,8	- 1,0	- 0,3	- 0,8	- 0,8	- 0,5	0,0	- 0,3	+ 0,2	+ 0,3	0,0	0,0	- 0,8	- 0,2		
5	+ 3,0	+ 3,0	+ 1,8	+ 5,3	+ 5,5	+ 0,6	+ 5,4	+ 1,0	+ 5,0	+ 5,5	+ 2,5	+ 1,5	- 0,5	+ 2,0	+ 2,0	+ 2,0	+ 2,0	+ 2,5	+ 1,0	0,0	+ 1,3	+ 2,0	+ 1,8	+ 0,8	
5'	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+ 9,0	+ 9,2	+ 0,2	+ 9,0	+ 6,0	+ 6,5	+ 7,0	+ 9,0	0,0	0,0	0,0	-	-	-	
6	+ 6,5	+ 1,5	- 0,5	+ 7,0	+ 14,0	+ 1,5	+ 3,5	+ 2,1	+ 13,0	+ 13,0	+ 12,0	+ 11,0	0,0	- 12,5	+ 9,0	+ 9,0	+ 10,0	+ 12,0	+ 2,0	+ 1,0	+ 7,2	+ 14,2	+ 9,7	+ 8,7	
6'	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+ 8,0	+ 7,0	
7	+ 3,0	+ 3,8	+ 0,6	+ 4,0	+ 5,5	+ 0,5	+ 5,5	+ 0,5	+ 5,5	+ 6,0	+ 6,0	+ 6,0	+ 5,9	0,0	+ 6,0	+ 5,0	+ 5,0	+ 5,0	+ 6,0	0,0	0,0	+ 5,0	+ 6,0	+ 5,0	+ 4,9
7'	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0	
8	0,0	0,0	+ 0,5	- 0,5	- 1,2	0,0	- 1,5	- 1,2	- 0,8	- 0,9	- 0,7	- 1,0	0,0	- 0,5	- 0,5	- 0,5	- 0,5	- 1,0	- 0,2	- 0,2	0,0	0,0	- 1,0	- 0,5	
9	0,0	- 1,0	+ 0,5	0,0	- 1,0	- 0,5	0,5	- 0,5	- 0,5	- 0,7	- 0,6	- 0,3	- 0,8	- 0,2	- 0,3	- 0,6	- 0,8	- 0,6	- 0,3	- 0,2	0,2	0,0	0,0		
9'	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
10	0,0	+ 1,0	- 1,0	- 1,5	- 3,8	- 0,2	- 3,8	- 0,5	- 3,8	- 4,0	- 3,7	- 3,5	0,0	- 4,5	- 3,5	- 3,5	- 3,5	- 4,1	- 0,5	- 0,5	- 3,0	- 5,5	- 4,0	- 3,0	
11	+ 1,0	+ 0,5	- 1,0	- 1,2	- 3,1	- 0,3	- 3,1	- 0,6	- 3,0	- 3,5	- 3,0	- 1,2	0,0	- 3,0	- 3,0	- 3,0	- 2,5	- 2,5	0,0	0,0	- 1,6	- 2,2	- 2,8	- 2,0	
12	- 0,5	- 0,5	0,0	- 1,0	- 1,2	- 0,5	- 0,7	- 0,5	- 0,9	- 0,8	- 1,0	- 1,0	0,0	- 1,0	- 1,0	- 1,0	- 1,0	- 1,0	- 0,4	0,0	- 1,0	- 1,0	- 1,5	- 0,5	

C O R R I M E N T O S A N G U L A R E S

Ensayos o estados de carga

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x
1		+ 1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	+ 0,8	+ 0,4	0,0	- 0,2	+ 0,8	- 1,4		+ 0,4	+ 3,6	+ 0,2	- 0,2					
2		+ 0,8	0,0	- 1,1	- 1,1	- 1,3	- 0,7	0,8	- 0,8	- 1,6	- 1,6	+ 2,2	+ 2,2	+ 1,9	+ 0,8	- 0,5	- 0,2	- 1,7	- 1,7					
3		+ 1,0	+ 2,8	+ 2,6	+ 2,2	+ 2,2	+ 2,2	+ 0,4	+ 0,4	+ 2,4	+ 2,4	+ 3,0	+ 3,0	+ 2,4	+ 0,9	0,0	0,8	+ 2,1	+ 2,1	+ 1,1				
4		- 3,0	- 8,5	+ 2,4	+ 3,2	+ 2,8	+ 2,8	+ 3,2	- 4,3	- 5,1	- 1,1	0,0	- 0,8	- 2,1	- 1,4	+ 0,4	+ 0,6	+ 2,4	+ 1,3					
5		- 1,8	- 5,7	- 5,9	- 4,8	- 4,3	- 4,3	- 4,3	- 4,3	- 5,1	- 1,1	- 1,1	- 1,1	- 1,1	- 1,1	- 0,5	- 0,5	- 2,3	- 1,2	0,0				
5'											- 10,9	- 11,2	- 10,9	- 10,9	- 7,3	- 9,1								
6		+ 0,8	- 7,6	- 18,0	- 14,0	- 15,0	- 17,5	+ 13,0	+ 12,2	- 13,8	- 11,4					- 7,3	- 16,4	- 11,3	- 10,1					
6'		- 1,0	0,0	- 3,4	- 2,4	- 1,9	- 3,0	- 3,2	- 3,2	- 3,2	- 3,2	- 3,2	- 3,2	- 3,2	- 2,9		- 3,0	- 3,0	- 3,4	- 3,4	- 3,2	- 3,4	- 5,5	
7																								
7'																								
8		0,0	+ 5,0	+ 5,6	+ 6,4	+ 5,5	+ 5,1	+ 4,0	+ 4,0	+ 4,7	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,4	
9		+ 4,0	+ 1,7	+ 4,3	+ 3,8	+ 4,0	+ 4,0	+ 4,1	+ 4,1	+ 3,6	+ 4,2	+ 3,8	+ 4,2	+ 3,8	+ 3,8	+ 3,8	+ 3,8	+ 3,8	+ 3,8	+ 3,8	+ 3,8	+ 3,8	+ 3,2	
9'																								
10		+ 1,5	+ 2,9	+ 8,4	+ 9,2	+ 8,8	+ 8,8	+ 8,2	+ 8,2	+ 6,9	+ 9,0	+ 6,0	+ 6,0	+ 6,0	+ 6,0	+ 6,0	+ 6,0	+ 6,0	+ 6,0	+ 6,0	+ 6,0	+ 6,0	+ 4,6	
11		+ 1,4	+ 1,4	+ 9,4	+ 6,6	+ 6,6	+ 7,4	+ 5,7	+ 5,7	+ 6,6	+ 6,6	+ 6,6	+ 6,6	+ 6,6	+ 6,6	+ 6,6	+ 6,6	+ 6,6	+ 6,6	+ 6,6	+ 6,6	+ 6,6	+ 5,9	
12		- 1,0	0,0	- 1,6	- 1,6	- 0,6	- 1,0	- 0,8	- 1,0	- 1,4	- 1,4	- 1,4	- 1,4	- 1,4	- 1,4	- 1,4	- 1,4	- 1,4	- 1,4	- 1,4	- 1,4	- 1,4	+ 0,4	

Con estos datos se han dibujado las curvas de la figura 31 a, en la que se ven claramente las deformaciones correspondientes a los principales estados de carga.

Para comparar debidamente estas flechas con las deducidas del cálculo, tomando los valores de los diagramas de Eg , y Eg para peso

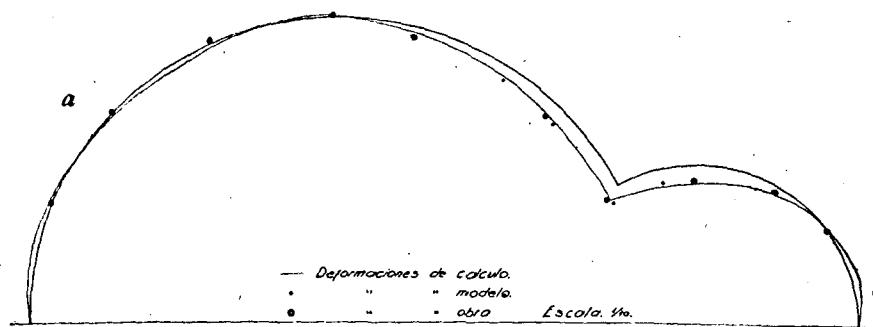


Fig. 31 a.—Diagramas deducidos experimentalmente.

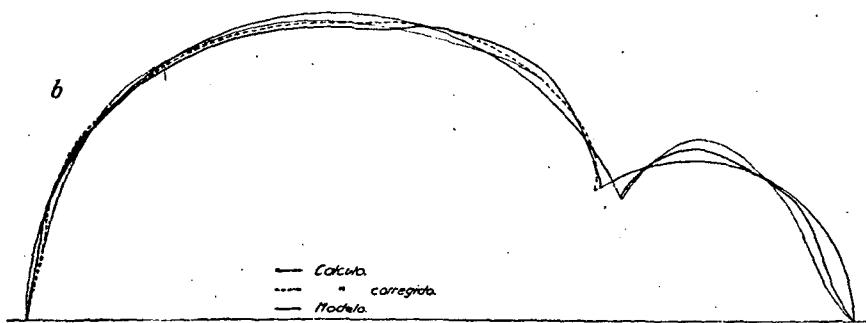


Fig. 31 b.—Diagrama comparativo de flexiones. Escala 1/10 < 500 mkg.
Fig. 31 b.—Diagramas comparativos de flexiones.

propio solamente, ha de tenerse en cuenta que el cálculo está hecho para un peso de 250 kg/m^2 , y el modelo se cargó repetidas veces con la carga correspondiente a peso y sobrecarga, que representaba 275 y 465 kg/m^2 en lámina y lucernarios, respectivamente, o sea una media de 370 kg/m^2 . Por consiguiente, las flechas de cálculo se han de multiplicar por $\frac{370}{250} = 1,28$.

Haciendo la comparación entre esta curva y la de las flechas deducidas experimentalmente, se observa que éstas son algo menores en el lóbulo pequeño, con un menor corrimiento horizontal en la gaviota, y el correspondiente aumento de deformaciones y flexiones en la zona

del lucernario alto, consecuencia natural del aumento de rigidez de estos elementos.

No había podido contarse con este efecto en el cálculo por la enorme complicación que hubiese llevado consigo la introducción de dos nuevos bordes (para los efectos del cálculo) en la unión de los lucernarios con las láminas, y la preocupación consiguiente indujo a exagerar en el modelo estas diferencias de peso, como hemos visto, para acusar mejor sus efectos en la distribución de flexiones y sus divergencias con la ley calculada, como efectivamente se logró.

Por todas estas razones consideramos conveniente trazar el diagrama de flexiones de la misma figura (31, b), obtenido de los corrimientos angulares por la conocida fórmula

$$M = E I \frac{d\theta}{R d\varphi}$$

suficientemente aproximada para estos efectos; para ello tomamos los valores:

$$E = 350.000 \text{ kg/cm}^2$$

$$I = 4.200 \text{ cm}^4 \text{ en la lámina de } 8 \text{ cms.}$$

$$I = 14.000 \text{ cm}^4 \text{ en lucernarios}$$

teniendo así en cuenta con algo de exceso la rigidez correspondiente a la sección completa del lucernario sin prescindir del hormigón tendido.

Compárandola con la de flexiones de cálculo (fig. 31 b), se observa efectivamente un aumento de la onda de flexiones a la salida del lucernario alto (en la zona inmediata al cambio de rigidez), tanto en amplitud como en longitud de la onda, y como consecuencia de ello una especie de corrimiento de las ondas siguientes hacia la izquierda.

Así, basta cortar la curva de flexiones de cálculo en el lucernario y correr toda la parte de curva a la izquierda del corte unos 15° para que los valores de la curva de cálculo así corregida coincidan casi exactamente con los deducidos de la experimentación en el modelo en toda la lámina del lóbulo grande.

En el lóbulo pequeño las leyes de flexiones coinciden de forma, si bien los valores del modelo son sensiblemente menores que los de cálculo.

Como consecuencia de ello, en la obra se prolongaron las armaduras del lucernario, haciéndolas entrar en más extensión de lámina, y se

reforzó el espesor de ésta en la zona contigua al lucernario para hacer más suave el paso de una sección a otra.

Las deformaciones longitudinales no pudieron medirse en la gaviota misma porque, dado lo exiguo de los espesores (8 mm.), no se podían introducir auscultadores embebidos, ni emplear tampoco, como ya se ha dicho, extensómetros en suficiente número, dada la premura de tiempo con que fué necesario trabajar y que no permitía fabricar estos aparatos; limitándose a instalar un auscultador de superficie disponible por la parte superior de la gaviota sobre plots empotrados en la misma en el angosto espacio que dejan las armaduras. Dada la disposición del aparato, los plots sobresalían necesariamente 30 milímetros, y, por tanto, la línea sobre la cual se medía la dilatación quedaba a 70 milímetros por encima de la arista de la gaviota, a poca distancia ya de la fibra neutra. Como consecuencia de ello, las deformaciones en esa línea eran muy pequeñas, oscilando todas las lecturas entre 30 y 80 milonésimas, lo que representa cargas siempre en tensión menores de 1,5 kg/cm² en la armadura, sirviendo, por consiguiente, únicamente para comprobar que el eje neutro estaba ligeramente por encima de la línea de auscultación, de acuerdo con el cálculo.

El ensayo térmico, que se hizo elevando la temperatura de la habitación con fuego lo más rápidamente posible, una vez puesto en carga el modelo y dejándole enfriar después, arrojó los siguientes resultados:

	T a r d e										Ma-ñana
Horas.....	6	6,20	6,40	6,50	7,10	8,25	8,45	8,55	9,0	9,10	9,0
Temperatura.....	16°	23	25	26	24	41	35	30	28	26	14°
Deformaciones.....	340	345	360	365	375	510	465	450	445	430	306

Las temperaturas corresponden a la parte alta del interior del modelo, y las deformaciones son las dilataciones longitudinales en el auscultador de la gaviota, leídas en milonésimas.

El valor medio del coeficiente de dilatación, como se ve en la figura 32, es de 8,2 cm., μ por metro y grado C.

Durante todo este conjunto de ensayos el modelo resistió perfectamente sin acusar fatiga y con deformaciones sensiblemente elásticas. Desde los primeros ensayos del día 14 se observó una pequeña grieta

horizontal en la cabeza del pilar central de la palizada de apoyo opuesta a los microscopios, debida probablemente a algún defecto en la colocación de la armadura; otras en el arranque superior de las cuatro primeras diagonales tendidas del lucernario alto, en el lado de los microscopios; con abertura máxima a toda carga de cinco décimas de milíme-

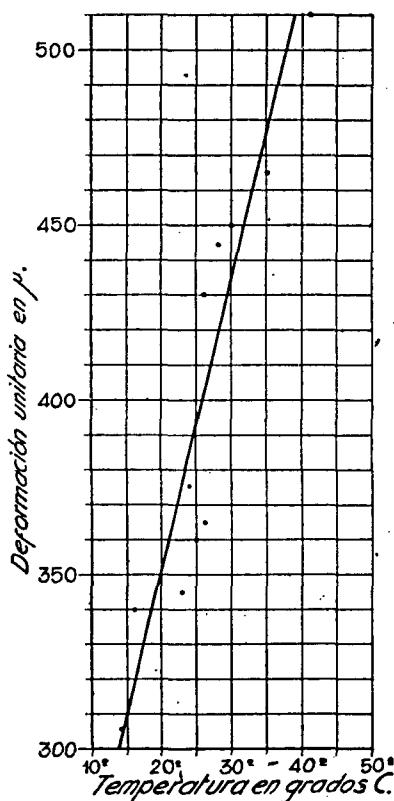


Fig. 32.—Diagrama de dilataciones térmicas.

tro y comportamiento elástico, acusándose muy poco por la cara interior. Por último, una fisura apenas perceptible en el faldón del lóbulo grande, coincidente sensiblemente con el eje por la cara externa.

Ambas aparecieron en zonas de tensión con fuerte cuantía de armadura, en las que, dadas las condiciones del material, su presencia era obligada teóricamente, y, por otra parte, el no llegar la del faldón a aparecer por la cara interior y el reaccionar elásticamente las de los lucernarios bajo la acción de cargas repetidas superiores a las normales

de la obra, no permitía considerarlas como síntoma de defecto de resistencia.

Sin embargo, y como consecuencia de todo ello, se reforzaron las armaduras de estas diagonales en obra sensiblemente al doble de sección de la proyectada, dado que el coste de este refuerzo resultaba insignificante en el conjunto de la obra; se aumentó a tres metros la entrega de estas armaduras con la lámina contigua, y se reforzó o prolongó el aumento de espesor en la unión de la lámina con el lucernario, entendiéndose que, por lo demás, las observaciones efectuadas ratificaban las disposiciones y secciones adoptadas en el proyecto.

CAPITULO VI

EJECUCIÓN Y COMPORTAMIENTO DE LA OBRA

Cimbra, armaduras y hormigonado.

Simultaneando con la ejecución de las estructuras de los graderíos y palcos colgados, se fueron armando los castilletes de la cimbra con arreglo al alzado de la figura 33.

Los pies derechos apoyaban sobre los pilares de la estructura de cancha y se levantaban debidamente arriostrados hasta 2,0 metros por encima del plano de arranques, a cuya altura se establecieron las cajas de arena en número de nueve por fila y veintiséis filas.

Las cerchas o camones de apoyo de la tabla del encofrado se serraron en taller, previo trazado en montea, y su perfil variaba por tramos de cinco metros a lo largo de la generatriz para irse amoldando a la ley de variación parabólica de las flechas a lo largo de aquélla; las pequeñas diferencias o errores resultantes se corrigieron con cuñas al hacer la nivelación final del encofrado antes del hormigonado.

Las cajas de arena hubieran podido reducirse tanto en tamaño como en número, por tratarse precisamente de una cubierta muy ligera, resultando cargas sobre la arena de 3 kg/cm^2 solamente. Las cajas eran de madera con abrazaderas de hierro, y el émbolo de descenso, de 30 centímetros de diámetro, tenía un recorrido máximo o altura de arena de 20 centímetros.

La arena se colocó cuidadosamente apisonada y además se asentaron con pisón pesado los puntales sobre las cajas, y se clavaron a tacos de

tope para evitar todo descenso durante el hormigonado, quitándose estos tacos al ir a comenzar la operación de descimbramiento.

Las armaduras se colocaron en la forma usual atando unas a otras con alambre sin dificultades especiales; las armaduras delgadas se coloca-

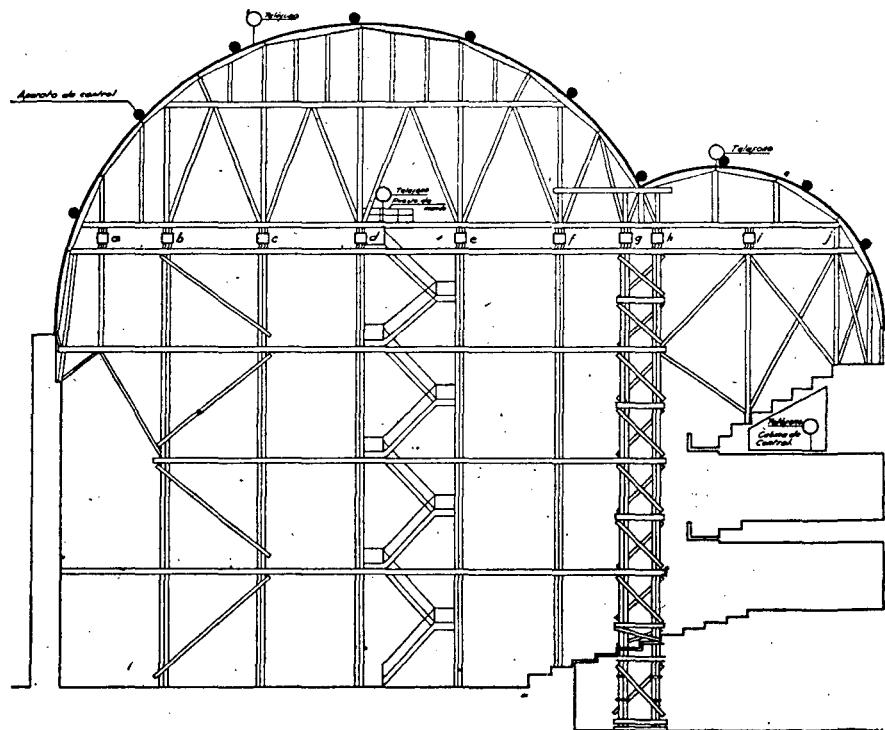


Fig. 33.—Alzado de la cimbra.

ron enterizas, y las de gran diámetro se ampalmaron con ganchos solapados, contrapeando debidamente los empalmes.

No era posible utilizar este sistema de empalme para el cordón de gaviota, cuya armadura está formada por un paquete de 16 cuadrados de 50 mm., alojados en muy reducido espacio. En la figura 36 se ve la distribución de los empalmes y cortes de barras.

Estos empalmes se hicieron con soldadura eléctrica por la casa Esab Ibérica, S. A., haciendo la soldadura en V previo corte en bisel de las barras (fig. 37).

Se comenzó el trabajo empleando electrodo OK 47 con una carga de rotura de 48-51 kg/mm² y un alargamiento de 28 por 100; pero la

necesidad de aumentar la marcha de los trabajos, que venía limitada por esta operación, y la falta de suficiente número de operarios de toda confianza, obligó a sustituir este tipo de electrodo por el OK 45 con carga de rotura y alargamiento de $47\text{-}50 \text{ kg/mm}^2$ y 12 por 100, respectivamente.

Se fué particularmente exigente en la elección de los soldadores, ob-

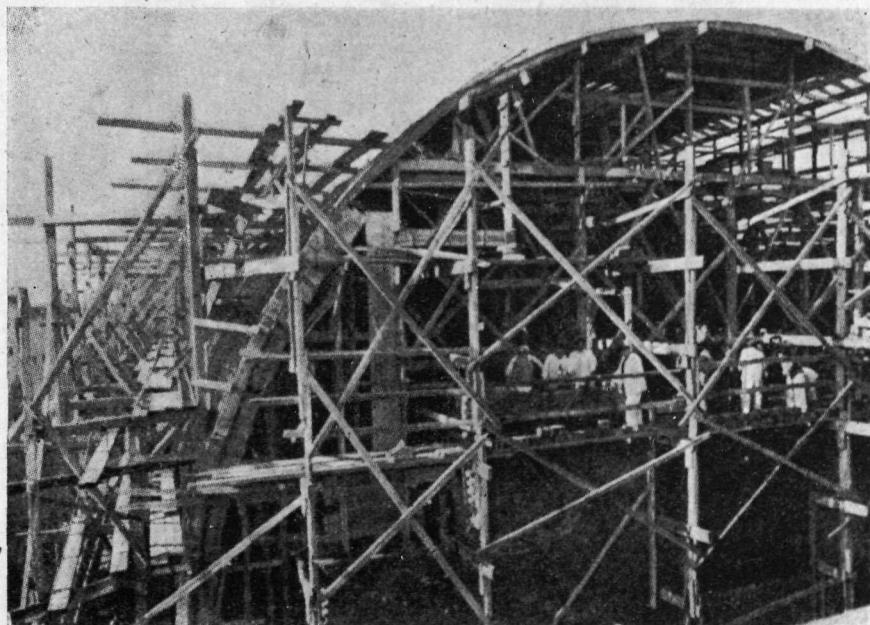


Fig. 34.—Vista de la cimbra en construcción.

teniéndose en las diferentes pruebas roturas de las barras por fuera de las soldaduras, viéndose con ello que no debía haber preocupación en la cuestión de resistencia; y en cuanto a la disminución del alargamiento con el cambio de electrodo, el hecho de no haber cargas alternativas ni flexiones o esfuerzos normales en las barras después de soldadas, indujo a aceptarlo también sin inconveniente.

El hormigón, como se ha dicho, fué de cemento fundido con una dosificación media de 300 kg. de cemento por metro cúbico. El garbancillo de San Fernando y la arena de Manzanares se proporcionaron experimentalmente para obtener la máxima compacidad, y el agua para obtener una consistencia plástica favorable al apisonado.

La elevación de temperatura por fraguado, aunque bien apreciable,

fué pequeña por lo reducido de los espesores, y sin importancia en la época fría en que se hizo el hormigonado.

Este se hizo en seis días, siguiendo para las juntas las líneas indi-

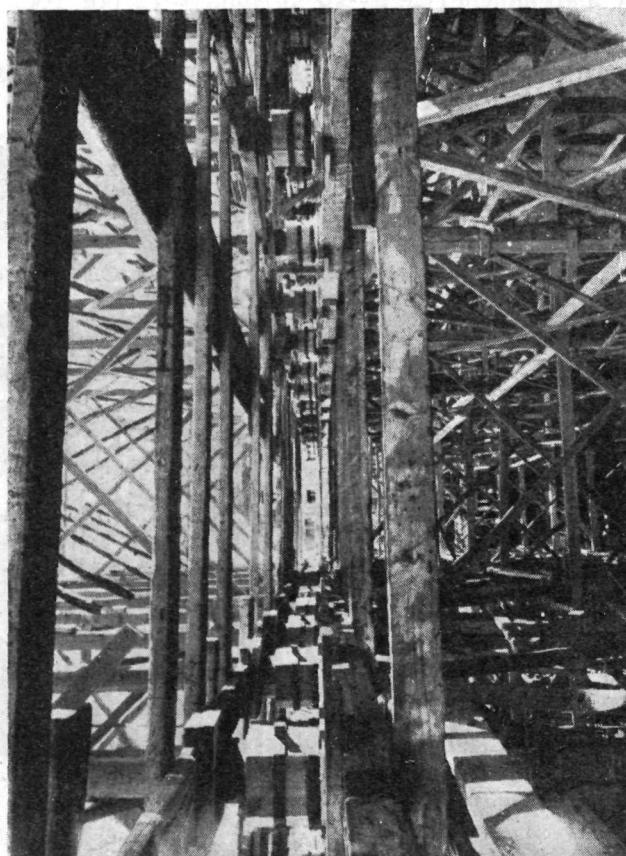


Fig. 35.—Vista de la cimbra a la altura de las cajas de arena.

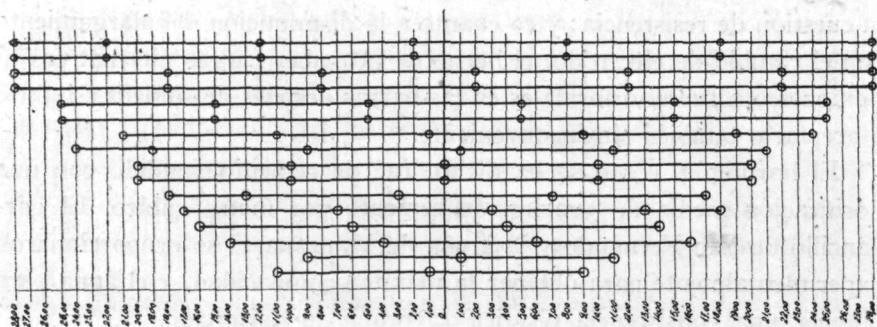


Fig. 36.—Distribución de empalmes en el cordón de la gaviota.

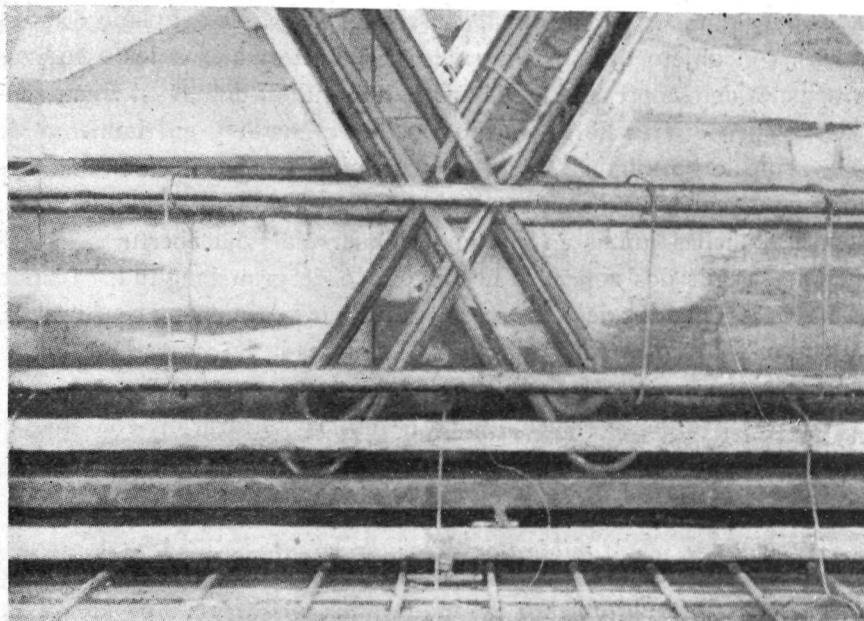


Fig. 37.—Vista del cordón de la gaviota.

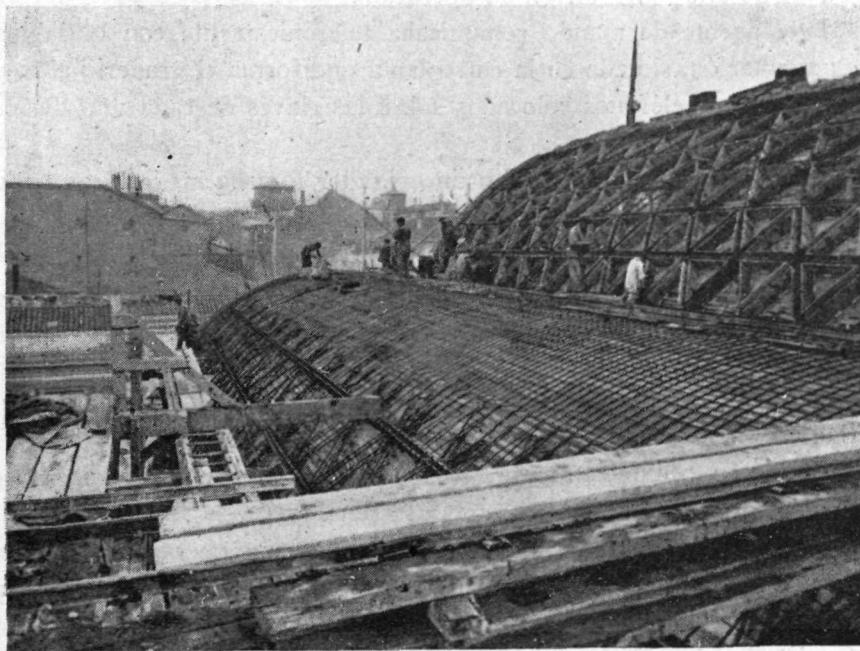


Fig. 38.—Vista parcial durante la colocación de armaduras.

cadas por puntos en la figura 18, *a*, trazadas a la vista del plano de isostáticas, con objeto de dejarlas en lo posible normales a los esfuerzos principales de compresión, disminuir la longitud de juntas en zonas tendidas, y permitir la libre contracción de fraguado y enfriamiento de cada zona de hormigonado, ciñendo a límites prudenciales sus dimensiones para evitar agrietamientos por contracción dentro de cada zona; además, aquellas juntas en que podía temerse alguna abertura de fraguado por unir dos zonas de hormigonado de gran longitud, o fondo normal a la junta, se dejó ésta con una anchura de unos 20 centímetros, los cuales se hormigonaron después de terminada la contracción de las zonas contiguas.

Gracias a estas precauciones no se observó fisuración en ninguna junta ni antes ni después del descimbramiento.

Maniobra de descimbramiento.

Para el descimbramiento se montó una plataforma o puente de mando a la cota 5 sobre arranques (fig. 33), que quedaba a 18,50 metros del piso de la sala y a 7 metros por debajo de la clave de la cubierta, para desde allí poder dirigir la operación.

Este puente de mando comunicaba telefónicamente con la cabina de auscultación, situada en la entreplanta que forma el graderío alto, y con otros dos teléfonos colocados sobre las claves de cada uno de los lóbulos.

En la cabina de auscultación un operador tomaba las lecturas de la instalación de control y las observaciones que le comunicaban los dos observadores situados sobre la cubierta, y con todas ellas un delineante apuntaba las cargas de trabajo y dibujaba las curvas de descenso o elásticas de siete directrices igualmente espaciadas a lo largo de toda la cubierta (fig. 40), de tal modo que en el puente de mando se conocían periódicamente todos estos datos y se podían ordenar con toda seguridad las maniobras de descenso, que iban a su vez dirigidas por tres ayudantes en comunicación directa con el puente de mando a través de las pasarelas que unían las cajas de arena.

El gran número de estas cajas hacía que estas operaciones fueran lentas, a pesar de disponer de cien peones, con lo que cada uno no tenía que manejar más que dos cajas. Cada peón disponía de bolsas de litro y medio de capacidad, en las que iba recogiendo la arena que sacaba de la caja cada vez que recibía la orden correspondiente, y una vez

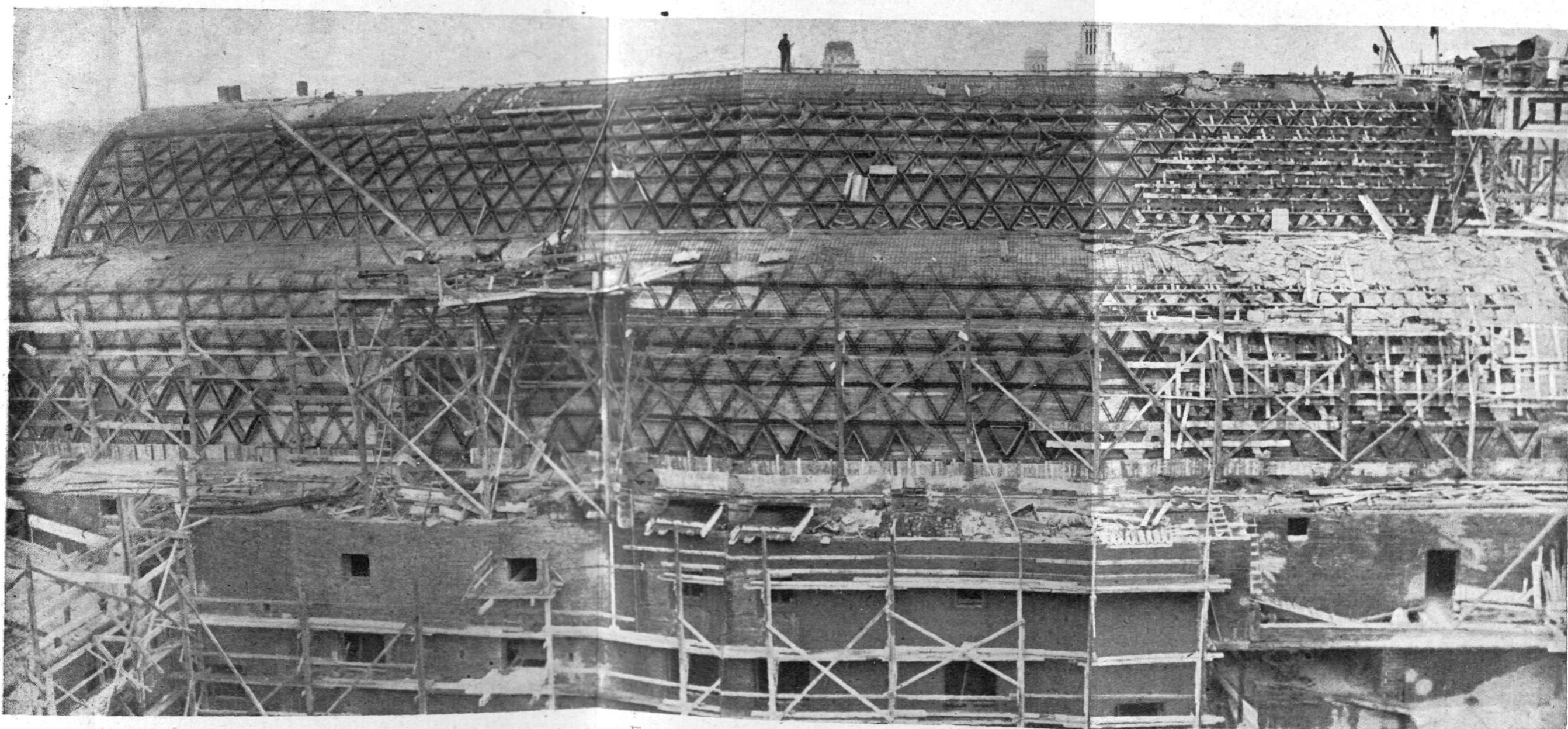


Fig. 39.—Vista general en período de hormigonado.

comprobado por el jefe de equipo que todas las bolsas estaban llenas, se separaban todas las cajas golpeándolas con maza para ayudarlas a des-cender, pues la escasa carga de trabajo que soportaban y el estar los puntales unidos por los arriostramientos dificultaban mucho y retrasaban el descenso.

La operación se hizo en jornada y media de trabajo, y en el cuadro siguiente detallamos las cantidades de arena en litros sacadas de las diferentes filas de cajas indicadas en la figura 33 hasta cada una de las horas señaladas.

Filas de cajas	H O R A S													
	10	11	12	13	14'2	15	15'5	16	16'5	17	9	9'5	11	
a	1	2	3			6								
b	1	2	3			6								
c	1	2	3			6								
d	1	2	3			6								
e				1	2		5			6,5	8			
f				1	2			3,5	5	6,5	8	10		
g				1	2			3,5	5	6,5	8	10		
h				1	2			3,5	5	6,5	8	10		
i				1	2			3,5	5	6,5	8	10		
j														
Total.....														

Como se ve por este cuadro, se adelantó primeramente el descenso de los faldones del lóbulo grande con relación al de la gaviota, y ello, más que por razones mecánicas, por no tener que atender simultáneamente a la operación de tantas cajas de arena, y poder así atender mejor al detalle de cada operación.

Deformaciones observadas.

Las flechas o corrimientos radiales y tangenciales registrados por la instalación, tanto durante el descimbramiento como durante el período de carga, son los siguientes, correspondiendo la numeración de los puntos a la señalada en la figura 40.

DEFORMACIONES DE LA DIRECTRIZ EN MILIMETROS

Dia 18

Puntos	T	N	T	N	T	N	T	N
	Hora 11,30		12,10		3 tarde		5,30 tarde	
10							-3	-9
20							-5	-16
30			-4	-11				
40			-10	-12			-1	-17
50			-3	-10			1	-14
60							0	-10
70							0	-2,3
			12,15					
11	0	0					-1	-3
21	0	0					-1	-6
31	1	-1	2	-2	9	-7	2	-6
41	1	-1	0	-3	8	-9	2	-18
51	0		4	-1	16	-6		-6
61	0	-1					1	-6
71		0					1	-3
			11,10					
12	-1	2					3	-3
22	-2	2					11	-7
32	-1	6	2	9	9	3	10	-5
42	-2	5	1	8	9	-2	10	-12
52	-1	3	-2	6	9	-2		-10
62	-1	2					6	-7
72	-2	0						
			11,20		3,5 tarde			
13	4	3			2	7	3	5
23	2	3			8	10	4	4
33	2	3	2	4	11	13	15	5
43	1	5	2	6	11	15	12	9
53	19	4	20	5	29	13	31	10
63	1	2			6	8	10	6
73	2	1			6	4	8	4
			11,25	12,05				
14	1	-9			0	5	0	19
24	0	-2			-20	21	2	53
34	-2	-2	-1	-2	2	26	1	61
44	-3	-3	-2	-2	2	28	-5	68
54	-2	-1	+9	0	3	2	-3	59
64	0	0			2	18	0	43
74	0	0			-2	4	1	19

Durante la descarga de las tres primeras cajas de arena (bóveda grande). Final de esta descarga.

DEFORMACIONES DE LA DIRECTRIZ EN MILIMETROS
(*Conclusión*)

Día 19				Día 20				Deformación tangencial, T.	Deformación normal, N.
Puntos	T	N	T	N	T	N	T	N	
Hora 12,00				Hora 8,30				Hora 8	Hora 12
10	- 3	- 7	- 3	- 14					
20									
30	- 2	- 14	- 3	- 14					
40	1	- 15	2	- 15	2	21			
50	- 2	- 13	5	- 13					
60	0	- 9	0	- 12					
70	0	- 7	0	0					
11	- 1	0	1	- 2					
21	3	1	5	- 3					
31	5	0	8	- 5					
41	5	- 1	7	- 7	9	- 6			
51	4	1	4	- 3					
61	1	0	1	- 3					
71	- 1	0	- 1	3					
12	5	- 8	10	- 2					
22	6	- 15	18	- 7					
32	21	- 16	14	- 6					
42	14	- 20	15	9	5	- 13			
52	17	- 20	12	- 11					
62	10	- 13	11	- 5					
72	1	- 6	0	- 2					
Sobrecarga en la bóveda grande									
Día 19									
				3,0 tarde					
13	2	- 5	10	- 7					
23	15	- 14	35	- 18					
33	17	- 19	31	- 23					
43	13	17	34	21	14	- 7	16	- 1	
53	30	- 12	42	- 17					
63	12	- 8	14	- 11					
73	6	- 1	8	- 2					
14	- 3	37	- 2	39					
24	0	78	- 3	81					
34	4	97	0	101					
44	4	105	5	104	- 12	105	- 6	105	
54	1	91	- 13	103					
64	- 2	64	0	67					
74	2,4	27	- 0	28					
Final de las demás descargas.				Descimbramiento total.				Sobrecarga total.	

D i a 18

Puntos			Hora 5,30 tarde		Hora 8,30		Hora 9,30		Hora 10,05
43					19	9	15	7	24
44					3	67	— 1	75	1 80
15			0	19	— 8	28			
25			— 1	41	— 20	41			
35			— 15	51	— 20	53			
45			— 26	63	— 34	65	— 30	72	— 32 82
55			— 18	45	— 20	42			
65			— 10	25	— 18				
75			— 3	3	— 10	5			
Hora 3,35 tarde									
16	10	17	26	34					
26	20	23	48	52					
36	27	27	60	64					
46	25	29	58	68	62	71	65	77	72 84
56	28	25		56					
66	21	21	43	43					
76	12	11	23	24					
17	8	19	18	41					
27	9	28	24	66					
37	12	33	38	79					
47	12	28	31	81	29	86	34	92	36 104
57	13	31	28	73					
67	12	24	18	53					
77	6	13	7	28					
3,50 tarde									
18	— 1	10	1	21					
28	5	15	9	32					
38	4	18	6	40					
48	3	21	4	36	5		4	45	4 50
58	4	13	3	36					
68	— 3	12	2	22					
78	0	6	2	14					

Final

Durante la descarga de las tres primeras cajas de arena.

Durante el vaciado de las demás cajas

de arena.

Día 19

Puntos	Hora 10,40	Hora 11,15	Hora 12	Hora 12,30	3,05 tarde	Hora 8,00	Hora 12,00								
43	23	3	18	6	17	16	13	17	34	21					
44	5	85	2	95	—	4	104	4	105	5	108				
15						0	45	—	15	43					
25						—	25	74	—	30	80				
35						—	15	97	—	35	104				
45	—	39	87	—	36	96	—	36	104	—	33	109	41	117	
55							—	16	84	—	27	93			
65							—	15	58	—	22	61			
75							—	10	18	—	10	18			
16								38	46	37	49				
26								61	79	67	78				
36								78	91	84	97				
46	73	88	73	91	76	95	77	97	84	102		87	108	90	111
56							62	90	62	86					
66							57	58	59	61					
76							23	32	28	33					
17							19	55	22	59					
27							28	91	32	97					
37							35	109	37	117					
47	40	106	37	108	38	110	38	111	41	119		45	127	45	135
57							35	98	39	104					
67							27	71	27	75					
77							11	37	13	38					
18							2	26	—	3	27				
28							6	40	5	41					
38							5	46	3	48					
48	3		3	41	6	47	5	47	10	49		3	53	2	55
58							9	41	7	44					
68							1	29	2	31					
78							5	14	5	16					

Descimbramiento total.

Con sobrecarga.

No pudieron hacerse las lecturas de la generatriz 5.^a previas a la operación de descimbramiento, por no estar colocado el hilo hasta las tres de la tarde del día 18, por lo que se supuso en esa hora un descenso anterior igual a la media de los de las generatrices contiguas.

Por lo demás, y aparte del punto 20, cuyas lecturas no pudieron hacerse, todas las lecturas se hicieron sin dificultad, limitándose en muchos casos a las de la directriz central, para mayor seguridad en las lecturas, dada la rapidez con que habían de hacerse para seguir la marcha del descimbramiento.

Las lecturas de las generatrices 1, 2 y 3 el día 19 venían algo influenciadas por el viento, sobre todo las horizontales; pero a pesar de ello se hacían sin gran inconveniente.

Las lecturas en los auscultadores se detallan a continuación:

Posición	Número de posición	Número del auscultador	Lecturas en micras			
			Preliminar	Descimbrado	Sobre-carga	Final
Borde lóbulo menor.....	491	95	—	—	—	975
	492	96	260	240	310	260
Borde lóbulo mayor.....	401	83	—	—	—	70
	402	84	275	430	485	430
Centro de la gaviota	461	88	410	500	585	510
	462	89	—	—	—	—
Laterales de la gaviota...	360	90	260	290	370	310
	560	87	355	405	435	400
Clave lóbulo menor.....	471	82	450	110	70	105
	472	94	415	95	45	85
Clave lóbulo mayor.....	431	183	425	55	25	55
	432	184	430	155	110	140
Diagonales tendidas.....	751	91	285	250	300	260
	152	86	—	—	—	—
Diagonales comprimidas..	752	81	335	110	105	105
	151	85	345	90	70	85

La observación, muy minuciosa, de la obra durante toda la operación de descimbramiento acusó los siguientes fenómenos:

Se abrió, como era de esperar, la articulación de la gaviota sobre los pilares por la cara exterior de éstos, con aberturas de 1,5 a 2 milímetros. No abrieron los demás pilares.

Se observaron lo mismo que en el modelo, pero con menor intensidad, fisuras de unas cinco décimas de abertura en el arranque superior de las barras tendidas del lucernario alto y zona contigua de la directriz extrema o marco de rigidez. Estas fisuras aparecían solamente por la cara superior, viéndose claramente su rápido amortiguamiento al alejarse de ésta.

Fisuras análogas aparecían en la lámina del lóbulo menor, simétricas con aquéllas; es decir, a unos tres metros de la gaviota, hacia los extremos de ésta, con inclinación de 45° con relación a ella y solamente por la cara superior.

Todo ello, y particularmente esto último, indica que no se trata simplemente de un alargamiento de la armadura a esfuerzo cortante, sino de una combinación de estos esfuerzos cortantes con los fenómenos de torsión. Efectivamente, basta observar las curvas de deformación de las directrices para comprender que el paso de éstas a la directriz rígida del extremo se hace necesariamente con fuertes torsiones en la zona de la gaviota, torsiones que, aunque no sean necesarias para establecer el equilibrio tal como se ha estudiado, suman sus deformaciones a las deducidas de este estudio; y como las orientaciones de los máximos alargamientos debidos a la torsión y al esfuerzo cortante son coincidentes en la cara superior y normales en la inferior, queda justificado el que se produzca fisuración en aquélla y no en ésta; mientras que si se tratara de esfuerzos cortantes solamente, habría de producirse la grieta en todo el espesor, y si se tratara de torsiones puras, deberían aparecer en las dos caras grietas en direcciones normales entre sí.

Tiene esto importancia porque indica que la gran diferencia de flexibilidad a que se ha llegado en esta lámina entre la gaviota y el resto de los lóbulos no podrá sobrepasarse mucho en nuevas obras sin tener en cuenta estos fenómenos de torsión.

Por último, apareció también una fisura longitudinal en la mitad central de la generatriz de clave del lóbulo grande; en realidad no coincide exactamente con la clave, sino corrida unos 5° hacia el lado contrario de la gaviota, y aparente solamente por la cara superior. Evidentemente es consecuencia de la concentración de flexiones producida

en esta zona, como ya se observó en el modelo, por exceso de peso y de rigidez del lucernario; hay que hacer notar que el aumento de rigidez se extendía no solamente al lucernario, sino a la parte contigua de la lámina, por haber prolongado en esta parte el refuerzo de las armaduras de las diagonales tendidas como consecuencia de las observaciones hechas en el modelo, y el exceso de peso del lucernario se aumentó mucho más durante la última parte del descimbramiento, al quedar colgada la cimbra de esta parte por agarrarse el encofrado al lucernario y a la parte de lámina inmediata a la gaviota por efecto de su mayor concavidad.

Las lecturas del período siguiente al descimbramiento en el telecorrimetro no pudieron hacerse porque las incidencias naturales de la obra, y sobre todo de una obra llevada a la forzada velocidad de ésta, rompieron diferentes veces los hilos y conductores de la instalación y obligaron a retirarlos hasta la colocación del corcho y la uralita, y aun después de esto el arranque de varias chapas de uralita por un ciclón, con la rotura y desplazamiento consiguientes de algunos elementos, y, finalmente, el arranque de toda la instalación de la cabina de auscultación en los primeros momentos de confusión de la guerra, por haber sido denunciada como una estación transmisora de radio clandestina; han venido a cortar con triste epílogo el esfuerzo que la técnica había puesto en esta obra.

Solamente ha podido observarse una tendencia a aumentar la curvatura de clave con descenso de la gaviota, coincidente con las elevaciones de temperatura; pero no han podido hacerse, como decimos, observaciones correlativas con garantías de seguridad sobre la cubierta, por las dificultades de la guerra, la cual, por otra parte, ha sometido la obra a una nueva prueba con los bombardeos próximos, que han tenido que producir necesariamente fuertes sacudidas y oscilaciones sobre todo el edificio.

Correlación entre los resultados teóricos y los reales.

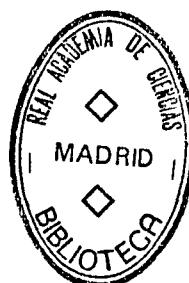
En el cuadro siguiente puede apreciarse la correspondencia entre las cargas de trabajo medidas en la obra con los auscultadores "Icon" y las cargas deducidas por el cálculo.

Las cifras medias que se indican como cargas reales se han deducido suponiendo entre las lecturas iniciales (a las pocas horas de hormigonar)

y las de descimbramiento una contracción de fraguado de 200 micras, y multiplicando luego las diferencias de lecturas por un coeficiente de elasticidad de 300.000 kg/cm² en las de compresión, y de 2.100.000 kg/cm² en las de tensión.

De este modo, y considerando solamente las medias de las lecturas correspondientes a cada pareja de aparatos, se reducen las divergencias, acusándose cargas comprendidas entre un 15 y un 25 por 100 menores que las correspondientes de cálculo en cada punto, excepto en las diagonales tendidas, donde la carga real es menor. Es probable que el valor E = 300.000 para el hormigón debiera reducirse a 250.000, y entonces las cargas resultantes serían todavía menores.

P o s i c i ó n	N ú m e r o de los auscultado- res	C a r g a s r e a l e s			C a r g a t eó- r i c a t o t a l
		D e s- cimbrado	Sobrecarga	T o t a l	
Borde del lóbulo menor.....	96	3,6	1,5	5,1	5,6
Borde del lóbulo mayor.....	84	7,0	1,0	8,0	8,8
Centro de la gaviota.....	88	6,0	1,5	7,5	8,0
Laterales de la gaviota.....	90-87	4,5-5,0	1,5-0,5	5,7	7,5
Clave del lóbulo menor.....	82-74	42-6	12-15	37,5	51
Clave del lóbulo mayor.....	183-184	21-22	9-14	33	35
Diagonales tendidas.....	91	1,2	1,0	2,2	4,2
Diagonales comprimidas.....	81-85	7-15	6-15	14,7	25



Faltan las lecturas correspondientes a cuatro auscultadores, que, unos por rotura de cable durante el hormigonado y otros por avería del aparato, no dieron lectura.

Para hacer la comparación de las cargas de flexión no podemos deducir éstas de los corrimientos angulares como se hizo en el modelo, por no disponer de clinómetros para estas observaciones, y limitamos, por consiguiente, la comparación al estudio de los corrimientos lineales de la directriz media.

Para ello se han dibujado en la figura 40 los corrimientos reales observados durante la sobrecarga de prueba y los observados en el modelo, juntamente con la curva de corrimientos teóricos, deduciendo éstos

de los diagramas de Eg y Eg correspondientes a peso propio solamente, multiplicándolos por 1,5 para tener en cuenta el efecto de la sobrecarga, y tomando para E el valor de 250.000 kg/cm².

La simple vista de la figura basta para acusar la perfecta correspondencia entre los valores acusados por el modelo y los correspondientes a la obra, y la proximidad de todos ellos a la curva de cálculo, de lo que se separan solamente para marcar una pequeña disminución de las flechas en el lóbulo pequeño con el correlativo aumento en las del lóbulo grande a la salida del lucernario alto, provocado por la tantas veces indicada diferencia de rigideces y de pesos de estas zonas con el resto de la lámina.

CAPITULO VII

CAUSAS Y PROCESO DEL HUNDIMIENTO

Durante la guerra, y particularmente en la primavera de 1937, el edificio soportó varios impactos, dos de los cuales produjeron importantes aberturas en la bóveda, con amplios desplazamientos permanentes.

Para seguir el orden cronológico con que venimos desarrollando esta Memoria, incluimos a continuación el informe del autor, presentado como resultado de una primera visita hecha a la obra después de la liberación.

INFORME

“Después de girar una visita a la cubierta del Frontón Recoletos y de recoger de “Investigaciones de la Construcción, S. A.” los datos y el historial de los aparatos colocados y mediciones hechas sobre la cubierta, podemos detallar los siguientes puntos:

En la visita no hemos podido hacer otra cosa que observar la parte visible del hormigón desde el interior del edificio, no habiendo podido observar ninguna fisuración de tipo estructural. Claro es que está recubierta la mayor parte de la bóveda interiormente por el corcho; aun cuando éste se ha desprendido en una gran parte, no puede simplemente con la inspección ocular que hemos hecho asegurarse que no existe alguna fisuración que no pueda apreciarse desde abajo.

Como seguramente la Sociedad tendrá el propósito de reparar tanto el corcho interior como la uralita y vidriería, esperamos que entonces se pueda hacer una inspección completa de la estructura.

Según los datos recogidos, han caído sobre la bóveda algunas bombas incendiarias de poco peso, que, naturalmente, no han producido efectos perjudiciales. Han chocado contra el faldón grande de la cubierta dos obuses, que han producido orificios de penetración importantes. Aparte de esto, se observan también algunos impactos de cañón sobre los muros del edificio, y éste ha tenido que soportar seguramente vibraciones u oscilaciones de importancia menor por efecto de otras explosiones producidas en las proximidades de la obra.

Adjuntamos las fotografías obtenidas de uno de los impactos, en las que se ven claramente cómo por efecto del choque se ha deshecho y desprendido el hormigón, dejando ligeramente deformadas las armaduras en toda esa zona y con algunas barras cortadas incidentalmente; es el tipo corriente de destrozo producido en una losa de hormigón armado por efecto de un impacto de este tipo.

No podemos apreciar todavía si la onda explosiva del obús al estallar se ha producido con centro interior o exterior a la lámina, aun cuando más bien parece lo primero.

De todos modos, la bóveda tiene que haber sufrido una onda u oscilación muy importante, que desde el punto del impacto se ha transmitido al resto de la bóveda, con los efectos anormales consiguientes a la curvatura de la misma y al cambio de rigidez que existe al llegar al lucernario.

Antes de seguir adelante en el análisis de los probables efectos de estos choques vamos a indicar lo que hemos podido obtener sobre las investigaciones efectuadas con la instalación de control. Retirados los aparatos de medida y arrancados los hilos y conexiones correspondientes en el verano de 1936, no ha sido posible continuar las lecturas de los auscultadores ni de la mayor parte de los flexímetros colocados sobre la lámina. Solamente han podido hacerse lecturas durante largos períodos de la guerra del flexímetro colocado en la gaviota y de la pequeña fisura longitudinal que apareció en la clave durante el descimbramiento.

Posteriormente al cañoneo de la obra se trató de rehabilitar también los flexímetros correspondientes a las generatrices de clave y borde alto del lucernario, pero no pudieron continuarse las lecturas por las dificultades inherentes a la guerra y a la situación social.

La fisura de clave que, como decimos, se observó en el descimbramiento está, a nuestro juicio, producida por la desigualdad de carga y principalmente de rigidez entre el lucernario y la lámina, desigualdad

y rigidez que producen una localización de flexiones en estas fibras próximas a la clave. Durante todas las pruebas de sobrecarga que se hicieron, la fisura se comportó normalmente, inclusive cerrándose, como es lógico, bajo la acción de la carga de nieve en la bóveda grande.

Los diagramas de los corrimientos obtenidos con los flexímetros completados a sentimiento en las partes cuyas lecturas faltan, acusan claramente una deformación de la estructura, que corresponde netamente a las características de las deformaciones lentas del hormigón, tan estudiadas en estos últimos años. Las deformaciones se producen principalmente de mayo a octubre, es decir, correspondiendo a los períodos de menor grado higroscópico del ambiente, y van amortiguándose de año en año. Los movimientos en la fisura siguen, como es lógico, una ley análoga a la de los corrimientos de la gaviota. Como consecuencia del descenso de gaviota y de giro alrededor de la clave se produce también un descenso en la generatriz correspondiente a la parte alta del lucernario; pero, por desgracia, no se tienen datos de los movimientos en este punto antes y después de sufrir los efectos del obús.

Aun cuando con los datos de que hoy disponemos no se pueden conocer con exactitud los movimientos de las distintas generatrices con relación a la posición después del descimbramiento, por estar cubierta por la uralita, parece claro que el corrimiento radial de la generatriz superior del lucernario es mayor que el corrimiento de la gaviota, correspondiendo esto a una pérdida de curvatura del sector comprendido entre clave y gaviota, y también parece, por las observaciones visuales hechas por los técnicos que hacían las medidas de los flexímetros durante la guerra, que este fenómeno se produjo principalmente bajo la acción del impacto, ya que hasta entonces no lo habían observado, y fué lo que les indujo a proponer la colocación de nuevos flexímetros en esta línea.

No tiene nada de extraño que al prolongarse la onda de choque hayan tenido que producirse movimientos no sólo verticales, sino también horizontales, en la clave, con tendencia a aproximar y separar alternativamente la clave de la gaviota. Estos esfuerzos son muy difíciles de calcular, pero pueden ser importantes, ya que la delgadez de la lámina y el ímpetu, no sólo del choque, sino de la onda explosiva, ha podido muy bien producir oscilaciones de varios centímetros, transmitiéndolas a lo largo de la lámina como en una cuerda vibrante y rebotando, por así decir, contra la zona más rígida del lucernario y gaviota; pueden haberse producido, por consiguiente, deformaciones plásticas en el hormigón y más particularmente en el hierro, tanto en la fisura de clave como en

las diagonales tendidas del lucernario, por estar el hierro en estas secciones trabajando ya a una carga fuerte de tensión con una sección de hormigón pequeña, y, por consiguiente, producirse la fisuración del hormigón aun en trabajo normal del acero, sin representar ello defecto ni debilitación de la obra; pero, naturalmente, la probabilidad de este fenómeno y esta fisuración ha tenido que ser enormemente mayor durante los momentos inmediatos al choque.

Consecuencia de ello puede ser que la generatriz alta del lucernario bajo la acción de estas oscilaciones haya sufrido deformaciones de carácter permanente, que, unidas a las propias de la deformación lenta del hormigón, hayan producido el descenso que se observaba.

Hasta aquí lo que hemos podido observar. Veamos ahora lo que cabe suponer y hacer: En primer lugar, debe tenerse presente que, como acabamos de indicar, la obra durante el choque y en los instantes consecutivos ha tenido que soportar sobrecargas de carácter dinámico que hoy no existen, y estar, por consiguiente, en aquellos momentos en peores condiciones que las actuales, a pesar de lo cual resistió y sigue resistiendo sin acusar nuevas fisuraciones perjudiciales. Debiéramos ocuparnos, por consiguiente, solamente de ver si existen causas posibles que puedan colocar nuevamente la obra en condiciones de empeoramiento.

Es evidente que la obra ha sufrido, sin embargo, corrimientos bien apreciables con relación a la posición inicial, con una abertura de más de dos milímetros de fisura de clave y con un descenso y pérdida de curvatura en las zonas de lucernario e inmediatas. Esto puede hacer que, bajo los efectos de la sobrecarga accidental, pueda sufrir efectos algo distintos de los previstos, y parece que en este sentido la sobrecarga más perjudicial es la que podría producirse en una nevada con viento que acumulara la nieve sobre la gaviota en proporción importante.

Haciendo una prueba de sobrecarga en este punto quedaría, por consiguiente, completamente asegurado este peligro.

Existe, sin embargo, otra posibilidad, cual es la de que sumándose a las deformaciones actuales las nuevas deformaciones lentas que todavía puede sufrir el hormigón, se lleguen a alcanzar disminuciones de curvatura que produzcan aumentos importantes de los esfuerzos normales de la lámina en sus condiciones de trabajo calculadas. Para asegurarse de que esto no es así deben colocarse flexímetros de hilo, cuyo resultado ha sido satisfactorio, que nos permitan conocer los nuevos movimientos que pueda sufrir la obra, particularmente en las genera-

trices de clave, borde superior del lucernario y gaviota. También vendría seguir en este estudio los movimientos de la clave de la bóveda pequeña, borde superior del lucernario inferior y uno o dos puntos del faldón grande, aun cuando estas lecturas no sean de tanto interés como las de las tres primeras generatrices indicadas.

No es necesario que estos aparatos sean de lectura a distancia, ya que sus lecturas pueden hacerse bastante espaciadas y, por tanto, no importa una incomodidad de lectura algo mayor a cambio de un menor gasto.

Es de esperar que las deformaciones lentas del hormigón a partir de este tercer año de vida sean ya bastante reducidas, dado el amortiguamiento que marcan los dos años anteriores. Pero de todos modos no debe olvidarse que estos movimientos no se anulan completamente en algunos años y que las deformaciones lentas del cemento fundido son menos conocidas que las del Portland.

De todo esto no debe, sin embargo, sacarse, a nuestro juicio, una conclusión pesimista sobre el porvenir de la cubierta, aun cuando evidentemente las oscilaciones producidas por los impactos y los corrimientos elásticos permanentes correspondientes que se observan hayan venido a producir sobrecargas locales de tensión de importancia; pero pueden no solamente estudiarse las nuevas condiciones de trabajo bajo el giro de clave, sino volverse también a unas condiciones de trabajo análogas a las iniciales con una reparación sencilla, cual es la de colocar unos pequeños tirantes o refuerzos por encima de la bóveda en las zonas próximas a la clave y obtener un enclavamiento o cerrado de la fisura mediante un pretensado de la armadura de refuerzo o por cualquier otro de los procedimientos de que dispone hoy nuestra técnica.

Probablemente sería esto lo más aconsejable; pero creemos que para dar una opinión definitiva es preferible aprovechar la necesidad de hacer la sustitución del corcho, uralita y vidriería rota para hacer una inspección más detallada de la lámina.

Julio de 1939. A. de la V.

E. TORROJA."

JUSTIFICACIÓN DEL TIPO DE REPARACIÓN PREVISTO

La inspección posterior, que empezó a hacerse descubriendo la lámina para prever y comenzar la reparación, acusó efectivamente agrietamientos de unos dos milímetros en las diagonales tendidas del lucernario, un descenso a hundimiento general del lucernario, que en las directrices centrales pasaba los 60 centímetros y deformaba violentamente la directriz en clave, con aberturas de grietas que alcanzaban los cinco milímetros en varios puntos, y es posible que existieran aún otros defectos que no llegaron a verse.

Como se dice en el informe anterior, todo parece indicar que, no ya el impacto en sí, que la obra hubiera resistido en buenas condiciones, sino la onda explosiva consiguiente a uno de ellos, ha sido la causa de todas las anormalidades de trabajo observadas.

La onda debió de producirse con un centro exterior e inmediato a la bóveda. Induce a creerlo así el que no sufrieran en general los vidrios de los lucernarios que se encuentran en la cara opuesta, y el que, por el contrario, saliera totalmente arrancado y despedido el recubrimiento de uralita en una amplia zona alrededor del punto de impacto, fenómeno que no se acusa en el otro boquete.

Considerando el fenómeno en el momento de onda positiva, es decir, de presión centrípeta sobre el lóbulo, éste debe soportar un corrimiento radial hacia adentro muy grande (curva 1, fig. 40), que gracias a su gran elasticidad puede resistir la lámina sin pasar su límite elástico. El lucernario tiende a levantarse, pero no sólo su mayor rigidez, sino la misma curvatura de la bóveda, hace que este corrimiento radial produzca necesariamente una flexión mucho más fuerte de la directriz hacia la clave, y que, por consiguiente, allí se produzca una deformación plástica de la armadura con una dislocación completa de la sección, concentrada, naturalmente, donde la fisuración estuviera iniciada. En el momento de onda negativa o de vacío (curva 2, fig. 40) el fenómeno se invierte y el lucernario desciende. En la clave se producen también corrimientos horizontales, y particularmente la componente horizontal de la onda de succión tiende a correr la clave hacia la izquierda y abrir la grieta por tracción.

Una vez perdida la resistencia a flexión en este punto, el lucernario desciende, perdiendo curvatura; la clave sube, y el trabajo del lucernario, trabajando como alma de viga en gaviota, aumenta importantemente. La línea de la gaviota, por consiguiente, sufre un corrimiento positivo

en sentido tangencial al lóbulo grande, con variaciones pequeñas en el corrimiento radial.

Al aumentar el trabajo de viga en el lucernario aumenta la tensión tanto en el cordón longitudinal de la gaviota como en las diagonales estiradas del lucernario, particularmente en las partes extremas, es decir,

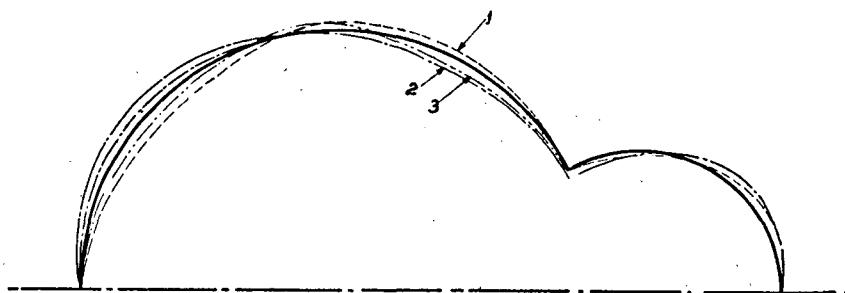


Fig. 40.—Deformaciones por onda explosiva.

junto a los piñones de apoyo, siendo probable, por consiguiente, la fisuración de estos elementos, muy sobrecargados de hierro y con poca sección de hormigón. Efectivamente, la existencia de estos agrietamientos, que no habían podido observarse en la primera visita, y cuya posi-

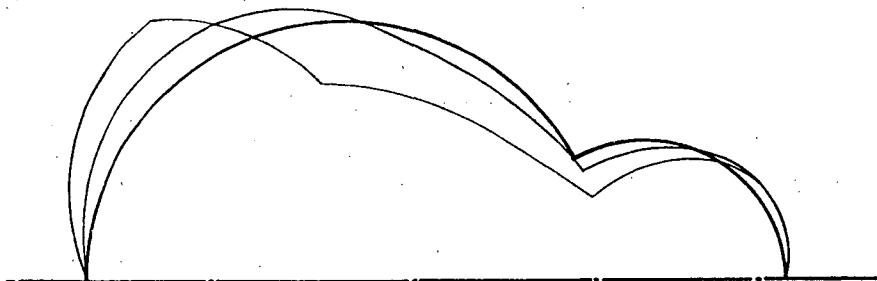


Fig. 41.—Procesos finales de movimiento.

bilidad se indicaba ya en el informe, se comprobó al empezar la revisión más detallada de los lucernarios, apreciándose grietas de unos dos milímetros en las seis diagonales extremas de cada lado.

Es de interés indicar que, una vez producido un desplazamiento importante de las generatrices altas del lucernario hacia el interior del edificio, estas generatrices, que están comprimidas, tienen una tendencia muy fuerte a pandearse.

Considerando el elemento formado por uno de los montantes o elementos del lucernario que sigue la dirección de la generatriz, podemos observar que la esbeltez de esta pieza o relación entre la longitud total de la misma y su escuadría es enorme y que el pandeo está limitado prácticamente por la resistencia a flexión de las directrices. La generatriz comprimida curvada hacia adentro tiende naturalmente a aumentar esta deformación y sufre por efecto de la misma un aumento en su carga de compresión axial, así como las directrices sufren también aumentos muy fuertes de flexión. Las deformaciones plásticas del hormigón en esta nueva condición, aun cuando sean pequeñas porque la edad del hormigón es ya grande, pueden producir, dada la esbeltez de la pieza, deformaciones radiales relativamente grandes en un período de tiempo suficientemente largo; por consiguiente, cabe perfectamente la posibilidad de que, encontrándonos en condiciones de estabilidad de forma precaria, la deformación y el peligro de rotura aumente con el tiempo. Por esta razón se indicaba en el informe la conveniencia de establecer nuevamente un sistema de medida para asegurar si esta deformación continuaba o no, y era también importante el determinar la ley de variación de las contradeformaciones que se pudieran obtener al aplicar cargas sucesivas en la clave.

Encauzando el problema con todos estos datos y posibilidades, se hizo el anteproyecto de una posible reparación de la cubierta (fig. 43), consistente en hormigonar unos anillos armados sobre el lóbulo grande hasta el lucernario, fuertemente anclados en la generatriz de éste por un lado y en la parte vertical del faldón grande por otro, y proveyendo a estos anillos de unos tensores en la armadura principal exterior y de unos estribos de anclaje a la lámina unidos también con tensores a la cara exterior del anillo.

Con estos elementos se proyectaba hacer la reparación tensando la armadura exterior (punto A, fig. 42) del anillo, con lo que se produce automáticamente un empuje centrípeto con el consiguiente descenso de la clave y un cierre de la grieta, de tal modo que la bóveda tiende a volver a su posición primitiva, levantando el borde alto del lucernario y bajando la clave.

La maniobra podía completarse, si se considerara necesario, hormigonando los anillos de tal forma que quedaran separados en determinadas zonas algunos centímetros de la lámina para tirar de ella mediante los estribos regulables hasta ponerla en contacto con el anillo, produciendo con ello un corrimiento radial hacia afuera de esta zona para asegurar

más el ajuste de las directrices a su nueva posición, o bien haciendo la operación en sentido contrario mediante cuñas o con una maniobra contraria de los estribos.

Esta corrección podría ser necesaria en la parte del faldón grande, ya que el momento flector que se produce en la clave al tensar la armadura

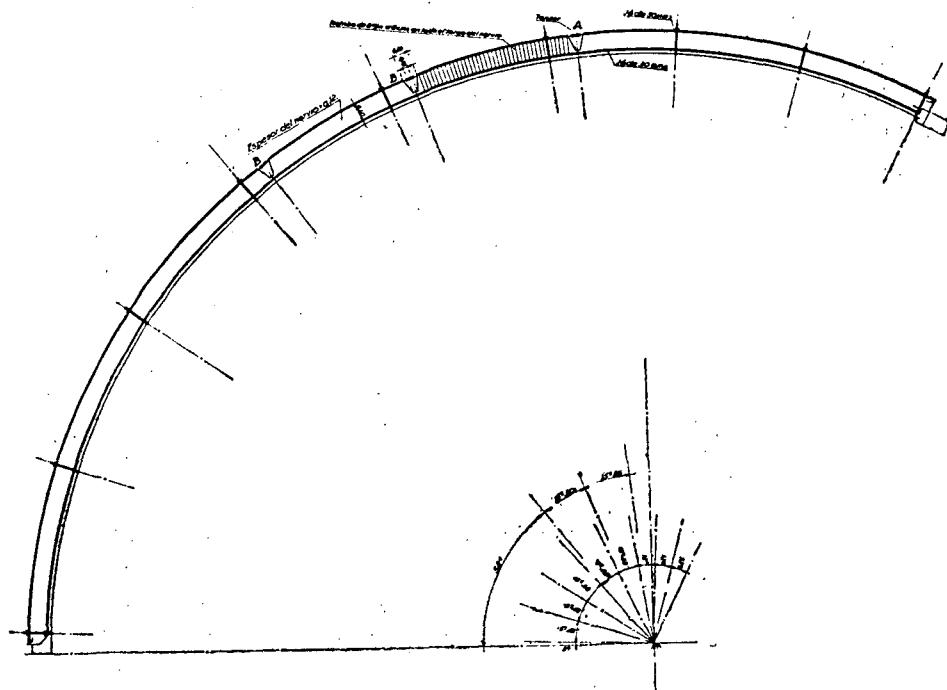


Fig. 42.

dura para cerrar la grieta tiende a producir desplazamientos radiales en las partes laterales del faldón grande.

Para compensar este fenómeno se disponía también de tensores suplementarios de la armadura longitudinal exterior de los nervios (punto B, figura 42) en esta zona, con objeto de tener mayor número de variables a disposición para corregir la forma de cada directriz. No se hizo un cálculo completo de la resistencia de estos elementos, ya que su coste era relativamente pequeño y era preferible, por consiguiente, ir con un exceso de secciones, y que, por otra parte, no se tenía *a priori* un conocimiento exacto de los esfuerzos que habría que producir, principalmente porque se desconocía hasta qué punto las deformaciones eran de

carácter elástico o habían adquirido ya un valor plástico, en cuyo caso, para deshacerlo y volver a la posición primitiva, era necesario producir reacciones mayores de las que proporcionaría un cálculo elástico.

Como se indica en el informe, se presentaban dos posibilidades de asegurarse de las condiciones de estabilidad de la obra: una, la de hacer una prueba de carga en las peores condiciones posibles y mantener la obra en observación para asegurarse de que las deformaciones perjudiciales no aumentaban con el tiempo, y otra, hacer esta reparación cuya finalidad fundamental era la de volver la lámina a su posición de trabajo primitiva; y se adoptó justificadamente esta segunda solución, no solamente porque con ella se habían de mejorar las condiciones resistentes de la estructura, sino porque el hacer solamente la prueba de carga exigía hacer un apeo total de la obra en grandes condiciones de seguridad para que el personal pudiera colocar la carga sin peligro en unos momentos en que se iba a carecer por completo de un coeficiente de seguridad previsible.

Sin embargo, para asegurar más las probabilidades de éxito de la reparación y las condiciones de seguridad en que se ejecutara, se consideró conveniente hacer una operación preliminar, consistente en concentrar la carga muerta de la zona alta del lucernario grande a lo largo de las zonas más inmediatas a la generatriz agrietada de clave, con objeto, en primer lugar, de mejorar las condiciones resistentes del conjunto, y en segundo lugar, de ver si al hacer esta operación y obligar a descender con ello la clave reaccionaban efectivamente las generatrices altas del lucernario, con corrimientos radiales hacia el exterior, o, por el contrario, si la estabilización producida por la deformación plástica les impedía este movimiento, en cuyo caso habían de preverse los anillos de reparación para unos esfuerzos mucho mayores, ya que se había de vencer elásticamente la gran deformación plástica producida, y, por consiguiente, la reparación era no solamente más costosa, sino de una eficacia más problemática.

EL HUNDIMIENTO

Para llevar a cabo las operaciones que acabamos de indicar se empezó a elevar un andamiaje y a descubrir la bóveda, levantando el revestimiento de uralita de la parte superior y los cristales de los lucernarios, con objeto también de hacer una revisión más detallada de la obra.

Asimismo se colocaron diferentes flexímetros autorreferentes para poder acusar cualquier variación de forma de la estructura y evitar accidentes, dada la situación peligrosa de la obra, que hacían más difíciles las maniobras inherentes a esta reparación.

En estas condiciones, en la tarde del 15 de agosto, coincidiendo con una tormenta bastante violenta, los aparatos de control acusaron la iniciación de un nuevo descenso del lucernario.

Antes de medianoche sobrevino el hundimiento por continuación de los movimientos iniciados en una forma análoga a la indicada en la figura 41; es decir, provocado por un aumento muy importante en la pérdida de curvatura de las directrices centrales del lucernario, con giro inicial importante de éstas y con una elevación fuerte del enpuje horizontal en la clave, que empujó al lóbulo grande, cayendo una parte de él en la zona lateral por fuera del muro de rebote. Una vez perdido el contrarresto, la gaviota sufrió un giro por torsión muy fuerte, volcando en parte sobre las tribunas y en parte sobre la cancha, sin que el andamiaje iniciado, y que no había llegado a la altura de la bóveda, pudiera, naturalmente, impedir el fenómeno.

El giro de la gaviota se produjo a lo largo de una generatriz del lucernario pequeño, como se indica también en la figura.

Dada la gran altura del edificio, el hormigón quedó, en general, totalmente deshecho. Como ya dijimos antes, el trabajo longitudinal que la viga en gaviota hubo de desarrollar fué mucho mayor que el esperado, pues quedaron en gran parte intactas las zonas extremas del lucernario que sufren los máximos esfuerzos cortantes correspondientes a la viga gaviota, y el cordón o armadura principal de ésta, formado, como ya se indicó, de 16 cuadrados de 50 milímetros soldados eléctricamente a tope y envueltos con una sección de hormigón relativamente pequeña; quedaron arrancados del hormigón, pero sin romperse ni en su sección ni en las soldaduras, a pesar de los enormes esfuerzos que debieron de sufrir en los últimos momentos.

Prescindiendo de detalles e hipótesis sobre las causas inmediatas del hundimiento, es importante destacar desde un punto de vista técnico que la rotura se produjo indudablemente, no por un defecto en el trabajo que pudiéramos considerar principal de la estructura, es decir, en el trabajo longitudinal de piñón a piñón, sino exclusivamente por una falta de rigidez transversal de las directrices centrales del arco en el lóbulo grande, provocado por la rotura y brusca deformación de estas directrices bajo la acción de la onda explosiva.

Siendo esto así, extraña a primera vista el que el hundimiento no se produjera simultáneamente con la explosión; sin embargo, hay que tener en cuenta, de una parte, que pudo haber ese día pequeños factores capaces de iniciar la rotura, dadas las malas condiciones de resistencia en que ésta se encontraba, y, por otra parte, que una vez producido por efecto de la explosión un corrimiento radial permanente de las generatrices altas del lucernario hacia el interior de la bóveda, las generatrices correspondientes que están trabajando a compresión sufren un efecto de pandeo importante, que tiende a aumentar el corrimiento centrípeto, como ya se ha indicado anteriormente, y que la deformación plástica consiguiente a las altas cargas de trabajo en que se encuentran anormalmente estas generatrices puede hacer que el efecto de pandeo vaya aumentando muy lentamente y que, por tanto, al cabo de los meses la obra se encuentre en unas condiciones de estabilidad de forma mucho peores que en el momento inicial del accidente.

CAPITULO VIII

CONCLUSIONES

Como resultado y resumen de todo lo que hemos expuesto anteriormente podemos hacer las siguientes consideraciones finales, útiles para otros casos análogos.

La combinación de lóbulos cilíndricos de diferentes radios y la sustitución de la lámina por sistemas reticulados triangulares formando parte esencial de aquéllos se comporta perfectamente, prestándose, por tanto, a gran número de soluciones.

La supresión de la viga de descarga en la gaviota, si bien obliga a un aumento de armadura, simplifica la ejecución y favorece enormemente el valor funcional y estético de la cubierta; pero la gran flexibilidad longitudinal de la gaviota con relación al resto de la lámina provoca esfuerzos de torsión que no deberán olvidarse en caso de sobrepasar las proporciones adoptadas, y probablemente convendrá entonces disminuirlas con el empleo de anillos transversales de refuerzo, para cuyo cálculo puede considerarse la lámina heterogénea sin excesiva complicación.

El sistema de cálculo empleado permite, efectivamente, la determinación de los esfuerzos en cualquier punto de la lámina, si bien la complicación es grande y requiere un núcleo relativamente amplio de personal bien especializado y una buena organización del trabajo para evitar errores graves.

Esta complicación es mayor en nuestro caso por ser el perfil asimétrico y bastante peraltado, lo que obliga a considerar leyes diferentes para la repartición sobre la directriz de las cargas de peso, de viento y

de nieve, y por el deseo de obtener en el cordón de la gaviota, bajo la acción simultánea de todas las cargas, una tensión de trabajo económica, previamente fijada.

Los resultados del cálculo y las observaciones en la obra han venido a comprobar una vez más que no puede prescindirse de las flexiones transversales, ni admitir una ley lineal para los esfuerzos longitudinales, asimilando el problema a los de membranas puras a vigas rectas.

La influencia del segundo término de la serie de Fourier (en que se han considerado desarrolladas las cargas exteriores a lo largo de las generatrices) ha resultado muy pequeña y prácticamente hubiera podido prescindirse de ella sin error grave en este caso, pero esto no puede generalizarse.

Las diferencias de rigidez y de peso entre los lucernarios y las láminas han acusado, tanto durante la experimentación sobre modelo como en la observación de la obra, alteraciones en la ley de reparto de flexiones sobre la directriz, acusándose una gran sensibilidad de estas flexiones bajo las heterogeneidades de la lámina o acciones exteriores, por lo cual consideramos recomendable proyectar las armaduras correspondientes con cierta amplitud.

Las dilataciones térmicas y contracciones de fraguado no son inconvenientes para la realización de cubiertas de este tipo con mayores dimensiones.

Tanto la instalación en modelo reducido como la de control mecánico-elástico de la propia obra han proporcionado datos utilísimos para la corrección y comprobación de los resultados teóricos, acusándose el gran partido que puede sacarse de ellos y la tranquilidad que representan para la ejecución de una obra delicada.

El nuevo tipo de instalación adoptado para el modelo reducido con el sistema de carga colgada representa un gran avance en esta rama de la técnica, permitiendo la repetición rápida y cómoda de las cargas con toda seguridad en el trabajo.

El empleo de flexímetros autorreferentes, o de hilo de tensión constante, ha sido particularmente útil y satisfactorio durante el descimbramiento; hubiera sido, sin embargo, interesante completar la instalación con el empleo de clinómetros para determinar con precisión la ley real de flexiones de la directriz durante el descimbramiento.

La ejecución de la obra no presentó dificultades especiales. No correspondiéndonos la dirección económica de la obra, que fué llevada por administración, no podemos dar datos sobre el coste de la misma, y úni-

camente podemos indicar como orientación sobre este punto que la cubicación arroja las cifras medias por metro cuadrado de cubierta de 0,086 metros cúbicos de hormigón y de 13,8 kilogramos de acero en armaduras, excepto en la zona de la gaviota, donde aumenta a 44 kilogramos por metro cuadrado, y que estas unidades no presentaron mayor complicación de ejecución que en una obra corriente.

La colocación de las armaduras en la lámina es sumamente sencilla y rápida, presentando mayor trabajo únicamente en los lucernarios, cuyas barras van armadas como pequeños pilares, y en el cordón de la gaviota, en el que se recurrió con éxito a la soldadura eléctrica para concentrar la armadura a un límite al que no hubiera podido llegar con los tipos corrientes de empalme.

El hormigonado de la lámina requirió doble molde únicamente en los cinco primeros metros del faldón grande; en el resto de la lámina se hizo como el de un forjado corriente, y en el lucernario en la forma usual en pilares.

La cimbra, en cambio, hubo de representar, en el caso particular de esta obra, una parte importante del coste total, porque la gran rapidez a que hubo de trabajarse por razones financieras impidió preparar el estudio y el material necesario para hacerla sin cimbra o con cimbra parcial, único procedimiento de obtener las máximas ventajas económicas de este tipo de cubierta en cuanto la altura de la sala es algo grande.

Los movimientos de la obra durante el descimbramiento accusaron una interesante analogía con los resultados del cálculo y particularmente con los resultados obtenidos en modelo reducido.

Como en toda obra de gran esbeltez, se observó durante los primeros meses una continuación de los movimientos de descimbramiento de carácter amortiguado, debidas a las deformaciones lentas del hormigón, que con el cemento fundido empleado en esta obra parecen presentar un amortiguamiento menor que con el cemento Portland, si bien las incidencias de la guerra impiden el aportar datos concretos sobre este punto.

Los efectos de impacto simplemente no han acusado perjuicios generales sobre la estructura, produciéndose el taladro en la forma corriente. La superficie interesada, sin embargo, es mayor de la que normalmente interesa en placas del mismo espesor con mayor rigidez.

Por el contrario, una onda explosiva de centro probablemente exterior a la lámina, al producir oscilaciones muy importantes de ésta, produjo su dislocación en la clave, y como consecuencia de ello un des-

equilibrio de los trabajos resistentes longitudinal y transversal y un desplazamiento relativo permanente muy importante entre un lado y otro del lóbulo, con descenso fijo del orden de 60 centímetros.

El gran aumento de carga de trabajo consiguiente, unido a la fuerte tendencia a pandeo de las generatrices en compresión, deformadas permanentemente, produce el incremento lento de estas deformaciones por pandeo plástico del hormigón, provocándose al final la rotura por un aumento ocasional de las condiciones de sobrecarga.

La viga gaviota, formada por el enlace de dos almas cilíndricas, ha resistido perfectamente aun en condiciones mucho más desfavorables de las de cálculo, sin duda debido exclusivamente a la rotura y deformación permanente importante de las directrices centrales, vencidas a causa de la explosión por exceso de flexión.

Es probable que el establecimiento previo de unos ligeros anillos de refuerzo de la lámina en la zona maciza de poco espesor hubiera sido suficiente para localizar los efectos de la explosión, si bien no puede asegurarse.

NOTA.—En el reciente trabajo publicado por el Sr. Dischinger con el título *Entwicklung und Fortschritte im Eisenbeton*, en el que cita y enjuicia favorablemente esta cubierta, indica, sin embargo, la posibilidad de que el espesor del lóbulo pequeño junto a la gaviota, que él supone de ocho centímetros, sea pequeño. Sería oportuna la objeción si ello fuera así, pues como puede verse en los datos de esta monografía, el espesor teórico en ese punto era de once centímetros, y prácticamente algo mayor por necesidades de enlace. No tiene nada de particular el error, dado que conocía la obra solamente por referencias incompletas, siendo, por el contrario, la objeción una prueba más de su conocimiento teórico y práctico de estos tipos de láminas, que él fué el primero en emplear.

Por otra parte, como ya hemos dicho, la rotura no se ha producido por ninguno de los elementos de gaviota, sino solamente por exceso del trabajo de flexión bajo la acción de la onda explosiva en el lóbulo grande pasada la clave, aumentado quizás por la diferencia de rigidez entre un lado y otro de la bóveda.

ÍNDICE

	Páginas.
CAPÍTULO I.—Consideraciones generales	11
CAPÍTULO II.—Desarrollo teórico del cálculo de la lámina.—Hipótesis.....	19
Notación	24
Planteamiento del problema	28
Determinación de los esfuerzos y corrimientos por efecto de membrana.	33
Integración de las ecuaciones diferenciales para efecto de borde.....	36
Formación de las expresiones de esfuerzos y corrimientos por efecto de borde	44
Determinación de las constantes de integración en la gaviota.....	46
Determinación de las constantes de integración en los bordes exteriores.	51
Determinación de los esfuerzos y corrimientos totales.....	52
Comprobación de las estructuras sustentantes	54
CAPÍTULO III.—Desarrollo numérico y gráfico del cálculo.—Resumen de expresiones que entran en el cálculo numérico	57
Datos y parámetros auxiliares	63
Esfuerzos y corrimientos por efecto de membrana	64
Valores de J_1 , K_1 , j_1 , k_1	67
Valores de J_n , K_n , j_n , k_n	67
Valores de α , β , γ , δ	68
Diagramas de $eJ_1\omega \cos K_1\omega$ y $eJ_1\omega \sin K_1\omega$	69
Valores de $eJ_1\omega \cos K_1\omega$ y $eJ_1\omega \sin K_1\omega$ para los valores principales de ω .	70
Valores de a , b , c , d	71
Sistema de ecuaciones auxiliares para borde común	79
Aproximaciones sucesivas de A , B , C , D para borde común	81
Valores de A , B , C , D , en bordes exteriores	84
Valores componentes de M , S , T , N , Q , ζ , η	86
Planos de isostáticas, de isóbaras y de armaduras	E
Cargas unitarias de trabajo en kg/cm^2	99
Comprobación de las palizadas del marco rígido	101
CAPÍTULO IV.—Informe sobre el proyecto y prescripciones complementarias.	
Informe de los ingenieros D. J. E. Ribera y D. J. M. Aguirre	102
Cumplimiento de las prescripciones del informe	109

	Páginas.
Propuesta de instalación de control	111
CAPÍTULO V.—Estudio experimental en modelo reducido	117
Pliego de condiciones del modelo	117
Descripción de la instalación	120
Desarrollo de los ensayos	123
CAPÍTULO VI.—Ejecución y comportamiento de la obra.—Cimbra, armaduras y hormigonado	135
Maniobra de descimbramiento	140
Deformaciones observadas	141
Correlación entre los resultados teóricos y los reales	148
CAPÍTULO VII.—Causes y proceso del hundimiento.—Informe.....	151
Justificación del tipo de reparación previsto	156
El hundimiento	160
CAPÍTULO VIII.—Conclusiones	163