Nº R.A. 79540 DONATIVO A LA R. ACADEMIA DE CIENCIAS
F. A.
210-I

PRINCIPIOS
DE MATEMATICA,

DONDE SE ENSEÑA

LA ESPECULATIVA,

CON SU APLICACION

A LA DINÁMICA, HYDRODINÁMICA, ÓPTICA, ASTRONOMÍA, GEOGRAFÍA, GNOMÓNICA, ARQUITECTURA, PERSPECTIVA, Y AL CALENDARIO.

Por D. Benito Bails,

Director de Matemáticas de la Real Academia de S. Fernando, individuo de las Reales Academias Española, de la Historia, y de las Ciencias Naturales y Artes de Barcelona.

TOMO I.

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
MADRID
BIBLIOTECA

MADRID.

Por D. Joachin Ibarra Impresor de Cámara de S. M.

M.DCC.LXXVI.

PROLOGO.

Evacuada en la parte que nos tocaba la comision que nos dió la Real Academia de S. Fernando de escribir un Curso de Matemáticas, donde se tratasen con alguna estension los principales ramos de esta vasta facultad, se fió á nuestra diligencia compendiarle, á fin de que tuviesen los alumnos de la misma Academia un resumen por donde estudiar los diferentes tratados que necesitan. Pero como las verdades matemáticas tienen entre sí muy estrecho enlace, no era posible (y aun quando lo fuera, tampoco hubiera sido decoroso) publicar faltas de sus fundamentos las operaciones prácticas, por lo que se nos ha hecho preciso dilatarnos algo mas en estos Principios, despreciando á este respecto los clamores de la pereza y la preocupacion. No siempre debe regularse por el volumen de un libro el tiempo que se necesita para saberle; hay asuntos que no pueden aclararse con pocas palabras, y quando se lleva la mira de que los entiendan por sí los mas de los lectores, debe el escritor pintar mas abultados á la vista los obgetos, para que se le hagan mas perceptibles al entendimiento.

Por ser esta obra, segun acabamos de insinuar, estracto de otra mayor, dejamos para quando esta salga, y saldrá muy pronto, especificar los Autores (a) de que nos hemos valido para tegerla; porque quanto publicamos es ageno, y no hay en nuestros es-

(a) El modo con que los especificaré dará á conocer que los tengo registrados mas allá de sus frontispicios. La ciencia de las portadas la dejo sin la menor envidia para aquellos hombres que equivocando las noticias que forman un literato con el conocimiento material de un librero, se alzan con el nombre de eruditos por haberse dedicado á una casta de *erudicion* (conozco toda la impropiedad de esta voz) que dispensa el saber, el discurrir y el pensar.

ELOGIO
DE D. JORGE JUAN,

COMENDADOR DE ALIAGA EN LA ORDEN DE S. JUAN, GEFE DE ESQUADRA DE LA REAL ARMADA, CAPITAN DE LA COMPAÑIA DE GUARDIAS MARINAS, CONSILIARIO DE LA REAL ACADEMIA DE S. FERNANDO, INDIVIDUO DE LA REAL SOCIEDAD DE LONDRES, Y DE LA ACADEMIA REAL DE BERLIN (a).

SI las alabanzas de los hombres hubieran de recaer en la duracion de su existencia, apuntaríamos con supersticiosa puntualidad desde los primeros renglones de este Elogio el dia, mes y año del nacimiento de D. Jorge Juan; diríamos ó fingiríamos que yá dió muestras en sus primeros años de lo

(a) Sé que tiene este ilustre varon en sus escritos mas que en los mios un monumento duradero de su memoria; pero he querido darle, aunque difunto, un testimonio de mi gratitud, porque fue voto, fue empeño suyo el que á mí se me encargára escribir el Curso de Matemáticas, cuya impresion se está concluyendo, del qual esta Obrita es un Compendio.

lo que habia de ser en la edad adulta, y pintándole hombre quando era todavía niño, desluciríamos toda su vida para hacer mas portentosa su infancia. Quédese tanta proligidad para los investigadores de fechas; en la vida de un Filósofo no caben ficciones, ni tampoco menudencias donde lo mas que se nos ofrecerá decir es memorable, todo es serio. El Elogio de D. Jorge Juan empezará donde él empezó á obrar; las obras son las que hacen señalados á los hombres, con ellas arrancan aplausos á sus coetaneos, consiguen lugar en el templo de la fama, y dejan á la equitativa posteridad que agradecer y admirar.

No fundó D. Jorge Juan en la nobleza de su nacimiento un privilegio para vivir inutil; antes porque nació distinguido quiso distinguirse por varios caminos, y merecer por sí lo que yá tenia de la casualidad. Por influjo de un tio suyo, Baylío de Caspe, entró en la Orden de S. Juan de Jerusalen, en una Orden donde la Religion hace piadoso el valor, y el valor animosa la piedad. El dilatado campo que esta carre-

rera le proporcionaba donde egercitarse era muy ceñido para su espíritu, ni su pundonor consentía el que hiciese á su Religion el sacrificio de todos sus brios. Tenia una patria, tenia un Soberano, lo sabía; sabía que primero que religioso era vasallo, y que las obligaciones de vasallo se compadecen con las de religioso, pues las impone muy estrechamente todas la verdadera Religion. Salió de Malta para España con voluntad resuelta de servir á S. M. en la Marina; y desde su admision en el Cuerpo de Guardias Marinas se dedicó con tan egemplar y afortunada aplicacion al estudio de las Matemáticas, que á los veinte y un años de edad mereció ser preferido entre todos sus compañeros (*b*) para pasar al Equador con los Académicos Franceses que el Ministerio de aquella Nacion enviaba allá á una expedicion literaria tan importante como memorable. Tratábase de salir para siempre de dudas acerca de la ver-

(*b*) Fue tambien nombrado D. Antonio de Ulloa, Oficial del mismo Cuerpo, hoy dia Gefe de Esquadra de la Real Armada.

verdadera figura de la tierra, que se tuvo por redonda hasta fines del siglo pasado. Parecióles á algunos Filósofos felizmente atrevidos que esta figura repugnaba con las leyes del equilibrio de los fluidos, y que la convexidad de la superficie de la tierra no podia ser una misma en toda su estension. Aunque desde el año de 1672 tenia esta sospecha en su abono una observacion muy sonada, no era suficiente este testimonio, y se hacia indispensable confirmarla con las operaciones de la Geometría. Es constante que si la tierra no es una esfera rigurosa, han de ser desiguales los grados de un círculo que nos figuremos la parta por medio, pasando por el Norte y el Sur, y que estos grados han de coger menos varas donde fuere mayor la convexidad, que donde fuere menor. Requería, pues, la determinacion cabal de la figura de la tierra que se midiesen dos de estos grados por lo menos, el uno en el Polo, el otro debajo del Equador, para inferir de su diferencia quanto la superficie de nuestro globo discrepa de la esférica, y saber á punto

to fijo á qué cuerpo se parece. En esta indagacion que yá se le hacia apreciable á D. Jorge Juan por ser su obgeto averiguar una verdad matemática, interesaban los progresos de la navegacion, y el concepto nacional, dos cosas cabalmente que fueron mientras vivió el blanco de todos sus desvelos. Ufano de la preferencia que habia merecido entre muchos Oficiales ilustrados de su Cuerpo, pudiera discurrir que en la misma eleccion iba afianzada su suficiencia; pero aunque mucha la instruccion de D. Jorge Juan, y mayor de lo que requería la operacion á que se le enviaba, era todavía mayor su desconfianza; que con este nombre hemos de calificar su mucha modestia. Dedicóse con nuevo empeño al estudio, y hizo ver á los sabios Franceses, cuyo compañero era nombrado, que en una Nacion donde acaso no esperaban hallar hombres que los entendiesen, habia muchachos que podian auxiliarles, aun quando fuera mas dificultosa, y pidiera mas profunda doctrina la empresa.

Tenia en sí recursos D. Jorge Juan para

dar vado á muchos encargos á un tiempo. Por varios é inconexos que fuesen sus asuntos, su zelo patriótico sabía reducirlos á uno mismo, cuyo desempeño aseguraba de antemano su atinada actividad. Era tan sobresaliente en él esta prenda, que el Virrey del Perú, en cuyo Reyno se egecutaba la operacion matemática, le empleó en la defensa de algunas Plazas que recelaba fuesen acometidas de los Ingleses, en todo tiempo nuestros émulos, y entonces nuestros enemigos; en disciplinar las Tropas de aquella costa, y en la construccion y mando de dos Fragatas, cuyo destino era impedir un socorro que el Almirante Anson esperaba para reforzar la Esquadra con que iba fatigando en aquellas regiones remotas nuestra atencion y nuestro comercio.

No bastaba haber concluido la medicion del grado del meridiano terrestre, era indispensable publicar individualizadas todas las observaciones, operaciones y tentativas, todos los cuidados, afanes y peligros á cuya costa se habia conseguido, y empeñaba esta publicacion en un trabajo de todo punto nuevo aun para un Matemático. No en todos se junta la soltura que deja ayrosas las operaciones prácticas con el talento de referirlas, y hacer patente, quando no son mas que preliminares, su enlace con el obgeto principal; saber obrar, y saber decir son talentos muy distintos, pero en D. Jorge Juan parecian uno mismo. Trahia á su vuelta de América todos los materiales de sus observaciones astronómicas y físicas para darlas con algun sosiego toda la coordinacion y pulimento que cabia en la materia, ó lo que era uno mismo, el que él podia darlas. No era esta una dificultad para D. Jorge Juan, antes era una diversion; otros estorvos le esperaban capaces de apurar su constancia si hubiera sido vulgar. Halló á su regreso á España muerto al Ministro que le habia enviado á América, era lo mismo que hallar mudada la Corte, y sus proyectos sin valedor. Para que estos llegasen á la noticia del nuevo Ministro, hubo de acudir al empeño; fue oido, pero despachado como si solicitára algun premio.

mio. Estuvo para desmayar D. Jorge Juan, y cabe esta confesion en su elogio; no es flaqueza, es virtud desmayar por tan honrado motivo. Lo dejára todo para irse á Malta, si no le alentára, ofreciéndole interesar al Ministro, un hombre á quien una espedicion desgraciada tiene señalado lugar en nuestra Historia (*c*). Con este influjo lograron sus intentos el patrocinio que necesitaban para efectuarse, y se imprimió á costa del Real Erario la obra de las Observaciones Astronómicas y Físicas (*d*); no pedia otro galardon el desinterés de su Autor.

La

(*c*) D. Josef Pizarro, que murió en Cadiz siendo Teniente General de Marina.

(*d*) *Observaciones Astronómicas y Físicas, hechas de orden de S. M. en los Reynos del Perú, de las quales se deduce la figura y magnitud de la tierra, y se aplica á la navegacion*, impreso de orden del Rey nuestro Señor, en Madrid por Juan de Zúñiga, año 1747, un tomo de á 4.°

La parte histórica de la Espedicion la escribió D. Antonio de Ulloa, y salió á luz con este título: *Relacion Histórica del Viage á la América Meridional, hecho de orden de S. M. para medir algunos grados de meridiano terrestre, y venir por ellos en conocimiento de la verdadera figura y magnitud de la tierra*, impresa de orden del Rey nuestro Señor, en Madrid por Antonio Marin, año de 1748.

La misma ansia con que le habia solicitado, despertó en su corazon naturalmente agradecido sentimientos de afecto ácia el Ministro por cuya mano pasó esta merced, y tuvo el Ministro la fortuna de conocerlo. Desde entonces la vida de D. Jorge Juan no fue mas que una continuacion de comisiones y confianzas, todas dirigidas al servicio del Rey, y la mayor prueba de que las desempeñaba es que se continuasen. Pasó á Londres con un encargo que sobre pedir luces (á D. Jorge Juan no se le podian dar otros) requería no poca maña y tambien astucia; construccion de navios, obras hydráulicas, beneficio de minas, liga y afinacion de monedas, para todo se le consultaba, ó porque habia un D. Jorge Juan de quien fiarlo, todo se emprendía.

Era tanto su deseo del acierto, que estaba en una continua desconfianza de sus muchas noticias y su penetracion. No daba en el arrojo de aquellos sabios que con el discurso quieren adivinar y tambien violentar las operaciones de la naturaleza; siempre que el asunto lo permitia la preguntaba, no perdonando para ilustrarse ni observacion ni esperimento. Rayaba yá en temeraria escrupulosidad su esmero, y estuvo para perecer en unas pruebas que hacia para averiguar la resistencia de las jarcias; salvóle la casualidad de cubrir la marea las rocas, adonde le arrojó una jarcia que se rompió, pero quedó muy maltratado y con riesgo de la vida algunos dias.

Solo un Oficial que tantas y tan varias pruebas tenia dadas de cumplido, podia saber las circunstancias que acreditan este honroso concepto, guiar á los que deseasen merecerle, é infundir tan noble deseo en los que hubiesen entrado sin vocacion en la Marina. De estos no hablára un Escritor pusilánime, antes daría á entender, ó diría sin rubor que todo es pundonor, todo zelo, todo suficiencia, todo aplicacion, todo idoneidad en un hombre que viste uniforme; y socolor de hacer justicia á todo un Cuerpo, haría, envileciéndose á sí mismo, un agravio á los individuos beneméritos que mantienen su opinion

nion y su esplendor. No será estraño que haya entre los Oficiales algunos incapaces quando muchos entraron sin eleccion propia en la carrera Militar; eligiéronla sus padres para darles acomodo, y no defensores á la patria: qual un hombre codicioso dedica sus hijos á la Iglesia para conseguir ó poseer ricas prebendas, no para que tenga la Religion Ministros que con su doctrina la defiendan, y el Sacerdocio individuos que con su buen egemplo le hagan mas venerable. Solo á D. Jorge Juan podia fiarse el plantel de los Oficiales de Marina, solo él podia gobernar con éxito cabal la Academia donde adquieren los conocimientos que les servirán para arrostrar los mayores peligros, y dejar burlada la furia del inconstante elemento, que tanto egercicio dará algun dia á su inteligencia y su valor. Notorios son los progresos que ha hecho la Academia de Guardias Marinas desde que se encargó su gobierno á D. Jorge Juan: maestros, discípulos, libros, instrumentos todo es sobresaliente y esquisito desde entonces. Sus individuos perfeccionan dias ha con sus observaciones y viages la Astronomía y la Navegacion en competencia de los mayores Astrónomos estrangeros.

Era destino de D. Jorge Juan no estar parado, así como era genio suyo no estar ocioso. No bien se le acababa de encargar la direccion de la Academia de Guardias Marinas, quando se le dió orden de ir al Ferrol para dirigir las obras que se hacian en aquel puerto, donde á la sazon estaban trabajando quince mil hombres. Su modestia, su amor á lo que en Cadiz tenia á su cuidado repugnaban tan vasta comision, porque no le dominaba el furor de tener muchos asuntos entre manos, ceñíase su ambicion á concluir los que tenia empezados. Se le admitió que fuese al Ferrol por una temporada; y dejando allanadas varias dificultades á que habia dado motivo así la fábrica como la construccion, pasó á Santander, donde dejó corriente un nuevo método de aparejar los Navios, que yá se habia esperimentado con total felicidad en el Ferrol.

Res-

Restituido á Cadiz se empleó con su acostumbrado zelo en cuidar de su Compañía donde brotaban yá las semillas de la sólida instruccion que dejó sembradas antes de salir para Galicia. Los ratos que le dejaba esta ocupacion, los ocupaba en promover diferentes ramos de las Ciencias Naturales, estimulando á lo mismo varios sugetos en quienes conocia disposiciones para seguir su egemplo. Formó una Sociedad de hombres aplicados é instruidos que se juntaban todos los jueves en su casa; allí se leían disertaciones, controvertian puntos de todas las Ciencias que son del distrito del discurso humano, y pueden contribuir al bien de los hombres. Formóse una República literaria, cuyos dominios alcanzaban toda la naturaleza, no habiendo entre sus individuos mas desigualdad que la que requería la universal instruccion de D. Jorge Juan, quien con título de Presidente la gobernaba, porque ninguno le era estraño de quantos idiomas en ella se hablaban.

Los que no han tratado mas que hombres vulgares, ciñen á sola una clase de

de-

dependencias los aciertos del hombre, y tienen por incompatible el estudio con la destreza de un negociador. Por otra parte los literatos creen que solo ellos son para todo, y que los libros infunden el don de no errar en nada. La verdad es que un hombre ignorante es un hombre inutil, y tambien peligroso si tiene autoridad; y un sabio sin trato de gentes suele ser un hombre sin crianza, y un niño en las dependencias. D. Jorge Juan era sabio y hombre de mundo á un tiempo; para él podia haber asuntos nuevos, pero no estraños; los concluía todos como si no hubiese manejado otros en el discurso de su vida, y así lo acreditó en su Embajada en la Corte del Rey de Marruecos.

Entre tantos monumentos que dejó D. Felipe V de su paternal amor á sus vasallos, hay uno en la Capital de esta Monarquía, cuyo destino es proporcionar á la noble juventud una crianza qual corresponde á su calidad, ó á los servicios que debe esperar la Nacion de los hombres de esfera distinguida. Sabia aquel Monarca tan cuer-

cuerdo que á los vasallos de ilustre nacimiento toca dar á los demás el egemplo de todo lo bueno, y conocer todo lo util para saberlo apreciar, y promoverlo con su patrocinio, quando no con su generosidad. Una revolucion inesperada dejó al Real Seminario de Nobles sin gobierno ó sin Director, sin enseñanza ó sin Maestros. El Rey, heredero de las intenciones igualmente que de las virtudes de su Augusto Padre, encargó la direccion de tan esencial establecimiento á D. Jorge Juan. Jamás hubo eleccion tan aplaudida, porque nunca la hubo mas acertada; la fama del nuevo Director pobló en poco tiempo de Seminaristas el Seminario: su discernimiento supo hallar para todo Maestros, y deseando mejorarles, si cupiese, les señaló sueldos que bastasen á su decente manutencion. Mudaron muy en breve de semblante la crianza civil y literaria en aquel Colegio, donde se forman desde entonces Caballeros ilustrados y con modales; cediendo, como corresponde, el primer lugar la crianza civil á la christiana, sin la qual suele ser la política hypopocresía, y una arma peligrosa la ilustracion.

En medio de la continuada agitacion con que vivió D. Jorge Juan desde su vuelta de Inglaterra, pues son mas de veinte y quatro los viages de un estremo de España á otro que de orden de la Corte emprendió, iba trabajando una obra (*e*) que pedia repetidos esperimentos, cálculos prolijos, y mucha combinacion; en una palabra, sumo sosiego. Como no habia perdonado diligencia para instruirse, tenia leído quanto se habia publicado sobre la construccion y el manejo del Navio. El fruto que sacó de tanta letura fue dudar, y sospechar que á pesar de su gran penetracion y profunda Geometría se habian equivocado los Matemáticos de primera gerarquía que probaron sus fuerzas en tan ardua materia. Empeñóse en ave-

ri-

(*e*) *Examen Marítimo Teórico-Práctico*, *ó tratado de Mecánica*, *aplicado á la construccion*, *conocimiento*, *y manejo de los Navios*, *y demás Embarcaciones. Por D. Jorge Juan*, *Comendador de Aliaga en la Orden de S. Juan*, *Gefe de Esquadra de la Real Armada*, *Capitan de la Compañía de Guardias Marinas*, *Individuo de la Real Sociedad de Londres*, *y de la Real Academia de Berlin*, dos tomos de á 4.º, en Madrid en la Imprenta de D. Francisco Manuel de Mena, 1771.

riguar si eran fundadas sus sospechas, y fue lo mismo que tratar el asunto de propósito. No le hay mas dificultoso en toda la Matemática mixta.

Es el Navio la máquina mas portentosa que han inventado la industria y codicia de los hombres; para su manejo han de obrar una infinidad de máquinas con tan estremada precision y concierto, que de atrasarse ó anticiparse un instante una maniobra pende el destino de la Nave; está al arbitrio de dos elementos de estraordinaria inconstancia y violencia, cuyo modo de obrar en una embarcacion está todavía por saberse. Este es no obstante el primer paso que debe darse en la Ciencia Naval, este es el primer punto en que D. Jorge Juan se aparta de los Autores que trataron el mismo asunto. Todos los que han escrito del impulso de los fluidos en los sólidos, atienden en su determinacion á la superficie no mas del sólido chocado, sin llevar en cuenta la cantidad que el sólido chocado está metido en el fluido. Pero si los fluidos pesan, dice D. Jorge Juan, quanto mas alta

fue-

fuere la columna del fluido que choca con el sólido, tanto mayor será la eficacia del impulso. De esta consideracion tan natural saca D. Jorge Juan consecuencias muy importantes acerca de la resistencia que el agua opone al movimiento del Navio.

Todos los demás puntos en que estriba su perfecta construccion, todo quanto pertenece á sus diferentes partes, está tratado con particular maestría. Pero como su fin principal fue dar reglas que tuviesen en la práctica aplicacion, ó pudiesen practicar los rudos Marineros, puso al fin de su tratado un resumen de todas las determinaciones que con el socorro del cálculo habia conseguido. Escusára esta recapitulacion si llevára solo la mira, como otros muchos, de hacer alarde de gran calculador. Eralo sin duda, pero en su Examen Marítimo lo fue por necesidad, para salir (es espresion suya) del laberinto de escollos sobre que caminaba. Despues de guardar á la verdad el debido miramiento, quiso sacarla de entre los abrojos, donde pocos se hubieran arriesgado á buscarla.

En

En los mas de los hombres hay robustez para aguantar mucho tiempo sin detrimento de su constitucion una continuada contencion de ánimo ó fatiga corporal, pero las dos juntas han de rendir muy pronto la naturaleza mas robusta, y así fueron minando insensiblemente la de D. Jorge Juan. Padecia de algunos años atrás insultos de un cólico bilioso, acompañado de tan perversos accidentes, que era facil de pronosticar el paradero de su frecuencia. Su consuelo en estos lances le hallaba en su conformidad christiana, y su alivio en los ayres nativos; que aun para recobrarse habia de perder el descanso. Venció por último la obstinada y cruel dolencia llevándose á D. Jorge Juan quasi de repente á los sesenta años cumplidos de su edad.

Fue de estatura y corpulencia medianas, de semblante agradable y apacible, aseado sin afectacion en su persona y su casa, parco en el comer, el igual de sus subalternos, el amigo de sus criados, y por decirlo todo en menos palabras, sus costumbres fueron las de un Filósofo Chris-

tia-

tiano. Quando se le hacía alguna pregunta facultativa, parecía en su ademán que era él quien buscaba la instruccion. Si se le pedia informe sobre algun asunto, primero se enteraba, despues meditaba, y últimamente respondía. De la madurez con que daba su parecer provenia su constancia en sostenerle; muy distinto de aquellos contemplativos que vacilando entre la ambicion y la esperanza nunca tienen dictamen propio, y sacrifican constantemente á respetos humanos su razon. No apreciaba á los hombres por la Provincia de donde eran naturales; era el valedor, quasi el agente de todo hombre util. Miraba no con desprecio (en él no cabía), sí con lástima á muchos Españoles de corazon tan ceñido, como limitados de entendimiento que no conocen mas patria que la Ciudad, la Villa, la Aldea, el rincon donde nacieron; y aunque natural del Reyno de Valencia, no era Valenciano, era Español.

INDICE

De las materias que contiene este Tomo I.

Adi-

y

PRIN-

ERRATAS.

Página.	Linea.	Dice.	Léase.
21	29	27	72
48	16	8	5
54	32	digimos	digéremos.
199	30	*AB*	*BD*.
254	4 *á la marg.*	102	104.
359	14	*DI*	*BI*.
380	29	*Kb*	*Mb*.
388	24 *á la marg.*	200	220.
406	16	$b^2(a'-x^2)$	$b^2(a^2-x^2)$.
466	19	$\frac{ydy}{ax}$	$\frac{ydy}{dx}$
492	13	curva	curvatura.
496	15	es	no es.
528	15	*ap*	*2ap*.
537	27	grados	arcos.
538	6 *á la marg.*	308	309.
543	33	*AB*	*AD*.

NOTA.

Un número arábigo dentro de un paréntesis, en esta forma (796) como se vé en la página 342, quiere decir que el fundamento de lo que allí se dice está en el párrafo 796 del mismo Tomo.

PRIN-

PRINCIPIOS DE ARISMETICA.

Nociones preliminares que declaran la naturaleza, y las diferentes especies de los Números.

1. Llámase, en general, *cantidad*, todo lo que admite aumento ó diminucion, ó puede ser mayor ó menor, como la estension, la duracion, el peso &c. La cantidad es el obgeto de las Matemáticas, pero como esta ciencia considera la cantidad espresada de varios modos, de aquí proviene la diferencia de los muchos ramos que esta facultad abraza. El ramo que considera la cantidad en quanto la representan los números, se llama *Arismética*.

2. *Es*, pues, *la Arismética la ciencia de los números*: considera su naturaleza, y sus propiedades; y suministra medios fáciles, así para representar los números, como para componerlos ó resolverlos, que es lo mismo que *calcularlos*.

3. No es posible hacerse cargo de lo que son los números, sin saber primero qué cosa sea la *unidad*.

4. Es la unidad una cantidad que se toma (las mas veces á arbitrio) para que sirva de término de comparacion respecto de todas las cantidades de una misma especie: así, quando decimos de un cuerpo que pesa *cinco* libras, la libra es la unidad; es la cantidad con la qual se compara el peso de dicho cuerpo; se hubiera podido tomar igualmente la onza por unidad, en cuyo caso *ochenta* hubiera representado el peso de el mismo cuerpo, porque, segun se verá mas adelante, cinco libras componen ochenta onzas.

El

5. El *número* espresa de quántas unidades ó partes de la unidad se compone una cantidad.

Si una cantidad consta de unidades enteras, el número que la espresa se llama *número entero*: si se compone de unidades enteras y partes de la unidad, se llama *número fraccionario*; y sí solo consta de partes de la unidad, se llama *fraccion*, ó *quebrado*: *tres y medio* forman un *número fraccionario*: *tres quartos* componen un *quebrado*.

6. Llamamos *número abstracto* todo número que pronunciamos sin determinar la especie de las unidades de que se compone; así *tres* ó *tres veces*, *quatro* ó *quatro veces*, son *números abstractos*; pero si al pronunciar un número, tambien espresamos la especie de las unidades que le forman, como quando decimos *quatro pesos*, *seis hombres*, el número se llama *concreto*.

De la Numeracion.

7. La *numeracion* es el arte de espresar todos los números con una cantidad limitada de nombres y caracteres. Estos caracteres se llaman *guarismos*.

8. Los caracteres de que se usa en la numeracion actual, y los nombres de los números que representan, son como se sigue:

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
cero,	uno,	dos,	tres,	quatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve.

Para espresar con estos caracteres todos los demas números, han convenido los Arisméticos en reducir ó juntar diez unidades en sola una, á la qual han dado el nombre de *decena*, y en contar por decenas del mismo modo que por unidades, esto es, en contar una decena, dos decenas, tres decenas &c. hasta nueve: en valerse, para representar estas nuevas unidades, de los mismos guarismos que para pintar las simples unidades, pero en distinguirlas por el lugar en que se escriben, poniéndolas al lado de las unidades simples ácia la izquierda.

Segun esto, para espresar *cinquenta y quatro*, que contiene cinco decenas y quatro unidades, han convenido en escribir 54. Para espresar *sesenta*, que contiene un número cabal de decenas sin unidad alguna, escriben 60, poniendo un cero, que da á entender que no hay unidades simples, y hace que el número 6 represente decenas. A este modo se puede contar hasta *noventa y nueve* inclusivè.

9. Observemos de paso una propiedad de la numeracion actual; y es, que un guarismo puesto al lado de otro ácia la izquierda, ó despues del qual se sigue un cero, representa un número diez veces mayor que si estuviera solo.

10. Desde 99 podemos contar hasta *novecientos noventa y nueve*, en virtud de un convenio semejante. Con diez decenas compondremos una sola unidad, y la llamaremos *centenar*, porque diez veces diez son ciento; contaremos estos centenares desde uno hasta nueve, y los espresaremos con los mismos guarismos, pero colocando estos guarismos al lado de las decenas ácia la izquierda.

A este modo, para representar *ochocientos cinquenta y nueve*, que contienen ocho centenares, cinco decenas, y nueve unidades, escribiremos 859. Si quisiésemos representar *ochocientos nueve* que contiene ocho centenares, ninguna decena, y nueve unidades, escribiríamos 809; quiero decir, que pondríamos un cero en lugar de las decenas que no hay. Si faltasen tambien las unidades, tendríamos que poner dos ceros; y así para espresar *ochocientos*, escribiríamos 800.

Acabamos de decir que para pintar ochocientas y nueve unidades, se debe escribir 809, poniendo un cero en lugar de las decenas que no hay. Es facil percibir, despues de lo dicho, la razon de esta práctica; por-

porque si quando quiero pintar ochocientos y nueve, no pusiese caracter alguno en lugar de las decenas que no hay, escribiria 89, en cuyo número el guarismo 8 espresaria decenas (9), y no centenares segun me propongo; luego para que 8 esprese centenares, ó valga ochocientos, he de poner un cero entre el 8 y el 9. Aplíquese este razonamiento á todos los casos semejantes.

11. Repárese tambien que en virtud de este convenio, un guarismo al qual se siguen otros dos, ó dos ceros, representa un número cien veces mayor que si estuviera solo.

12. Desde *novecientos noventa y nueve* se puede contar, usando del mismo artificio, hasta *nueve mil novecientos noventa y nueve*, formando con diez centenares una unidad, que llamaremos *millar*, porque diez veces ciento son mil; contando estas unidades como se hizo antes, y representándolas con los mismos guarismos puestos al lado de los centenares ácia la izquierda.

Así para representar *siete mil ochocientos cinquenta y nueve*, se escribirá 7859; para representar *siete mil y nueve*, se escribirá 7009; y para pintar *siete mil*, pondremos 7000; donde se vé que un guarismo, al qual se le siguen otros tres, ó tres ceros, representa un número mil veces mayor que si estuviera solo.

13. Practicando este artificio de comprehender diez unidades de cierta orden en una sola unidad, y colocar estas nuevas unidades en lugares tanto mas ácia la izquierda quanto mayor es su orden, se consigue espresar por un método uniforme, y con solos diez caracteres todos los números enteros imaginables.

14. Para pronunciar ó leer facilmente un número espresado con quántos guarismos se quisiere, se partirá con el pensamiento en porciones de tres guarismos cada una, procediendo de la derecha á la izquierda: se

la

la darán á cada porcion los nombres siguientes, empezando por la derecha, *unidades*, *millares*, *millones*, *millares de millones*, *billones*, *millares de billones*, *trillones* &c. El primer guarismo de cada porcion, empezando siempre por la derecha, llevará el nombre de la porcion, el segundo el de decenas, y el tercero el de centenares.

Así, se empezará leyendo por la izquierda, se leerá cada porcion como si estuviera sola, y al fin de cada una se pronunciará el nombre de esta misma porcion: por egemplo, para pronunciar el número siguiente

millar de billon,	billones,	millar de millon,	millones,	millar,	unidades,
23,	456,	789,	234,	565,	456,

se dirá veinte y tres *millares de billon*, quatrocientos cinquenta y seis *billones*, setecientos ochenta y nueve *millares* de *millon*, doscientos treinta y quatro *millones*, quinientos sesenta y cinco *mil*, quatrocientos cinquenta y seis *unidades*.

15. De la numeracion que acabamos de declarar, y que es de puro convenio, se infiere que yendo de la derecha á la izquierda, las unidades de que se compone cada número, van siendo diez veces mayores, y que por consiguiente para hacer que un número sea diez veces, cien veces, mil veces mayor, basta poner á continuacion del guarismo de sus unidades, uno, dos, tres &c. ceros; al contrario retrocediendo de la izquierda á la derecha, las unidades van siendo diez veces menores.

16. Tal es la numeracion actual: es el fundamento de todos los demás modos de contar, bien que en muchas artes no se sigue siempre el método de contar solo por decenas, por decenas de decenas &c.

17. Para valuar las cantidades menores que la unidad que se ha escogido, se parte esta en otras unidades menores, cuyo número puede ser el que se quisiere,

 con

con tal que con ellas se puedan medir las cantidades que el calculador se propone; pero el punto al qual se debe principalmente atender en estas divisiones, consiste en hacer que sean los cálculos los mas acomodados que posible sea; por este motivo en vez de partir la unidad en muchas partes, con el fin de valuar las mas pequeñas, se parte solo en cierto número de partes, se subdividen estas en otras, y estotras en otras aún menores. Por este método se divide primero el peso en 15 partes que llamamos *reales*, el real en 34 partes que llamamos *maravedis*. En las medidas de peso se divide la libra en 2 *marcos*, el marco en 8 *onzas*, la onza en 8 *dracmas* &c. de suerte, que en el primer caso se cuenta por quince, y por treinta y quatro; en el segundo, por dos, por octavas &c.

18. Un número, cuyas partes se refieren á diferentes unidades, se llama *número complexo*; y llamaremos número *incomplexo*, al que no espresare sino una especie de unidad. 8 rs., ú 8 reales son un número incomplexo; 8 rs., 15 mrs., ú 8 reales 15 maravedises son un número complexo.

19. Cada arte divide á su modo la unidad principal que ha escogido. Las subdivisiones de la vara son distintas de las del dia, de la hora; estas no son las mismas que las del marco, y así prosiguiendo. Mas adelante declararemos todas estas divisiones.

20. Hay otro modo de dividir la unidad y sus partes, muchísimo mas acomodado que todos estos para el cálculo, que tambien declararemos á su tiempo.

Operaciones de la Arismética.

21. Sumar, restar, multiplicar, y partir son las quatro operaciones fundamentales de la Arismética. Todas las cuestiones que se pueden proponer sobre los números se reducen á egecutar algunas de estas operaciones, ó todas ellas. Importa, pues, entenderlas perfectamente, y hacerse diestro en practicarlas.

22. El fin á que se dirige la Arismética es, segun llevamos dicho, enseñar medios para calcular con facilidad los números. Consisten estos medios en reducir el cálculo de los números mas compuestos al cálculo de los números mas simples, ó espresados con el menor número de guarismos que sea posible. Vamos á declarar cómo esto se egecuta, dando primero reglas para calcular los enteros, y despues enseñaremos cómo se calcúlan los quebrados.

Operaciones de la Arismética por enteros.

De la Adicion de los Números enteros.

23. Quando calculamos muchos números con la mira de espresar con uno solo el valor de todos, egecutamos una *adicion*.

Si los números que se han de sumar no contienen sino un guarismo, no se necesita regla alguna; pero quando constan de muchos guarismos, se halla su valor total, llamado *suma*, practicando la regla siguiente.

Escríbanse, unos encima de otros, todos los números propuestos, de modo que los guarismos de las unidades de cada uno estén en una misma linea de arriba abajo, que llamaremos *columna*; practíquese lo propio con las decenas, los centenares &c, y tírese por debajo de todo una linea.

Súmense primero todos los números que ocupan la columna de las unidades; si la suma no pasa de 9, escríbase debajo; si pasa de 9, contendrá decenas; escríbase debajo, en este caso, lo que hubiere á mas de las decenas: cuéntense estas decenas por otras tantas unidades, y júntense con los números de la columna in-

inmediata: practíquese con los números de esta segunda columna la misma regla que se practicó respeto de los de la primera, y váyase prosiguiendo así de columna en columna, hasta la última, debajo de la qual se escribirá la suma conforme saliere. Los egemplos aclararán esta regla.

Propongámonos sumar 54925 con 2023: escribiremos estos dos números como se ve.

Exemplo 1º

54925	
2023	
56948	suma.

Y despues de tirada la linea, empezaré por las unidades, diciendo 5 y 3 son 8, que escribiremos debajo de la columna que ocupan dichas unidades.

Pasaremos á la de las decenas, en la qual diremos 2 y 2 son 4, que pondremos debajo.

En la columna de los centenares diremos 9 y 0 son 9, que escribiremos debajo de esta columna.

En la columna de los millares diremos 4 y 2 son 6, que escribiremos debajo de dicha columna.

Finalmente en la columna de las decenas de mil, diremos 5 y nada son 5, que escribiremos igualmente debajo.

El número 56948 hallado por esta operacion, es la suma de los dos números propuestos, porque incluye sus unidades, sus decenas, sus centenares, sus millares, y sus decenas de millar que hemos juntado succesivamente.

Se me pide la suma de los quatro números siguientes 6903, 7854, 953, 7327: escríbolos como se vé:

Exemplo 2º

6903	
7854	
953	
7327	
23037	suma.

Y empezando, como antes, por la derecha, digo 3 y 4 son 7, y 3 son 10, y 7 son 17; escribo las 7 unidades debajo de la primera columna, y llevo la decena para juntarla, como unidad, con los números de la columna que se sigue, que son tambien decenas.

Pasando á la segunda columna, digo 1 que llevo y 0 son 1, y 5 son 6, y 5 son 11, y 2 son 13; escribo 3 debajo de esta columna, y en lugar de la decena, llevo una unidad que junto con la columna inmediata, diciendo 1 y 9 son 10, y 8 son 18, y 9 son 27, y 3 son 30; pongo 0 debajo de esta columna, y en lugar de las tres decenas, llevo tres unidades, que junto con la columna siguiente, diciendo igualmente 3 y 6 son 9, y 7 son 16, y 7 son 23; pongo 3 debajo de esta columna, y como no se sigue otra, escribo en un lugar mas adelante las dos decenas que deberian juntarse con la columna siguiente, si la hubiera. El número 23037 es la suma de los quatro números propuestos. Corolario

De la Sustraccion de los números enteros.

24. La *sustraccion* es una operacion en que se resta un número de otro. Lo que resulta de esta operacion se llama *resta*, *exceso*, ó *diferencia*.

Para hacer esta operacion, se escribirá el número que se quiere restar debajo del otro, del mismo modo que en la adicion; y tirando una linea por debajo, se quitará, yendo de la derecha á la izquierda, cada número inferior del superior correspondiente; esto es, las

las unidades de las unidades, las decenas de las decenas, &c. se escribirá cada resta debajo, por el mismo orden, y cero quando no restare nada.

Si el guarismo inferior fuere mayor que su correspondiente superior, se le añadirán á este diez unidades, sacándolas con el pensamiento de su inmediato ácia la izquierda, el qual por esta razon deberá considerarse como una unidad menor en la operacion siguiente.

Restemos 5432 de 8954: escribiremos estos dos números como se sigue Exemplo 1º

Minuendo 8954
Subtraendo 5432
Residuo diferencia ..... 3522 resta.

y empezando por el guarismo de las unidades, diremos, quitando 2 de 4 resta 2 que pondremos debajo: pasando despues á las decenas, diremos, quitando 3 de 5, resta 2 que escribiremos debajo de las decenas. Llegando á la tercera columna, diremos, quitando 4 de 9, resta 5, y le pondremos debajo de esta columna. Finalmente pasaremos á la quarta columna, y diremos, quitando 5 de 8, resta 3, y le escribiremos debajo del 5, y hallarémos que restando 5432 de 8954 la resta será 3522.

Quiero restar 7987 de 27646 Exemplo 2º

escribo. Minuendo 27646
Subtraendo ..... 7987.
Diferencia ..... 19659 resta.

como no puedo quitar 7 de 6, le añado al 6 diez unidades, que saco del guarismo 4 que está inmediato ácia la izquierda, y digo, restando 7 de 16, resta 9 que pongo debajo de 7.

Pasando á las decenas, no diré yá restando 8 de 4, sino diré restando 8 de 3 solamente, porque al 4 le

le quité una unidad para añadirla al 6; como no se puede quitar 8 de 3, le añadiré tambien al 3 diez unidades sacadas del guarismo 6 que está inmediato ácia la izquierda, al qual se le quitará para este fin una unidad; y digo, restando 8 de 13, resta 5, y pongo 5 debajo del 8. Pasando á la tercera columna, digo igualmente, quitando 9 de 5, ó mejor, quitando 9 de 15 (practicando lo propio que antes), resta 6 que escribo debajo del 9.

Llego á la quarta columna, y digo, por la misma razon, quitando 7 de 6, ó por mejor decir de 16, queda 9 que pongo debajo del 7; y como no hay nada que quitar en la quinta columna, escribo debajo de esta columna, no 2, porque á este 2 se le ha quitado una unidad, sino solo 1, y saco la resta 19659.

25. Si el guarismo del qual se ha de quitar una unidad fuese cero, se tomaría esta unidad no del cero, sí del primer guarismo significativo que se le siguiese ácia la izquierda; pero aunque entonces se toma 100, ó 1000, ó 10000, segun hay uno, dos, ó tres ceros uno despues de otro, no por esto se dejará de proceder como se ha dicho; quiero decir, que no se le añadirán mas de 10 al guarismo que da motivo á este empréstito; y como se supone que estos 10 se han tomado de los 100, ó de los 1000 &c. para emplear los 90, ó los 990 que restaren*, se contarán los ceros siguientes por otros tantos 9, como lo declarará el egemplo siguiente. Exemplo 3º

Si de 20064
quiero restar 17489
2575 resta.

Diré desde luego, quitando 9 de 4, ó de 14 (pidiendo prestado al guarismo siguiente) resta 5. Despues ten-

tengo que restar 8 de 5, pero como esto no se puede, ni tampoco se puede pedir prestado al carácter inmediato que es cero, tomaré una unidad del 2, que vale mil respecto del guarismo 6 en que estoy. De este millar no se le añadirán sino 10 unidades al 6 que ya no vale sino 5, y diré quitando 8 de 15 resta 7.

Como del millar de unidades que tomé prestado, no he añadido sino 10 al 5, emplearé las 990 restantes para restar de ellas los números que están debajo de los ceros; lo que viene á ser lo mismo que si tomára cada cero por 9: así diré quitando 4 de 9, resta 5; despues, quitando 7 de 9, resta 2; y finalmente quitando 1 de 1, no queda nada.

Corolario

De la Prueba de la Adicion y de la Sustraccion.

26. *Probar* una operacion arismética, es hacer otra operacion para asegurarse de que es cabal el resultado de la primera.

Egecútase la prueba de la adicion juntando otra vez por partes, pero empezando por la izquierda, las sumas que se han juntado. Se quita el total de la primera columna de la parte que la corresponde en la suma inferior: se escribe debajo la resta que se reduce con el pensamiento á decenas, para juntarla con el guarismo siguiente de la misma suma ácia la derecha, y del total se resta la suma de la columna superior; se prosigue del mismo modo hasta la última columna, cuya totalidad quitada del número correspondiente no debe dejar resta alguna.

Así, despues de hallar arriba que la suma de los quatro números

6903

	6903
	7854
	953
	7327
Es.............	23037
	~~3~~~~1~~~~1~~~~0~~

Para comprobar este resultado, sumo los mismos números, empezando por la izquierda; y digo 6 y 7 son 13, y 7 son 20, quitándolos de 23, resta 3 ó tres decenas, que con el guarismo siguiente son 30. Paso á la segunda columna, y digo 9 y 8 son 17, y 9 son 26, y 3 son 29 que resto de 30; resta 1 ó una decena, que con el guarismo siguiente hace 13. Junto todos los números de la tercera columna, diciendo 5 y 5 son 10, y 2 son 12, quitándolos de 13 resta 1 ó una decena, que con el guarismo siguiente hace 17; sumo del mismo modo todos los números de la quarta columna, diciendo 3 y 4 son 7, y 3 son 10, y 7 son 17, quitándolos de 17 no resta nada: de lo que infiero que es exacta la primera operacion.

Se infiere que está bien hecha la primera operacion, quando despues de esta prueba no resta nada, porque quitando succesivamente todos los millares, todos los centenares, todas las decenas y todas las unidades de que se habia formado la suma, es preciso que al cabo no reste nada.

27. La prueba de la sustraccion se hace sumando la resta hallada con el número que se restó; si fue bien hecha la primera operacion, debe salir el número del qual se restó el otro; así, veo que en el tercer egemplo arriba puesto, está bien hecha la operacion, porque sumando 17489 (número restado) con la resta 2575, vuelve á salir 20064, de cuyo número se restó el primero.

La razon de esto es muy obvia, porque si añado

á

á un número el exceso que le lleva otro mayor, la suma ha de ser igual al número mayor.

$$\begin{array}{r} 20064 \\ 17489 \\ \hline 2575 \\ \hline 20064 \end{array}$$

De la Multiplicacion.

28. *Multiplicar* un número por otro, es tomar el primero de los dos, tantas veces quantas unidades hay en el segundo. Multiplicar 4 por 3, es tomar tres veces el número 4.

29. El número que se quiere multiplicar se llama *multiplicando*; aquel por el qual se multiplica, se llama *multiplicador*; y lo que resulta de la operacion se llama *producto*.

El multiplicando, y el multiplicador se llaman tambien *los factores* del producto; así 3 y 4 son los factores de 12, porque 3 veces 4 son 12.

30. Manifiesta la definicion que hemos dado de la multiplicacion, que se podria practicar esta operacion escribiendo tantas veces el multiplicando quantas unidades hay en el multiplicador, y hacer despues la adicion; por egemplo, para multiplicar 7 por 3, se podria escribir

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

Y la suma 21 que resulta de esta adicion, sería el producto.

Pero quando el multiplicador es algo grande, la operacion sería muy larga por este método: lo que propiamente llamamos *multiplicacion*, es el método de sacar el mismo resultado por un camino mas breve.

31. Quando se consideran los números de un modo abstracto, esto es, sin atender á la naturaleza de sus unidades, es igual tomar por multiplicando ó por multiplicador el que se quiera de los dos números propuestos; por egemplo, si hemos de multiplicar 4 por 3, es lo mismo multiplicar 4 por 3, que 3 por 4; el producto siempre será 12: con efecto, 3 veces 4 no son otra cosa que el triplo de 1 vez 4; y 4 veces 3 son el triplo de 4 veces 1; pero es evidente que 1 vez 4 y 4 veces 1 son una misma cosa; y lo mismo se puede decir de otro número qualquiera.

32. Pero quando por los términos de la cuestion, el multiplicando y el multiplicador son números concretos, importa hacer distincion entre el multiplicando y el multiplicador: este cuidado es particularmente necesario en la multiplicacion de los números complexos, conforme veremos despues.

Esta distincion es muy facil de hacer: la cuestion que dá motivo á la multiplicacion propuesta, manifiesta por sí qual es la cantidad que se ha de tomar muchas veces, esto es, el multiplicando, y qual es la que seña la quantas veces la primera se debe repetir, esto es, qual es el multiplicador.

33. Como el oficio del multiplicador es espresar quantas veces se debe tomar el multiplicando, siempre es un número abstracto: así quando se pregunta quanto importan 52 varas de paño á 36 reales la vara; se vé que el multiplicando es 36 reales, que se han de repetir 52 veces, sea que 52 represente varas, ú otra cosa qualquiera.

34. Por consiguiente el producto que resulta de la repetida adicion del multiplicando, espresará unidades de la misma naturaleza que el multiplicando.

Concluida esta digresion sobre la naturaleza de las uni-

unidades del producto y de sus factores, declarémos como se halla este producto.

35. La regla de la multiplicacion de los números mas compuestos, se reduce á multiplicar un número de un solo guarismo por otro número tambien de un solo guarismo. Es, pues, muy conducente egercitarse en hallar el producto de los números espresados con un solo guarismo, juntando muchas veces un número con el mismo número. Se puede tambien hacer uso de la tabla siguiente, que algunos atribuyen á Pytágoras.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La primera columna de esta tabla, empezando á mano izquierda, se forma juntando 1 con 1 succesivamente.

La segunda, juntando del mismo modo 2.

La tercera practicando lo propio con 3, y así prosiguiendo.

Pa-

36. Para hallar por medio de esta tabla el producto de dos números compuestos de un solo guarismo cada uno, se buscará el uno de dichos dos números, pongo por caso el multiplicando, en la fila superior, y desde dicho número se bajará perpendicularmente hasta llegar enfrente del multiplicador que se hallará en la primera columna. El número que se hallare con esta circunstancia, será el producto; así, para hallar, por egemplo, el producto de 9 por 6, ó, quanto hacen 6 veces 9, voy bajando desde el 9 que está en la primera fila, hasta llegar enfrente del 6 que está en la primera columna; el número 54 al qual voy á parar, manifiesta que 6 veces 9 son 54.

Esto supuesto, ya podemos declarar la multiplicacion de los números que contienen muchos guarismos.

De la Multiplicacion por un número de un solo guarismo.

37. Escríbase el multiplicador, que segun suponemos no contiene sino un guarismo, debajo del multiplicando, donde se quisiere; bien que para dar una regla fija, supondrémos que siempre se escribe debajo de las unidades.

Multiplíquese primero el número de las unidades por dicho multiplicador; y si el producto no contiene sino unidades, escríbase este producto debajo; si contiene unidades y decenas, escríbanse solas las unidades, y contando las decenas por otras tantas unidades, llévense.

Multiplíquese igualmente el número de las decenas del multiplicando, y añádase al producto el número de decenas que se lleva; escríbase la suma debajo, si puede espresarse con un solo guarismo; si no, escríbanse solas las unidades de este producto, y llévense las decenas que son centenares, para juntarlas con el producto siguiente, que tambien espresará centenares.

Pro-

Prosígase multiplicando succesivamente, por la misma regla, todos los guarismos del multiplicando; la serie de los guarismos que se hubieren escrito espresará el producto.

¿Se pregunta quántos pies valen 2864 varas? cada vara consta de tres pies. Se reduce la question á tomar 3, 2864 veces, ó lo que es lo mismo (31) á tomar 2864 pies, 3 veces.

Escribo, pues, Multiplicando 2864 multiplicando.
Multiplicador 3 multiplicador.
Producto.....8592 producto.

Y digo, empezando por las unidades, 3 veses 4 son 12: pongo 2, y llevo una unidad por la decena.

2.° 3 veces 6 son 18, y 1 que llevo son 19: pongo 9 y llevo 1.

3.° 3 veces 8 son 24, y 1 que llevo son 25; pongo 5 y llevo 2.

4.° 3 veces 2 son 6, y 2 que llevo son 8 que escribo como se vé. El número 8592 es el producto que buscaba, ó el número de pies que valen las 2864 varas; pues contiene 3 veces las 4 unidades, 3 veces las 6 decenas, 3 veces los 8 centenares, y 3 veces los 2 millares, y por consiguiente 3 veces todo el número 2864.

De la Multiplicacion por un número de muchos guarismos.

38. Quando el multiplicador se compone de muchos guarismos, se debe practicar succesivamente con cada uno de estos guarismos, lo que acabamos de declarar para el caso en que se compone de solo uno, empezando siempre por la derecha: se multiplicarán, pues, primero todos los guarismos del multiplicando, por el guarismo de las unidades del multiplicador, despues por el de las decenas, y este segundo producto se escribirá debajo del primero; pero como debe espresar de-

decenas, pues se multiplica por decenas, se escribirá el primer guarismo de este segundo producto debajo de las decenas; y los demas guarismos mas ácia la izquierda.

El tercer producto que se sacará multiplicando por centenares, se pondrá debajo del segundo, pero en un lugar que está una columna mas ácia la izquierda; la misma ley se guardará para con los demás.

Hechas todas estas multiplicaciones, se sumarán los productos particulares que de ellas hubieren resultado, y su suma será el producto total.

Se ha de multiplicar 65487
por.................6958

523896
327435
589383
392922

455658546 producto.

Multiplico primero 65487 por el número 8 de las unidades del multiplicador, y escribo succesivamente debajo de la linea los guarismos del producto 523896 que hallo practicando la regla propuesta (37).

Multiplico igualmente el número 65487 por el segundo guarismo 5 del multiplicador, y escribo el producto 327435, debajo del primer producto; pero colocando el primer guarismo 5 debajo de las decenas del primer producto.

Multiplicando tambien 65487 por el tercer guarismo 9, escribo el producto 589383 debajo del precedente, pero colocando el primer guarismo 3 en la columna de los centenares, porque el número que sirve de multiplicador, espresa centenares.

Finalmente, multiplico 65487 por el último guarisrismo 6 del multiplicador, y escribo el produĉto 392922 debajo del antecedente tambien en una columna mas ácia la izquierda, á fin de que su último guarismo esté en la de los millares, porque el guarismo que sirve de multiplicador espresa millares: últimamente sumo todos estos produĉtos, y me sale 455658546 para el produĉto de 65487 multiplicado por 6958, esto es, para el valor de 65487 tomado 6958 veces. Y con efeĉto, en la primera operacion se tomó 65487, 8 veces; 50 en la segunda; 900 en la tercera, y 6000 en la última.

39. Si los últimos caraĉteres del multiplicando ó del multiplicador, ó de ambos fuesen ceros, se abreviará la multiplicacion, egecutándola como si no hubiese tales ceros, pero despues se escribirán todos á continuacion del produĉto.

Se trata de multiplicar	6500
por	350
	325
	195
	2275000

Multiplico solo 65 por 35, y hallo 2275, á continuacion de cuyo número escribo los tres ceros que son la suma de los que hay en el multiplicando y el multiplicador juntos.

Y de hecho, el multiplicando 6500 representa 65 centenares; así quando se multiplica 65, se debe tener presente que el produĉto ha de espresar centenares. El multiplicador 350, espresa 35 decenas; así quando se multiplica por 35, se debe tener presente que el produĉto debe espresar decenas; contendrá pues este produĉto decenas de centenares, esto es millares; ha de llevar por consiguiente tres ceros: aplícase este raciocinio á los demás casos.

40. Si entre los guarismos del multiplicador hubie-

biese ceros; como de la multiplicacion por estos ceros no resultarían sino ceros, se escusará escribirlos en el produĉto; y pasando desde luego á egecutar la multiplicacion por el primer caraĉter significativo que se siguiese despues de dichos ceros, se escribirá mas ácia la izquierda su produĉto, tantas columnas mas una, quantos ceros hubiere de seguida en el multiplicador; quiero decir, dos columnas mas ácia la izquierda, si hubiese un cero, tres si hubiese dos &c.

Si se ha de multiplicar	42052
por	3006
	252312
	126156
	126408312

Despues de multiplicar por 6, y escribir el produĉto 252312, se multiplicará al punto por 3, pero se escribirá el produĉto 126156, de modo que esprese millares; se deberá, pues, escribir tres columnas mas ácia la izquierda, porque son dos los ceros interpuestos entre los caraĉteres significativos del multiplicador.

Algunos usos de la Multiplicacion.

41. Entre varios usos de la multiplicacion sirve para hallar, en general, el valor total de muchas unidades, quando se conoce el valor de cada una. Por egemplo. 1.° quanto han de costar 5843 varas de obra, á razon de 54 rs. la vara? Se debe multiplicar 54 rs. por 5843, ó (31) 5843 rs. por 54; el precio total que se pide será 315522 rs. 2.° Quanto pesan juntos 5954 maderos, en el supuesto de que pesa 72 libras cada madero? Se han de multiplicar 72 libras por 5954, ó 5954 por 72; saldrá que el peso total de los 5954 maderos es 428688 libras.

 Sir-

42. Sirve tambien la multiplicacion para reducir unidades de especie determinada á unidades de menor especie. Pongo por egemplo, para reducir los pesos á reales, y los reales á maravedis; las varas á pies, estos á pulgadas, las pulgadas á lineas; los dias á horas, estas á minutos, los minutos á segundos; suelen ocurrir ocasiones en que son indispensables estas reducciones. Daremos algunos egemplos.

Si se nos propone que reduzcamos 8 pesos 13 reales y 9 maravedis á maravedis; como el peso vale 15 reales, se multiplicarán los 8 pesos por 15 (31), cuya operacion dará 120 rs. con los quales juntando los 13 rs. saldrán 133 rs. cuya cantidad se multiplicará por 34, porque cada real vale 34 maravedis; y saldrán 4522 maravedis, que juntos con los 9 maravedis, darán 4531 maravedis, y estos son los que componen los 8 pesos 13 rs. y 9 maravedis propuestos.

Si se pregunta quantos minutos hay en un año comun ó en 365 dias, 5 horas, 48 minutos, ó 365^{d} 5^{h} 48^{m}; como el dia se compone de 24 horas, se multiplicará 24^{h} por 365, y al producto 8760^{h} se añadirán 5^{h}; se multiplicará el total 8765 por 60 (39), porque en la hora hay 60 minutos, y saldrán 525900, á los que se añadirán 48 minutos, y saldrán 525948 minutos que componen un año entero.

43. Antes de concluir tengo por util prevenir, que estas espresiones *duplicar*, *triplicar*, *quadruplicar* &c, significan lo mismo que multiplicar por 2, por 3, por 4 &c.

De la Division de los números enteros.

44. *Dividir* un número por otro, es, en general, buscar quantas veces en el primero de dichos dos números cabe el segundo.

El número que se quiere partir se llama *dividendo*: el número por el qual se parte, *divisor*; y el que espre-

presa quantas veces cabe el divisor en el dividendo, se llama *quociente*.

No siempre se lleva en la division la mira de saber quantas veces un número cabe en otro; pero en todos los casos se egecuta la division como si fuera este el fin; por lo que se la puede considerar en todos los casos, como la operacion por la qual se halla quantas veces cabe el divisor en el dividendo.

Infiérese de aquí 1.° Que quanto mayor fuere el divisor, siendo uno mismo el dividendo, tanto menor será el *quociente*. 2.° Que si se multiplica el divisor por el quociente, el producto que saliere será el dividendo, porque con esto se toma el divisor tantas veces como cabe en el dividendo: esto se verifica generalmente, ya sea el quociente un número entero, ya sea un número fraccionario.

Por lo que mira á la especie de las unidades del quociente, no se deben apreciar, ni por las que espresa el dividendo, ni por las que espresa el divisor; porque siendo unos mismos el dividendo y el divisor, el quociente, que siempre será un mismo número, podrá ser muy diverso respecto de la naturaleza de sus unidades, segun fuere la cuestion que diere motivo á la division.

Por egemplo, si se trata de saber quantas veces en 8 pesos caben 4 pesos, el quociente será un número abstracto que espresará dos veces. Pero si se pregunta quantas varas de obra se podrán mandar hacer por 8 pesos, á razon de 4 pesos la vara, el quociente será 2 varas, que es un número concreto, y cuyas unidades ninguna relacion tienen ni con las del dividendo, ni con las del divisor.

Pero se echa de ver al mismo tiempo, que la cuestion que dá motivo á la division propuesta, determina la naturaleza de las unidades del quociente.

De la Division de un número compuesto de muchos guarismos por otro que no tiene sino uno.

45. La operacion que vamos á esplicar, supone que se sepa hallar quantas veces un número de solo un guarismo cabe en un número de uno ó dos guarismos. En esto debe estar corriente el que supiere de memoria los productos que resultan de multiplicar uno por otro dos números que no tienen mas que un guarismo cada uno. Se puede tambien conseguir por medio de la tabla que dimos antes (35). Por egemplo, si quiero saber quantas veces 9 cabe en 74, busco el divisor 9 en la fila superior, y voy bajando perpendicularmente hasta encontrar el número que mas se acerca á 74, que es 72; el número 8 que está enfrente de 72, en la primera columna, espresa el número de veces que 9 cabe en 74, ó el quociente que busco.

Esto supuesto, la division de un número de muchos guarismos por un número de un guarismo no mas, se practica del modo siguiente.

Escríbase el divisor al lado del dividendo, sepárese el uno del otro con una linea de arriba abajo, y tírese otra por debajo del divisor donde se escribirán los guarismos del quociente, á medida que se hallaren.

Tómese el primer guarismo del dividendo ácia la izquierda, ó los dos primeros guarismos, si el divisor no cupiere en el primero.

Búsquese quantas veces cabe el divisor en dicho primer guarismo ó dichos dos primeros; escríbase este número de veces debajo del divisor.

Multiplíquese el divisor por el quociente que se hubiere escrito, y póngase el producto debajo de la parte del dividendo que hubiere servido.

Finalmente, réstese el producto de la parte superior del dividendo á la qual corresponde, y habrá una resta.

Al

Al lado de esta resta bágese el guarismo siguiente del dividendo principal; y saldrá un segundo dividendo parcial, con el qual se practicará lo propio que con el primero, escribiendo el quociente al lado del que ya se hubiere hallado ácia la derecha, multiplicando igualmente el divisor por este quociente, escribiendo y restando el producto conforme se dijo poco há.

Se bajará del mismo modo, al lado de la resta de esta division, el guarismo del dividendo que se siguiere al último que se bajó, y se proseguirá á este tenor hasta el último guarismo inclusivè.

Aclarará esta regla el egemplo siguiente.

Propóngome dividir 8769 por 7.

Escribo estos números como se vé.

$$
\begin{array}{r|l}
\text{dividendo} & \underline{7\ \text{divisor}} \\
8769 & 1252\tfrac{5}{7}\ \text{quociente} \\
\underline{7} & \\
17 & \\
\underline{14} & \\
36 & \\
\underline{35} & \\
19 & \\
\underline{14} & \\
5 &
\end{array}
$$

Y empezando por la izquierda del dividendo, debería decir en 8 mil quántas veces cabe 7; pero digo simplemente ¿en 8 quántas veces 7? cabe 1 vez. Este 1 es naturalmente millar, pero los guarismos que se seguirán despues, le darán su verdadero valor; por lo que me contento con escribir solo 1 debajo del divisor.

Multiplico el divisor 7 por el quociente 1, y llevo el producto 7 debajo de la parte 8 que acabo de dividir; egecutando la sustracion saco el residuo 1.

Es-

Este residuo 1 es la parte del 8 que no ha sido partida, y es una decena respecto del siguiente guarismo 7; por cuya razon bajo dicho guarismo 7 al lado, y prosigo la operacion, diciendo ¿en 17 quántas veces cabe 7? 2 veces. Escribo este 2 ácia la derecha al lado del primer quociente 1, que salió de la primera operacion.

Multiplico tambien ahora el divisor 7 por el quociente 2 que acabo de hallar; llevo el producto 14 debajo del dividendo parcial 17, y egecutando la sustraccion, resta 3 que es la parte que no se ha podido dividir.

Al lado de esta resta 3, bajo 6, tercer guarismo del dividendo, y digo ¿en 36 quántas veces 7? 5 veces; escribo 5 al quociente.

Multiplico el divisor 7 por 5; y habiendo escrito el producto 35 debajo del nuevo dividendo parcial, hago la sustraccion, y resta 1.

Finalmente, al lado de esta resta 1, bajo el guarismo 9 del dividendo, y digo ¿en 19 quántas veces 7? 2 veces; escribo 2 al quociente.

Multiplico el divisor 7 por este nuevo quociente 2, y habiendo escrito el producto 14 debajo del último dividendo parcial 19, sale la resta 5.

Hallo, pues, que en 8769 cabe 7 tantas veces quantas espresa el quociente que he escrito, esto es 1252 veces, y que resta 5.

Por lo que mira á esta resta, nos contentaremos por ahora con decir que se escribe al lado del quociente, conforme se vé en el egemplo, esto es, escribiendo el divisor debajo de dicha resta, y tirando una linea entre los dos; cuya cantidad se pronuncia 5 *séptimos*. Mas adelante esplicaremos la naturaleza de esta especie de números.

46. Si sucediese que en el discurso de la division no cupiese el divisor en alguno de los dividendos parcia-

ciales, se escribirá cero al quociente, y omitiendo la multiplicacion, se bajará inmediatamente otro guarismo al lado de dicho dividendo parcial, y se proseguirá la division.

Supongamos que se haya de partir 14464 por 8.

14,4,64	8
8	1808
64	
64	
0064	
64	
0	

Aquí tomo los dos primeros guarismos del dividendo, porque en el primero solo no cabe el divisor.

Hallo que en 14 cabe 8, 1 vez; pongo 1 al quociente; multiplico 8 por 1, y resto el producto 8 de 14, y resta 6, al lado del qual bajo el tercer guarismo 4 del dividendo.

Prosigo diciendo ¿en 64 quántas veces 8? ocho veces; pongo 8 al quociente, y egecutando la multiplicacion, sale el producto 64 que resto del dividendo parcial 64, resta 0, al lado del qual bajo 6, quarto guarismo del dividendo; y como en 6 no cabe 8, pongo 0 al quociente, y bajo inmediatamente al lado de 6 el último guarismo del dividendo que es 4, para decir ¿en 64 quántas veces 8? cabe 8 veces: despues de haber escrito 8 al quociente, hago la multiplicacion, y resto el producto 64; y como no resta nada, infiero que en 14464 cabe 8, 1808 veces cabales.

De la Division por un número de muchos guarismos.

47. Quando el divisor tuviere muchos guarismos se procederá del modo siguiente.

Tó-

Tómense en el dividendo ácia la izquierda tantos guarismos quantos fueren menester para que en ellos quepa el divisor.

Hecho esto, en vez de buscar, como en el caso precedente, quántas veces cabe el divisor entero en la parte del dividendo que se ha tomado, búsquese solo quántas veces el primer guarismo del divisor cabe en el primer guarismo del dividendo, ó en los dos primeros, si no bastáre el primero; escríbase el quociente que saliere debajo del divisor como se hizo antes.

Multiplíquense sucesivamente, segun la regla dada (37), todos los guarismos del divisor por este quociente, y á medida que se vaya egecutando esta operacion, llévense los guarismos del producto debajo de los guarismos correspondientes del dividendo parcial. Hágase la sustraccion, y al lado de la resta bágese el guarismo siguiente del dividendo, para proseguir la operacion del mismo modo.

Aclararémos esto con algunos egemplos, y espresarémos los casos en que puede ofrecerse alguna dificultad.

Propóngome dividir 75347 por 53.

75347	53
53	$1421\frac{34}{53}$
223	
212	
114	
106	
87	
53	
34	

Tomo los dos primeros guarismos no mas del dividendo, porque en ellos cabe el divisor, y en vez de decir en 75 quántas veces 53, busco solo quantas veces en las 7 decenas de 75 caben las 5 decenas de 53, esto es, quantas veces cabe 5 en 7; hallo que 1 vez, y pongo 1 al quociente.

Multiplico 53 por 1, y escribo el producto 53 debajo de 75; hecha la sustraccion resta 22; bajo al lado el guarismo 3 del dividendo, y prosigo diciendo, para mayor facilidad ¿en 22 quántas veces 5? (en vez de decir en 223 quantas veces 53); hallo que 4 veces, y pongo 4 al quociente.

Multiplico sucesivamente por 4 los dos guarismos del divisor, y pongo el producto 212 debajo del dividendo parcial 223; hecha la sustraccion resta 11; bajo al lado de esta resta el guarismo 4 del dividendo, y digo como antes ¿en 11 quántas veces 5? 2 veces; pongo 2 al quociente, y multiplico 53 por 2, sale el producto 106 que escribo debajo del dividendo parcial 114; haciendo la sustraccion sale la resta 8, al lado de la qual bajo el último guarismo 7; divido del mismo modo 87 por 53, y prosiguiendo sin variar, hallo el quociente 1, y la resta 34 que escribo al lado del quociente, conforme se dijo arriba (45).

48. Procediendo con rigor se deberia buscar quantas veces en cada dividendo parcial cabe el divisor entero; pero como esta investigacion sería las mas veces larga y penosa, basta buscar, conforme lo hemos practicado, quantas veces la parte mayor de dicho dividendo contiene la parte mayor del divisor. El quociente que se halla por este medio suele no ser el verdadero, porque obrando de este modo no se halla sino un valor aproximado; pero sobre que este valor encamina siempre al fin, y en los casos que no dirige ácia él, se aparta poco; la multiplicacion que viene despues, sirve para enmendar los defectos que puede padecer esta práctica. Y de hecho, si en el dividendo parcial cupiera realmente el divisor tres veces, por egemplo, y si por la prueba que se hace, se ha-

hallára que cabe 4 veces, se echa de vér que multiplicando el divisor por 4, saldria un produćto mayor que el dividendo, pues se tomaria el divisor mas veces de las que cabe realmente en dicho dividendo, y por consiguiente seria imposible la sustraccion; entonces se disminuirá sucesivamente el quociente una, dos &c. unidades, hasta hallar un produćto que se pueda restar: al contrario, si no se hubiese escrito sino 2 al quociente, la resta de la sustraccion saldria mayor que el divisor; lo que manifestaria que todavia cabe en él el divisor, y que por consiguiente no es bastante grande el quociente.

Esto no debe desalentar á nadie, porque en poco tiempo se adquiere la destreza suficiente para conocer quánto se debe aumentar ó disminuir el quociente que se halla por la primera prueba.

Se me propone que parta 189492 por 375.

189492	375
1875	$505\frac{117}{375}$
1992	
1875	
117	

Tomo los quatro primeros guarismos del dividendo, porque no cabe el divisor en los tres primeros.

Despues digo ¿en 18 no mas quántas veces 3? cabe realmente 6 veces; pero multiplicando 375 por 6, sale un número mayor que el dividendo 1894; por lo que pongo solo 5 al quociente. Multiplico 375 por 5; y despues de haber escrito el produćto debajo de 1894, hago la sustraccion, y sale la resta 19.

Bajo al lado de 19 el guarismo 9 del dividendo; y como en 199 que resulta, no cabe 375, pongo 0 al quociente, y bajo al lado de 199 el guarismo 2 del dividendo, con lo que sale 1992, respećto del qual digo,

go ¿en 19 no mas quántas veces 3? 6 veces. Pero por la misma razon que arriba, no pongo sino 5 al quociente; y praćticando lo propio que antes, sale la resta 117.

49. Haremos una consideracion que puede contribuir en muchos casos para escusar pruebas inútiles. Puede el calculador hallarse en el caso de hacer estas pruebas dudosas, particularmente quando el segundo guarismo del divisor es mucho mayor que el primero. En este caso, en vez de buscar quántas veces el primer guarismo del divisor cabe en la parte correspondiente del dividendo, se debe buscar quántas veces dicho primer guarismo despues de añadirle una unidad, cabe en la parte correspondiente del dividendo: esta prueba encaminará siempre mas que la primera al verdadero quociente.

Supongamos, por egemplo, que se me ofrezca dividir 1832 por 288.

1832	288
1728	$6\frac{104}{288}$
104	

En vez de decir ¿en 18 quántas veces 2? diré en 18 quántas veces 3, porque el divisor 288 se acerca mucho mas á 300 que á 200; hallo 6 que es el verdadero quociente, siendo así que hubiera hallado 9, y por lo mismo hubiera tenido que hacer tres operaciones inútiles.

50. Puede suceder en el discurso de estas divisiones parciales, que quepa el divisor en el dividendo mas de 9 veces; no obstante jamas se debe escribir mas de 9 al quociente; porque si se pudiese poner 10, sería prueba de que el quociente hallado en la operacion antecedente, no sería el verdadero, pues la decena que se hallaría en el quociente aćtual, pertenecería á dicho primer quociente.

Si

51. Si á continuacion del dividendo y del divisor hubiese muchos ó algunos ceros, se les podría quitar á ambos tantos como hay en el que tiene menos. Por egemplo, para partir 8000 por 400, dividiré solo 80 por 4; porque es evidente que en 80 centenares no caben mas veces 4 centenares, que en 80 unidades 4 unidades.

Prueba de la Multiplicacion y de la Division.

52. De la definicion misma que hemos dado de cada una de estas dos operaciones, se puede sacar el método para probarlas.

Ya que en la multiplicacion se toma tantas veces el multiplicando, quantas cabe la unidad en el multiplicador, se infiere que si se busca quantas veces cabe el multiplicando en el produĉto, esto es, (44) si se divide el produĉto por el multiplicando, debe salir al quociente el multiplicador; y como se puede tomar por multiplicador el multiplicando, y al revés, se puede decir en general, que si se divide el produĉto de una multiplicacion por el uno de los faĉtores, saldrá al quociente el otro faĉtor.

Por egemplo, como hallamos arriba (37) que 2864 multiplicado por 3 dá el produĉto 8592, si dividimos 8592 por 2864, hemos de hallar, y hallamos con efeĉto 3 al quociente.

Del mismo modo, ya que el quociente de una division espresa quantas veces el divisor cabe en el dividendo, se sigue que si se toma el divisor tantas veces quantas espresa el quociente, esto es, si se multiplica el divisor por el quociente, el produĉto será el dividendo, quando no ha dejado la division resta alguna; y si hubiere quedado alguna resta, si al produĉto de la multiplicacion del divisor por el quociente, se le añade la resta de la division, se sacará el dividendo.

Por egemplo, hallamos arriba (48) que 189492 dividido por 375, dá 505 al quociente, y la resta 117; multiplicando 375 por 505, sale 189375, á cuyo produĉto añado la resta 117, y sale el dividendo 189492.

Así, pueden la multiplicacion y la division servir cada una para probar la otra.

Algunos usos de la regla antecedente.

53. Sirve la division para hallar no solo quantas veces un número cabe en otro, sino tambien para partir un número en partes iguales. Tomar la mitad, el tercio, el quarto, el quinto &c. de un número, es partirle por 2, 3, 4, 5 &c. ó partirle en 2, 3, 4, 5 &c. partes iguales para tomar una de ellas.

Sirve tambien la division para reducir las unidades de una especie determinada á unidades de especie superior; por egemplo, un número determinado de maravedis á reales de vellon, y estos á pesos. Para reducir 16490 maravedis á rs. se reparará que pues 34 maravedis componen un real, habrá tantos reales en la suma propuesta, quantas veces en ella cupieren 34 maravedis; se debe, pues, partir por 34 la suma 16490, y se hallarán 485 reales. Para reducir á pesos los 485 reales, partirémos 485 por 15, pues 15 reales componen un peso, y saldrán al quociente 32 pesos y 5 reales: de modo que los 16490 maravedis componen 32 pesos y 5 reales.

De los Quebrados.

54. Los *quebrados* considerados arisméticamente son números con los quales espresamos las cantidades menores que la unidad.

55. Para formar juicio cabal de los quebrados, se debe considerar que la cantidad que se tomó por unidad, se compone ella misma de cierto número de uni-

dades mas pequeñas, como concebimos, por egemplo, que el peso se compone de 15 partes, ó de quince unidades menores, que llamamos reales.

Una ó muchas de estas partes forman lo que llamamos quebrado ó fraccion de la unidad. Se dá tambien este nombre á los números que representan dichas partes.

56. Se puede espresar una fraccion con números de dos maneras que se usan igualmente.

La primera consiste en representar como los números enteros, las partes de la unidad que contiene la cantidad de que se trata; pero entonces se las dá un nombre particular á estas partes: así, para representar 7 partes de las quales hay 15 en un peso, usaríamos del guarismo 7, pero diríamos 7 reales, y escribiríamos 7 rs.: esta manera de representar las partes de la unidad, se estila en los números complexos de que tratarémos dentro de poco.

57. Pero como se necesitaría un signo particular para cada division que pudiéramos hacer de la unidad, se escusa esta multiplicidad de signos, y se espresa un quebrado con dos números puestos el uno encima del otro, y separados con una raya. Así, para espresar las 7 partes de que acabamos de hablar, se escribe $\frac{7}{15}$; quiero decir, que en general se escribe primero el número que espresa quantas partes de la unidad contiene la cantidad de que se trata, y debajo de este número se escribe el número que espresa quantas de dichas partes concebimos que hay en la unidad.

58. Y para pronunciar un quebrado, se pronuncia primero el número superior (llámase *numerador*); despues el número inferior (llámanle *denominador*). A este modo $\frac{4}{5}$ se pronuncia *quatro quintos*; cuya espresion dá á entender quatro partes, cinco de las quales componen la unidad. $\frac{7}{15}$ se pronuncia *siete quincenos*; $\frac{3}{20}$ *tres vigesimos* &c. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, se pronuncian un *medio*, un *tercio*, un *quarto*.

59. Representa, pues, el numerador quantas partes de la unidad contiene la cantidad que el quebrado espresa, y el denominador señala el valor de dichas partes, espresando quantas se necesitan para formar la unidad. Se le llama denominador, porque él es en realidad quien dá nombre al quebrado, y es causa de que en estos dos quebrados, por egemplo, $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{7}$, las partes del primero se llamen *quintos*, y las partes del segundo *séptimos*.

60. De donde resulta que quanto mas se acercare el numerador al valor del denominador, tanto mas se acercará el quebrado á valer toda la unidad, cuyas partes representa el denominador. El quebrado $\frac{4}{4}$, por egemplo, vale la unidad entera, porque contiene todas las quatro partes que componen toda la unidad. $\frac{3}{4}$ será una cantidad mayor que $\frac{2}{4}$.

61. Llámaseles tambien al numerador y al denominador juntos, los *términos del quebrado*.

De los Enteros considerados á manera de quebrado.

62. De las operaciones que se practícan con los quebrados suelen resultar números fraccionarios, cuyo numerador es mayor que el denominador; tales son estos números $\frac{18}{8}$, $\frac{27}{5}$ &c.

Estas espresiones y las que se les parecen, no son quebrados propios, pero son números enteros juntos con quebrados.

63. Para sacar de ellas los enteros que incluyen, se debe partir el numerador por el denominador; el quociente señala los enteros, y la resta de la division es el numerador del quebrado que acompaña dichos enteros. Así, $\frac{27}{5}$ darán $5\frac{2}{5}$, esto es, cinco enteros y dos quintos.

Con efecto, en la espresion $\frac{27}{5}$, el denominador 5 manifiesta que la unidad se compone de 5 partes; luego quantas veces cupiere 5 en 27, tantas unidades enteras habrá en el valor de $\frac{27}{5}$.

64. Las multiplicaciones y las divisiones de los números enteros juntos con quebrados, piden á lo menos para mayor facilidad, que se conviertan dichos enteros en quebrados.

Se practica esta transformacion multiplicando el número entero por el denominador del quebrado, en el qual se quiere convertir el entero. Por egemplo, si quiero convertir 8 enteros en quintos, multiplicaré 8 por 5, y saldrá $\frac{40}{5}$. Con efecto, quando se quiere convertir 8 en quintos, se considera la unidad como compuesta de 5 partes: las 8 unidades contendrán, pues, 40: por lo mismo $7\frac{4}{9}$ convertidos en novenos serán $\frac{67}{9}$.

De las operaciones con que se pueden alterar los dos términos de un quebrado sin que este mude de valor.

65. Es evidente que quantas mas partes se concibieren en la unidad, tantas mas de estas partes se necesitarán para formar una misma cantidad. Porque las partes en que se concibiere dividida la unidad, serán tanto menores, quanto mayor fuere su número. Si divido ó imagino dividida una unidad, sea la que fuere, en quincenos, será cada parte mayor que si concibiese dividida la misma unidad en treintenos. Y si quisiere tomar un tercio de dicha unidad en el primer supuesto, bastará que tome $\frac{5}{15}$, y en el segundo habré de tomar $\frac{10}{30}$.

66. Luego, se puede duplicar, triplicar, quadruplicar &c. el denominador de un quebrado, sin que por esto mude de valor el quebrado, con tal que al mismo tiempo se duplique, triplique, quadruplique &c. el numerador.

Se puede, pues, decir en general, que *no muda de valor un quebrado quando se multiplican sus dos términos por un mismo número.*

Así $\frac{3}{4}$ es lo mismo que $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{2}$ lo mismo que $\frac{2}{4}$, que $\frac{3}{6}$ que $\frac{5}{10}$, &c.

67. Discurriendo del mismo modo, se echa de ver que quantas menos partes se supusieren en la unidad, tantas menos de estas partes se necesitarán para formar una misma cantidad; que por consiguiente se puede, sin mudar un quebrado, hacer que su denominador sea 2, 3, 4, &c. veces menor, con tal que al mismo tiempo se transforme su numerador en otro 2, 3, 4 &c. veces menor; y en general, *no muda de valor un quebrado quando se dividen sus dos términos por un mismo número.*

Para percibir con evidencia la verdad de estas dos proposiciones, basta tener presente qual es el oficio del denominador y del numerador de un quebrado.

Adviértase, pues, que multiplicar ó dividir los dos términos de un quebrado por un mismo número, no es multiplicar ni dividir el quebrado; pues segun acabamos de ver, no muda de valor con estas operaciones.

Los dos principios que acabamos de sentar, son el fundamento de las dos reducciones siguientes, que son de muchísimo uso.

Reduccion de los Quebrados á un mismo denominador.

68. 1.° Para reducir dos quebrados á un mismo denominador, se multiplican los dos términos del primero por el denominador del segundo, y los dos términos del segundo por el denominador del primero.

Por egemplo, para reducir á un mismo denominador los dos quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, multiplico 2 y 3, que son los dos términos del primer quebrado por 4, denominador del segundo, y sale $\frac{8}{12}$ que vale (66) lo mismo que $\frac{2}{3}$.

Multiplico igualmente los dos términos 3 y 4 del segundo quebrado por 3, denominador del primero, y sale $\frac{9}{12}$ que vale lo mismo que $\frac{3}{4}$; de suerte que los dos quebrados $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ quedan transformados en $\frac{8}{12}$ y $\frac{9}{12}$, que son respectivamente del mismo valor que los primeros, y tienen un mismo denominador.

Facil es hacerse cargo de que con este método será siempre uno mismo el denominador en cada uno de los nuevos quebrados, pues en cada operacion se forma el nuevo denominador de la multiplicacion de los dos denominadores primitivos.

69. 2.° Si hubiere mas de dos quebrados, se reducirán todos á un mismo denominador, multiplicando los dos términos de cada uno por el producto que resultare de la multiplicacion de los denominadores de los demas quebrados.

Por egemplo, para reducir á un mismo denominador los quatro quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, multiplicaré los dos términos 2 y 3 del primero, por el producto de los tres denominadores 4, 5, 7 de los demas quebrados, cuyo producto hallo diciendo: 4 veces 5 son 20, despues 7 veces 20 son 140; multiplico, pues, 2 y 3 cada uno por 140, y sale $\frac{280}{420}$, cuyo valor es el mismo que el de $\frac{2}{3}$ (66).

Multiplico igualmente los dos términos 3 y 4 del segundo quebrado, por el producto de 3, 5, 7, cuyo producto saco diciendo: 3 veces 5 son 15, despues 7 veces 15 son 105; multiplico, pues, 3 y 4 cada uno por 105, de cuya operacion resulta $\frac{315}{420}$, cuyo quebrado vale lo mismo que $\frac{3}{4}$.

En quanto al tercer quebrado, multiplico sus dos términos 4 y 5 por 84, producto de los tres denominadores 3, 4 y 7, y saco $\frac{336}{420}$ de igual valor que $\frac{4}{5}$.

Finalmente, multiplicaré los dos términos 5 y 7 del último quebrado por 60, producto de los denominadores 3, 4 y 5 de los tres primeros quebrados, y sacaré $\frac{300}{420}$ que vale tanto como $\frac{5}{7}$; de suerte que los quatro quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, quedan transformados en $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, $\frac{300}{420}$, menos simples á la verdad que los primeros, pero de igual valor, y mas á propósito para egecutar con ellos, mediante el denominador comun, las operaciones de sumar y restar.

Repárese que componiéndose el denominador de cada nuevo quebrado del producto de todos los denominadores primitivos, no puede este nuevo denominador dejar de ser el mismo en cada quebrado despues de la transformacion.

Reduccion de los Quebrados á su mas simple espresion.

70. Un quebrado es tanto mas simple, quanto menores son sus dos términos. En muchas ocasiones es facil reducir un quebrado propuesto á números menores, quando su numerador y su denominador pueden dividirse por un mismo número; como esta operacion no muda el valor del quebrado (67), debe practicarse siempre que se pueda, ya porque es mas facil calcular los quebrados despues de esta reduccion, ya porque se percibe mas facilmente su valor en muchas ocasiones, ya finalmente porque falta un calculador á la simplicidad que en todas sus operaciones debe sobresalir, quando se vale de números mayores para espresar lo que se puede representar con números menores.

71. Se practica como sigue. Se partirán el numerador y el denominador por 2, y se repetirá esta division quantas veces pudiere hacerse cabal.

Se partirán despues ambos términos por 3, y se repetirá esta operacion quanto se pudiere.

Lo mismo se practicará sucesivamente con los números 5, 7, 11, 13, 17 &c, esto es, con los números que no tienen otro divisor que á sí mismos, ó á la unidad, y se llaman *números primeros*.

Así, no puede haber dificultad sino para saber quando se podrá partir por 2, 3, 5 &c.

Los principios siguientes facilitarán esta investigacion.

 To-

72. Todo número cuyo último guarismo es par, es divisible por 2.

Todo número cuyos guarismos sumados unos con otros, como si espresasen unidades simples, fuere 3 ó multiplo de 3, esto es un número cabal de veces 3, será divisible por 3. Por egemplo, 54231 es divisible por 3, porque sus guarismos 5, 4, 2, 3, 1 componen el número 15 que es 5 veces 3.

Todo número cuyo último caracter es un 5 ó un cero, es divisible por 5.

Por lo que toca al número 7 y á los que se le siguen, aunque sea facil hallar reglas semejantes, escuso traherlas porque empeñan en cálculos tan prolijos como la operacion que se desea abreviar.

Propongámonos, por egemplo, reducir el quebrado $\frac{2016}{5796}$ á su menor espresion. Parto ambos términos por 2, porque el último guarismo de cada uno es par, y sale $\frac{1008}{2898}$. Parto otra vez por 2, y sale $\frac{504}{1449}$. De lo dicho arriba infiero que puedo partir por 3; egecuto la division, y sale $\frac{168}{483}$; vuelvo á partir por 3, con lo que saco $\frac{56}{161}$; finalmente intento partir por 7; sale bien la division y resulta $\frac{8}{23}$.

Decimos que no se intente la division sino por los números primeros 2, 3, 5, 7 &c. porque despues de haber apurado la division por 2, por egemplo, es inutil intentarla por 4; porque si esta pudiera practicarse, con mas razon se hubiera podido egecutar la division por 2.

73. De quantos medios se pueden practicar para reducir un quebrado á una espresion mas simple, el mas directo consiste en partir ambos términos por el *mayor divisor comun* que tuvieren: la regla para hallar este mayor comun divisor es la siguiente.

Pártase el mayor de los dos términos por el menor; si no hubiere resta alguna, el término menor será el mayor divisor comun.

Si quedase alguna resta, pártase por ella el término menor, y si saliere cabal la division, dicha primera resta será el mayor comun divisor.

Si despues de concluída esta segunda division quedáre alguna resta, pártase la primera resta por la segunda, y prosígase partiendo siempre por la última resta la antecedente hasta llegar á una division cabal. Entonces el último divisor que hubiere servido será el mayor divisor de ambos términos del quebrado.

Si se hallare ser la unidad el último divisor, será señal de que no se puede reducir el quebrado.

Sirva de egemplo el quebrado $\frac{3760}{9024}$.

Parto 9024 por 3760, hallo al quociente 2, y la resta 1504.

Parto 3760 por 1504; sale 2 al quociente, y la resta 752.

Parto la primera resta 1504 por la segunda 752, sale cabal la division, é infiero que 752 puede dividir ambos términos del quebrado $\frac{3760}{9024}$, y reducirle á su mas simple espresion, que con hacer el cálculo se halla ser $\frac{5}{12}$.

Con efecto, hemos hallado que 752 parte 1504; debe, pues, dividir tambien 3760, que, segun hemos visto, se compone de dos veces 1504 y de 752; se vé tambien que debe dividir 9024, pues 9024 se compone de dos veces 3760 y de 1504.

Se vé tambien que 752 es el mayor divisor comun que puedan tener 3760 y 9024; porque todo número que dividiere 9024 y 3760, ha de dividir tambien 3760 y 1504; y no puede haberle comun á estos dos sin que sea al mismo tiempo divisor comun de 1504, y de 752; pero es evidente que estos dos no pueden tener divisor comun mayor que 752; luego &c.

No hay duda en que dividiendo los dos términos de un quebrado por su mayor comun divisor, quedará reducido á su menor espresion. Porque hemos visto (67) que partiendo por un mismo número ambos términos de un quebrado, no muda este de valor. Y es constante que quanto mayor fuere el divisor, siendo uno mismo el dividendo, tanto menor ha de salir el quociente (44).

Diferentes modos de considerar un quebrado, y consequencias que de aquí se pueden sacar.

74. La idea que hasta aquí hemos dado de un quebrado, es que el denominador espresa el número de partes de que se compone la unidad; y el numerador quántas de estas partes contiene la cantidad que el quebrado representa.

Puédese considerar tambien de otro modo un quebrado; se puede considerar el numerador como que representa cierta cantidad que debe dividirse en tantas partes quantas unidades hay en el denominador. Por egemplo, en $\frac{4}{5}$ se puede considerar 4 como que representa quatro cosas qualesquiera, pongo por caso quatro reales, que se han de partir en cinco partes; porque claro está, que lo mismo es partir 4 reales en cinco partes, que partir un real en cinco partes para tomar quatro de ellas.

75. Se puede, pues, considerar el numerador de un quebrado como un dividendo, y el denominador como un divisor. Con esto se vé claramente qué cosa significan las restas de divisiones espresadas en la forma que digimos (45).

76. De esto, y de lo dicho (60) se puede inferir que si en la resta de una division, espresada en forma de quebrado, el numerador valiere mas de la mitad del denominador, se podrá despreciar dicha resta espresada en forma de quebrado, con añadirle una unidad al último guarismo del quociente hallado. Pongo por caso que practicando una division halle el quociente 23, y la resta $\frac{3}{4}$, puedo omitir la cantidad $\frac{3}{4}$ añadiéndole una unidad al último guarismo 3 del quociente, que con esto será 24. La razon es clara, porque ya que $\frac{3}{4}$ vale mas de la mitad del entero ó unidad (60), el quociente discrepará menos del verdadero, añadiéndole una unidad en lugar de la cantidad $\frac{3}{4}$, que si omitiese esta cantidad.

Esto puede practicarse quando no se quisiere hallar el verdadero quociente por el método que muy en breve daremos á conocer, ó quando son de tan poca monta las partes en que se supone dividida la unidad, que no hay necesidad de espresarlas con mucha precision.

77. Infiérese de aquí, que un entero se puede escribir siempre que se quisiere en forma de quebrado, haciendo que dicho entero sea el numerador, y dándole por denominador la unidad; así 8 ó $\frac{8}{1}$ son una misma cosa; 5 es lo mismo que $\frac{5}{1}$.

Operaciones de la Arismética por Quebrados.

78. Se hacen con los quebrados las mismas operaciones que con los enteros. La adicion y la sustraccion requieren las mas veces una operacion preparatoria; las otras dos no requieren ninguna.

Adicion de los Quebrados.

79. Si los quebrados tuviesen un mismo denominador, se sumarán todos los numeradores, y se la dará á la suma el denominador comun de los quebrados propuestos. Así, para sumar unos con otros estos quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, sumo los numeradores 2, 3, 5, y saco por consiguiente $\frac{10}{7}$ que reduzco á $1\frac{3}{7}$ (63).

80. Si no tuviesen los quebrados un mismo denominador, será menester dársele primero (68) y (69); hecho esto se sumarán los nuevos quebrados conforme

me se ha dicho. Así, si hemos de sumar $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, transformo estos quebrados en estotros tres $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$, cuya suma es $\frac{133}{60}$, que se reduce á $2\frac{13}{60}$ (63).

Sustraccion de los Quebrados.

81. Si los dos quebrados propuestos tienen el mismo denominador, se restará el numerador del uno del numerador del otro, y se le dará á la resta el denominador comun á los dos. Si resto $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$ saco la resta $\frac{3}{9}$, que se reduce á $\frac{1}{3}$ (71).

82. Si de $9\frac{5}{8}$ quiero restar $4\frac{7}{8}$; como no se puede restar $\frac{7}{8}$ de $\frac{5}{8}$, tomaré prestada del 9 una unidad, que reducida á octavos, y añadida á $\frac{5}{8}$, dará $\frac{13}{8}$, de los quales resto $\frac{7}{8}$, y saco la resta $\frac{6}{8}$; restando despues 4 de 8, porque al 9 se le quitó una unidad, restará en todo $4\frac{6}{8}$, ó $4\frac{3}{4}$.

83. Si los quebrados no tienen un mismo denominador, se les dará (68); despues se hará la sustraccion, segun acabamos de decir. Así, para restar $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, transformo estos quebrados en $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$; y con restar 8 de 9 sale la resta $\frac{1}{12}$.

Multiplicacion de los Quebrados.

84. Para multiplicar un quebrado por otro, se debe multiplicar el numerador del uno por el numerador del otro, y el denominador por el denominador. Por egemplo, para multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, se multiplicará 2 por 4, saldrá el numerador 8; multiplicando tambien 3 por 5, saldrá el denominador 15, y por consiguiente será $\frac{8}{15}$ el producto.

Para hacerse cargo de la razon de esta regla, conviene tener presente que multiplicar un numero por otro, es tomar tantas veces el multiplicando, quantas la unidad cabe en el multiplicador. Así, multiplicar $\frac{2}{3}$

por

por $\frac{4}{5}$, es tomar $\frac{4}{5}$ veces el quebrado $\frac{2}{3}$, ó para decirlo mejor, es tomar 4 veces la quinta parte de $\frac{2}{3}$: pero con multiplicar el denominador 3 por 5, se transforman los tercios en quincenos, esto es, en partes cinco veces menores; y con multiplicar el numerador 2 por 4, se toman estas nuevas partes quatro veces; se toma, pues, quatro veces la quinta parte de $\frac{2}{3}$; se multiplica, pues, con efecto $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$.

85. Si ocurriese multiplicar un entero por un quebrado, se le daria al entero la forma de quebrado, dándole la unidad por denominador; por egemplo, si se me ofrece multiplicar 9 por $\frac{4}{7}$, se reduce la operacion á multiplicar $\frac{9}{1}$ por $\frac{4}{7}$, de lo que, por la regla que hemos dado, sale el producto $\frac{36}{7}$ que se reduce á $5\frac{1}{7}$.

Se vé, pues, que quando ocurre multiplicar un quebrado por un entero, ó un entero por un quebrado, se reduce la operacion á multiplicar el numerador del quebrado propuesto por el entero.

86. Si hubiese enteros juntos con los quebrados, se deberia, antes de egecutar la multiplicacion, reducir cada uno de los enteros á quebrados de la misma especie que el que le acompaña; por egemplo, si hay que multiplicar $12\frac{3}{5}$ por $9\frac{3}{4}$, transformo (64) el multiplicando en $\frac{63}{5}$, y el multiplicador en $\frac{39}{4}$; y multiplicando $\frac{63}{5}$ por $\frac{39}{4}$, por la regla arriba dada (84), saco el producto $\frac{2457}{20}$ que vale $122\frac{17}{20}$.

Division de los Quebrados.

87. Quando ocurre dividir un quebrado por un quebrado, se deben trastornar los dos términos del quebrado divisor, y multiplicar el quebrado dividendo por dicho quebrado trastornado.

Por egemplo, para dividir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, trastorno el quebrado $\frac{2}{3}$, y sale $\frac{3}{2}$; multiplico $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{2}$, segun la regla dada (84), y sale el quociente $\frac{12}{10}$, que se reduce á $1\frac{2}{10}$.

Pa-

Para hacerse cargo de la razon de esta regla, conviene considerar que partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, es buscar quántas veces $\frac{2}{3}$ cabe en $\frac{4}{5}$; pero es facil percibir que pues el divisor espresa tercios, cabrá en el dividendo tres veces mas que si espresase enteros; luego es menester dividir primero por 2, y multiplicar despues por 3, que es lo mismo que tomar tres veces la mitad del dividendo, ó multiplicarle por $\frac{3}{2}$, que es el quebrado divisor trastornado.

88. Si ocurriese partir un quebrado por un entero, ó un entero por un quebrado, se le daria primero al entero la forma de quebrado, siendo la unidad el denominador: por egemplo, si ocurre partir 12 por $\frac{5}{7}$, se reducirá la operacion á partir $\frac{12}{1}$ por $\frac{5}{7}$, que segun la regla dada, se reduce á multiplicar $\frac{12}{1}$ por $\frac{7}{5}$, y sale el quociente $\frac{84}{5}$, ó $16\frac{4}{5}$. Igualmente, si se ofreciese partir $\frac{3}{4}$ por 5, se reduciria la operacion á partir $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{1}$, esto es, á multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{5}$, y saldria el producto $\frac{3}{20}$.

Se vé, pues, que quando se ha de partir un quebrado por un entero, se reduce la operacion á multiplicar el denominador por dicho entero.

89. Si hubiese enteros juntos con los quebrados, se reducirian dichos enteros á quebrados cada uno de la misma especie que el que le acompaña: por egemplo, si se hubiese de partir $54\frac{3}{5}$ por $12\frac{2}{3}$, se transformaria el dividendo en $\frac{273}{5}$, y el divisor en $\frac{38}{3}$, y la operacion se reduciria á partir $\frac{273}{5}$ por $\frac{38}{3}$, esto es (87), á multiplicar $\frac{273}{5}$ por $\frac{3}{38}$, de lo que resultaria $\frac{819}{190}$, ó $4\frac{59}{190}$.

Algunas aplicaciones de las reglas antecedentes.

90. En virtud de lo dicho (74), facil es hacerse cargo de lo que se debe practicar para valuar un quebrado. Supongamos que se me pregunte, por egemplo, quan-

quanto valen los $\frac{5}{7}$ de un doblon. Ya que los $\frac{5}{7}$ de un doblon son lo mismo (74) que el séptimo de 5 doblones, reduzco los 5 doblones á pesos (42), y parto los 20 pesos, que resultan por 7, y salen al quociente 2 pesos, y la resta 6 pesos, que he de partir por 7; reduzco dichos 6 pesos á reales, y parto por 7 los 90 reales que resultan; salen al quociente 12 reales, y la resta 6 reales, que he de partir por 7; reduzco los 6 reales á maravedises, parto los 204 maravedises que resultan por 7, sale el quociente 29 maravedises, y $\frac{1}{7}$ de maravedi: de suerte, que los $\frac{5}{7}$ de un doblon valen 2 Pe. 12 rs. 29 ms. $\frac{1}{7}$.

Si se pidiesen los $\frac{5}{7}$ de 24 doblones, es evidente que se podria tomar desde luego, segun lo acabamos de practicar, los $\frac{5}{7}$ de un doblon, y multiplicar despues por 24, lo que saliera de esta operacion; pero es mucho mas acomodado multiplicar desde luego los $\frac{5}{7}$ por 24 doblones, de lo que resultan $\frac{120}{7}$ (85) doblones, y valuar despues este quebrado, cuyo valor se hallará que es 17 dob. 8 rs. 19 ms. $\frac{3}{7}$.

Lo que hemos practicado en estos dos egemplos, manifiesta que quando se trata de valuar un quebrado qualquiera, se ha de multiplicar su numerador por el número que espresa quantas veces la unidad á la qual se refiere el quebrado, contiene las partes en que queremos valuar el quebrado propuesto, y dividir despues el producto por el denominador que lleva el quebrado. Así, en el primer egemplo, en el qual hemos empezado valuando los $\frac{5}{7}$ de un doblon en pesos, hemos multiplicado el numerador 5 por 4, que espresa quantas veces cabe un peso en un doblon, y hemos partido el producto 20 por el denominador 7. Lo propio hemos practicado para valuar los quebrados de pesos en reales &c.

91. La valuacion de los quebrados llama naturalmente nuestra atencion á considerar los *quebrados de que-*

quebrados: dase este nombre á una serie de quebrados separados los unos de los otros con la preposicion *de*; por egemplo, $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ &c. son quebrados de quebrados. Se reducen á un solo quebrado, multiplicando unos por otros todos los numeradores, y los denominadores tambien unos por otros: de suerte, que el quebrado $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ se reduce á $\frac{6}{12}$ ó $\frac{1}{2}$; el quebrado $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$, se reduce á $\frac{30}{72}$ ó $\frac{5}{12}$.

Y con efecto, bien se echa de ver que tomar los $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ no es mas que multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$, pues es tomar $\frac{2}{3}$ veces el quebrado $\frac{3}{4}$. Asimismo, tomar los $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ viene á ser lo propio que tomar los $\frac{6}{12}$ de $\frac{5}{6}$, pues $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ son $\frac{6}{12}$; y lo que acabamos de decir manifiesta que los $\frac{6}{12}$ de $\frac{5}{6}$ vienen á ser $\frac{30}{72}$ ó $\frac{5}{12}$.

Si se pidiesen los $\frac{3}{4}$ de $5\frac{3}{8}$, se convertiria el entero 5 en octavos, y se reduciria la operacion á sacar el valor del quebrado de quebrado $\frac{3}{4}$ de $\frac{43}{8}$, que se hallaria ser $\frac{129}{32}$ ó $4\frac{1}{32}$.

De los Números complexos.

92. Aunque las reglas que hemos declarado hasta aquí, podrian tambien aplicarse al cálculo de los números complexos, tenemos no obstante por conveniente considerar estos de un modo particular, porque la division que en ellos se hace de la unidad principal suele facilitar su cálculo.

Hay muchas especies de números complexos, y las reglas que se dan para calcularlos, penden mucho de la division que se ha hecho de la unidad: sin embargo no es necesario atender á todas estas especies para poderlos calcular; pero importa conocer la relacion que tienen unas con otras sus diferentes partes, y con la unidad principal; por esta razon pondré aquí una tabla de los números complexos cuyo uso es mas frecuente.

Ta-

Tabla de las Unidades de algunas especies, y caracteres con que se representan.

Para las Monedas.

Pe. significa. . . . . . . peso.	1 peso vale. . . . 15 reales.
rl. . . . . real.	1 real. . . . 34 maravedis.
mri. . . . . maravedí.	

Para el Peso.

℔. significa. . . . . . . libra.	1 libra vale. . . . 2 marcos.
M. . . . . marco.	1. marco. . . . . . . 8 onzas.
on. ó ℥. . . . . onza.	1 onza. . . . . . . 8 dracmas.
G ó ʒ. . . . . dracma.	1 dracma. . . 3 escrúpulos.
℈. . . . . escrúpulo.	1. escrúpulo. . . 24 granos.
g. . . . . grano.	

Para las Distancias.

V. significa. . . . . vara.	1 vara vale. . . . . . . 3 pies.
P. . . . . pie.	1 pie. . . . . . . 12 pulgadas.
p. . . . . pulgada.	1 pulgada. . . . . 12 lineas.
l. . . . . linea.	1 linea. . . . . . . 12 puntos.
p°. . . . . punto.	

Para el Tiempo.

D significa. . . . . dia.	1 dia vale. . . . . 24 horas.
H. . . . . hora.	1 hora. . . . . . 60 minutos.
′. . . . . minuto.	1 minuto. . . . 60 segundos.
″. . . . . segundo.	1 segundo. . . . 60 terceros.

 Adi-

Adicion de los Números complexos.

93. Para hacer esta operacion, se escriben todos los números propuestos unos debajo de otros, de modo que todas las partes de una misma especie compongan una columna; y tirando una raya por debajo de todo, se empezará la adicion por las partes menores: si su suma no forma una unidad de la especie inmediatamente mayor, se escribirá debajo de las unidades de su especie: si contiene bastantes partes para formar una ó muchas unidades de la especie inmediatamente mayor, no se escribe debajo de dicha columna, sino el exceso de un número cabal de unidades de esta segunda especie, y se llevan estas para juntarlas con sus semejantes, con las quales se practica lo mismo que con las primeras.

Quiero sumar....	227 Pe.	14 rs.	8 ms.
	2549	13	15
	184	11	11
	17	10	7
	2980	4	7

La suma de los maravedises es 41, que contiene 34 maravedises ó un real y 7 maravedises; escribo los 7 maravedises, y llevo 1 real que junto con los reales, y hallo 49 reales; y como 15 reales componen un peso, y 49 reales son tres veces 15 reales, ó 3 pesos, y 4 reales mas; escribo 4 debajo de la columna de los reales, y llevo los 3 pesos para juntarlos con las unidades de los pesos, cuya suma hallo que es 2980.

Quiero sacar la suma de todas las partidas siguientes.

54 V.	2 P.	3 p.	9 l.
12	1	4	11
9	2	11	11
8	2	9	10
86	0	6	5

La suma de las lineas llega á 41 que son 3 pulgadas 5 lineas; pongo 5 lineas, y llevo las 3 pulgadas que junto con las pulgadas; me sale la suma 30 que valen 2 pies 6 pulgadas; escribo las 6 pulgadas, y llevo los dos pies, que añadidos á los pies me dan 9 pies que valen 3 varas cabales; pongo cero debajo de la columna de los pies, porque no resta ninguno que apuntar, y añado las 3 varas con las varas; la suma asciende á 86, de suerte que la suma es 86 V. 0 P. 6 p. 5 l.

Sustraccion de los Números complexos.

94. Escríbanse los números propuestos como en la adicion, y empiécese la sustraccion por las unidades de menor especie. Si el número inferior se puede restar del superior, escríbase la resta debajo. Si no se puede restar, tómese prestada de la especie inmediatamente mayor una unidad, que se reducirá á la especie de que se trata, y se añadirá al número del qual no se puede restar su inferior. Practíquese lo propio en cada especie; y quando se hubiere tomado prestado, disminúyase una unidad el número del qual se hubiese quitado lo que se tomó: finalmente escríbase cada resta, á medida que se hallare, debajo del número que la hubiere dado.

De..................	143 Pe.	14 rs.	8 mrs.
quiero restar.........	75	10	20
	68	3	22

Como no puedo restar 20 mrs. de 8 mrs. tomo prestado 1 rl. que vale 34 maravedises, y 8 son 42, de los quales restando 20 quedan 22; resto despues 10 reales no de 14 rs. sino de 13 que quedan por razon del préstamo, y quedan 3; finalmente resto 75 pesos de 143 pesos, y quedan 68 pesos.

De	163 Pe.	0 rs.	5 mrs.
quiero restar	84	14	30
	78	0	9

Como no puedo restar 30 mrs. de 5 mrs, y tampoco hay reales de que tomar prestado, tomo prestado un peso de los 163, pero con el pensamiento dejo 14 reales en lugar del cero, y añado 1 rl. que compone 39 maravedises con los 5 que hay; y hecho esto hago la operacion como arriba.

Multiplicacion de los Números complexos.

95. Se puede reducir generalmente la multiplicacion de los números complexos á la multiplicacion de un quebrado por otro quebrado, de cuya operacion ya se dió (84) la regla. Por egemplo, si se preguntase quanto ha de costar una obra de 54 V. 2 P. á razon de 18 Pe. 5 rs. 15 mrs. la vara; se puede reducir todo el 18 Pe. 5 rs. 15 mrs. á maravedises (42); multiplicando 18 Pe. 5 rs. 15 mrs. á maravedises (42); y resultarán 9365 maravedises, y como el maravedí es la 510.ma parte del peso, se puede representar el multiplicando por $\frac{9365}{510}$ del peso; se reducirá igualmente todo el multiplicador 54 V. 2 P. á pies, y resultarán 164 pies; y como el pie es la tercera parte de la vara, será el multiplicador $\frac{164}{3}$ de vara, de suerte que está reducida la operacion á multiplicar $\frac{9365}{510}$ de peso por $\frac{164}{3}$ de vara, de cuya multiplicacion resulta $\frac{1535860}{1530}$ (84) de peso, que valen 1003 Pe. 12 rs. 15 mrs. (90).

Pe-

96. Pero se pueden multiplicar unos por otros los números complexos, sin reducirlos á quebrado.

Antes de declarar cómo se hace la operacion, es del caso prevenir que quando se han de multiplicar uno por otro dos números cuyas unidades son de distinta especie, se ha de tomar por multiplicando aquel cuyas unidades fueren de la misma especie que las que ha de espresar el produćto. Si quiero saber, por egemplo, quanto importan 12 varas de paño á 50 rs. la vara, he de considerar como multiplicando el número 50 rs. pues el produćto ha de espresar reales; porque en este caso han de salir al produćto tantas veces 50 rs. quantas varas hay, esto es 12 veces.

De lo que se infiere que el multiplicador es siempre un número abstraćto, que no (6) espresa unidades ni partes de unidad de determinada especie, sino quantas veces se ha de tomar el multiplicando. En el egemplo propuesto el multiplicador 12 es un número abstracto; y debe ser así, porque si le considerásemos como que representa 12 varas, y praćticásemos la multiplicacion, cometeríamos un absurdo; pues lo sería multiplicar varas por reales.

97. Sentado esto, que segun se echa de ver, debe entenderse de los números complexos igualmente que de los incomplexos, hay tres reglas que praćticar quando se quiere multiplicar uno por otro dos números complexos. 1.° Se han de reducir ambos á la menor especie que contienen. 2.° Se multiplica uno por otro, despues de hecha esta reduccion. 3.° Se divide el produćto por el número que espresa quantas veces la unidad mayor del multiplicador contiene á la menor; el quociente será el produćto que se busca. Pero como este produćto espresará las unidades menores del multiplicando, se podrá reducir á las unidades mayores del mismo multiplicando, si se quisiere. Los egemplos aclararán todo lo dicho.

Se

Se pregunta quanto importan	4 V. 2 P. 8. p.
costando cada vara	2 Pe. 3 rs. 4 mrs.

Reduzco 2 Pe. 3 rs. 4 mrs. á las menores unidades que este número contiene, esto es á maravedises, y salen 1126 maravedises. Reduzco tambien las 4 V. 2. P. 8 p. á pulgadas, y salen 176 p. 2.° Multiplico 1126 por 176, sale el producto 198176. 3.° Divido este producto por 36 que espresa quantas veces la mayor unidad del multiplicador, que es la vara, contiene á la menor, que es la pulgada. Salen al quociente 5504 maravedises y $\frac{32}{36}$ ó $\frac{8}{9}$ de maravedí, que por valer cerca de un maravedí añado (76) una unidad al último guarismo del quociente hallado, que será por lo mismo 5505. Practicando lo que digimos (55), hallaremos que estos maravedises valen 10 pesos, 11 reales y 31 maravedises.

¿Que interes han de dár 10 Pe. 3 rs. 4 mrs. en el supuesto de que cada peso dá 3 Pe. 2 rs. 6 mrs. de interes?

Por la pregunta se conoce que hemos de multiplicar 3 Pe. 2 rs. 6 mrs. por 10 Pe. 3 rs. 4. mrs. 1.° reduzco 3 Pe. 2 rs. 6 mrs. á 1604 mrs. y el multiplicador á 5206 mrs. 2.° Multiplico 1604 por 5206, sale el producto 8350424 mrs. 3° Divido este producto por 510, que espresa quantos maravedises caben en un peso, salen al quociente 16373 maravedises y $\frac{194}{510}$ de maravedi, que será fácil reducir á pesos y reales por lo dicho (53) y saldrán 32 Pe. 1 rl. 19 mrs.

De las tres operaciones que hay que practicar en la multiplicacion de dos números complexos, las dos primeras se perciben facilmente; sola la tercera pide que manifestemos su fundamento. Vamos á egecutarlo, aplicando lo que digimos al egemplo primero. Si valiese cada pulgada 1126 mrs. no hay duda en que 4 V. 2 P. 8 p. ó 176 p. valdrian 198176 mrs. por ser este número el producto de 1126 por 176. Pero 1126 mrs. son

por lo supuesto el precio de la vara, y no de la pulgada; luego ya qué vale la vara 36 pulgadas, el precio de la vara es 36 veces menor que el de la pulgada ó que el producto 198176; y así para sacar en maravedises el precio de 176 pulgadas, se debe partir 198176 por 36.

98. Si se hubiesen de multiplicar uno por otro dos números complexos, que espresase cada uno medidas de longitud, quales serían estos dos. 5 V. 1 P. 6 p. y 3 V. 2 P. 9 p. en este caso se omitiria la tercera operacion que hémos declarado y formaria el producto una superficie, conforme manifestarémos en la Geometría.

De la Division de los Números complexos.

99. Se les hará muy facil esta operacion á los que se hubiesen hecho cargo de lo que hemos dicho respecto de la antecedente, y sus fundamentos. Solo prevengo que así como en la multiplicacion de los números complexos se considera el multiplicador como (96) un número abstracto, en la division de los mismos números se considera en algunos casos como número abstracto el divisor, y en otros el dividendo. La naturaleza de las cuestiones que dan motivo para esta division, determina qual de estos dos números debe mirarse como número abstracto.

Supongamos que habiendo costado 7 M. 2 on. 346 Pe. 14 rs. 6 mrs. se pregunte á quanto sale el marco. La pregunta manifiesta por sí que hallarémos el valor de cada marco, dividiendo los 346 Pe. 14 rs. 6 ms. por 7 M. 2 on.

100. Para egecutar esta division, es menester 1.° reducir el divisor á las unidades de la menor clase que contiene. 2.° practicar la division empezando por las unidades mayores del dividendo, para hacer despues lo propio con las que se les siguen. 3.° multiplicar todo el quociente por el número que espresa quantas veces

la menor unidad del divisor cabe en la mayor.

101. Si despues de hecha la division de las unidades mayores del dividendo, pongo por caso, de los pesos, hubiese alguna resta, se reducirá esta resta á reales, y se añadirán los que saliesen de esta reduccion á los que llevaba ya el dividendo, á fin de dividir despues la suma por el divisor que hubiere dividido los pesos. Si hubiese tambien alguna resta, despues de divididos los reales, se reducirá á maravedises, se juntarán con los que hubiese ya en el dividendo, y se dividirá la suma por el mismo divisor.

Apliquemos el método al egemplo propuesto. 1.° Reduzco todo el divisor 7 M. 2 on. á 58 onzas. 2.° Divido 346 Pe. 14 rs. 6 mrs. por 58, empezando por los pesos, y sale el quociente 5 Pe. y la resta 56 que reduzco á reales, multiplicándola por 15; sale el producto 840, al qual añado los 14 reales del dividendo, y sale la suma 854, que divido por 58, y sale el quociente 14 rs. y la resta 42, que reduzco á 1428 maravedises, con los quales junto los 6 del dividendo y sale la suma 1434, que divido por 58, y salen 24 mrs. y el quebrado $\frac{42}{58}$, que espresa partes del maravedí. 3.° multiplico este quociente por 8, porque caben 8 onzas en el marco; el producto es 47 Pe. 12 rs. 27 mrs y $\frac{46}{58}$ de maravedí, cantidad despreciable.

55 varas y tres quartas de tela han costado 642 Pe. 12 rs. 8 mrs. se pregunta ¿á como sale la vara? Es menester reducir las 55 varas $\frac{3}{4}$ á quartas que son las unidades menores del divisor. Las 55 varas componen 220 quartas, á las que añadiendo las $\frac{3}{4}$ del quebrado compondrán 223 quartas, cuya cantidad será el divisor. Empezando la division por las unidades mayores del dividendo, hallo el quociente 2 Pe. y la resta 196 que reducida á reales (42) y añadiéndola los 12 rs. que hay en el dividendo, salen 2952, que he de dividir por 223; sale el quociente 13, y la resta 53, que reducida á maravedises, y añadiéndola los 8 que hay en el dividendo, saco 1810 mrs. que divido por 223, y hallo el quociente 8 y el quebrado $\frac{26}{223}$ que es una parte despreciable de maravedí. Hallo, pues el quociente total 2 Pe. 13 rs. 8 mrs. que multiplico por 4, pues la unidad menor del divisor cabe quatro veces en la mayor, y sale el verdadero quociente 11 Pe. 7 rs. 32 mrs. que es á lo que sale cada vara.

102. Resta manifestar la razon del tercer artículo del método, porque los dos primeros no tienen dificultad, y la manifestarémos aplicando el discurso al egemplo primero. Es evidente que dividiendo 346 Pe. 14 rs. 6 mrs. por 58, el quociente que sale es el valor de una onza, pues espresa onzas el divisor 58. Por consiguiente, para saber el valor del marco, que buscamos, se ha de multiplicar el quociente hallado por el número 8 que espresa de quantas onzas se compone el marco.

103. Quando el divisor es un número incomplexo, es escusado practicar el primero y tercer artículo del método. Si 26 arrobas de vino, por egemplo, hubiesen costado 1467 rs. 31 mrs. y quisiésemos saber á como sale cada arroba, bastaría dividir por 26 primero los reales, y despues los maravedises del dividendo, añadiéndoles los que hubiere en la resta procedente de la division de los reales por 26.

104. En los egemplos propuestos debe considerarse el divisor como un número abstracto, porque solo espresa en quantas partes iguales se ha de partir el dividendo. Pero en otros casos se debe mirar al quociente como un número abstracto, porque solo espresa quantas veces cabe el divisor en el dividendo. Esto sucede quando el dividendo y el divisor espresan unidades de una misma especie. Si nos propusiésemos dividir 67 Pe. 12 rs. 6 mrs. por 5 Pe. 4 rs. 6 mrs. es evidente que solo buscaríamos un número que espresára quantas veces cabe el divisor en el dividendo. Pero en es-

este caso se debe reducir el dividendo á la menor cantidad del divisor antes de practicar la division. En el que aquí proponemos, el dividendo será 34584, y 2692 el divisor, sale el quociente $12 \frac{2280}{2692}$. En las cuestiones parecidas á esta se echa de ver que es escusado practicar el tercer artículo del método, pues para saber quantas veces cabe el divisor en el dividendo, basta hallar quantas veces todas las unidades menores que hay en el divisor caben en las unidades de la misma clase que hay en el dividendo, y queda hecha la operacion.

De las cantidades Decimales.

105. Ahora cumplirémos la palabra que dimos (20) de declarar un método particular de dividir y subdividir la unidad en varias partes, sumamente acomodado para calcular. Consiste en dividir la unidad en partes de tal naturaleza que cada una es diez veces menor que la primera, y que por esta razon se llaman *decimales.* Bien se echa de ver que un número que contiene partes decimales no mas, es un quebrado, y que es fraccionaria toda cantidad que ademas de contener un cierto número de unidades, contiene tambien partes decimales de la unidad que espresa. Como las decimales se calcúlan con la misma facilidad que los enteros, son de muchísimo uso en todos los ramos de la Matemática; y con algunos egemplos manifestarémos quan fundada es la preferencia que han merecido respecto de los quebrados comunes.

106. Para valuar en decimales las partes menores que la unidad, se concibe que esta unidad, sea la que fuere, peso, vara &c. se compone de 10 partes, al modo que se concibe la decena compuesta de diez unidades simples, ó como imaginamos el peso compuesto de 15 reales. Estas nuevas unidades contrapuestas á las

las decenas, se llaman *décimas*; se espresan con los mismos guarismos que las unidades simples, y como son diez veces menores que estas, se colocan al lado del guarismo que representa las unidades simples, ácia la derecha.

Pero con el fin de escusar las equivocaciones que podrian padecerse si se tomasen estas décimas por unidades simples, se ha determinado fijar con una señal particular el lugar de las unidades; la señal que para esto mas se usa es una coma puesta al lado del guarismo que espresa las unidades, ácia la derecha, ó, lo que es lo mismo, entre las unidades y las *décimas*; así, para espresar veinte y quatro unidades y tres décimas, se escribe 24, 3.

107. Podemos tambien considerar ahora las *décimas* como unidades compuestas de otras diez, cada una diez veces menor que las *décimas*, y por la misma razon de analogía las escribirémos al lado de las décimas ácia la derecha. Estas nuevas unidades diez veces menores que las décimas serán cien veces menores que las unidades principales, y por esta razon las llamarémos *centésimas.* Así, para espresar veinte y quatro unidades, tres décimas y cinco centésimas, escribirémos 24, 35.

108. Concibamos igualmente las *centésimas* como compuestas de diez partes; estas partes serán mil veces menores que la unidad principal, por cuya razon se llamarán *milésimas*; y por ser diez veces menores que las *centésimas*, se escribirán á su lado ácia la derecha. Prosiguiendo esta division de diez en diez, se formarán nuevas unidades, que llamarémos succesivamente *diez milésimas*, *cien milésimas*, *millonésimas*, *diez millonésimas*, *cien millonésimas* &c. que escribirémos en lugares tanto mas distantes de la coma, ácia la derecha, quanto menores fueren dichas partes.

Las

109. Las partes de la unidad de que acabamos de hablar se llaman *decimales*.

110. En quanto al modo de pronunciarlas ó leerlas, es el mismo que se usa respecto de los números enteros. Despues de haber pronunciado los guarismos que están antes de la coma ácia la izquierda, se pronuncian las decimales del mismo modo; pero al fin se añade el nombre de las unidades decimales de la última especie: así, para pronunciar este número 34,572, dirémos treinta y quatro unidades, y quinientas setenta y dos *milésimas*; si fuesen varas, por egemplo, diríamos treinta y quatro varas, y quinientas setenta y dos milésimas de vara.

No es dificultoso hacerse cargo de la razon de este modo de leer las decimales, si se considera que en el número 34, 572 el guarismo 5 puede representar, como quisiéremos, ó cinco *décimas*, ó quinientas *milésimas*; porque valiendo la *décima* (107) 10 *centésimas*, y la *centésima* (108) 10 *milésimas*; la *décima* contendrá diez veces 10 *milésimas* ó 100 *milésimas*; por lo que las 5 *décimas* valen 500 *milésimas*. Por la misma razon podrémos pronunciar el 7 diciendo 70 *milésimas*, porque cada *centésima* (108) vale 10 *milésimas*.

111. Por lo que mira á la especie de las unidades del último guarismo, se hallará siempre con facilidad contando succesivamente desde la izquierda á la derecha en cada guarismo desde la coma, con los nombres siguientes, *décimas*, *centésimas*, *milésimas*, *diez milésimas* &c.

112. Quando no hay unidades enteras, y espresa un número partes no mas de la unidad, se escribe un cero en lugar de las unidades; así, para representar 125 *milésimas*, se escribe 0, 125. Si quisiésemos representar 25 milésimas, escribiríamos 0, 025, poniendo un cero entre la coma y los demás guarismos, ya para señalar que no hay *décimas*, ya para dar á las partes que se siguen su verdadero valor. Por la misma razon pondríamos seis *diez milésimas* de este modo 0, 0006.

113. Consideremos ahora las diferencias que se pueden originar en el valor de un número de mudar el lugar de la coma.

Como la coma determina el lugar de las unidades, y todos los demás guarismos tienen valores dependientes de su distancia á la misma coma; si se escribe la coma uno, dos, tres &c lugares mas adelante, ácia la izquierda, se muda el número en otro 10, 100, 1000 &c veces menor; y al contrario se le hará 10, 100, 1000 &c veces mayor, si se pone la coma uno, dos, tres &c lugares mas ácia la derecha.

La razon es muy clara; porque si en el número 4327, 5264 colocáramos la coma un lugar mas ácia la izquierda, de este modo 432, 75264, es manifiesto que los millares del primer número serían centenares en el segundo; los centenares serían decenas; las decenas unidades; las unidades décimas; las décimas centésimas; y así prosiguiendo. Luego cada parte del primer número llegaría á ser 10 veces menor con la transposicion de la coma. Si trasladáramos al contrario la coma á un lugar mas ácia la derecha, escribiendo 43275, 264, los millares del primer número representarían decenas de millares, los centenares millares, las decenas centenares, las unidades decenas, las décimas serían unidades, las centésimas décimas; y así prosiguiendo. Luego el nuevo número sería 10 veces mayor que el primero.

114. Discurriendo del mismo modo probaríamos que con colocar la coma dos ó tres lugares mas ácia la izquierda, se transformaría el número en otro 100 ó 1000 veces menor, y que sería 100 ó 1000 veces mayor si se colocase la coma dos ó tres lugares mas ácia la derecha.

115. Observarémos finalmente respecto de las deci-

cimales que no se muda su valor, aunque se pongan á continuacion del último guarismo decimal quantos ceros se quisieren. Así 43, 25 es lo mismo que 43, 250, ó que 43, 2500, ó que 43, 25000.

Porque como cada centésima vale 10 milésimas ó 100 diez milésimas &c, las 25 centésimas han de valer 250 milésimas ó 2500 diezmilésimas &c; en una palabra, esto es lo mismo que si en lugar de decir 25 doblones, digéramos 100 pesos; ó 150 libras en lugar de decir 6 arrobas.

Adicion de las partes Decimales

116. Como las decimales se cuentan del mismo modo que los números enteros, por decenas, á medida que se vá de la derecha á la izquierda, la regla para sumarlas es de todo punto la misma, observando que las unidades de una misma clase deben estar en una misma columna.

Así, si se me ofreciere sumar los tres números 72,957 ... 12, 8 ... 124, 03;

escribiré	72,957
	12,8
	124,03
	209,787

y procediendo como en los egemplos antecedentes (23), sacaré la suma 209, 787.

De la Sustraccion de las partes Decimales.

117. Para restar una cantidad decimal de otra, se practicará de todo punto la misma regla que para restar un número entero de otro; pero para escusar tropiezos en su aplicacion, bastará hacer que sea uno mismo

mo el número de guarismos decimales en cada uno de los dos números propuestos, escribiendo el número correspondiente de ceros á continuacion del que tuviere menos decimales; esta preparacion no altera el valor de dicho número (115).

De..............	5043,25
quiero restar......	385,6532

Pongo dos ceros á continuacion de las decimales del número superior; hago despues la operacion con los dos números así preparados, puntualmente del mismo modo que si fuesen números enteros.

5403,2500	
385,6532	
5017,5968	resta.

Y hallo que la resta es 5017, 5968.

De la Multiplicacion de las partes Decimales.

118. Para multiplicar las partes decimales, se practicará la misma regla que con los enteros, sin hacer caso alguno de la coma; pero despues de hallado el producto, se separarán en este, ácia la derecha, tantos guarismos quantas decimales hubiere en el multiplicador y el multiplicando juntos.

Se ha de multiplicar..	54,23
por...............	8,3
	16269
	43384
	450,109

Multiplicaré 5423 por 83, el producto será 450109; y y como hay dos decimales en el multiplicando, y una en el multiplicador, separaré tres guarismos á la derecha de dicho produƈto, que con esto será 450, 109; el que debe ser en la realidad.

Es facil hacerse cargo de la razon en que estriva esta regla, considerando que si el multiplicador fuese 83, el produƈto no contendría sino *centésimas* en las partes decimales, porque se habría repetido 83 veces el multiplicando 54, 23, cuyas decimales son centésimas; pero como el multiplicador es 8, 3, esto es, (106) diez veces menor que 83, debe por lo mismo espresar el produƈto unidades diez veces menores que las centésimas; luego el último guarismo de sus decimales debe espresar (108) *milésimas*; luego ha de haber tres guarismos decimales en dicho produƈto; esto es, tantos como hay en el multiplicando y el multiplicador juntos.

Del mismo modo se debe discurrir respeƈto de otro caso qualquiera.

Si hubiéramos de multiplicar...	0, 12
por........................	0, 3
	0, 036

Multiplicaríamos 12 por 3, y saldría el produƈto 36; como enseña la regla que se separen en este caso tres guarismos, pudiera quedar alguna duda, porque el produƈto no tiene sino dos; pero si atendemos á la razon que hemos dado de la práƈtica de esta regla en el egemplo antecedente, echarémos de vér que es preciso, como aquí se vé, interponer un cero entre 36, y la coma. Con efeƈto, si hubiesemos de multiplicar 0, 12 por 3, es constante que saldría el produƈto 0, 36; pero como se ha de multiplicar por 0, 3, esto es, por un número diez veces menor que 3, ha de salir un produƈto diez veces menor que 0, 36, esto es, que esprese milésimas, y esto se verifica con escribir (113) 0, 036.

De la Division de las partes Decimales.

119. Por no detenernos en distinciones inútiles, reduciremos la division de los decimales á sola esta regla.

Escríbanse á continuacion del número de los dos propuestos que tiene menos decimales, quantos ceros sean menester para que sea uno mismo en ambos el número de las decimales (esto no mudará el valor de dicho número (115)); bórrese la coma en ambos, y hágase la operacion como con los números enteros; nada habrá que mudar en el quociente que se halláre.

Para dividir 12, 52 por 4, 3.

escribo........ 12, 52 | 4, 3

ó mejor....... 12, 52 | 4, 30

completando el número de las decimales.

Borrando la coma, tengo que dividir 1252 por 430; haciendo la operacion

1252	430
392	$2\frac{392}{430}$

hallo 2 al quociente, y la resta 392, quiero decir que el quociente es $2\frac{392}{430}$.

Pero como se usan decimales para escusar los quebrados comunes, en vez de escribir la resta 392 en forma de quebrado, como se ha hecho, se proseguirá la operacion como en el egemplo siguiente.

1252	430
3920	2 , 9116
500	
700	
2700	
120	

Despues de haber hallado el quociente en enteros, que en este egemplo es 2, se pondrá un cero al lado de 392, cuyo cero hará á la verdad que este número sea diez veces mayor de lo que debe ser; se proseguirá dividiendo por 430, y habiendo hallado que se debe escribir 9 al quociente, se escribirá con efecto, pero señalando primero el lugar de las unidades enteras, con escribir la coma despues del 2; así el 9 no espresará sino décimas; hecha la multiplicacion y la sustraccion, se pondrá un cero al lado de la resta 50, que es lo mismo que si al principio se le hubiesen añadido dos al dividendo; pero con escribir despues de 9 el quociente 1 que se halláre, se le dará su verdadero valor, pues entonces espresa centésimas; se proseguirá así la operacion quanto fuere menester. Ciñéndonos á dos decimales, sacamos el quociente que no discrepa del verdadero una centésima parte; prosiguiendo hasta tres guarismos, se sacaria un quociente que no discreparia del verdadero una milésima parte; y así prosiguiendo, pues no se hubiera podido escribir una unidad de mas ó de menos, sin hacer el quociente ó mayor ó menor de lo que debe ser.

Falta declarar 1.° por qué el borrar la coma en el dividendo y en el divisor nada altera el quociente, despues de haber hecho igual en cada uno el número de las decimales: esto es facil de entender, porque en el egemplo propuesto, el dividendo 12, 52, y el divisor 4, 30 no son sino 1252 centésimas, y 430 centésimas, pues las unidades enteras valen centenares de cen-

centésimas (107); pero claro está que en 1252 centésimas caben 430 centésimas las mismas veces que en 1252 unidades caben 430 unidades; luego es inútil atender á la coma, una vez que se completen las decimales.

2.° Por qué en el caso de añadirle un cero, por egemplo, á la resta 392, no resulta error alguno en la operacion, con tal que se ponga el quociente en un lugar donde valga 10 veces menos que si espresase unidades. Es constante que añadiéndole un cero á un dividendo le hago 10 veces mayor; pero si al tiempo que egecuto la division por un número determinado, hago que el quociente valga 10 veces menos, con esto compenso el aumento que le dí al dividendo al añadirle un cero. Del mismo modo se debe discurrir respecto de los casos en que se le añaden mas ceros al dividendo.

120. Por lo dicho hasta ahora respecto de las decimales se echa de ver que se calcúlan con la misma facilidad que los números enteros. Por consiguiente será muy del caso, siempre que ocurran quebrados, reducirlos, si se quiere, á decimales, y saldrán mas fáciles las operaciones que con dichos quebrados hubiere que hacer. Esta reduccion se funda en lo que acabamos de decir (119).

Así, si se quiere reducir $\frac{4253}{9678}$ á decimales, y sacar su valor con diferencia de menos de una milésima de unidad, se deberá dividir 4253000 por 9678; cuya operacion dará 439, de suerte que será 0, 439 el valor de $\frac{4253}{9678}$, con diferencia de menos de una milésima parte.

Algunos usos de las Decimales.

121. Declarado yá el modo de reducir á decimales qualesquiera quebrados (120), será muy facil de entender lo que se deberá practicar quando se hubiere de

de reducir tambien á decimales un número complexo qualquiera.

Supongamos que se nos ofrezca reducir 3. V. 2. P. 8 p. 7 l. á decimales de la vara, de modo que no se omita ni una media linea. Reparo que la vara contiene 432 lineas, y por consiguiente 864 medias lineas; cuyo número manifiesta que si no quiero omitir una media linea, he de llevar la aproximacion mas allá de las centésimas, esto es hasta las milésimas; porque si me contentára con llevarla hasta las centésimas no mas, omitiendo una centésima, omitiria una de las 864 medias lineas que componen la vara, y erraria por consiguiente el intento.

Sentado esto, reduzco los 2 P. 8 p. 7 l. todo á lineas, y salen 391 lineas, ó $\frac{391}{432}$ de vara: transformando esta cantidad en decimales, hasta las milésimas, por el método arriba (120) declarado, salen 0, 905, de donde infiero que el número propuesto vale 3, 905.

Si quisiésemos reducir 8 Pe. 4 rs. 5 ms. á decimales de peso, de manera que no omitiésemos medio maravedí, consideraríamos que pues el peso vale 15 rs. y el real 34 maravedises, cada peso vale (42) 510 maravedises, ó 1020 medios maravedises, y que por consiguiente la decimal que busco ha de llegar hasta las diezmilésimas. Reduzco los 4 rs. 5 ms. á maravedises, y salen 141, ó $\frac{141}{510}$ de peso. Reduzco esta cantidad á decimal hasta las diez milésimas, y hallo que la cantidad propuesta 8 Pe. 4 rs. 5 ms. vale 8 Pe. 2764.

122. Resta saber ahora cómo se ha de valuar una cantidad decimal, esto es, como haríamos para saber por egemplo, quántos reales y maravedises valen las 0, 2764 de un peso. Para saberlo, basta tener presente que una cantidad decimal es un quebrado (105), y que para valuar un quebrado se ha de multiplicar el numerador por el número que espresa quántas veces

ces

ces la unidad en que deseo determinar el valor del quebrado cabe en la unidad á la qual el quebrado pertenece, y dividir el produćto por el denominador (90); quiero decir, que quando busco en reales el valor de un quebrado de peso, he de multiplicar el numerador por 15, porque 15 rs. componen un peso, y partir el produćto por el denominador que llevâre el quebrado propuesto.

Pero como las decimales no llevan denominador, para valuarlas, basta con la multiplicacion, y se ahorra el calculador el trabajo de dividir el produćto por el denominador; bastará, pues, en el caso propuesto multiplicar 0, 2764 por 15. Por donde se manifiesta quanto se abrevian las operaciones usando de las decimales.

Sentado esto, multiplico 0, 2764 por 15, sale el produćto 4, 1460, esto es, 4 rs. y 0, 1460 de real. Para valuar esta última cantidad, multiplícola por el número 34, que espresa quantos maravedises componen un real; hallo el produćto 4, 9640, esto es 4 ms. y 0, 9640 de maravedi, que dentro de poco declararemos lo que viene á valer, con poca diferencia.

Por este método hallaria, que 0, 5687 de vara valen 1 P. 8 p. 5 l. y 0, 6784 de linea.

123. Con igual facilidad hallarémos el método para valuar una decimal de otra qualquiera unidad, como si se nos preguntase quánto valen 0, 0046 de vara, importando cada vara 17 rs. Ya que un real vale 34 maravedises, y en el caso aćtual importa 17 rs. cada vara, será de 17 veces 34 maravedises el valor de la vara (41). Multiplico, pues, la decimal propuesta 0, 0046 por el produćto de 17 por 34, esto es por 578, el produćto 2, 6588 manifiesta que costando cada vara 17 rs. las 0, 0046 de vara importan 2 ms. y 0, 6588 de maravedi.

124. Por esta última operacion se echa de ver que

 ha-

haciendo uso de las decimales, no se deben poner muchas, sino quando se necesita suma exactitud, y esto lo manifiestan las mismas cuestiones que dan motivo á las operaciones: bastan comunmente una, dos, ó á lo mas, tres decimales.

Porque ya hemos visto lo que importan 0, 0046 de vara, dando 17 reales por vara. Pero si se pagase una obra á 10000 reales, por egemplo, la vara, practicando el método declarado (122), hallaríamos que las 0, 0046 de vara importarian 46 reales, que merecen alguna consideracion.

125. Pero es de advertir que quando se omite un guarismo en una cantidad decimal, si este pasa de 5, se le debe añadir una unidad al último guarismo de los que quedan. Supongamos, por egemplo, que provenga esta cantidad 0, 386 de una cuestion para cuya resolucion me basten los dos primeros guarismos, ó la cantidad 0, 38. Como el 6 que omito pasa de 5, añadiré una unidad al 8, y tendré 0, 39.

La razon es patente; porque como diez unidades de la columna que ocupa el 6, ó 10 milésimas valen una unidad de la columna que ocupa el 8, ó una centésima (108), quando omito el 6 omito mas de la mitad de una centésima, y añadiéndole una unidad al 8, le añado á toda la cantidad propuesta 0, 386, menos de lo que la quitára, contentándome con borrar el 6.

Si se omitiesen dos guarismos decimales, que valiesen mas de 50, se le deberia añadir una unidad al guarismo que quedase el último: la razon es muy patente.

Así, quando hallamos arriba (122) que las 0, 2764 de un peso valen 4 rs. 4 ms. y 0, 9640 de maravedí, en lugar de 4 ms. escribo 5 ms. porque la decimal 0, 9640 de maravedí se acerca muchísimo al valor entero de un maravedí, pues el primer guarismo 9 espresa nueve décimas de maravedí.

De

De las Potencias y Raices de los Números.

De la formacion de los Números quadrados, y de la estraccion de sus raices.

126. Llámase *quadrado* de un número el producto de dicho número multiplicado por sí mismo; 25 es el quadrado de 5; porque 25 es 5 multiplicado por 5.

127. La *raiz quadrada* de un número propuesto es el número que multiplicado por sí mismo reproduce el número propuesto: 5 es la raiz quadrada de 25: 7 es la raiz quadrada de 49.

128. Un número que quadramos, es pues, á un tiempo multiplicando, y multiplicador, es por lo mismo dos veces factor (29) del producto, y esta es la razon de llamarse este producto, ó quadrado *segunda potencia* de dicho número.

129. Para quadrar un número se le multiplica por sí mismo; pero para estraer la raiz quadrada de un número, es preciso valerse de un método particular, á lo menos quando el número, ó quadrado propuesto tiene mas de dos guarismos.

Quando el número propuesto tiene uno ó dos guarismos no mas, su raiz en número entero es alguno de los números

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
cuyos quadrados son
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Así, la raiz quadrada de 72, por egemplo, es 8 en número entero; porque hallándose 72 entre 64, y 81, su raiz estará entre las raices de estos dos, esto es, entre 8, y 9; es 8, y un quebrado, de cuyo quebrado no podemos hallar, á la verdad, el valor cabal; pero podemos aproximarnos á él continuamente, conforme lo veremos dentro de poco.

130. La raiz quadrada de un número que no es un

 qua-

quadrado perfecto se llama un *número sordo*, *irracional*, *ó inconmensurable*.

131. Tratemos de los números que tienen dos guarismos no mas.

Para quadrar un número como 54, por egemplo,

$$\begin{array}{r} 54 \\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

Despues de haber escrito el multiplicando, y el multiplicador como se vé, multiplicamos por el método ordinario el 4 superior por el 4 inferior, de lo que resulta evidentemente el quadrado de las unidades.

Multiplicamos despues el 5 superior por el 4 inferior, de lo que resulta el producto de las decenas por las unidades.

Pasamos despues al segundo guarismo del multiplicador, y multiplicamos el 4 superior por el 5 inferior, de lo que resulta el producto de las unidades por las decenas, ó (31) el producto de las decenas por las unidades.

Finalmente, multiplicamos el 5 superior por el 5 inferior, de lo que resulta el quadrado de las decenas.

Sumamos estos productos, y hallamos que la suma es el número 2916, que segun vemos se compone del quadrado de las decenas, mas de dos veces el producto de las decenas por las unidades, mas del quadrado de las unidades del número 54.

132. Como lo que acabamos de observar se sigue inmediatamente de las reglas de la multiplicacion, se verifica no solo en el número 54, sino tambien en otro qualquiera que conste de decenas, y unidades; de suerte que podemos decir generalmente que el *quadrado de todo número compuesto de decenas, y unidades, constará* de las tres partes que acabamos de especificar, es á saber, *del quadrado de las decenas de dicho número, de dos veces el producto de las decenas por las unidades, y del quadrado de las unidades.*

133. Sentado esto, como el quadrado de las decenas espresa centenares (pues 10 veces 10 son 100) es evidente que este quadrado de las decenas no puede hallarse en los dos últimos guarismos del quadrado total.

Como el producto del duplo de las decenas multiplicadas por las unidades, espresa necesariamente decenas, no puede hallarse tampoco en el último guarismo del quadrado total.

134. Luego para volver del quadrado 2916 á su raiz se puede discurrir del modo siguiente.

$$\begin{array}{r|l} 2916 & 54 \text{ raiz.} \\ 416 & \\ 104 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

Empecemos buscando las decenas de esta raiz; pero la formacion del quadrado nos enseña que el quadrado de estas decenas se halla en 2916, y que dicho quadrado no puede estár en los dos últimos guarismos; está, pues, en 29; y como la raiz quadrada de 29, no puede ser mayor que 5, inferirémos que el número de las decenas de la raiz es 5, y le escribirémos al lado de 2916 como se vé.

Quadro 5, y resto el producto 25 de 29; resta 4, á cuyo lado bajo los otros guarismos 16 del número propuesto 2916.

Para hallar ahora las unidades de la raiz, considero de qué se compone la resta 416; se compone de dos partes no mas del quadrado, es á saber, del duplo de las decenas de la raiz multiplicado por las unidades, y y del quadrado de las unidades de esta misma raiz. De estas dos partes basta la primera para que hallemos las unidades que buscamos; porque una vez que se compone del duplo de las decenas multiplicado por las unidades, si la dividimos por el duplo de las decenas que conocemos, el quociente serán (52) las unidades; resta solo saber en qué parte de 416 se halla dicho duplo de las decenas multiplicado por las unidades; segun hemos visto arriba no puede hallarse en el último guarismo; está, pues, en 41; debemos pues partir 41 por el duplo 10 de las decenas halladas; escribo debajo de 41 el duplo 10 de las decenas, y egecutando la division, el quociente 4 que sale es el número de las unidades, que escribo ácia la derecha al lado de las 5 decenas halladas; de suerte que la raiz que buscamos es 54.

Pero es de advertir que aunque el quociente que acabamos de hallar, sea con efecto el verdadero, no obstante puede suceder algunas veces que el quociente hallado de este modo sea mayor de lo que conviene; porque 41 (esto es, la parte que queda despues de separado el último guarismo) incluye no solo el duplo de las decenas multiplicado por las unidades, sino tambien las decenas procedentes del quadrado de las unidades; por lo que, para sacar el verdadero guarismo de las unidades, es preciso apelar á la verificacion siguiente.

Despues de hallado el guarismo 4 de las unidades, y escrítole á la raíz, le escribo al lado del duplo 10 de las decenas, con lo que sale el número 104, cuyos guarismos los multiplico todos succesivamente por el mismo número 4, y resto los produćtos succesivos de las partes correspondientes de 416; como no resta nada, infiero que la raiz es con efećto 54

Si quedase alguna resta, no dejaría la raiz de ser la verdadera raiz en números enteros, á no ser que dicha

cha resta fuese mayor que el duplo de la raiz despues de añadirle una unidad; pero no hay que temer este tropiezo, quando se toma el quociente siempre el mayor que se puede.

La verificacion que acabamos de enseñar se funda en la formacion misma del quadrado; porque es evidente que multiplicando 104 por 4 sale el quadrado de las unidades, y el duplo de las decenas multiplicado por las unidades; esto es, lo que completa el quadrado perfećto.

135. De lo que acabamos de decir se sigue que para sacar la raiz quadrada de un número que no tiene mas de quatro guarismos, ni menos de tres, se debe buscar, despues de separar dos guarismos ácia la derecha, la raiz quadrada de los que quedan á la izquierda; será esta raiz el número de las decenas de la raiz total que se busca, y se escribirá al lado del número propuesto, tirando entre los dos una raya.

Se restará de los mismos guarismos el quadrado de la raiz hallada, y escribiendo la resta debajo de la misma porcion, se bajarán al lado de esta resta los dos guarismos separados.

Con un punto se separará el guarismo de las unidades de la porcion que se acabáre de bajar, y se dividirá lo que se halláre al otro lado del punto ácia la izquierda, por el duplo de las decenas, escribiéndole debajo; se escribirá el quociente junto al primer guarismo de la raiz, y despues se escribirá al lado del duplo de las decenas, que hubiere servido de divisor.

Finalmente, se multiplicarán por el mismo quociente todos los guarismos que se halláren en esta última linea, y se restarán sus produćtos á medida que se formaren de los guarismos correspondientes en la linea mas arriba.

Aclararémos todo esto con un egemplo.

¿Qual es la raiz quadrada de 7569?

75,69

75,69	87 raiz.
116,9	
167	
000	

Para averiguarlo, separo los dos guarismos 69, y busco la raiz quadrada de 75; es 8, escribo 8 al lado; quadro 8, y de 75 resto el quadrado 64; resta 11 que escribo debajo de 75, y al lado de 11 bajo los guarismos 69 que separé.

Separo en 1169 el último guarismo 9, y será 116 la parte que he de dividir para hallar las unidades.

Tomo por divisor el duplo 16 de las 8 decenas halladas, y escribiéndole debajo de 116; la division me dá el quociente 7, que escribo á la raiz á continuacion de 8.

Pongo tambien este quociente 7 junto al divisor 16; multiplico 167 que forma la última linea por el mismo quociente 7, y á medida que hallo los productos los resto de 1169; no resta nada, y es prueba de que 7569 es un quadrado perfecto y el quadrado de 87.

136. Téngase muy presente que por el duplo de las decenas solo se debe partir la parte que queda ácia la izquierda, despues de separado el último guarismo: de suerte que si en ella no cupiese el duplo de las decenas, no por esto deberíamos hacer uso del guarismo separado; se pondria o á la raiz. Si al contrario el duplo de las decenas cupiese mas de 9 veces en dicha parte, no por esto se debería poner mas de 9 á la raiz; la razon es la misma que para la division (50).

137. El que estuviere bien enterado de lo que acabamos de decir sobre la raiz quadrada de los números que no tienen mas de quatro guarismos, se impondrá facilmente en lo que se debe practicar quando el número de los guarismos es mayor. De qualquier número de guarismos que haya de constar la raiz, la podemos siem-

siempre imaginar compuesta de dos partes, espresando la una decenas y la otra unidades; por egemplo, podemos considerar 874 como compuesto de 87 decenas, y 4 unidades.

Sentado esto, despues de hallados los dos primeros guarismos de la raiz por el método declarado, por el mismo se puede hallar tambien el tercero, considerando dichos dos primeros guarismos como un solo número de decenas, y aplicándoles, para hallar el tercero, todo lo que hemos dicho del primero para hallar el segundo.

Despues de hallados los tres primeros guarismos, si ha de haber otro, se considerarán los tres primeros como que componen un solo número de decenas, al qual se aplicará, para hallar el quarto, lo mismo que se hubiere practicado con los dos primeros para hallar el tercero, y así prosiguiendo.

Pero para mayor seguridad, se debe empezar partiendo el número propuesto en porciones de dos guarismos cada una, yendo de la derecha á la izquierda; podrá suceder que en la última no haya sino uno. Fúndase esta preparacion en que considerando la raiz como compuesta de decenas, y unidades, se debe empezar, en virtud de lo dicho arriba (135) separando los dos últimos guarismos ácia la derecha para que esté en la porcion que queda á la izquierda el quadrado de las decenas; pero como esta parte se compone tambien de mas de dos guarismos, igual razon mueve á separar dos mas ácia la derecha, y así prosiguiendo.

Propóngome sacar la raiz quadrada de 76807696.

76,

76,80,76,96	8764
12 8,0	
1 67	
1117,6	
1746	
7009,6	
17524	
00000	

Despues de partido el número propuesto en porciones de dos guarismos cada una, yendo de la derecha á la izquierda, busco la raiz quadrada de la porcion 76, que está mas ácia la izquierda: hallo que es 8, y pongo 8 al lado del número propuesto: quadro 8, y resto el quadrado 64, de 76; queda la resta 12 que escribo debajo de 76; al lado de esta resta bajo la porcion 80, cuyo último guarismo separo con un punto, y debajo de la parte 128 escribo 16 duplo de la raiz hallada; despues digo ¿en 128 quantas veces 16? cabe 7 veces; pongo 7 á continuacion de la raiz 8, y al lado del duplo 16; multiplico 167 por este mismo número 7, y resto de 1280 el producto de esta multiplicacion; queda 111, á cuyo lado bajo la porcion 76, lo que compone 11176; separo el último guarismo 6 de este número, y debajo de la parte 1117 que queda á la izquierda, escribo 174 duplo de la raiz 87; divido 1117 por 174, y escribo el quociente hallado 6 á la raiz, y al lado del duplo 174: multiplico 1746 por el mismo 6, y restando de 11176 el producto resta 700: al lado de esta resta bajo 96, cuyo último guarismo separo; debajo de 7009, que queda á la izquierda, escribo 1752 duplo de la raiz hallada 876; y dividiendo 7009 por 1752, hallo el quociente 4, y le escribo á la raiz, y al lado del duplo 1752. Multiplico 17524 por el mismo número 4, cuyo producto restado de 70096 no resta nada; así la raiz quadrada de 76807696 es cabalmente 8764.

138. Quando el número propuesto no es un quadrado perfecto, queda una resta al fin de la operacion, y la raiz quadrada que se sacó, es la raiz quadrada del mayor quadrado contenido en el número propuesto: entonces no es posible sacar cabal la raiz quadrada; pero se puede hallar por aproximacion tan inmediata á la verdadera como se quisiere; esto es, de modo que levantando al quadrado la raiz hallada por esta aproximacion, salga un número que discrepará del propuesto una cantidad tan despreciable como se quisiere.

Esta aproximacion se egecuta facilmente por medio de las decimales. Se deben concebir á continuacion del número propuesto dos veces tantos ceros quantas decimales hubiere de llevar la raiz: haciendo la operacion por el método ordinario, y separando despues con una coma á la derecha de la raiz la mitad menos decimales de los ceros que se hubieren añadido á continuacion del número propuesto. Con efecto (118) ya que el producto de la multiplicacion de un número decimal por otro decimal ha de llevar tantas decimales quantas hay en ambos factores juntos, el quadrado (cuyos dos factores son iguales) debe llevar otras tantas mas de las que tiene el uno de los factores, esto es, el duplo de las que ha de llevar la raiz.

Busquemos la raiz quadrada de 87567 con diferencia de menos de una milésima. Para hacer milésimas son menester tres decimales; se deben, pues, añadir seis ceros al quadrado 87567; y así hemos de sacar la raiz quadrada de 87567000000.

8,75,67,00,00,00

```
8,75,67,00,00,00  |295,917 raiz.
47,5
49
-----------
346,7
585
-----------
5420,0
5909
-----------
10190,0
59181
-----------
427190,0
591827
-----------
129111
```

Haciendo la operacion como en los egemplos antecedentes, sacamos que la raiz quadrada, con diferencia de menos de una unidad es el número 295917; esta raiz es la de 8756700000; pero como buscamos la de 87567, ó de 87567,000000: separamos en la raiz un número de guarismos igual á la mitad de los ceros, que añadimos al quadrado; con lo que sacamos que 295,917 es la raiz quadrada de 87567 con diferencia de menos de una milésima.

Así, para sacar la raiz quadrada de 2 con diferencia de menos de una diez milésima, sacarémos la raiz quadrada de 200000000, y hallarémos que es 14142; separando los quatro guarismos de la derecha con una coma, saldrá 1, 4142 que es la raiz quadrada de 2, que no discrepa de la verdadera una diez milésima.

139. Hemos visto (84) como para multiplicar un quebrado por un quebrado se multiplica el numerador por el numerador, y el denominador por el denominador; por consiguiente, para quadrar un quebrado es menester quadrar el numerador, y el denominador: así, el quadrado de $\frac{2}{3}$ es $\frac{4}{9}$, el de $\frac{4}{5}$ es $\frac{16}{25}$.

Lue-

140. Luego recíprocamente, para sacar la raiz quadrada de un quebrado, se debe sacar la raiz del numerador, y del denominador; así, la raiz quadrada de $\frac{9}{16}$ es $\frac{3}{4}$, porque la de 9 es 3, y la de 16 es 4.

141. Pero puede suceder que el numerador, ó el denominador, ó ninguno de los dos sea un quadrado perfecto. Quando solo el denominador es un quadrado, se sacará la raiz aproximada del numerador por el método que acabamos de esplicar, y se sacará la raiz del denominador, que será el denominador de la raiz del numerador; así, si se me pide la raiz de $\frac{2}{9}$ sacaré la raiz aproximada del numerador 2, y saldrá 1,4 ú 1,41, ú 1,414, ú 1,4142 &c. segun la quisiere mas ó menos aproximada, y como la raiz quadrada de 9 es 3, la raiz aproximada de $\frac{2}{9}$ será la cantidad $\frac{1,4}{3}$, ó $\frac{1,41}{3}$, ó $\frac{1,414}{3}$, ó $\frac{1,4142}{3}$.

142. Pero si tampoco el denominador es un quadrado, se multiplicarán ambos términos del quebrado por el mismo denominador, con lo que no se muda el valor del quebrado, y será tambien el denominador un quadrado: hecho esto, se practicará lo que en el caso antecedente. Por egemplo, si se pide la raiz quadrada de $\frac{3}{5}$ se transformará este quebrado en $\frac{15}{25}$, sacando la raiz quadrada de 15 hasta tres decimales, por egemplo, saldrá 3, 872; y como la raiz quadrada de 25 es 5, la raiz quadrada de $\frac{15}{25}$ será $\frac{3,872}{5}$.

143. Para escusar muchas especies de quebrados á un tiempo, se reducirá la cantidad $\frac{3,872}{5}$ á solo quebrado decimal, dividiendo 3, 872 por 5, de lo que saldrá 0, 774 que será la raiz de $\frac{3}{5}$ espresada con solas decimales.

144. Finalmente si hubiere enteros juntos con quebrados, se reducirían los enteros á quebrados (64), y se practicaría lo mismo que hemos dicho respecto de un quebrado. Así, para sacar la raiz quadrada de 8 $\frac{3}{7}$, se transformaría 8 $\frac{3}{7}$ en $\frac{59}{7}$, y este en $\frac{413}{49}$ del qual se ha-

 lla-

llaría que la raiz aproximada es $\frac{20,322}{7}$ ó 2, 903.

145. Tambien se puede reducir á decimales el quebrado que acompaña al entero; pero es preciso tener cuidado de valerse para esto de un número de decimales par, y duplo del que se quiere lleve la raiz; porque como el producto de la multiplicacion de dos números que tienen decimales, ha de llevar tantas quantas hay en los dos factores juntos (118), el quadrado de un número que lleva decimales, debe llevar otras tantas mas que dicho número. Aplicando este método á $8\frac{3}{7}$ se transforma en 8, 428571 (120), cuya raiz es 2, 903 como arriba.

146. Si se hubiese de sacar la raiz quadrada de una cantidad decimal, se debería primero procurar que fuera par, si no lo fuese el numero de sus decimales; esto se conseguirá poniendo á continuacion de sus decimales uno, ó tres ó cinco &c. ceros, esto no muda el valor de la cantidad decimal (115). Así, para sacar la raiz quadrada de 21,935 con diferencia de menos de una milésima; saco la raiz quadrada de 21,935000 que es 4,683, y es tambien la de 21,935. Por el mismo método se hallará tambien que la de 0,542 es, con diferencia de menos de una milésima, 0,736, y que la de 0,0054, es con diferencia de menos de una milésima, 0,073.

De la formacion de los Números cubos, y de la estraccion de su raiz.

147. El *cubo* de un número es el producto de su quadrado multiplicado por el mismo número; 27 es el cubo de 3, porque vale 3 multiplicado por 9, que es el quadrado de 3.

Por consiguiente, el número que se cuba es tres veces factor en el cubo. Esta es la razon por que el cubo se llama tambien *tercera potencia*, ó *tercer grado* de dicho número.

La

148. La *raiz cúbica* de un cubo propuesto es el número que multiplicado por su quadrado, produce dicho cubo; así 3 es la raiz cúbica de 27.

149. No se necesitan, pues, reglas para formar el cubo de un número; pero es indispensable algun método para retroceder desde el cubo á su raiz. Para hallar este método, veamos lo que pasa en la formacion del cubo.

Este método solo se necesita quando el número propuesto tiene mas de quatro guarismos; porque una vez que 1000 es el cubo de 10, la raiz de todo número menor que 1000, y que por consiguiente tuviere menos de quatro guarismos, será un número menor que 10, y tendrá menos de dos guarismos.

Así, la raiz cúbica en números enteros de todo número que se halláre entre dos de estos 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, estará entre dos de los números correspondientes que se siguen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, cuyos cubos son los números de arriba.

150. No todo número tiene raiz cúbica; pero podemos hallar por aproximacion un número que si se cubára, se acercaría mas, y mas al número propuesto; cuya operacion declararémos mas adelante, despues que hubiéremos esplicado el método para hallar la raiz de un cubo perfecto.

151. Veamos, pues, de qué partes se compone el cubo de un número que tiene decenas, y unidades. Ya que el cubo de un número resulta de su quadrado multiplicado por el mismo número, es importante tener presente (132) que el quadrado de un número compuesto de decenas y unidades incluye 1.° el quadrado de las decenas. 2.° dos veces el producto de las decenas por las unidades. 3.° el quadrado de las unidades.

Se deben, pues, multiplicar estas tres partidas por las decenas, y por las unidades del número propuesto para formar su cubo.

F2 A

A fin de distinguir mejor los productos que de aquí resultan, daremos á esta operacion la forma siguiente.

El quadrado de las decenas	1.° multiplicado por las decenas dará	el cubo de las decenas.
Dos veces el producto de las decenas por las unidades		dos veces el producto del quadrado de las decenas multiplicado por las unidades.
El quadrado de las unidades		el producto de las decenas por el quadrado de las unidades.
El quadrado de las decenas	2.° multiplicado por las unidades dará	el producto del quadrado de las decenas multiplicado por las unidades.
Dos veces el producto de las decenas por las unidades		dos veces el producto de las decenas por el quadrado de las unidades.
El quadrado de las unidades		el cubo de las unidades.

Luego juntando estos seis resultados, y sumando los que son semejantes, echarémos de vér que *el cubo de un número compuesto de decenas y unidades contiene quatro partes; es á saber, el cubo de las decenas, tres veces el quadrado de las decenas multiplicado por las unidades, tres veces las decenas multiplicadas por el quadrado de las unidades, y finalmente el cubo de las unidades.*

Formemos, en virtud de esto, el cubo de un número com-

compuesto de decenas y unidades, de 43, por egemplo

$$\begin{array}{r} 64000 \\ 14400 \\ 1080 \\ 27 \\ \hline 79507 \end{array}$$

Tomarémos, pues, el cubo de 4 que es 64; pero como este 4 espresa decenas, su cubo espresará millares, porque el cubo de 10 es 1000: así el cubo de 4 decenas será 64000.

3 veces 16, ó 3 veces el quadrado de las 4 decenas multiplicado por las 3 unidades, dará 144 centenares, porque el quadrado de 10 es 100: así este producto será 14400.

3 veces 4, ó 3 veces las 4 decenas multiplicadas por el quadrado 9 de las unidades, darán decenas y este producto será 1080.

Finalmente el cubo de las unidades rematará en el lugar de las unidades, y será 27.

Sumando estas quatro partes se hallará que 79507 es el cubo de 43, cuyo cubo se hubiera hallado sin duda alguna mas facilmente, multiplicando 43 por 43, y despues por 43 el producto 1849. Si hemos seguido un camino mas largo, no ha sido con la mira de formar el cubo, sino para investigar, enterándonos de qué partes se compone, un método para estraer la raiz.

152. Sentado esto, para la estraccion de la raiz cúbica se practíca lo siguiente.

Quiero sacar la raiz cúbica de 79507.

Cubo............	79,5 07	43 raiz
	15 5,07	
	4 8	

 Pa-

Para hallar la parte de este número que contiene el cubo de las decenas de la raiz, separo los tres últimos guarismos, en los quales hemos visto que no puede hallarse este cubo, porque vale millares.

Busco la raiz cúbica de 79; es 4, que escribo al lado. Cubo 4, y resto el produćto 64 de 79; resta 15, que escribo debajo de 79.

Al lado de 15 bajo 507, y resulta 15507, en el qual ha de haber 3 veces el quadrado de las 4 decenas halladas, multiplicado por las unidades que buscamos; mas 3 veces estas mismas 4 decenas multiplicadas por el quadrado de las unidades; mas finalmente el cubo de las unidades.

Separo los dos guarismos 07; la parte 155 que queda á la izquierda, incluye 3 veces el quadrado de las decenas multiplicado por las unidades; y así, á fin de hallar las unidades (52) partiré esta parte 155 por el triplo del quadrado de las 4 decenas, esto es, por 48.

Hallo que 48 cabe 3 veces en 155; pongo, pues, 3 á la raiz.

Para probar esta raiz, y hallar la resta, si la hay, podríamos componer las tres partes del cubo que deben hallarse en 15507, y ver si componen 15507, ó quánto discrepan de este número; pero es igualmente cómodo hacer esta prueba cubando sobre la marcha 43, esto es, multiplicando 43 por 43, de lo que sale 1849, y multiplicando este produćto por 43, de lo que resulta finalmente 79507. Así 43 es la raiz cúbica cabal de 79507.

Si el número propuesto tuviere mas de seis guarismos, se discurrirá como en el caso que vamos á proponer.

Se ha de sacar la raiz cúbica de 596947688.

596,


```
596,947,688 | 842
849,47
192
592 704
   42436,88
   2 1168
596 9476 88
000 0000 00
```

Consideremos su raiz como compuesta de decenas y unidades, y por lo mismo empezarémos separando los tres últimos guarismos.

Como la parte 596947, que contiene el cubo de las decenas, tiene mas de tres guarismos, su raiz tendrá mas de uno, y por consiguiente tendrá decenas y unidades; es menester, pues, para hallar el cubo de estas primeras decenas, separar los tres guarismos 947.

Sentado esto, busco la raiz cúbica de 596: es 8; escribo este 8 al lado.

Cubo 8, y resto el produćto 512 de 596; resta 84 que escribo debajo de 596.

Al lado de 84 bajo 947, y sale 84947, de cuyo número separo los dos últimos guarismos 47.

Debajo de la parte 849 escribo 192, que es el triplo del quadrado de la raiz 8, y divido 849 por 192; hallo el cociente 4, y le escribo á la raiz.

Para verificar esta raiz, y hallar al mismo tiempo la resta, cubo 84, y resto el produćto 592704 del número 596947: sale la resta 4243.

Al lado de esta resta bajo la porcion 688, y considerando la raiz como un solo número que espresa las decenas de la raiz que busco, separo los dos últimos guarismos 88 de la porcion que bagé, y divido la parte 42436 por el triplo del quadrado de 84, esto es, por 21168; hallo el quociente 2, que escribo á continuacion de 84.

F4 Pa-

Para verificar la raiz 842, y sacar la resta, si la hay, cubo 842, y resto el producto 596947688 del número propuesto 596947688, y como no queda nada, infiero que 842 es la raiz cúbica cabal de 596947688.

Es de advertir 1.° que en el discurso de estas operaciones nunca se debe poner mas de 9 á la raiz. 2.° que si el guarismo que se pone á la raiz fuese muy grande, no se podria egecutar la sustraccion, por lo que se le habrian de quitar succesivamente una, dos, tres &c. unidades, hasta que se pudiese hacer la sustraccion.

Quando el número propuesto no es un cubo perfecto, la raiz que se halla no es sino una raiz aproximada, y pocas veces basta sacarla en números enteros.

Son muy socorridas las decimales para continuar esta aproximacion quanto se quiera; pero ni aun con esto se puede hallar una raiz cabal.

153. Para aproximarse quanto se quisiere á la raiz cúbica de un cubo imperfecto, se deben poner á continuacion de dicho número tres veces mas ceros que las decimales que se quiere lleve la raiz: se hará la estraccion como en los egemplos antecedentes, y concluida la operacion, se separarán con una coma en la raiz, ácia la derecha, tantos guarismos quantas decimales se desearen.

Saquemos por aproximacion la raiz cúbica de 8755 con diferencia de menos de una centésima. Para hallar centésimas en la raiz, esto es, dos decimales, es preciso que el cubo ó el número propuesto tenga seis (118); se deben, pues, escribir seis ceros á continuacion de 8755.

Por consiguiente se reduce la cuestion á sacar la raiz cúbica de 8755000000.


```
8,755,000,000 | 2061
-------------   ----
  07,55
  12
  8000
-------------
   7550,00
   1200
  8741816
-------------
     131840,00
     127308
   8754552981
-------------
       447019
```

Segun se dixo arriba, parto este número en porciones de tres guarismos cada una, yendo de la derecha ácia la izquierda.

Saco la raiz cúbica de la última porcion 8; es 2, que pongo á la raiz; cubo 2, y resto el producto de 8; queda la resta 0, al lado de la qual bajo la porcion 755, y separo los dos últimos guarismos 55: debajo de la parte restante 7, escribo 12, triplo del quadrado de la raiz, y dividiendo 7 por 12, hallo el quociente cero, y le escribo á la raiz.

Cubo la raiz 20, saco 8000, que resto de 8755; queda la resta 755, al lado de la qual bajo la porcion 000, y separo dos guarismos ácia la derecha: debajo de la parte restante 7550, escribo 1200, triplo del quadrado de la raiz 20, y dividiendo 7550 por 1200, saco el quociente 6, que escribo á la raiz.

Cubo la raiz 206, y resto el producto de 8755000; queda la resta 13184, al lado de la qual bajo la última porcion 000, y separo los dos últimos guarismos. Debajo de la parte restante 131840, escribo 127308 triplo del quadrado de la raiz hallada 206. Divido 131840 por 127308; saco el quociente 1, que escribo á continuacion de 206. Cubo 2061, y restando de

8755000000 el producto 875455298I, queda la resta 447019.

La raiz cúbica aproximada de 8755000000 es, pues, 2061; luego la de 8755,000000 es 20,61, pues el cubo tiene tres veces mas decimales que su raiz.

Si se quisiera llevar mas adelante la aproximacion, se añadirian tres ceros á continuacion de la resta, y se proseguiria del mismo modo que se ha hecho cada vez que se ha bajado una porcion.

154. Ya que para multiplicar un quebrado por un quebrado, se debe multiplicar (84) el numerador por el numerador y el denominador por el denominador; para cubar una fraccion, se deberá tambien cubar su numerador y su denominador. Luego recíprocamente, para sacar la raiz cúbica de un quebrado, se deberá sacar la raiz cúbica del numerador, y la raiz cúbica del denominador. Así, la raiz cúbica de $\frac{27}{64}$ es $\frac{3}{4}$, porque la raiz cúbica de 27 es 3, y la de 64 es 4.

155. Pero si solo el denominador fuere un cubo, se sacará la raiz aproximada del numerador, y á esta raiz se la dará por denominador la raiz cúbica del denominador. Por egemplo, si se pide la raiz cúbica de $\frac{143}{343}$, como el numerador no es un cubo, saco su raiz aproximada, que será 5,22, con diferencia de menos de una centésima, y sacando la raiz de 343, que es 7, será $\frac{5,22}{7}$ la raiz aproximada de $\frac{143}{343}$, ó reduciendo á decimales (120), será o, 74 dicha raiz aproximada con diferencia de menos de una centésima.

156. Si el denominador no fuere un cubo, se multiplicarán ambos términos del quebrado por el quadrado de dicho denominador; y siendo entonces el nuevo denominador un cubo, se practicará lo que se acaba de decir. Por egemplo, si se pide la raiz cúbica de $\frac{3}{7}$, multiplico el numerador y el denominador por 49, quadrado del denominador 7; sale $\frac{147}{343}$ que (66) es de igual valor que $\frac{3}{7}$. La raiz cúbica de $\frac{147}{343}$ es $\frac{5,27}{7}$, ó reduciéndole á decimales, o, 75; es, pues, o, 75 la raiz cúbica de $\frac{3}{7}$ con diferencia de menos de una centésima.

157. Si hubiese enteros juntos con quebrados, se reducirá todo á quebrados, y despues se sacaria la raiz cúbica de un quebrado (154 y sig.).

158. Tambien se podria reducir el quebrado propuesto á decimales, esté con enteros, ó sin ellos; pero sería preciso continuar esta reduccion hasta tres veces mas decimales de las que se quisieren poner en la raiz. Así, si se pidiese la raiz cúbica de $7\frac{3}{11}$ aproximada hasta menos de una milésima, se mudaria el quebrado $\frac{3}{11}$ en o, 272727272; de suerte que para sacar la raiz cúbica de $7\frac{3}{11}$, se sacaria la de 7, 272727272, y saldria I, 937.

159. Para sacar la raiz cúbica de un número que lleváre decimales, se le añadirán los ceros que fueren menester para que el número de sus decimales sea tres, ó seis, ó nueve &c. Se sacará entonces su raiz, como si no hubiese coma, y concluida la operacion se separará con una coma en la raiz ácia la derecha, un número de guarismos que sea el tercio del número de las decimales de la cantidad propuesta; de suerte que si la raiz no tuviera bastantes guarismos para practicar esta regla, se remediaría con poner ceros en dicha raiz ácia la izquierda. Así, para sacar la raiz cúbica de 6, 54, con diferencia de menos de una milésima, le añadiré siete ceros, y sacaré la raiz cúbica de 6540000000, que será 1870: separaré tres guarismos, porque hay nueve decimales en el cubo, y será I, 870 la raiz cúbica de 6, 54. Por el mismo método hallaría que la de o, 0006, aproximada con diferencia de menos de una centésima, es o, 08.

PRIN-

PRINCIPIOS DE ALGEBRA.

160 El obgeto de la ciencia que llamamos Algebra, es dar medios para reducir á reglas generales la resolucion de todas las cuestiones que pueden ofrecerse acerca de las cantidades. Para que sean generales estas reglas, es preciso que no pendan de los valores de las cantidades que se consideran, sí de la naturaleza de cada cuestion; y han de ser siempre unas mismas para todas las cuestiones de una misma especie.

Debe, pues, valerse el Algebra para representar las cantidades de caractéres, y signos distintos de los que usa la Arismética. Es evidente que quando por las reglas que esta enseña, llegamos á una conclusion, á un resultado, ó al último término de una operacion, nada vemos que recuerde á nuestro entendimiento el camino por donde ha llegado al fin que se propuso. Si despues de egecutadas una ó muchas operaciones de Arismética, hallo 12, nada veo en 12 que me diga si este número proviene de la multiplicacion de 3 por 4, ó de 2 por 6, ó de la adicion de 5 con 7, ó de 2 con 10, ó en general de otra combinacion qualquiera de operaciones. La Arismética dá reglas para hallar ciertos resultados; pero estos resultados no pueden dar reglas. El Algebra dá uno y otro; dá resultados, y estos resultados suministran reglas: para conseguirlo, espresa las cantidades con signos generales que son las letras del abecedario; y como no tienen estas letras mas relacion con un número que con otro, nada representan, y si algo representan, no representan mas que lo que uno quiere. En estos signos, que permanecen á la vista en todo el discurso del cálculo, se quedan estampadas, digámoslo así, las operaciones por donde han pa-

pasado, ó por lo menos dejan en los resultados de estas operaciones vestigios muy señalados del camino que se debe seguir para llegar al mismo término por los medios mas sencillos.

No solo espresa el Algebra las cantidades con signos generales, mas tambien espresa cómo estan las unas respecto de las otras, y las diferentes operaciones que con ellas se han de egecutar; en una palabra, todo es representacion; y quando decimos que hacemos una operacion, damos una nueva forma á una cantidad.

Signos de que usa el Algebra.

161. Hemos dicho que el Algebra espresa las cantidades con las letras del abecedario, y que usa signos particulares, cuya significacion hemos de dar á conocer antes de pasar adelante.

El signo $+$ significa *mas*; $a+b$ se lee *a mas b*, y quiere decir que se suma la cantidad b con la cantidad a, por cuyo motivo $+$ señala una adicion.

162. El signo — significa *menos*, y quando está entre dos cantidades como $+a-b$, significa que la segunda se resta de la primera, ó que b se debe considerar al reves de a; por lo que, — señala una sustraccion.

163. Quando una cantidad no lleva signo alguno, se supone que lleva el signo $+$, y es uso comun omitirle en la primera cantidad de toda espresion algebraica. Así, en lugar de $+a+b$, se escribe $a+b$; $+a-b$ es lo propio que $a-b$.

164. El signo $\times$ significa *multiplicado por*. Así, $a\times b$ significa la multiplicacion de a por b. Un punto entre dos cantidades significa tambien la multiplicacion de una por otra. Lo propio es $a.b$ que $a\times b$. Tambien se señala la multiplicacion de dos cantidades una por otra escribiéndolas juntas sin el signo $\times$, y sin punto en-

entre ellas; lo mismo es ab que $a.b$ ó $a\times b$.

Quando se ha de multiplicar una cantidad que consta de varias partes separadas con los signos + y — por otra cantidad, bien sea simple, ó bien compuesta, se encierran dentro de un paréntesis todas las partes que han de formar una cantidad; y con esto se consideran todas juntas como una cantidad simple que se ha de multiplicar por otra cantidad simple. Así, la espresion $(a+b-d)\times g$ significa que la cantidad $(a+b-d)$ que se considera como que forma una sola cantidad, está multiplicada por la cantidad g. Asimismo $(a+b-d)\times(g+b-k)$ significa que las dos cantidades $(a+b-d)$, $(g+b-k)$ consideradas como si fuera cada una una cantidad simple, están multiplicadas una por otra. Estas mismas multiplicaciones se señalan tambien de otro modo; en lugar de $(a+b-d)\times g$ se escribe $(a+b-d).g$, ó $\overline{a+b-d}\times g$, ó $\overline{a+b-d}.g$. Lo propio es $(a+b-d)\times(g+b-k)$ que $(a+b-d).(g+b-k)$, ó $\overline{a+b-d}\times\overline{g+b-k}$, ó $\overline{a+b-d}.\overline{g+b-k}$. Pero para escusar equivocaciones, es mejor encerrar las cantidades compuestas dentro de unos paréntesis, que no señalarlas con rayas por encima.

165. El signo = quiere decir *es igual á*, y sirve para señalar que una cantidad es igual con otra. Así, $a=b$ significa *a es igual á b*.

166. Este signo > ó < puesto entre dos cantidades significa que la que está ácia la boca de dicho signo, es la mayor; ó sino, que la que está ácia la punta del signo es la menor. $a>b$ quiere decir que *a es mayor que b*, ó lo que es lo propio, *b es menor que a*. Asimismo, $a<b$ quiere decir *a menor que b*, ó lo que es lo mismo, *b mayor que a*. incompleto

167. Llámase cantidad *simple ó monomia* toda cantidad que consta de una parte no mas ó de solo un *término*, ó antes de la qual no hay mas que un solo signo tácito ó espreso.

Así, a es un monomio; $-b$ es otro monomio. Tambien es un monomio el producto de varias cantidades simples, como abc que es el producto de los tres factores a, b, c; porque dicho producto se considera como si no compusiera mas de un término.

168. Llámanse *dimensiones* de un monomio las letras que le componen; cada una de sus letras es una dimension particular. Por esta razon, a es un monomio de una dimension no mas; ab es un monomio de dos; abc es un mononio de tres dimensiones &c.

169. Como el quadrado de una cantidad es el producto de dicha cantidad multiplicada *una vez* (126) por sí misma, y el cubo es el producto de la cantidad multiplicada *dos veces* por sí misma (147), y así prosiguiendo; es claro que el número de las dimensiones del quadrado, ó del cubo, ó de la quarta potencia &c. es duplo, ó triplo, ó quadruplo &c. del que señala las dimensiones de la raiz. Porque, por egemplo, el quadrado de la cantidad a que tiene una dimension, es $a\times a$ ó aa que consta de dos dimensiones; el cubo de la misma cantidad a es $a\times a\times a$ ó aaa que tiene tres dimensiones: la quarta potencia de a que es $a\times a\times a\times a$ ó $aaaa$ consta de quatro dimensiones, &c.

170. Toda cantidad que se compone de varios términos separados unos de otros con los signos + y —, se llama cantidad *complexa* ó *polynomia*. Así, $a+b+c-d$ es un polynomio. Bien se echa de ver que un polynomio es lo mismo que el agregado de muchos monomios.

171. Un polynomio es *homogeneo* quando todos sus términos tienen un mismo número de dimensiones. El polynomio $a+b-c$ es homogeneo, porque cada uno de sus términos tiene una dimension.

172. Las cantidades que se comparan unas con otras en un mismo cálculo, ó forman el resultado de al-

algunas operaciones, siempre son homogeneas; quiero decir, siempre tienen en todos sus términos esplícita, ó implícitamente un mismo número de dimensiones. Porque solo podemos comparar unas con otras las cantidades de una misma naturaleza, y cada letra de las que entran en un término de un polynomio, tiene por precision una letra que la corresponde en otro término.

173. Aunque las cantidades de que consta un mismo polynomio, sean siempre de un mismo género, por quanto todas ellas tienen un mismo número de dimensiones tácitas ó espresas; por otra parte pueden ser opuestas unas á otras en quanto al modo con que existen; y para señalar esta oposicion, se distinguen en general dichas cantidades en cantidades *positivas*, y cantidades *negativas*. Procurarémos dar bien á conocer con los egemplos esta distincion, por ser de la mayor importancia.

Si suponemos que un hombre tiene ó debe 1000 pesos, podemos representar igualmente esta cantidad con los mismos caractéres 1000 pesos, sea que dicho hombre los tenga, ó que los deba. Y en general para espresar de un modo indeterminado el haber, ó las deudas, podrémos valernos de una misma letra a. Esto no obstante, como el dinero que un hombre tiene, y el que debe son cosas que influyen muy distintamente en el estado de dicho hombre, y pueden hallarse mezcladas unas con otras en un mismo cálculo, han convenido los Matemáticos en distinguirlas con llamar á las unas *cantidades positivas*, y á las otras *cantidades negativas*; poniendo el signo $+$ delante de las positivas, y el signo $-$ delante de las negativas. Así, para espresar algebraicamente que el haber de un hombre es a, se escribe $+a$; y para espresar una deuda llamada tambien a, se escribe $-a$. Si el haber de un hombre es a; y b lo que debe, damos á conocer su es-

estado poniendo $+a-b$ ó $a-b$, dándole tácitamente el signo $+$ á la letra a que es la primera.

Adicion de las cantidades Algebraicas.

174. Sumar varias cantidades es lo propio que juntarlas, ó ponerlas juntas con los mismos signos que llevan. Así, sumar varios caudales es hacer otro mayor; sumar varias deudas es componer una deuda mayor; sumar caudales con deudas es sacar el exceso que los caudales llevan á las deudas, ó estas á aquellos, conforme fueren los caudales mayores que la deuda, ó la deuda mayor que los caudales.

175. Por esto se deja conocer que *sumar* no siempre significa en Algebra lo mismo que *aumentar*. Quando se suman caudales con caudales, es cierto que estos se aumentan; asimismo, quando se suma una deuda con otra se hace mayor la deuda. Pero quando los caudales se suman con la deuda, en realidad se *disminuye* una de las dos cantidades.

176. Luego *para sumar varios monomios, se deben escribir unos á continuacion de otros con los mismos signos* $+$ *y* $-$ *que llevan.* Si al fin del cálculo la suma de las cantidades positivas sale mayor que la de las cantidades negativas, es señal de que hay en ella mas caudal que deudas; y por el contrario, habrá en la suma mas deudas que caudal, quando la suma de las cantidades negativas salga mayor que la de las cantidades positivas.

Por egemplo, si se ofreciera sumar estos quatro monomios $+a$, $+b$, $-c$, $+d$; escribiríamos $+a+b-c+d$, ó si no $a+b-c+d$, omitiendo el signo $+$ de la primera cantidad de la suma.

177. La adicion de los polynomios se funda en la de los monomios; porque es evidente que como un todo es igual á la suma de todas sus partes juntas, se sa-

sacará la suma de varios polynomios, juntando unos con otros todos los términos de que se componen, y dándoles los mismos signos que llevan.

Por egemplo, la suma de los tres polynomios.

$$\begin{array}{l} a + b - c \\ g - b - k \\ m + n - p \\ \hline \end{array}$$

es $a + b - c + g - b - k + m + n - p$ suma

La suma de los quatro polynomios

$$\begin{array}{l} a + b + c - d \\ b - f + g + a \\ c + e - b + g \\ b + c + n - d \\ \hline \end{array}$$

es $a + b + c - d + b - f + g + a + c + e - b + g + b + c + n - d$. suma.

178. Quando en una suma se encuentran algunos términos *semejantes*, esto es, algunos términos que llevan una misma letra, si los términos son de una dimension no mas; ó unas mismas letras, quando son de muchas dimensiones; en tal caso, en vez de escribir muchas veces aquel mismo término, se escribe una vez no mas, pero poniendo antes de él un guarismo que señala el número de veces que se ha de repetir aquel término, y esto se llama *reducir*. Así, en el egemplo antecedente en lugar de $a + a$, pondré $2a$; en lugar de $+ b + b - b$, pondré $+ b$ no mas, porque al uno de los caudales $+ b$ le destruye la deuda $- b$, y por consiguiente el total $+ b + b - b$ es $+ b$ no mas; en lugar de $+c+c+c$, escribiré $+ 3c$; en lugar de $- d - d$, pondré $- 2d$; y finalmente en lugar de $+ g + g$, escribiré $+ 2g$. En virtud de estas reducciones, se reduce la suma á $2a + b + 3c - 2d - f + 2g + e + b + n$.

El número que se pone antes de una cantidad para anotar el número de veces que se ha de tomar positiva ó negativamente se llama su *coeficiente*.

Quando una cantidad no lleva coeficiente alguno, se considera que la unidad es su coeficiente. Lo propio es a que $1a$; ab es lo mismo que $1ab$.

Sustraccion de las cantidades algebraicas.

179. Restar una cantidad de otra es tomar la primera al reves de como es en sí. Así, quitar caudal es lo propio que contraher deudas; quitar deudas es lo mismo que adquirir caudal.

180. Se echa, pues, de ver que *restar* no siempre es *diminuir*. Quando se restan caudales de caudales, no hay duda en que se disminuyen estos; pero quando de los caudales resto una deuda, *aumento* realmente el caudal; porque si á un hombre se le quita una deuda, se le hace mas rico en todo lo que montaba la deuda.

181. Luego *para restar un monomio de otra cantidad qualquiera, se le ha de trocar á dicho monomio el signo* $+$ *ó* $-$ *que lleve, escribiéndole despues á continuacion de la cantidad propuesta.*

El resultado representará caudal ó deudas, conforme fuere, ó positivo ó negativo.

Por egemplo, si de $a + b$ se quiere restar el monomio $+ c$, el residuo será $a + b - c$.

Si de la cantidad $a + b$ se resta el monomio $- c$, quedará la resta $a + b + c$.

182. La sustraccion de los polynomios se egecuta mudando los signos de todos los términos de la cantidad que se quiere restar. Si en el resultado salen términos semejantes, se hace la reduccion del mismo modo puntualmente que se dijo en la adicion.

Por egemplo, si de $6a-4b+5c$
resto............ $4a-6b+9c$

residuo $6a-4b+5c-4a+6b-9c$, ó reduciendo $2a+2b-4c$.

Multiplicacion de las cantidades Algebraicas.

183. Multiplicar una cantidad por otra es tomar la primera tantas veces como unidades hay en la segunda, y ademas de esto tomarla del mismo modo que la segunda; quiero decir, sumarla ó tomarla con sus signos conforme fueren, si el multiplicador fuere positivo, ó restarla, y por consiguiente mudar sus signos, si el multiplicador fuere negativo. Todo esto es una consecuencia palpable de la naturaleza de la adicion y de la sustraccion, qual la hemos declarado.

Luego 1.° si el multiplicando y el multiplicador fueren positivos, el produćto será positivo: porque caudales sumados cierto número de veces consigo mismos, forzosamente han de producir caudales. Así, $+a\times+b$ dá $+ab$. Esta regla se espresa generalmente de este modo: $+\times+$ dá $+$.

Si el multiplicando es negativo, y el multiplicador positivo, el produćto será negativo; porque una deuda sumada cierto número de veces consigo misma, por precision ha de producir una deuda. Por esta razon, $-a\times+b$ dá $-ab$. Esta regla se espresa de un modo general diciendo que $-\times+$ dá $+-$.

3.° Quando el multiplicando fuere positivo y el multiplicador negativo, el produćto será negativo; porque una cosa que se le quita á un hombre cierto número de veces, influye en su estado del mismo modo que una deuda del mismo valor, y por consiguiente estos dos efećtos se han de señalar con un mismo signo $-$. Esta regla se espresa en general de este modo: $+\times-$ dá $-$.

4.° Si el multiplicando y el multiplicador fueren ambos negativos, el produćto será positivo; porque si á un hombre se le quita una deuda cierto número de veces, hará esto para él el mismo efećto que si le dieran una cosa del mismo valor, y por consiguiente estos dos efećtos se han de señalar con el mismo caraćter $+$. La espresion general de esta regla es que $-\times-$ dá $+$.

184. La primera operacion que hemos de egecutar, y de la qual penden todas las demás, es multiplicar un monomio por otro. Esto se consigue escribiendo primero el signo que ha de preceder al produćto con arreglo á la regla sentada (183), y despues unas á continuacion de otras todas las letras de que se componen los dos faćtores de la multiplicacion. Por egemplo, para multiplicar $+a$ por $+b$, escribiremos $+ab$; para multiplicar $+ab$ por $-c$, escribiremos $-abc$; para multiplicar $-abc$ por $+de$, se pondrá $-abcde$; y para multiplicar $-gb$ por $-mn$, se pondrá $+gbmn$.

185. Quando los dos monomios que se han de multiplicar tienen coeficientes distintos de la unidad, despues de puesto el signo que ha de llevar el produćto, se multiplicarán uno por otro los coeficientes por las reglas de la Arismética, y despues se pondrán las cantidades literales unas á continuacion de otras. Por egemplo, para multiplicar $+3a$ por $-5b$, escribiremos $-15ab$. Asimismo, el produćto de $-4cd$ por $-8f$ es $+32cdf$; el produćto de $-7ab$ por $+3fg$ es $21abgf$.

186. Ocurre con frecuencia tener que multiplicar una letra una ó mas veces por sí misma; entonces se escusa escribir muchas veces dicha letra, y basta con escribirla una vez no mas, poniendo á su derecha un guarismo un poco mas arriba, que se llama su *esponente*, y señala el número de veces que se deberia escribir dicha letra como faćtor. Por egemplo, el produćto de $a\times a$ es aa, y en lugar de aa se escribe a^2;

en lugar de aaa, producto de $a \times a \times a$, se escribe a^3; en lugar del producto $a \times a \times a \times a$, se escribe a^4; y así prosiguiendo.

Siempre que una letra no tiene esponente, se considera como si tuviera la unidad por esponente. Lo propio es a que a^1.

Los esponentes sirven principalmente para quando una misma letra se ha de escribir mas de dos veces como factor; porque en algunas ocasiones no se pone esponente quando la letra se ha de escribir dos veces no mas; así, en lugar de aa, unas veces se pone aa, y otras a^2.

Vá muchísima diferencia del esponente al coeficiente. Este señala que una cantidad se ha de *sumar* consigo misma una, dos &c. veces, y el esponente dá á entender que una cantidad se ha de *multiplicar* por sí misma una, dos &c. veces. Así, no es $2a$ lo mismo que a^2. Con efecto, si por egemplo, $a = 3$; $2a$ ó $a + a$ será $3 + 3$, esto es 6; y a^2 será $a \times a$, ó 3×3, esto es 9.

187. De la naturaleza del esponente resulta que para multiplicar unos por otros monomios que lleven una misma letra con diferentes esponentes, se debe escribir una vez no mas dicha letra, dándola por esponente la suma de los esponentes de los factores. Por cuyo motivo, el producto de a por a^2 es a^{1+2}; el producto de a^2 por a^3 es a^5; el de a^3 por a^4 es a^7. El producto de $a^2 b^2$ por $-a^5 b^3$ es $-a^7 b^5$; el producto de $-4a^2$ por $-5a^3 b^2$ es $+20a^5 b^2$; el de $-5a^2 b^2 c^3$ por $-3ab^5 c^4$ es $+15a^3 b^7 c^6$.

Todo esto es evidente, pues lo mismo es el producto de a por a^3, que $a \times a \times a \times a$ ó a^4; el producto de a^3 por a^2 es lo propio que $a \times a \times a \times a \times a$ ó a^5, y así de los demás.

Veamos ahora cómo se multiplica un polynomio por un monomio; redúcese esta operacion á multiplicar succesivamente todos los términos del polynomio por el monomio propuesto, practicando puntualmente la regla de los signos, la de los coeficientes, y la de los esponentes. La suma de todos estos productos parciales compondrá el producto total.

Por egemplo, el polynomio $a^2 - 5ab + 7cd$
multiplicado por el monomio $-5ac$
dá el producto $-5a^3c + 25a^2bc - 35ac^2d$.

188. Para multiplicar un polynomio por otro polynomio, se multiplicarán succesivamente todos los términos del multiplicando por todos los del multiplicador; se sumarán todos estos productos parciales, y resultará el producto total. Se harán en dicho producto las reducciones que correspondan.

Supongamos que se haya de multiplicar

$$\begin{array}{ll}
 & 3a^2 - 5bd + cf \\
\text{por} \ldots\ldots & -5a^2 + 4bd - 8cf \\
\hline
\text{1.}^{\text{er}}\ \text{prod.} & -15a^4 + 25a^2bd - 5a^2cf \\
\text{2.}^{\circ}\ \text{prod.} & +12a^2bd - 20b^2d^2 + 4bcdf \\
\text{3.}^{\circ}\ \text{prod.} & -24a^2cf + 40bcdf - 8c^2f^2. \\
\hline
\text{Prod. total} & -15a^4 + 37a^2bd - 29a^2cf - 20b^2d^2 \\
 & +44bcdf - 8c^2f^2.
\end{array}$$

Bien se vé que el multiplicando se ha multiplicado primero por $-5a^2$, luego por $4bd$, y finalmente por $-8cf$; que se han sumado todos los productos parciales, y ha resultado despues de hechas todas las reducciones, el producto total que va escrito.

Si hubiéramos de multiplicar

$$\begin{array}{l} \quad\quad -5a^2b + ab^2 - cd^2 + 8fgh \\ \text{por} \ldots\ldots -9ab + 4f^2 - 15mn + 9cd \\ \hline 1.^{er}\ \text{prod.} + 45a^3b^2 - 9a^2b^3 + 9abcd^2 - 72abfgh, \\ 2.^{\circ}\ \text{prod.} - 20a^2bf^2 + 4ab^2f^2 - 4cd^2f^2 + 32f^3gh, \\ 3.^{\circ}\ \text{prod.} + 75a^2bmn - 15ab^2mn + 15cd^2mn - 120fghmn, \\ 4.^{\circ}\ \text{prod.} - 45a^2bcd + 9ab^2cd - 9c^2d^3 + 72cdfgh. \\ \hline \text{Prod. total } 45a^3b^2 - 9a^2b^3 + 9abcd^2 - 72abfgh \\ -20a^2bf^2 + 4ab^2f^2 - 4cd^2f^2 + 32f^3gh \\ +75a^2bmn - 15ab^2mn + 15cd^2mn - 120fghmn \\ -45a^2bcd + 9ab^2cd - 9c^2d^3 + 72cdfgh. \end{array}$$

Tambien puede ofrecerse multiplicar unas por otras mas de dos cantidades. En tal caso, se empezará multiplicando dos de ellas una por otra ; su producto se multiplicará por la tercera , y saldrá otro producto que se multiplicará por la quarta ; y así prosiguiendo. Bien se deja conocer que qualquiera orden que se siga en la multiplicacion de los factores , siempre ha de salir un mismo producto.

Por egemplo , si hubiéramos de egecutar la multiplicacion indicada $-6a^2 \times -4bc \times 3mn \times -9gh$; multiplicaríamos primero $-6a^2$ por $-4bc$; su producto $+24a^2bc$ le multiplicaríamos por $+3mn$; saldria $+72a^2bcmn$, que multiplicaríamos por $-9gh$, cuyo producto $648a^2bcmngh$ es el resultado de la multiplicacion indicada.

Division de las cantidades algebráicas.

189. Dividir una cantidad por otra es lo mismo que buscar otra tercera , que multiplicada por la segunda , dé un producto igual á la primera. Podemos, pues , considerar el dividendo como si fuera el producto del divisor por el cociente.

190. De esto , y de lo dicho (183) se infiere: 1.° Que quando así el dividendo como el divisor llevan el signo +, el cociente tambien llevará el signo +. Esta regla se espresa generalmente diciendo + dividido por + dá +.

2.° En teniendo el dividendo el signo +, y el divisor el signo —, el cociente llevará el signo —. Esta regla se espresa en general de este modo : + dividido por — dá —.

3.° Si el dividendo llevàre el signo —, y el divisor el signo +, el cociente llevará el signo —. Esta regla se espresa generalmente con decir — dividido por + dá —.

4.° Quando así el dividendo como el divisor llevan el signo —, el cociente llevará el signo +. Esta regla se espresa en general así : — dividido por — dá +.

Todo esto es evidente , una vez que el producto del divisor por el cociente , ha de llevar el mismo signo que el dividendo.

191. Supongamos en primer lugar que se nos ofrezca la division de un monomio por otro : empezaremos esta operacion poniendo el signo que ha de llevar el cociente , conforme á la regla que se acaba de dar , y la concluiremos borrando las letras que tengan comunes el dividendo y el divisor. Así , el cociente de esta cantidad $+ab$ dividida por estotra $+a$, es $+b$; el cociente de la cantidad $-abb$ dividida por $+ab$, es $-b$; el cociente de la cantidad $-mnpq$ dividida por $-nq$, es $+mp$.

Con efecto , una vez que el modo de multiplicar es (183) poner unas letras á continuacion de otras, dándole al producto el signo que le toca , es evidente que recíprocamente se hará la division borrando las letras que haya comunes en el dividendo y el divisor, dándole al cociente el signo que le corresponde.

192. Sucede á veces que el dividendo y el divisor no tienen letras comunes ; en tal caso es preciso conten-

tentarse con dejar indicada la division. Por egemplo, la division de a por b no se puede egecutar, y se queda indicada de este modo $\frac{a}{b}$. En esta espresion, a se ha de considerar como el numerador de una fraccion cuyo denominador es b; por manera que si a vale 6, y b vale 7, la espresion $\frac{a}{b}$ se reduce á $\frac{6}{7}$.

En algunas ocasiones lleva el dividendo parte no mas de las letras del divisor; entonces se hace la division de lo que se puede, y lo demás se queda indicado. Por esta razon, si dividimos $-abcd$ por $+abb$, el cociente será $-\frac{cd}{b}$; $-mnpq$ dividido por $-nrs$ dá el cociente $+\frac{mpq}{rs}$.

193. Quando el dividendo ó el divisor, ó ambos tuvieren coeficientes distintos de la unidad, se dividirá por las reglas de la Arismética el coeficiente del dividendo por el del divisor, y despues se dividirán las cantidades literales, conforme acabamos de esplicar. Si hubiéramos de dividir $-15abb$ por $+3ab$, el cociente sería $-5b$. El cociente de $-35mnpq$ dividido por $-7amn$ es $+\frac{5pq}{a}$.

194. Sentado todo esto, yá podemos dividir un polynomio qualquiera por un monomio. En el egemplo siguiente aplicaremos todas las reglas antecedentes. Hállanse en él los términos del dividendo succesivamente divididos por el divisor, y la suma de todos los cocientes parciales compone el cociente total.

Es muy del caso, para hacer con mas facilidad la division, ordenar el polynomio, quiero decir, poner por su orden de la izquierda á la derecha todos los términos en que se halle con mayor esponente una letra que se escogerá á arbitrio, y por el mismo orden

den se dividirá despues cada término del polynomio por el divisor

Para dividir el polynomio $a^2b^2 - 2a^3d + 4a^4 - 4abcd$ *por el monomio* $-2a^2$;

Empezaremos ordenando el polynomio respecto de la letra a que se halla así en el dividendo como en el divisor, y dispondremos ambas cantidades como si fueran cantidades numéricas, segun se vé. Dividiremos despues todos los términos del dividendo por el divisor, escribiendo al lado cada cociente parcial conforme fuere saliendo. La suma de todos los cocientes parciales compondrá el cociente total.

$$\begin{array}{c|c} \text{Dividendo} & \text{Divisor.} \\ 4a^4 - 2a^3d + a^2b^2 - 4abcd & -2a^2 \\ \cline{2-2} & \text{Cociente} \\ & -2a^2 + ad - \frac{b^2}{2} + \frac{2bcd}{a} \end{array}$$

195. Intentemos ahora la division de un polynomio por otro: empezaremos ordenando el dividendo y el divisor respecto de una misma letra, y despues dividiremos todas las partes del dividendo por el divisor por el mismo método con corta diferencia que en las divisiones numéricas.

Lo haremos mas palpable con unos egemplos.
Dividir el polynomio $3ab^2 - 3a^2b + a^3 - b^3$
por el polynomio .... $-2ab + a^2 + b^2$

$$\begin{array}{ll|c} \text{Divid.} & a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 & \text{Divisor} \\ & -a^3 + 2a^2b - ab^2 & a^2 - 2ab + b^2 \\ \cline{2-3} \text{1. resid.} & -a^2b + 2ab^2 - b^3 & \text{Cociente} \\ & +a^2b - 2ab^2 + b^3 & a - b \\ \text{2. resid.} & \ldots\ldots\ldots 0 & \end{array}$$

Ordeno primero el dividendo y el divisor respecto de una misma letra a.

He-

Hecho esto, 1.° divido el primer término del dividendo por el primer término del divisor, y como se considera que ambos llevan el signo $+$, el cociente llevará tambien este mismo signo que se podrá suprimir por ser el primero. Dividiendo despues a^3 por a^2, sale el cociente a, escríbole como se vé. Multiplico todo el divisor $a^2 - 2ab + b^2$ por el cociente parcial a, cuyo produсto $a^3 - 2a^2b + ab^2$ se ha de restar del dividendo. Escríbole, pues, debajo del dividendo con signos contrarios á los que lleva; y hecha la reduccion, quiero decir, despues de borrados los términos que llevan signos contrarios, así en el dividendo, como en dicho produсto, tomado negativamente, saco el residuo $-a^2b + 2ab^2 - b^3$ que hemos de dividir por el divisor $a^2 - 2ab + b^2$.

2.° En esta segunda operacion divido el primer término $-a^2b$ del dividendo por el primer término a^2 del divisor; sale el segundo cociente parcial $-b$ que escribo á continuacion de la primera parte a del cociente total. Multiplico todo el divisor por $-b$, y el produсto $-a^2b + 2ab^2 - b^3$ le escribo con signos contrarios debajo del dividendo: y como despues de hecha la reduccion no queda nada, infiero que el cociente de la cantidad $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ dividida por $a^2 - 2ab + b^2$ es cabalmente $a-b$.

Si hubiéramos de dividir . . $a^5 + b^5$
por . . . . $a+b$

Di-

Divid. . . .	$a^5 + b^5$	Divisor $a+b$
	$-a^5 - a^4b$	
1. resid.	$-a^4b + b^5$	Cociente
	$+a^4b + a^3b^2$	$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$
2. resid. . .	$a^3b^2 + b^5$	
	$-a^3b^2 - a^2b^3$	
3. resid.	$-a^2b^3 + b^5$	
	$+a^2b^3 + ab^4$	
4. resid. . .	$ab^4 + b^5$	
	$-ab^4 - b^5$	
5. resid.	0	

1.° Ordenados ya el dividendo y el divisor respeсto de a, divido el primer término a^5 del dividendo, por el primer término a del divisor, y sale el primer cociente parcial a^4 que escribo en su lugar. Multiplico el divisor $a+b$ por a^4, y escribo su produсto, despues de mudarle los signos, $-a^5 - a^4b$ debajo del dividendo. Haciendo la reduccion del dividendo y de esta cantidad, resulta el primer residuo, ú el segundo dividendo parcial ordenado respeсto de a, $-a^4b + b^5$.

2.° Divido el primer término $-a^4b$ de este dividendo por el primer término a del divisor, y sale el segundo cociente parcial $-a^3b$, que pongo á continuacion del primero. Multiplico $a+b$ por $-a^3b$, y escribo el produсto con signos contrarios debajo del dividendo, y así es $a^4b + a^3b^2$. Hecha la reduccion, el segundo residuo ó tercer dividendo parcial es $a^3b^2 + b^5$.

3.° Divido el primer término a^3b^2 de este dividendo por a; sale el cociente $+a^2b^2$ que escribo; multiplico el divisor $a+b$ por a^2b^2, y su produсto con signos contrarios, que es $-a^3b^2 - a^2b^3$, le pongo debajo del dividendo. Hecha la reduccion, sale el ter-

cer

cer residuo ó quarto dividendo parcial $-a^2b^3+b^5$.

4.° Divido $-a^2b^3$ por a; sale $-ab^3$, quarto cociente parcial; multiplico el divisor $a+b$ por $-ab^3$, y su producto con signos contrarios, $+a^2b^3+ab^4$, le apunto debajo del dividendo; hago la reduccion, y saco ab^4+b^5, que es el quarto residuo ó quinto dividendo parcial.

5.° Divido ab^4 por a, y saco el quinto cociente parcial b^4; multiplico $a+b$ por b^4, y su producto con signos contrarios, que es $-ab^4-b^5$, le escribo debajo del dividendo. Hecha la reduccion queda o; y de aquí infiero que el cociente de la cantidad a^5+b^5 dividida por $a+b$ es cabalmente $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$.

196. Hay casos en que despues de ordenados el dividendo y el divisor respecto de una misma letra, se hallan varios términos donde esta letra tiene un mismo esponente. Entonces se han de colocar todos estos términos en una columna vertical.

Por egemplo. *Para dividir* $10a^3+11a^2b-19abc-15a^2c+3ab^2+15bc^2-5b^2c$,
por. . . . . $3ab+5a^2-5bc$;

Ordeno el dividendo y el divisor respecto de la letra a, y saco $10a^3+11a^2b-15a^2c-19abc+3ab^2+15bc^2-5b^2c$ que hemos de dividir por $5a^2+3ab-5bc$. Pero como en el dividendo hay dos términos con a^2, y otros dos con a, dispongo el dividendo, y el divisor del modo siguiente.

$$\begin{array}{ll|c}
\text{Divid.} & \left\{\begin{array}{l} 10a^3+11a^2b-19abc+15bc^2-5b^2c \\ \quad -15a^2c+3ab^2 \end{array}\right. & \text{Divisor} \\
 & -10a^3-6a^2b+10abc & 5a^2+3ab-5bc \\ \hline
\text{1. resid.} & \left\{\begin{array}{l} \quad 5a^2b-9abc+15bc^2-5b^2c \\ -15a^2c+3ab^2 \\ -5a^2b-3ab^2+5b^2c \end{array}\right. & \text{Cociente} \\ & & 2a+b-3c \\ \hline
\text{2. resid.} & -15a^2c-9abc+15bc^2 & \\
 & +15a^2c+9abc-15bc^2 & \\ \hline
\text{3. resid.} & \ldots\ldots 0 &
\end{array}$$

Di-

Divido $10a^3$ por $5a^2$, y saco el cociente $2a$; multiplico el divisor por $2a$, y pongo el producto con signos contrarios debajo del dividendo. Hecha la reduccion, sale el primer residuo que se vé escrito.

2.° Divido el primer término $5a^2b$ de este residuo por $5a^2$; sale el cociente $+b$; multiplico el divisor por $+b$, y despues de puesto el producto con signos contrarios debajo del dividendo, hago la reduccion, y saco el segundo residuo que vá señalado.

3.° Divido el primer término $-15a^2c$ de este último residuo por $5a^2$, hago las mismas operaciones que antes, y no sobra nada. Está, pues, concluida la division, cuyo cociente cabal es $2a+b-3c$.

De los Quebrados literales.

197. Calcúlanse estos quebrados por las mismas reglas que los numéricos. Y desde luego el quebrado $\frac{a}{b}$ se trasforma sin mudar de valor (66) en $\frac{ac}{bc}$, ó $\frac{aa}{ab}$, ó finalmente en $\frac{aa+ab}{ab+bb}$ con multiplicar por $a+b$ los dos términos del quebrado $\frac{a}{b}$.

198. El quebrado $\frac{aac}{abc}$ es el mismo que $\frac{a}{b}$, porque este es el primero despues de divididos sus dos términos por ac. El quebrado $\frac{6a^3+3a^2b}{12a^3+9a^2c}$ es el mismo que $\frac{2a+b}{4a+3c}$, porque el segundo se saca dividiendo los dos términos del primero (67) por la misma cantidad $3aa$.

199. Para reducir $a+\frac{bd}{c}$ á un quebrado solo, reduzco primero (64) a á un quebrado cuyo denominador sea c, y saco $\frac{ac}{c}$, por consiguiente $a+\frac{bd}{c}$ queda-

dará transformado en $\frac{ac+bd}{c}$. Asimismo $a+\frac{cd-ab}{b-d}$ se convierte en $\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}$, con multiplicar el entero a por el denominador $b-d$.

Si despues de concluidas estas operaciones hay términos semejantes, se ha de hacer su reduccion, así, en el último egemplo, despues de transformada la cantidad $a+\frac{cd-ab}{b-d}$ en $\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}$, se debe reducir á $\frac{-ad+cd}{b-d}$ ó $\frac{cd-ad}{b-d}$, con borrar ab y $-ab$ que se destruyen.

200. Para sacar los enteros que puede haber en un quebrado literal, se divide (63) el numerador por el denominador quanto se puede; en virtud de esta regla reduciremos á $3b+c+\frac{cd}{a}$ la cantidad $\frac{3ab+ac+cd}{a}$, y la cantidad $\frac{a^2+4ab+4bb+cc}{a+2b}$ se reduce á $a+2b+\frac{cc}{a+2b}$, con dividirla por $a+2b$.

201. Reduciré á un mismo denominador los tres quebrados $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ con multiplicar (68) los dos términos a y b del primero por df que es el producto de los denominadores de los otros quebrados, y sacaré $\frac{adf}{bdf}$. Si multiplico los dos términos c y d del segundo por bf, producto de los otros dos denominadores, sacaré $\frac{bcf}{bdf}$; finalmente si multiplico los dos términos $\frac{e}{f}$ del último por el producto bd de los denominadores de los otros dos, sacaré $\frac{bde}{bdf}$; por manera que los tres quebrados despues de reducidos á un mismo denominador son $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$.

Lo

Lo propio se practica quando los quebrados tienen algun número complexo, ó lo son ambos términos de cada uno. Así, los quebrados $\frac{b+c}{a+b}$ y $\frac{a-2c}{a-b}$ reducidos al mismo denominador se transforman en $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ y $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, con multiplicar los dos términos del primero por $a-b$, y los dos términos del segundo por $a+b$.

202. Quando los denominadores tienen un divisor ó factor comun, se reducen los quebrados á un mismo denominador por una operacion mas sencilla. Si los quebrados propuestos fueren $\frac{a}{bc}$ y $\frac{d}{bf}$, consideraría que los dos denominadores serian los mismos si fuese f factor del primero, y c factor del segundo; multiplico, pues, los dos términos del primer quebrado por f, y los dos términos del segundo por c, y saco $\frac{af}{bcf}$ y $\frac{cd}{bcf}$ que son dos quebrados mas sencillos que $\frac{abf}{bbcf}$ y $\frac{bcd}{bbcf}$ que saldrían por la regla dada (201). Si fueren tres los quebrados propuestos, como $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$, repararía que si fg fuera factor del denominador del primero, cg lo fuera del denominador del segundo, y bf del denominador del tercero, tendrían los tres quebrados un mismo denominador; multiplico, pues, los dos términos del primero por fg, los del segundo por cg, y los del tercero por bf, y saco $\frac{afg}{bcfg}$, $\frac{dcg}{bcfg}$, $\frac{bef}{bcfg}$.

Esta consideracion puede tambien aplicarse á los números, resolviéndolos en sus factores. Por egemplo, $\frac{5}{12}$ y $\frac{3}{16}$ son lo mismo que $\frac{5}{4\times3}$ y $\frac{3}{4\times4}$; multiplico,

pues,

pues, los términos del primero por 4, y ambos términos del segundo por 3, y saco $\frac{20}{4\times3\times4}$ y $\frac{9}{4\times4\times3}$ que tienen como se vé un mismo denominador, y son lo propio que $\frac{20}{48}$ y $\frac{9}{48}$.

203. Una vez reducidos los quebrados literales á un mismo denominador, se halla su suma con sumar sus numeradores, y se halla su diferencia con restar el numerador del uno del numerador del otro.

Para sumar, pues, los dos quebrados $\frac{b+c}{a+b}$ y $\frac{a-2c}{a-b}$, les doy primero un denominador comun, con lo que los transformo en $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ y $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$; sumo sus numeradores, y saco el quebrado ...... $\frac{ab+ac-bb-bc+aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, que se reduce á ..... $\frac{2ab-ac-bb-3bc+aa}{aa-bb}$. Si quisiera restar el segundo del primero, sacaria $\frac{ab+ac-bb-bc-aa+2ac-ab+2bc}{aa-bb}$, que se reduce á $\frac{3ac-bb+bc-aa}{aa-bb}$.

204. El producto de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ es $\frac{ac}{bd}$; $\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}b$ es $\frac{1}{4}ab$ (185).

Para hallar el producto de $\frac{a}{b}$ por c considero que c es lo mismo que $\frac{c}{1}$, y practicando lo dicho (85) saldrá $\frac{ac}{b}$.

Si el numerador y el denominador fueren complexos, se seguirian en esta operacion las reglas de la multiplicacion de los polynomios.

205. El cociente de $\frac{a}{b}$ dividido por $\frac{c}{d}$ se sacará multiplicando $\frac{a}{b}$ por $\frac{d}{c}$ (87), y saldrá $\frac{ad}{bc}$. El cociente de $\frac{a+b}{c+d}$ dividido por $\frac{c+d}{a-b}$ es el producto de $\frac{a+b}{c+d}$ por $\frac{a-b}{c+d}$, que es $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)(c+d)}$, ó $\frac{aa-bb}{(c+d)^2}$

El cociente de $\frac{a}{b}$ por c se saca considerando que c es lo propio que $\frac{c}{1}$, y multiplicando despues $\frac{a}{b}$ por $\frac{1}{c}$, cuyo producto es $\frac{a}{bc}$.

De las Potencias, y Raices de las cantidades literales.

Primero declararémos como se forman las potencias, y se sacan las raices de los monomios; despues enseñarémos como se forma el quadrado, y se saca la raiz quadrada de los polynomios; dejando para mas adelante manifestar una *fórmula* ó espresion general para hallar una potencia ó raiz qualquiera de un polynomio.

De las Potencias, y Raices de los Monomios.

206. De lo dicho (186) se deduce que a^3 es la tercera potencia de a, porque a^3 es $a\times a\times a$, y que la cantidad a es tantas veces factor en su tercera potencia quantas unidades hay en el esponente de la misma potencia.

207. Ya que para multiplicar las cantidades monomias, basta sumar el esponente de cada letra (187) del multiplicando con el esponente que lleva la misma letra en el multiplicador, síguese que para elevar

á una potencia propuesta una cantidad monomia, basta multiplicar el esponente de cada una de sus letras, por el número que espresa á que potencia se ha de elevar dicha cantidad. A este número le llamamos el *esponente* de la potencia.

Así, para elevar a que es a^1 al quadrado ó á la segunda potencia, multiplicaré el esponente 1 por 2, y será a^2 el quadrado de a. Para elevar $a^2\ b^3\ c$ á la quarta potencia, multiplicaré los esponentes 2, 3, 1 por 4, y sacaré $a^8\ b^{12}\ c^4$.

La razon de esto es muy ovia; porque la quarta potencia de $a^3\ b^2\ c$ es (169) $a^3\ b^2\ c \times a^3\ b^2\ c \times a^3\ b^2\ c \times a^3\ b^2\ c$; pero para efectuar esta multiplicacion he de sumar los esponentes (187); luego ya que son unos mismos en cada factor, he de sumar cada esponente quatro veces consigo mismo, esto es, le he de multiplicar por 4.

208. Si el monomio fuese un quebrado, elevaré á la potencia propuesta su numerador, y su denominador; así, la quinta potencia de $\frac{a^2 b^3}{cd^2}$ será $\frac{a^{10}\ b^{15}}{c^5\ d^{10}}$.

Síguese de lo dicho hasta aquí que la segunda potencia de $a^m\ b^n$ es $a^{2m}\ b^{2n}$; que la tercera potencia de $\frac{a^m}{c^p}\frac{b^n}{d^q}$ es $\frac{a^{3m}}{c^{3p}}\frac{b^{3n}}{d^{3q}}$; y en general que la potencia r de $a^m\ b^n$ es $a^{rm}\ b^{rn}$; la potencia r de $\frac{a^m}{c^p}\frac{b^n}{d^{rq}}$ es $\frac{a^{rm}}{c^{rp}}\frac{b^{rn}}{d^{rq}}$.

209. Si la cantidad literal cuya potencia se ha de formar llevare coeficiente, se elevará tambien su coeficiente á la potencia propuesta. Así, la quinta potencia de $4\,a^3\ b^2$ es $1024\,a^{15}\ b^{10}$.

210. Por lo que mira á los signos que han de llevar las potencias, la regla es que si fuere par el esponente de la potencia que hemos de formar, la potencia siempre

pre llevará el signo +; pero si la potencia fuere impar, llevará el signo + ó el signo —, segun fuere positiva ó negativa la cantidad propuesta. Esto se sigue de lo dicho (183) acerca de los signos de los productos.

211. Luego para sacar la raiz de un grado qualquiera de un monomio propuesto, se dividirá el esponente de cada uno de sus factores por el esponente de la raiz, esto es, por el número que espresa su grado.

Así, la raiz tercera de $a^{12}\ b^6\ c^3$ será, con dividir todos los esponentes por 3, $a^4\ b^2\ c$; la raiz quinta de $a^{20}\ b^{15}\ c^5$ será $a^4\ b^3\ c$, dividiendo cada esponente por 5.

En general, la raiz r de $a^m\,b^n$ es $a^{\frac{m}{r}}\ \ b^{\frac{n}{r}}$.

212. Si la cantidad propuesta fuere un quebrado, se sacará la raiz de su numerador y de su denominador.

La raiz r de $\frac{a^m}{b^n}$ es $\frac{a^{\frac{m}{r}}}{b^{\frac{n}{r}}}$.

213. Si la cantidad cuya raiz se ha de sacar llevare algun coeficiente, se sacará tambien la raiz propuesta del coeficiente.

214. Quando el esponente de la raiz que se busca no es un divisor cabal de los esponentes de la cantidad propuesta, es señal de no ser esta una potencia cabal del grado que se supone. En estos casos se queda fraccionario el esponente, y señala una raiz que está por sacarse. Así, la raiz cúbica de $a^9\ b^3\ c^4$ es $a^3\ b\,c^{\frac{4}{3}}$, que se reduce á $a^3 b\,c\,c^{\frac{1}{3}}$, porque c^4 es $c^3 \times c^1$, con lo que será $c^{\frac{4}{3}}$ lo mismo que $c\,c^{\frac{1}{3}}$.

215. Para representar estas raices que no se pueden sacar cabales, se estila poner antes de la cantidad este

 sig-

signo $\sqrt{\ }$, que se llama *signo radical*, poniendo en medio del signo el guarismo que espresa el grado de la raiz. $\sqrt[2]{a}$, por egemplo, significa la raiz segunda ó quadrada de a; pero siempre que es la raiz quadrada la que se ha de sacar, suele omitirse el 2; la raiz quadrada de b es $\sqrt{b}$. La raiz séptima de b es $\sqrt[7]{b}$; la raiz cúbica de a es $\sqrt[3]{a}$. Y como la raiz cúbica de a es $a^{\frac{1}{3}}$ (211), síguese que $a^{\frac{1}{3}}$ es lo mismo que $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[7]{b}$ es lo propio que $b^{\frac{1}{7}}$. En general, la raiz m de a^n es $a^{\frac{n}{m}}$ ó $\sqrt[m]{a^n}$. Llámanse *cantidades radicales* todas las que llevan el signo $\sqrt{\ }$.

216. Se hacen con estas cantidades radicales las mismas operaciones que con las otras que se llaman *racionales*.

La suma de $3a\sqrt[n]{b}$ y $4\sqrt[n]{c}$ es $3a\sqrt[n]{b}+4\sqrt[n]{c}$.

Restando $3a\sqrt[n]{b}$ de $4b\sqrt[n]{c}$, sale $4b\sqrt[n]{c}-3a\sqrt[n]{b}$. Si los radicales son semejantes, se hace la reduccion. La suma de $4ab\sqrt[n]{c}$ y $5ab\sqrt[n]{c}$ es $9ab\sqrt[n]{c}$.

217. Quando ocurra multiplicar $\sqrt[5]{a^3}$ por $\sqrt[5]{a^4}$, transformarémos la operacion en estotra $a^{\frac{3}{5}}\times a^{\frac{4}{5}}$ que dá (187) $a^{\frac{7}{5}}$ ó $a.\,a^{\frac{2}{5}}$. Para multiplicar $\sqrt[5]{a^3}$ por $\sqrt[7]{a^4}$, escribiré $a^{\frac{3}{5}}\times a^{\frac{4}{7}}$, ó $a^{\frac{3}{5}+\frac{4}{7}}$, ó con reducir los quebrados

dos á un mismo denominador $a^{\frac{21+20}{35}}$, ó $a^{\frac{41}{35}}$, que se reduce á $a.\,a^{\frac{6}{35}}$, ó finalmente á $a\sqrt[35]{a^6}$.

En general $\sqrt[m]{a^n\,b^p}\times\sqrt[q]{a^r\,b^s}$ se transforma en $a^{\frac{n}{m}}\,b^{\frac{p}{m}}\times a^{\frac{r}{q}}\,b^{\frac{s}{q}}$, que se reduce á $a^{\frac{n}{m}+\frac{r}{q}}\,b^{\frac{p}{m}+\frac{s}{q}}$, ó, con reducir al mismo denominador, $a^{\frac{qn+mr}{qm}}\,b^{\frac{pq+ms}{qm}}$, ó finalmente á (215) $\sqrt[qm]{a^{qn+mr}\,b^{pq+ms}}$.

Lo propio sucede en la division: $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}}$ se transforma en $\frac{a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{3}{5}}}$, que es (191) $a^{\frac{1}{5}}$, ó $\sqrt[5]{a}$. Tambien .. $\frac{\sqrt[5]{a^3\,b^4}}{\sqrt[7]{a^2 b^3}}$ se convierte en $\frac{a^{\frac{3}{5}}\,b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{7}}\,b^{\frac{3}{7}}}$, que es $a^{\frac{3}{5}-\frac{2}{7}}b^{\frac{4}{5}-\frac{3}{7}}$ (191), ó $a^{\frac{21-10}{35}}\,b^{\frac{28-15}{35}}$, que se queda en $a^{\frac{11}{35}}\,b^{\frac{13}{35}}$, que es lo mismo que $\sqrt[35]{a^{11}\,b^{13}}$.

En general, $\frac{\sqrt[m]{a^n\,b^p}}{\sqrt[q]{a^r\,b^s}}$ es $\frac{a^{\frac{n}{m}}b^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{r}{q}}\,b^{\frac{s}{q}}}$, ó $a^{\frac{n}{m}-\frac{r}{q}}\,b^{\frac{p}{m}-\frac{s}{q}}$, ó $a^{\frac{qn-mr}{qm}}\,b^{\frac{pq-sm}{qm}}$.

218. Dá á entender el último egemplo que en lugar de $\frac{a^3}{b^2}$, pongo por caso, podemos escribir $a^3\,b^{-2}$. No hay duda en que las dos espresiones son una misma cantidad: porque todo divisor destruye en el dividen-

 do

do los factores que hay en el divisor ; en $\frac{a^5}{a^2}$, que se reduce (191) á a^3 , el divisor a^2 destruye en a^5 dos factores iguales con a. En $\frac{a^3}{b^2}$ tambien destruye b^2 en a^3 dos factores iguales con b. Pero aunque estos factores no esten esplícitamente en el dividendo, siempre podemos suponer que los incluye, porque la misma division indicada supone que b cabe en a un número de veces sea entero, sea fraccionario. Si representa m este número de veces, a valdrá m veces b ó mb.

Por consiguiente la cantidad $\frac{a^3}{b^2}$ será $\frac{m^3 b^3}{b^2}$ que se reduce á $m^3 b$; pero la cantidad $a^3 b^{-2}$ llega á ser en igual caso $m^3 b^3 b^{-2}$, ó (191) $m^3 b^{3-2}$, ó $m^3 b$. Luego, en general, *se puede trasladar una cantidad del denominador al numerador , escribiéndola en este como factor , pero con un esponente de signo contrario al que llevaba en el denominador.*

En lugar de $\frac{1}{a^3}$, puedo escribir $1 \times a^{-3}$, ó a^{-3} ; en lugar de $\frac{1}{a^m}$, a^{-m} ; en lugar de $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$, $a^m b^n c^{-p} d^{-q}$.

En lugar de $\frac{a^m}{a^m}$ se puede escribir a^{m-m} que es a^0 ó 1 , porque $\frac{a^m}{a^m}$ es 1. Por consiguiente : *Toda potencia cuyo esponente es cero no se distingue de la unidad.*

219. Quando las cantidades radicales no fueren de un mismo grado, será facil reducirlas á que lo sean, siempre que conviniere, practicando la regla siguiente.

Si hubiere dos radicales no mas, multiplíquese el es-

esponente del uno por el esponente del otro ; el producto será el esponente comun que habrán de llevar los dos radicales ; se levantará al mismo tiempo la cantidad que estuviere debajo de cada radical á la potencia del grado que esprese el esponente del otro radical.

Así , para reducir $\sqrt[5]{a^3}$ y $\sqrt[7]{a^4}$ á un mismo radical , multiplico 5 por 7 , y el producto 35 será el esponente del nuevo radical $\sqrt[35]{}$; levanto a^3 á la séptima potencia , y a^4 á la quinta , y saco a^{21} y a^{20} , por manera que las dos cantidades propuestas quedarán transformadas en $\sqrt[35]{a^{21}}$ y $\sqrt[35]{a^{20}}$.

Para reducir á un mismo radical las cantidades $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^2}$ y $\sqrt[8]{a^7}$, multiplico los tres esponentes radicales 5, 7 y 8 , su producto 280 será el esponente comun de los nuevos radicales ; elevaré a^3 á la potencia 7×8 ó 56 ; a^2 , á la potencia 5× 8 ó 40 ; y a^7 á la potencia 5×7 ó 35 , y sacaré $\sqrt[280]{a^{168}}$, $\sqrt[280]{a^{80}}$, $\sqrt[280]{a^{245}}$

La razon de esta práctica es muy perceptible ; porque quando en el primer egemplo elevo a^3 á la séptima potencia , hago que a sea siete veces mas factor de lo que era antes ; y con hacer el esponente de su radical siete veces mayor , hago a siete veces menos factor de lo que era antes ; luego todo queda compensado.

De la formacion del Quadrado , y estraccion de la Raiz quadrada de los polynomios.

220. Una vez que el quadrado de una cantidad qualquiera es el producto de dicha cantidad multiplicada por sí misma , se viene á los ojos que el quadrado de $a+b$, por egemplo, ó $(a+b) \times (a+b)$, ó $(a+b)^2$

es

es $a^2+2ab+b^2$ en cuya espresion hay con efecto todas las partidas (132) que entran en el quadrado de un número que tiene mas de un guarismo.

221. Será, pues, $a^2+2ab+b^2$ una fórmula ó espresion general que puede representar el quadrado de un binomio qualquiera, pues si se me ofreciera quadrar $m+n$, por egemplo, estaría hecha la operacion con substituir en la fórmula m en lugar de a, y n en lugar de b, de donde resultaría $m^2+2mn+n^2$, que es con efecto el quadrado de $m+n$.

222. Tambien sirve la misma *fórmula* para formar el quadrado de un polynomio, pongo por caso de $m+n+p$; y lo que acerca de esto vamos á manifestar, dará bastante luz para aplicar la fórmula á un polynomio de muchos mas términos. Para cuyo fin formaré primero el quadrado de $m+n$, conforme hemos dicho poco há (221); formado este, haré $m+n=a$, y $p=b$; acudiré á la fórmula $a^2+2ab+b^2$ para que me dirija. Esta me dice que he de formar el quadrado de a ó de $m+n$; pero este ya le tengo sacado, y es $m^2+2mn+n^2$; el segundo término $2ab$ de la fórmula me está diciendo que al quadrado de a he de añadir el duplo de a por b, esto es, el duplo de $m+n$ por p, que es $2mp+2np$; el tercer término b^2 de la fórmula me dice que con las cantidades halladas hasta ahora, he de juntar el quadrado de b, que en este caso es p; quadrando p saco p^2, y juntando todas las cantidades que he sacado por direccion de la fórmula, hallo que $m^2+2mn+n^2+2mp+2np+p^2$ es el quadrado de $m+n+p$.

223. Si el polynomio tuviera mas términos, proseguiría la formacion de su quadrado haciendo $m+n+p=a$, é igual con b el término que se siguiese á p, y practicaría al pie de la letra lo propio que antes (222).

224. Quando hay que multiplicar en esta operacion cantidades de signos diferentes, su producto ha de lle-

llevar (183) el signo —; por lo que, el quadrado de $a-b$, será $a^2-2ab+b^2$; y la fórmula tendrá toda la generalidad que cabe si la escribimos de este modo $a^2\pm 2ab+b^2$.

225. La raiz quadrada de las cantidades algebraicas tambien se saca por el mismo método que la de los números compuestos de muchos guarismos, solo que aquí no es menester dividir en porciones la cantidad literal cuya raiz se busca.

Para sacar, pues, la raiz de $m^2+2mn+n^2+2mp+2np+p^2$, escribo esta cantidad conforme se vé,

$$\begin{array}{l|l} m^2+2mn+n^2+2mp+2np+p^2 & m+n+p \\ -m^2-2mn-n^2-2mp-2np-p^2 & 2m \\ 0 \quad\quad 0 \quad\quad\quad\quad 0 & 2m+2n \end{array}$$

y saco la raiz quadrada del primer término m^2 cuya raiz es m, y la pongo á la raiz (si este primer término llevára coeficiente, tambien sacaría su raiz). Quadro la raiz m, y resto su quadrado m^2 del primer término de la potencia, y no queda nada. Para proseguir, parto el segundo término $2mn$ del polynomio por $2m$ duplo de la raiz hallada (135), pongo el cociente n á la raiz; resto del polynomio la suma del producto $2mn$ del divisor por el término n de la raiz, y del quadrado de n, esto es $2mn+n^2$, y no quedan de la potencia propuesta mas que los tres términos $2mp+2np+p^2$. Proseguiré, pues, con estos la operacion, dividiendo por $2m+2n$ duplo de la raiz hallada, y sacaré el cociente p, que pongo á la raiz. Finalmente, multiplico $2m+2n$ por p, al producto agrego el quadrado de p, resto la suma de $2mp+2np+p^2$, y como no queda nada, echo de ver que $m+n+p$ es la raiz cabal de la potencia propuesta.

226. Si en el polynomio cuya raiz quadrada se pide, hubiere algun término que no pueda dividirse por el

el duplo de la raiz hallada, sería señal de que la cantidad propuesta no es un quadrado perfecto.

De las Razones y Proporciones.

227. Llamo *razon* lo que resulta de la comparacion de dos cantidades. Yá se vé que han de ser semejantes estas cantidades, pues sería un absurdo comparar, pongo por caso, varas con reales.

228. La una de las dos cantidades que se comparan se llama el *antecedente*, la otra el *consecuente*, y ambas *los dos términos de la razon.*

De la Razon Arismética.

229. Si comparamos dos cantidades para indagar el exceso que la una lleva á la otra, este exceso ó diferencia se llama su *razon arismética.* Si $a-b=d$, será d la razon arismética de a á b. Es evidente que esta razon resulta de una sustraccion.

230. Supongamos que siendo a y b los dos términos de una razon arismética sea $a>b$, y d su razon arismética, será $a-b=d$.

231. Luego será una misma la razon aunque añadamos á a y b una misma cantidad c, porque entonces a será $a+c$, y b será $b+c$, y es patente que $a+c-b-c=a-b=d$.

De la Proporcion arismética.

232. Llamamos *proporcion arismética* la igualdad de dos razones arisméticas; y como cada razon incluye dos cantidades, para la proporcion se necesitarán quatro. Si $a-b=c-d$, las quatro cantidades a, b, c, d forman una proporcion arismética que tambien se escribe así $a.b:c.d$, y se lee diciendo a *es arisméticamente á* b, *como* c *es á* d.

De

De los quatro términos que entran en la proporcion arismética, el primero y tercero son ambos antecedentes, el segundo, y quarto son ambos consecuentes; en $a.b:c.d$, a y c son antecedentes, b y d son ambos consecuentes. El primero y último se llaman los *estremos*, y el segundo y tercero *los medios* de la proporcion.

233. Puede no obstante formarse una proporcion arismética con tres términos no mas en esta forma $a-b=b-c$, ó $a.b:b.c$. Y esta se llama *proporcion continua*, que por lo mismo es aquella en la qual una misma cantidad es primer consecuente, y segundo antecedente; tambien se escribe así $\div a.b.c$.

Quando la proporcion arismética continua tiene mas de tres términos, se llama *progresion.*

234. *En toda proporcion arismética la suma de los estremos es igual á la de los medios.*

Porque si $a.b:c.d$, será $a-b=c-d$, y si añadimos á cada lado $b+d$, saldrá $a+d=b+c$.

235. Si fuere $a-b=b-c$, la proporcion será continua, siendo b su término medio. Añadiendo de cada lado $b+c$, saldrá $a+c=2b$, y quiere decir que *en toda proporcion arismética continua, la suma de los estremos es igual al duplo del término medio.*

De la Razon geométrica.

236. Quando al comparar una con otra dos cantidades indagamos quántas veces la una cabe en la otra, lo que sacamos se llama la *razon geométrica* de las dos cantidades. Es patente que esta razon es el quociente de la division de la una de las dos cantidades por la otra, y que si $\frac{a}{b}=q$, por egemplo, será q la razon geométrica de a á b.

237. Las dos cantidades que hay en esta razon se lla-

llaman con los mismos nombres que los de la razon arismética ; a es el antecedente, b es el consecuente, y ambos se llaman los términos de la razon.

238. Por lo mismo que toda razon geométrica tiene esta forma $\frac{a}{b}$, se quedará una misma, aunque se multipliquen ó partan sus dos términos por una misma cantidad (197).

De la Proporcion geométrica.

239. Tambien es la *proporcion geométrica* la igualdad de dos razones geométricas. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, las quatro cantidades a, b, c, d forman una proporcion geométrica, que tambien se escribe así $a:b::c:d$, y se lee de este modo, a *es* geométricamente *á* b, *como* c *es á* d; a y d son los estremos, b y c los medios.

240. Quando $a:b::b:d$, la proporcion se llama *geométrica continua*, y se escribe así $\div a:b:c$.

241. *En toda proporcion geométrica el produƈto de los estremos es igual al de los medios.*

Si $a:b::c:d$, he de probar que $ad=bc$. Será, pues, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, multiplico de cada lado por bd, y saco $\frac{abd}{b}=\frac{bcd}{d}$, que se reduce á $ad=bc$.

Luego en una proporcion geométrica continua, el quadrado del término medio es igual al produƈto de los estremos.

Porque si $a:b::b:c$, será $ac=bb$.

242. *Si quatro cantidades son tales que el produƈto de dos de ellas sea igual al produƈto de las otras dos, las quatro cantidades compondrán una proporcion geométrica.*

Si con las quatro cantidades a, b, c, d, puedo sacar $ad=bc$, será $a:b::c:d$; porque si $ad=bc$, y divido de cada lado por bd., sacaré $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$ que se reduce (191) á $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ó $a:b::c:d$.

243. Los quatro términos de una proporcion geométrica $a:b::c:d$ se pueden mudar de lugar de diferentes modos, sin que por eso dege de subsistir la proporcion. Porque como su propiedad es (241) que el produƈto de los estremos sea igual al de los medios, ó que $ad=bc$, será cierto 1.° que $b:a::d:c$; 2.° $a:c::b:d$; 3.° $d:b::c:a$; 4.° $d:c::b:a$.

244. Tambien tendremos $a+b:a::c+d:c$.

Porque multiplicando estremos y medios tendremos $ac+ad=ac+bc$, y como $ad=bc$, síguese que son iguales los dos produƈtos. Del mismo modo demostraremos que

$$a+b:b::c+d:d,$$
$$a-b:a::c-d:c,$$
$$a-b:b::c-d:d, \text{ \&c.}$$

245. *En una proporcion de muchos términos como esta* b : c :: d : f :: g : h, *la suma de todos los antecedentes es á la de todos los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Ya que $b:c::d:f$ será tambien (243) $b:d::c:f$, y (244) $b+d:d::c+f:f$, y $b+d:c+f::d:f$. Pero por el supuesto $d:f::g:h$; luego $b+d:c+f::g:h$, y $b+d:g::c+f:h$, y $b+d+g:g::c+f+h:h$, y $b+d+g:c+f+h::g:h$.

De las Razones compuestas.

246. Formamos una *razon compuesta* siempre que multiplicamos ordenadamente los términos de muchas proporciones, los antecedentes por los antecedentes, los consecuentes por los consecuentes. Si $a:b::c:d$, y

y multiplicamos la primera razon $\frac{a}{b}$ por la segunda $\frac{c}{d}$, la razon $\frac{ac}{bd}$ ó $ac : bd$ que resulta, es compuesta de las dos propuestas.

Quando las razones componentes, siendo iguales, son dos, la compuesta se llama *duplicada* de la primera; si son tres las componentes iguales, la compuesta se llamará *triplicada* de cada una de las primeras, &c.

247. Podemos espresar en números enteros siempre que queramos la razon de dos quebrados $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$: porque si los multiplicamos ambos por bd, sacarémos $ad : bc$ que es igual con la primera; luego tendremos $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: ad : bc$.

248. Luego tambien $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} :: b : a$, y quiere decir que dos quebrados cuyo numerador es la unidad, están en razon inversa ó recíproca de sus denominadores. Y lo mismo se verifica de los quebrados que tienen un mismo numerador, porque $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} :: bc : ac :: b : a$. Pero quando son iguales los denominadores, los dos quebrados están en razon directa de sus numeradores; $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} :: ac : bc :: a : b$.

249. Si multiplicamos ordenadamente los términos de dos proporciones, los productos estarán en proporcion.

$$\begin{array}{c} a : b :: c : d \\ \underline{e : f :: g : b} \\ ae : bf :: cg : db \end{array}$$

Quedará probado si probamos que la última proporcion dá $aedb = bfcg$, ó $ad \times eb = bc \times fg$. Pero la primera dá $ad = bc$; la segunda dá $eb = fg$; luego los dos factores de $ad \times eb$ son respectivamente iguales á los dos de $bc \times fg$.

250. Luego los quadrados de quatro cantidades en proporcion son tambien en proporcion. Si $a : b :: c : d$, será $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2$.

Tambien lo estarán sus raices, quiero decir que $\sqrt{a} : \sqrt{b} :: \sqrt{c} : \sqrt{d}$; porque como $ad = bc$, tambien serán iguales sus raices, ó $\sqrt{a} \times \sqrt{d} = \sqrt{b} \times \sqrt{c}$: luego (242) $\sqrt{a} : \sqrt{b} :: \sqrt{c} : \sqrt{d}$.

De la Regla de tres simple.

251. En la propiedad demonstrada (241) de la proporcion geométrica, se funda la regla muy conocida con el nombre de *regla de tres*, que se reduce á hallar el quarto término de una proporcion geométrica quando son conocidos los otros tres. Porque si $a : b :: c : r$, hallaré el quarto término $r = \frac{bc}{a}$, pues (241) $ar = bc$, y dividiendo cada miembro por a saldrá $r = \frac{bc}{a}$.

252. La regla de tres llamada *directa y simple* se llama *simple*, porque por la naturaleza de las cuestiones á que pertenece, nunca tiene mas de quatro cantidades, siendo conocidas tres de ellas. Llámase *directa*, porque de las quatro cantidades que en ella se consideran, siempre hay dos, que no solo tienen relacion con las otras, mas penden de ellas de tal manera, que así como una de las cantidades contiene la otra ó es contenida en ella, del mismo modo la cantidad relativa á la primera contiene la cantidad relativa á la segunda, ó es contenida en ella; quiero decir, que una cantidad y su relativa siempre pue-

pueden ser ambas antecedentes ó consecuentes de la proporcion. No sucede lo propio en la regla de tres inversa. Los egemplos aclararán todo esto.

253. Cuestion I. 40 *hombres han hecho en cierto tiempo* 268 *varas de obra ¿quánta obra harán* 60 *hombres en el mismo tiempo?*

Aquí los 40 hombres, y las 268 varas de obra son las dos cantidades relativas, y las otras dos son los 60 hombres, y las varas de obra que harán. Las 268 varas de obra no solo tienen relacion con las que buscamos, sino que tambien esta relacion pende de la que hay entre los 40 hombres, y los 60 hombres; por manera que así como 40 hombres son menos que 60, las 268 varas de obra que hacen los primeros, serán tambien menos que las varas de obra que los otros harán en el mismo tiempo. En suma, el número de varas de obra que harán los 60 hombres, será mayor que 268, en la misma razon que 60 es mayor que 40. Todo está, pues, en hallar el quarto término de esta proporcion

$$40:60::268:\frac{268\times 60}{40}=402 \text{ varas,}$$

y son las que harán los 60 hombres.

254. Cuestion II. *Un arriero ha caminado* 34 *leguas en* 6 *dias ¿quántos dias gastará en caminar* 255 *leguas, con las mismas circunstancias?*

Es evidente que necesitará mas tiempo á proporcion de lo que es mayor el número de leguas, y que por consiguiente en el número de dias que se busca, han de caber tantas veces 6 dias, quantas en 255 leguas caben 34 leguas. Luego hemos de buscar el quarto término de la siguiente proporcion

$$34:255::6:\frac{255\times 6}{34}=45 \text{ dias.}$$

Si se atiende al orden por el qual hemos colocado las cantidades, con las quales hemos hecho la regla de tres directa, se echará de vér que en esta operacion

cion las dos cantidades relativas son ambas antecedentes ó consecuentes: en la cuestion I. las cantidades 40 y 268 que eran relativas, fueron ambas antecedentes; en la cuestion II. las 34 leguas, y el número 6 de los dias en que se caminaron, que era su cantidad relativa, fueron ambas antecedentes.

De la Regla de tres inversa.

255. La regla de tres *inversa y simple* se diferencia de la directa, en que de las quatro cantidades que se consideran en la cuestion, las dos principales deben contenerse la una á la otra en un orden todo opuesto al de las otras dos cantidades, que las son relativas; por manera que al colocar estas tres cantidades para que formen una proporcion, la una de las cantidades principales y su relativa son los estremos, y la otra cantidad principal y su relativa son los medios.

256. Cuestion I. 30 *hombres han hecho una obra en* 25 *dias; ¿quántos hombres harian la misma obra en* 10 *dias?*

Se echa de vér que en este segundo caso se necesitan tantos mas hombres quanto menor es el número de dias. Así, en el número de hombres que se busca, ha de caber el número de 30 hombres, como en el número de 25 dias relativo á estos, cabe el número de 10 dias, relativo á aquellos; por consiguiente hemos de hallar el quarto término de la proporcion siguiente:

$$10^d:25^d::30^h:\frac{30\times 25}{10}=75 \text{ hombres.}$$

En esta cuestion conviene reparar que de las tres cantidades dadas, las dos relativas son 25 dias y 30 hombres; 10 dias, que son la tercera de las cantidades, son relativos al número de hombres que buscamos. Como este número de hombres ha de ser mayor que 30,

 del

del mismo modo que la cantidad 10 dias es menor que 25 dias, la regla de tres es inversa, y la transformamos en una regla de tres directa, haciendo que las dos cantidades, relativas 25 dias, y 30 hombres sean los medios de la proporcion, cuyo quarto término buscamos.

257. Cuestion II. *Un navío no tiene mas bastimentos que para 15 dias, y ha de navegar 20 ¿á qué se ha de reducir el total de las raciones diarias?*

Espresemos con la unidad el total de los víveres que se consumen cada dia. Es patente que la porcion á que es preciso ceñirse en el caso propuesto, ha de ser menor que dicha unidad en la misma razon que el número 20 de los dias, que ha de durar esta economía, es mayor que el número de 15 dias, y que por consiguiente del mismo modo que 20 dias se han á 15 dias, el total de los víveres que se hubieran consumido cada uno de estos 15 dias, se há á la totalidad de los víveres que se gastarán cada uno de los 20 dias. Luego la cantidad que buscamos será el quarto término de esta proporcion.

$$20^d : 15^d :: 1 : \tfrac{15}{20} = \tfrac{3}{4}.$$

Luego es preciso ceñirse á las tres quartas partes de lo que se hubiera gastado cada dia.

258. Cuestion III. *Un comboy, caminando 5 horas al dia, puede andar cierto espacio en 18 dias; pero convendria que llegase en 12 dias, sin contar las paradas; ¿quántas horas habrá de caminar cada dia?*

Es evidente que habrá de caminar cada dia un número de horas tanto mayor que 5 horas, quanto el número 12 de los dias es menor que el número 18 de los dias que gastaría, sino camináră á marchas forzadas. Luego la misma cuestion está diciendo, que la cantidad que buscamos será el quarto término de esta proporcion:

$$12 : 18 :: 5 : \tfrac{5\times18}{12} = 7\tfrac{1}{2} \text{ horas,}$$

que el comboy habrá de caminar cada dia.

De la Regla de tres compuesta.

En las reglas de tres que hemos esplicado, la cantidad que se buscaba, y la cantidad de su misma especie, espresada en la cuestion, tenian una con otra una razon simple y determinada por la razon de las otras dos cantidades, tambien espresadas en la cuestion. En la regla de tres compuesta, la razon entre la cantidad que se busca, y la de su misma especie, que la cuestion espresa, está determinada por muchas razones simples que es preciso componer (246) en virtud de los términos de la cuestion. Una vez compuestas las razones, se reduce la operacion á una regla de tres simple.

259. Cuestion I. *30 hombres han hecho 132 varas de obra en 18 dias; ¿quánta obra harán 54 hombres en 28 dias?*

Se echa de vér que ahora la obra pende no solo del número de los hombres, mas tambien del número de los dias. Para atender á uno y otro, se debe considerar que 30 hombres trabajando 18 dias hacen la misma obra que 18 veces 30 hombres, ó 540 hombres en un dia. Del mismo modo, 54 hombres trabajando 28 dias, hacen la misma obra que 28 veces 54 hombres, ó 1512 hombres en un dia.

La cuestion se reduce, pues, á estotra: *Si 540 hombres han hecho 132 varas de obra ¿quántas harán en el mismo tiempo 1512 hombres?* Esto quiere decir que la cantidad que buscamos es el quarto término de esta proporcion.

$$540^h : 1512^h :: 132^v : \frac{1512 \times 132}{540} = 369\tfrac{3}{5}{}^v.$$

260. Cuestion II. *Un hombre que camina 7 horas cada dia, ha gastado 30 dias en andar 230 leguas; si caminase 10 horas cada dia ¿quántos necesitaría para andar 600 leguas, caminando con igual diligencia?*

Si caminase el mismo número de horas cada dia en ambos casos, gastaría tantos mas dias, quantas mas leguas tiene que andar; pero como camina mas horas cada dia en el segundo caso, por lo mismo gastará menos tiempo. Por consiguiente la cuestion tiene parte de la regla de tres directa, y parte de la regla de tres inversa.

La reduciremos á una regla de tres simple, considerando que caminar 30 dias andando 7 horas al dia, es lo mismo que caminar 30 veces 7 horas, ó 210 horas; se puede, pues, mudar la cuestion en estotra: se han gastado 210 horas en andar 230 leguas ¿quántas serán menester para andar 600 leguas? En hallando el número de horas que satisface á esta pregunta, y partiéndole por 10, se sacará el número de dias que se pide, pues el hombre camina 10 horas cada dia. Hemos, pues, de buscar el quarto término de esta proporcion

$$230^l : 600^l :: 210^h : \frac{600 \times 210}{230} = 547\tfrac{19}{23} \text{ horas.}$$

Dividiéndolas por 10, número de horas que este hombre camina cada dia, salen 54 dias y $\frac{180}{230}$, ó $54^d\,\frac{18}{23}$.

De las Progresiones arisméticas.

261. De lo dicho (233) se sigue que en una progresion arismética, si fuere creciente, cada término lleva á su antecedente el mismo exceso ó diferencia. Si la progresion fuere decreciente, ó fuere menguando, cada término llevará un mismo exceso al que se

le

le sigue. Luego si fuere a el primer término de una progresion arismética creciente, y d la diferencia, la progresion será

$$\div\, a \,.\, a+d \,.\, a+2d \,.\, a+3d \,.\, a+4d, \text{ \&c.}$$

Por donde se echa de vér que cada término se compone de la suma del primero, y de la diferencia, tomando esta tantas veces quantos términos hay antes del que se quiere sacar, pues el décimo término de la progresion propuesta es $a+9d$. En suma, el término n será $a+(n-1)d$.

Si el primer término de una progresion arismética fuese 4, y la diferencia 5; el término 100mo será $4+99\times5$, ó $4+495=499$.

262. Luego si $a=0$, el término n será $=(n-1)d$.

263. De lo dicho poco há (261) se saca un método para hallar entre dos números propuestos quantos medios arisméticos se quiera, de modo que todos juntos formen una progresion. Porque como el mayor de los dos números propuestos ha de ser el último término de esta progresion, debe componerse del primero, esto es, del menor de los dos propuestos, mas de tantas veces la razon quantos términos hay antes de él. Luego si del mayor de los dos números se resta el menor, la resta se compondrá de tantas veces la razon, quantos términos ha de haber antes del mayor; luego dividiendo dicha resta por el número de los términos que han de preceder al mayor, sacarémos la razon.

Pero el número de los términos que deben preceder al mayor es una unidad mayor que el número de los medios que se han de interpolar; luego *para interponer entre dos números dados quantos medios arisméticos se quiera, se restará el menor de los dos números del mayor, y se dividirá la resta por el número de los medios despues de añadirle una unidad; el cociente será la diferencia de la progresion.*

Para intercalar entre 4 y 11 ocho medios arismé-

ti-

ticos, resto 4 de 11, resta 7, divídole por 9 que es el número de los medios aumentado una unidad, el cociente $\frac{7}{9}$ será la diferencia de la progresion, que por lo mismo será

$$\div 4 . 4\tfrac{7}{9} . 5\tfrac{5}{9} . 6\tfrac{3}{9} . 7\tfrac{1}{9} . 7\tfrac{8}{9} . 8\tfrac{6}{9} . 9\tfrac{4}{9} . 10\tfrac{2}{9} . 11.$$

De la Progresion Geométrica.

264. De lo dicho (240) se deduce que una progresion geométrica es una série de términos tales, que, quando es creciente, cada uno contiene al que le precede un mismo número de veces; ó es contenido en él, si fuere decreciente la progresion. El número que espresa quantas veces cabe cada término en el que le precede ó le sigue, se llama la *razon* de la progresion.

265. Una progresion geométrica se escribe así:

$$\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 \ldots aq^{n-1}$$

En la qual se echa de vér que cada término cabe en el que se le sigue un número q de veces. Por consiguiente cada término se compone del primero multiplicado por la razon elevada á una potencia, cuyo grado ó esponente es el número de los términos que hay en la progresion antes del término que se considera.

266. Luego si el primer término fuere 1, cada término se compondrá de la misma razon elevada á una potencia cuyo grado será el número que espresáre quantos términos hay antes de él, como se verifica en la progresion propuesta haciendo $a = 1$.

267. *En toda progresion geométrica el quadrado del primer término es al quadrado del segundo, como el primer término es al tercero; y el cubo del primero es al cubo del segundo, como el primer término es al quarto.*

En $\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : \ldots aq^{n-1}$

1.° $a^2 : a^2q^2 :: a : aq^2$, pues el producto de los me-

dios $a^3 q^2 = a^3 q^2$ producto de los estremos.

2.° $a^3 : a^3q^3 :: a : aq^3$, por la misma razon.

268. De la proposicion sentada (265) sacamos 1.° que para hallar el término 12mo de la progresion $\div 3 : 6 : 12 : 24 :$ &c. cuyo primer término es 3, y la razon es 2, elevaré la razon 2 á la undécima potencia 2048, la multiplicaré por 3, y el producto 6144 será el término 12mo de dicha progresion.

2°. Un método para hallar entre 2 y 2048, por egemplo, nueve medios geométricos. Porque en virtud de esto, será 2048 el último término de una progresion, cuyo primer término es 2, y ha de llevar nueve términos entre el primero y el último. Por consiguiente 2048 se compone del primer término 2, multiplicado por la razon elevada á una potencia, cuyo grado espresa el número de los términos que hay antes del 2048; luego si divido 2048 por el primer término, el cociente dará la razon elevada á la décima potencia, porque antes de 2048 ha de haber diez términos. Luego se ha de sacar la raiz décima del cociente de 2048 dividido por 2.

Este cociente es 1024, cuya raiz décima es 2, luego la razon es 2; luego para hallar los medios que se piden, multiplico el primer término continuamente por 2, y despues de formados diez términos, ó nueve medios geométricos hallo 2048, y saco la progresion $\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048$.

De los Logaritmos.

269. Los *logaritmos* son los términos de una progresion arismética, que corresponden, cada uno al suyo, á los términos de una progresion geométrica, por manera que los términos de la primera son los logaritmos de los términos de la segunda.

Por egemplo en

÷

$$\div\, a^{-3m} : a^{-2m} : a^{-m} : a^{0} : a^{m} : a^{2m} : a^{3m} \text{ \&c.}$$
$$\div\, -3m \,.\, -2m \,.\, -m \,.\, 0 \,.\, m \,.\, 2m \,.\, 3m \text{ \&c.}$$

Los términos de la progresion inferior son los logaritmos de los términos correspondientes de la progresion geométrica. Bien se echa de vér que como podemos hacer que correspondan infinitas progresiones arisméticas diferentes á una misma progresion geométrica, un mismo número puede tener una infinidad de logaritmos diferentes.

270. Pero aquí solo considerarémos las progresiones geométrica y arismética que se han escogido para la formacion de las tablas llamadas *Tablas de los Logaritmos*, que son sumamente socorridas para abreviar y facilitar los cálculos mas prolijos y complicados. Para cuya formacion se ha escogido la progresion geométrica décupla; y para la arismética, la progresion de los números naturales; por manera que en este systema $a = 10$, y $m = 1$, con lo que las dos progresiones arriba puestas se transforman en

$$\div\, 10^{-3} : 10^{-2} : 10^{-1} : 1 : 10^{1} : 10^{2} : 10^{3} : 10^{4} : \text{\&c.}$$
$$\div\, -3 \,.\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \text{\&c.}$$

Donde se echa de vér que los logaritmos son los esponentes de los términos correspondientes de la progresion geométrica.

271. Es, pues, el cálculo de los números por los logaritmos el cálculo de las potencias de 10 por sus esponentes; y como el producto de las potencias de una misma cantidad se saca (207) con sumar sus esponentes, se sigue que el producto de muchos números debe corresponder á la suma de sus logaritmos. Luego si llamamos $L.$ el logaritmo de un número, tendremos $L.\,ab = L.\,a + L.\,b$. Luego $L.\,a^2 = L.\,a + L.\,a = 2\,L.\,a$; $L.\,a^3 = 3\,L.\,a$, y en general $L.\,a^m = m\,L.\,a$.

272. Por consiguiente quando hubiéremos de elevar un número entero ó quebrado á una potencia qualquiera, lo conseguirémos con multiplicar el logaritmo

de

$\div$

de dicho número por el esponente de la potencia. Así, $L.\,a^4 = 4\,L.\,a$; $L.\,a^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\,L.\,a$.

273. Esta regla es general, y de ella sacarémos la que corresponde á la division; porque como $\frac{a}{c} = a \times c^{-1}$ (218), y $L\,(a \times c^{-1}) = L.\,a - L.\,c$; síguese que si restamos el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo, el residuo será el logaritmo del cociente.

274. En las progresiones arriba puestas no están mas que los logaritmos de $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, 1, 10, 10^2 &c. Pero en las tablas están tambien los logaritmos de los números intermedios, que hombres de mucha paciencia sacaron por el camino que vamos á decir.

Añadieron siete decimales á cada uno de los esponentes de la progresion geométrica arriba puesta, con lo que la transformaron en

$$\div\, 10^{-3.0000000} : 10^{-2.0000000} : 10^{-1.0000000} :$$
$$1^{0.0000000} : 10^{1.0000000} : 10^{2.0000000} : 10^{3.0000000} \text{ \&c.}$$

intercalaron entre dos de estos esponentes consecutivos 9999999 medios arisméticos, tomando $\frac{1}{10000000}$ por diferencia comun, cuyos esponentes intermedios no podian menos de corresponder á otros tantos medios geométricos, cada uno al suyo, que eran otras tantas potencias distintas de 10.

Y como estas potencias crecen ó menguan con suma lentitud, pues para ir desde la unidad á 10 ó á $\frac{1}{10}$, siguen una gradacion de diez millones de términos, la una valdrá $1\frac{1}{2}$, la otra $1\frac{3}{4}$, otra $1\frac{4}{5}$, otra $1\frac{99}{100}$ &c. y finalmente quando llegaron á una que valía 2 con cortísima dlferencia pusieron á parte el medio arismético que la correspondia, y este fue su logaritmo. Por el mismo camino sacaron los logaritmos de las demas potencias de 10.

275. Síguese de aquí 1.º Que todos los logaritmos

se

se componen de dos partes; la primera á la izquierda espresa el número entero del esponente, la segunda espresa el quebrado decimal que se le debe añadir al entero, para que la suma forme el esponente cabal de la potencia de 10 que es igual al número propuesto. El entero se llama la *característica* del logaritmo.

276. 2.º Que la característica del logaritmo de todos los números que están entre 1 y 10, es cero; la característica de los logaritmos de los números que están entre 10 y 100, es 1; la característica de los logaritmos de los números que están entre 100 y 1000, es 2, &c.

277. 3.º Que la característica de los logaritmos de los quebrados serán —1, —2, —3, &c. segun se hallaren dichos quebrados entre 1 y $\frac{1}{10}$, ó entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$, ó entre $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{1000}$ &c.

278. Por consiguiente la característica de un logaritmo manifiesta á que decada pertenece el número que le corresponde; y recíprocamente el número dice por sí qué característica ha de llevar su logaritmo.

279. El sistema logarítmico que estamos esplicando, tiene la apreciable circunstancia de que podemos variar las características de los logaritmos sin tocar á las decimales; porque con añadir una, dos, tres &c. unidades á la característica de un logaritmo, formamos el de un número diez, ciento, mil &c. veces mayor que el primero. Lo contrario conseguiríamos, si en vez de añadir unidades á la característica, se las quitásemos.

Por egemplo, el logaritmo de 4682 es 3. 670431; luego 4. 670431 es el de 46820; 5, 670431; es el de 468200. Si á la característica 3 la quitáramos una unidad, sacaríamos 2, 670431, que sería el logaritmo de 468, 2 (113).

280. En los cálculos de la Trigonometría se hace muchísimo uso, conforme se verá á su tiempo, de los logaritmos de los quebrados, porque las mas de las lineas

neas trigonométricas son quebrados; por medio de la propiedad espresada (279) de los logaritmos se calculan con mucha facilidad los quebrados.

Propóngome buscar, por egemplo, el logaritmo del quebrado decimal 0, 009672. Busco primero el de 9672 que es 3. 985516. Quítole despues á la característica 3 seis unidades, por ser 9672 un millon de veces mayor que 0,009672, y sale—3, 985516 que es el logaritmo del quebrado decimal propuesto 0,009672. Del mismo modo el logaritmo de $\frac{1}{25} = 0,04$ será —2. 602060, dándole al logaritmo de 4 la característica—2.

De las Equaciones.

281. Al ramo del Algebra que trata de la formacion y resolucion de las equaciones, se le ha dado el nombre de *analysis*, y de *analystas* á los que se han egercitado ó egercitan en esta materia. La tratarémos aquí con brevedad, ciñéndonos á las equaciones de primero y segundo grado no mas, que es quanto nos basta para todo lo que llevamos animo de declarar en estos principios.

282. En las cuestiones que los Matemáticos se proponen, hay *cantidades conocidas ó datos* que les porcionan averiguar el valor de las cantidades que van buscando, y que por lo mismo se llaman *incógnitas*. Es uso general figurar las cantidades conocidas en las primeras letras a, b, c, &c. del abecedario, y las incógnitas en las últimas u, x, y, z.

283. Como todo el empeño está en averiguar á qué cantidad ó cantidades conocidas es igual la cantidad incógnita, toda cuestion matematica pára en la espresion de esta igualdad, poniendo entre las cantidades conocidas y la incógnita el signo = que, segun digimos (165), significa *igual á*; toda espresion puesta en esta forma se llama una *equacion*.

To-

Todos los términos que están á la derecha del signo $=$ componen el *primer miembro* de la equacion, y todos los que están á la derecha componen el *segundo miembro.*

284. El grado de una equacion pende del grado de la potencia á que asciende su incógnita; por manera que la equacion es de primero ó segundo grado, conforme está la incógnita elevada á la primera ó á la segunda potencia. $x = c$ es una equacion de primer grado; $x^2 = ab$ es una equacion de segundo grado.

De las Equaciones de primer grado.

285. Sea el que fuere el grado de la equacion, el fin de todo calculador es averiguar con ella el valor de una incógnita, para lo qual procura que esté sola en él un miembro de la equacion, no habiendo en el otro mas que cantidades conocidas; y quando esto se ha conseguido se dice que la incógnita está *despejada.*

286. Para conseguirlo se usan varios artificios, segun está la incógnita mezclada ó enredada con las cantidades conocidas.

I.° Porque quando la incógnita que queremos despejar forma una suma ó una diferencia con cantidades conocidas ó incógnitas, trasladamos ó pasamos todas estas cantidades al un miembro para que se quede sola la incógnita en el otro. Fúndase esta regla en que si á cantidades iguales añadimos ó quitamos cantidades iguales, las sumas ó diferencias que resultaren, siempre serán iguales.

Sea, por egemplo, $x + 3 = 8$. Restando 3 de cada miembro, sacarémos $x + 3 - 3 = 8 - 3$, y reduciendo $x = 8 - 3 = 5$, y queda x despejada. Si $x + ac = b$, tambien tendrémos, con restar ac de cada miembro, $x + ac - ac = b - ac$, y por lo mismo $x = b - ac$. Si $x - ac = b$, sacarémos $x = b + ac$, con añadir ac á cada miembro; y en general, si $x \pm ac = b$, sacarémos $x = b \mp ac$. Esto quiere decir que *para pasar un término del un miembro al otro, se le debe borrar en el primero, poniéndole en el otro con signo contrario.*

Por consiguiente, *con trasladar una cantidad del un miembro al otro, podemos hacer que de negativa se vuelva positiva, ó de positiva negativa.*

287. II.° *Quando la incógnita se halla enredada con otras cantidades por via de multiplicacion, la despejamos dividiéndola por la cantidad que la multiplica; y á fin de que subsista la equacion, dividimos ambos miembros de la equacion por el multiplicador de la incógnita.*

Si $4x = 28$, tambien será $\frac{4x}{4} = \frac{28}{4}$, ó $x = 7$. Si $a^2 y = a^3 p - a^2 q$, tambien será, partiéndolo todo por a^2, $y = \frac{a^3 p - a^2 q}{a^2} = ap - q$.

288. Quando la incógnita está multiplicada por muchos términos, se escribe una vez no mas, multiplicándola por la suma de los multiplicadores particulares. Supongamos que $ax - bx + 3x = d$, escribirémos desde luego $x(a - b + 3) = d$, y despues $x = \frac{d}{a - b + 3}$. En lugar de $ax - x = b$, escribiríamos $x(a - 1) = b$, y sacaríamos $x = \frac{b}{a - 1}$.

289. III.° *Quando una misma letra se hallare en todos los términos de una equacion, se dividirán todos por dicha letra, á fin de que sea mas simple la equacion.* Así $abb - bxx = bd$, se reduce á $ab - xx = d$, dividiéndolo todo por b. Asimismo, $aac - aa = aabd$, se reduce á $c - 1 = bd$, dividiéndolo todo por aa.

290. IV.° *Si la incógnita estuviere dividida por una ó muchas cantidades, se la despejará multiplicando ambos miembros de la equacion por dichas cantidades.*

Si

Si $\frac{x}{6}=9$, sacarémos $\frac{6\times x}{6}=9\times 6$, que es $x=9\times 6$.

Si $\frac{x}{a+b}=c$, sacarémos $\frac{x(a+b)}{a+b}=c\,(a+b)$, ó $x=c\,(a+b)$ $=ac+bc$.

Es regla general *que siempre que en alguna equacion hay quebrados, se quitan con multiplicar todos los términos por cada denominador.*

Sea $\frac{x}{m}+\frac{2x}{n}=p$. Multiplico primero por m, y saco $\frac{mx}{m}+\frac{2mx}{n}=mp$. Multiplico despues por n, y sale $\frac{mnx}{m}+\frac{2mnx}{n}=mnp$ que se reduce á $nx+2mx=mnp$, ó $x\,(n+2m)=mnp$, de donde saco por último $x=\frac{mnp}{n+2m}$.

291. V.° *Quando la incógnita está elevada á alguna potencia, se la despejará acudiendo á la estraccion de las raices.*

Si $x^2=81$, sacarémos $\sqrt{x^2}=\sqrt{81}$, ó $x=9$. Si x^4 $=16a^5b^2$, sacarémos $\sqrt[4]{x^4}=\sqrt[4]{16a^5b^2}$, ó $x=$ $\sqrt[4]{16a^5b^2}=2a\sqrt[4]{ab^2}$, porque $16a^5=2\times 2\times 2\times 2$ ó $2^4\times a^4.\,a^1$.

Si $a+2xx=b$, le quito á $2xx$ su coeficiente 2, dividiendo toda la equacion por 2, y saco $\frac{a}{2}+xx=\frac{b}{2}$; traslado, y sale $xx=\frac{b}{2}-\frac{a}{2}$ ó $xx=\frac{b-a}{2}$; saco la raiz quadrada y hallo $x=\sqrt{\frac{b-a}{2}}$

292. Quando una incógnita se halla en una equacion con el signo $\sqrt{}$, como si tuviéramos $a-\sqrt{x}=b$; se la despeja dexándola primero sola en el un miembro, quitándola despues su signo radical, pero quadrando al mismo tiempo el otro miembro. Así, transformo la espresion $a-\sqrt{x}=b$ en $a-b=\sqrt{x}$, y quadrándolo todo saco $a^2-2ab+b^2=x$. Si fuera $ax-\sqrt{x}=b$, sacaría primero $ax-b=\sqrt{x}$, y quadrándolo todo hallaría $a^2x^2-2abx+bb=x$.

293. V. Finalmente, *quando son á un tiempo muchas las equaciones y las incógnitas, se hacen desaparecer succesivamente, substituyendo en lugar de cada una su valor.*

Supongamos que se me propongan estas dos equaciones $ax+y=b$, $x+by=a$, que llevan cada una dos incógnitas x é y; podré eliminar la una de las dos, pongo por caso y, sacando por transposicion el valor de y en la primera equacion, y substituyéndole en lugar de y en la segunda. Traslado, pues, ax, y saco $y=b-ax$: pondré en la segunda equacion $b-ax$ en lugar de y; pero como y está multiplicada por b, tambien multiplicaré $b-ax$ por b, y sacaré $bb-abx=by$; luego egecutando la substitucion, la segunda equacion $x+by=a$ se transformará en $x+bb-abx=a$, que no lleva mas incógnita que x.

Si hubiera querido eliminar x en la segunda equacion, hubiera sacado su valor de la primera, trasladando desde luego $+y$, y escribiendo $ax=b-y$; hecho esto, dividiría por a, para despejar x, y saldría $x=\frac{b-y}{a}$. Despues substituiria $\frac{b-y}{a}$ en lugar de x en la segunda equacion, de donde resultaria $\frac{b-y}{a}+by$ $=a$, que no lleva mas incógnita que y.

Si tuviéramos las tres equaciones $x+y+z=a$, $x+y-z=b$, $x-y+z=c$, podríamos eliminar dos incógnitas en cada una por medio de la substitucion. Para este fin tomaríamos en la primera el valor de x, y sacaríamos $x=a-y-z$; pondríamos $a-y-z$ en lugar de x en las otras dos equaciones, y saldría $a-y-z+y-z=b$, $a-y-z-y+z=c$, que se se reducen á $a - 2z = b$, y $a - 2y = c$, que no llevan mas que una incógnita cada una. Si quisiéramos que en la primera no hubiese mas incógnita que x, tomaríamos el valor de y y el de z en las otras dos equaciones $a - 2z = b$, $a - 2y = c$, de las quales sacaríamos desde luego trasladando, $a - b = 2z$, y $a - c = 2y$; dividiendo despues por 2 saldría $\frac{a-b}{2} = z$, $\frac{a-c}{2} = y$; substituyendo finalmente estos valores en lugar de z é y en la primera equacion resultaría $x + \frac{a-c}{2} + \frac{a-b}{2} = a$, y trasladando $x = a - \frac{a-c}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{2a-a+c-a+b}{2}$ (con reducir a á quebrado) $= \frac{c+b}{2}$.

Resolucion de algunas cuestiones de primer grado.

294. Las reglas que acabamos de dar bastan para resolver qualquiera cuestion del primer grado ó cuya espresion es una equacion del primer grado, conforme lo vamos á declarar en las siguientes cuestiones.

295 Cuestion I. *Dada la suma* a, *y la diferencia* d *de dos cantidades* x *é* y, *siendo* x *la mayor, hallar estas cantidades.*

Tenemos, pues, $x + y = a$, $x - y = d$; sumándolas una con otra, sacarémos $2x = a + d$, que dá $x = \frac{a+d}{2}$; restando la segunda de la primera, sale $2y = a - d$ que dá $y = \frac{a-d}{2}$.

Síguese de aquí que *de dos cantidades desiguales la mayor es igual á la mitad de la suma de las dos, mas la mitad de su diferencia; y la menor es igual á la mitad de la suma menos la mitad de su diferencia.*

296. Cuestion II. *He recibido un oficial holgazan, y para estimularle al trabajo le ofrezco 15 rs. por cada dia que trabajare, con la condicion de que por cada dia que holgare, no solo no le daré nada, sino que él me dará 8 rs. Al cabo de 15 dias le ajusto la cuenta, y hallo que no alcanza mas que 110 rs. ¿Quántos dias ha trabajado?*

Llamo x el número de los dias que el oficial ha trabajado; serán, pues, $15 - x$ los dias que ha holgado. Por los dias que ha trabajado le debo tantas veces 15 rs. como unidades hay en x ó $15x$, y por los $15 - x$ dias que ha holgado él me debe $8(15 - x)$; y como por la cuestion esta última cantidad rebajada de la primera, importa 110 rs. tendré $15x - 120 + 8x = 110$; luego $23x = 230$, y $x = 10$.

297. Cuestion III. *Para pagar á unos jornaleros á razon de 3 rs. cada uno me faltan 8 rs. pero me sobran 3 rs. si no doy mas que 2 rs. á cada jornalero. ¿Quántos reales tengo?*

Llamo x los reales que tengo; luego $x + 8$ serán los reales con que podré pagar á los jornaleros á razon de 3 rs; y como es preciso que el número de los jornaleros sea tres veces menor que esta suma, será $\frac{x+8}{3}$.

Ya que me sobran tres reales si no doy mas que 2 rs. á cada jornalero, será $x - 3$ la suma que basta para satisfacerles á este precio. Luego $\frac{x-3}{2}$ será tambien el número de los jornaleros, y tendrémos $\frac{x+8}{3} = \frac{x-3}{2}$, que con eliminar los divisores se reduce á $2x + 16 = 3x - 9$, y trasladando saco $x = 25$; tengo, pues, 25 rs.

Para saber quántos son los jornaleros, substituyo este valor de x en $\frac{x-3}{2}$, por egemplo, que espresa su número, de donde sacaré $\frac{25-3}{2} = 11$.

K 2 Cues-

298. Cuestion IV. *Partir un número conocido* a *en tres partes que sean entre sí como las cantidades* m, n, p, *esto es, tales que sea la primera á la segunda como* m *es á* n, *y la primera á la tercera como* m *á* p.

Llamo la primera parte x. Para valuar la segunda haré esta proporcion $m:n::x:\frac{nx}{m}$, cuyo quarto término $\frac{nx}{m}$ es el valor de la segunda parte. Para valuar la tercera, haré esta proporcion $m:p::x:\frac{px}{m}$, cuyo quarto término $\frac{px}{m}$ es el valor de la tercera parte. Las tres serán $x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}$, y como todas juntas componen a, será $x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a$. Eliminando el denominador, sale $mx+nx+px=ma$, que dá $x=\frac{ma}{m+n+p}$.

Y como se viene á los ojos que este valor de x es el quarto término de una proporcion cuyos tres primeros términos son $m+n+p$, m, a, inferirémos que para hallar x se debe calcular el quarto término de una proporcion de la qual el primero es la suma de las partes proporcionales, el segundo la primera de dichas partes, y el tercero el número mismo que se quiere dividir. Esta regla es la misma que los Arisméticos llaman *Regla de Compañía.*

Si hubiésemos de partir 120 en tres partes que tuvieran unas con otras la misma razon que los números 4, 3, y 2, sería $a=120$, $m=4$, $n=3$, $p=2$, y sería $x=\frac{4\times120}{9}=53\frac{1}{3}$, y hallaríamos que las otras dos partes son 40 y $26\frac{2}{3}$.

Si se tratára de repartir entre tres asociados las ganancias de su comercio en partes proporcionales á los ca-

capitales de cada uno, se echa de ver que m, n, p espresarían respectivamente los capitales de los asociados; a, la suma de las ganancias; y m, el capital del primero.

299. Cuestion V. *Dadas las fuerzas de un agente, hallar quantos agentes como él producirán un efecto* a *en un tiempo* b.

Sea tal la fuerza del agente, que pueda obrar el efecto c en el tiempo d; será el tiempo d al tiempo b, como el efecto c, que dicho agente puede causar en el tiempo d, al efecto que podrá obrar en el tiempo b, que por lo mismo será $\frac{bc}{d}$. Tambien dirémos: la obra $\frac{bc}{d}$ de un agente es á la obra a de todos, como este agente solo es á todos juntos, cuyo número será por consiguiente $\frac{ad}{bc}$.

Si un escribiente puede copiar 15 pliegos en 8 dias; ¿quántos amanuenses tan largos como él se necesitarán para copiar 405 pliegos en 9 dias?

Aquí $d=8$, $c=15$, $a=405$, $b=9$, y egecutándo las substituciones correspondientes, será $\frac{ad}{bc}=\frac{405\times8}{9\times15}=\frac{3240}{135}=24$ que espresa el número de los amanuen- que se necesitarán.

300. Cuestion VI. *Dadas las fuerzas de muchos agentes, determinar el tiempo* x *en que podrán producir un efecto determinado obrando juntos; ó en otros términos.*

Un oficial puede hacer una obra a *en el tiempo* b; *otro oficial hace la obra* c *en el tiempo* d, *y otro la obra* e *en el tiempo* f; *¿quánto tiempo gastarán estos tres oficiales juntos en hacer la obra* g?

Si llamamos x el tiempo que buscamos, sacarémos la obra que el primer oficial hará en este tiempo con

con hacer la proporcion siguiente $b:a::x:\frac{ax}{b}$. La obra que el segundo oficial hará en el mismo tiempo la espresa el quarto término de esta proporcion $d:c::x:\frac{cx}{d}$. Finalmente la obra que hará el tercer oficial en el mismo tiempo, será el quarto término de esta proporcion $f:e::x:\frac{ex}{f}$. Luego $\frac{ex}{f}+\frac{cx}{d}+\frac{ax}{b}$ espresa la obra que los tres oficiales juntos harán en el tiempo x, cuya obra es g; luego $\frac{ex}{f}+\frac{cx}{d}+\frac{ax}{b}=g$, de donde sacaremos (290) $\frac{ebdfx}{f}+\frac{cbdfx}{d}+\frac{abdfx}{b}=bdfg$, ó $edbx+cbfx+adfx=bdfg$, y por consiguiente (288) $x=\frac{bdfg}{ebd+bcf+adf}$.

Si un oficial de albañil hace 7 varas corrientes de tapia en 5 dias, otro hace 10 en 3 dias, y otro 11 en 4 dias, sabremos en quantos dias harán los tres juntos 150 varas corrientes de la misma tapia. Porque en virtud de estos supuestos ó datos $a=7$, $b=5$, $c=10$, $d=3$, $e=11$, $f=4$, $g=150$, y egecutando las substituciones correspondientes saldrá $x=\frac{9000}{449}=20+\frac{20}{449}$, cuyo número espresa en quantos dias los tres oficiales juntos harán la obra propuesta.

301. Cuestion VII. *Dos caños juntos que corren uniformemente, esto es que dan una misma cantidad de agua en un mismo tiempo, han llenado un estanque* a, *el uno en el tiempo* b, *y el otro en el tiempo* c: *los dos mismos caños han llenado otro estanque* d, *el uno en el tiempo* e, *y el otro en el tiempo* f; *se pregunta ¿quánta agua ha salido por cada caño?*

Sean x é y respectivamente el agua que dán los caños; pongo por caso las arrobas que cada uno daría cada dia en el supuesto de valuarse en arrobas la ca-

cabida de los estanques a y d, y de valuarse en dias las cantidades b, c, e, f.

Será bx el agua que dará el primer caño en el tiempo b; cy será el agua que dará el segundo caño en el tiempo c. Y como estas dos cantidades de agua han de ser iguales por la cuestion á la que cabe en el estanque a, tendremos $bx+cy=a$, y $x=\frac{a-cy}{b}$.

Tambien espresarán ex y fy el agua que darán los mismos caños en los tiempos e y f, y tendremos por consiguiente $ex+fy=d$, y $x=\frac{d-fy}{e}$.

De los dos valores hallados de x sacamos $\frac{a-cy}{b}=\frac{d-fy}{e}$, ó $ae-cey=bd-bfy$, ó $ae-bd=cey-bfy$, ó finalmente $y=\frac{ae-bd}{ce-bf}$.

Substituyendo este valor de y en algunos de los valores precedentes de x, pongo por caso, en $\frac{a-cy}{b}$, resultará $x=\frac{a-c\left(\frac{ae-bd}{ce-bf}\right)}{b}$, ó $x=\frac{a\times(ce-bf)-c\times(ae-bd)}{b\times(ce-bf)}$, que con egecutar las operaciones indicadas se reduce á $x=\frac{cd-af}{ce-bf}$.

Si suponemos que los dos caños han llenado un estanque de 90 arrobas, corriendo el primero 3 dias, y el segundo 5 dias; y que los mismos caños han llenado otro estanque de 64 arrobas, corriendo el primero 2 dias, y el segundo 4; tendremos $a=90$, $b=3$, $c=5$; $d=64$, $e=2$, $f=4$. En estos supuestos será $cd-af=-40$, y $ce-bf=-2$, y será $x=\frac{cd-af}{ce-bf}=\frac{-40}{-2}=20$; será $ae-bd=-12$, $ce-bf=-2$, é $y=\frac{-12}{-2}=6$. Cuyos valores dan á co-

conocer que el primer encañado dió 20 arrobas de agua, y el segundo 6.

Pero si por los datos de la cuestion fuese $a = 30$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 16$, $e = 2$, $f = 4$, sacaríamos, con egecutar las correspondientes substituciones, en los valores generales de x é y, que $x = 20$ é $y = -6$ que resuelve la cuestion en el supuesto de que en el tiempo que el primer caño dá 20 arrobas de agua cada dia, el segundo saque 6 arrobas del estanque: y de hecho, el primer caño ha de dár 60 arrobas de agua en tres dias, y como en este caso el segundo caño saca 6 cada dia, sacará 30 en 5 dias, verificándose así que los dos caños juntos llenarían un estanque de 30 arrobas, corriendo el primero por espacio de tres dias, y sacando el otro agua por espacio de 5 dias.

302. Cuestion VIII. *Un número* a *de ovejas se come las hierbas de una dehesa* b *en el tiempo* c, *y un número* d *de ovejas se come las hierbas de otra dehesa* e, *igualmente pingue que la primera, en el tiempo* f; *y crece la hierba uniformemente en ambas ¿quántas ovejas se comerán la hierba de otra dehesa* g *en el tiempo* h, *con las mismas circunstancias?*

Llamemos x el número incógnito de las ovejas; y supongamos cada manada de ovejas dividida en dos atos, de los quales el uno se come la hierba que hay en cada dehesa así que entran en ella, y el otro se come las hierbas que crecen en el tiempo que las ovejas pastan.

Llamemos el primer ato de la primera manada, y; y será el segundo $a-y$.

El primer ato de la segunda manada, z; el segundo será $d-z$.

El primer ato de la tercera manada, u; el segundo será $x-u$.

Sentado esto, 1.° Es constante que los primeros atos y, z, u de ovejas son entre sí como las areas de los

prados, divididas por los tiempos correspondientes; porque se necesitan tantas mas ovejas para comerse una cantidad constante y dada de hierba de una dehesa, quanto mayor es la estension del prado, y menor el tiempo que se gasta en comerla. Tendrémos, pues, estas dos proporciones $y : z :: \frac{b}{c} : \frac{e}{f}$, $y : u :: \frac{b}{c} : \frac{g}{h}$, de las quales se saca (241 y 290) $cey = bfz$, $cgy = bhu$.

2.° Los segundos atos $a-y$, $d-z$, $x-u$ que se comen las hierbas que crecen mientras que las ovejas pastan, son entre sí simplemente como las areas de las dehesas, sin que los tiempos tengan influjo alguno en esta razon. Porque por la cuestion las hierbas de que vamos hablando, crecen en la misma cantidad, en tiempos iguales en las tres dehesas; y son consumidas en cantidades iguales, en tiempos iguales, pues se las van comiendo á medida que crecen. De donde se sigue que las cantidades de estas mismas hierbas son proporcionales á los números de ovejas que las comen; y como son tambien proporcionales á las areas de las dehesas, tenemos las dos proporciones siguientes $a-y : d-z :: b : e$, $a-y : x-u :: b : g$, de las quales se sacan estas dos equaciones $ae - ey = bd - bz$, $ag - gy = bx - bu$.

× quiere decir igualmte. en cada dia

, a determinada altura lueg. crecen en un tpo. mismo.

Las dos primeras equaciones dan $z = \frac{cey}{bf}$, $u = \frac{cgy}{bh}$.

Si substituimos en lugar de z su valor en la tercera, sacarémos $y = \frac{afe - bdf}{fe - ce}$, y por consiguiente $u = \frac{cg(afe - bdf)}{bh(fe - ce)}$, $z = \frac{ce(afe - bdf)}{bf(fe - ce)}$. Substituyendo los valores de y y u en la quarta equacion $ag - gy = bx - bu$, hallarémos $x = \frac{acefg + bdfgh - acegh - bcdfg}{bh(fe - ce)}$, ó $x = \frac{aceg(f-h) + bdfg(h-c)}{beh(f-c)}$.

Su-

Supongamos que la primera dehesa tenga 4 fanegadas, la segunda 5, la tercera 6, que se necesiten 8 ovejas para comer en 7 semanas las hierbas de la primera, 9 ovejas para comer en 8 semanas las hierbas de la segunda; y que se hayan de comer las hierbas de la tercera dehesa en 12 semanas. En estos supuestos tendremos $a=8$, $b=4$, $c=7$, $d=9$, $e=5$, $f=8$, $g=6$, $h=12$. Substituyendo todos estos valores en el valor general de x, saldrá $x=8$: se necesitarán, pues, 8 ovejas para comer las hierbas de la tercera dehesa.

303. Cuestion IX. *Se sabe quánto ha costado cada uno de tres almacenes en que hay tres especies de granos; se sabe tambien quántas fanegas hay de cada grano en cada almacen: se pregunta ¿á cómo sale la fanega de cada grano?*

Llamemos a, b, c el número de fanegas de cada grano que hay en el primer almacen, y d lo que ha costado este almacen.

Llamemos e, f, g las fanegas de los mismos granos que hay en el segundo almacen, cuyo precio es h.

Llamemos i, k, l las fanegas de los mismos granos que hay en el tercer almacen, el qual ha costado m.

Llamemos finalmente x, y, z el precio de una fanega de cada grano.

Es evidente que la porcion del primer grano que hay en el almacen cuyo importe es d, costará ax, pues a espresa las fanegas de dicho grano, y x el precio de cada fanega. La porcion del segundo grano que hay en el mismo almacen será by, y la porcion del otro grano que hay en el mismo almacen será cz. La suma de estas tres cantidades ha de ser igual al precio d que ha costado el mismo almacen; luego será $ax+by+cz=d$. Discurriendo del mismo modo sacaríamos las dos equaciones siguientes $ex+fy+gz=h$, $ix+ky+lz=m$, de las condiciones espresadas acerca de los otros dos almacenes.

Hemos, pues, de sacar de estas equaciones los valores de x, y, z. La primera equacion dá $x=\frac{d-by-cz}{a}$. Si igualamos este valor de x con el que sacamos de la segunda equacion, tendrémos $\frac{d-by-cz}{a}=\frac{h-fy-gz}{e}$; luego $de-bey-cez=ah-afy-agz$, y $z=\frac{de-ah+afy-bey}{ce-ag}$; y como de la tercera equacion sacamos $x=\frac{m-ky-lz}{i}$, tendremos tambien $\frac{d-by-cz}{a}=\frac{m-ki-lz}{i}$; luego $di-biy-ciz=am-aky-alz$, y $z=\frac{di-am+aky-biy}{ci-al}$.

Si formáramos una equacion con los dos valores hallados de z, resultaría otra equacion en que no habria mas incógnita que y, de la qual se sacaría por lo mismo el valor de esta incógnita. Pero como serían bastante penosos los cálculos que tendríamos que hacer, usarémos de algunas abreviaciones muy socorridas para este caso, y otros muchos que se le parecen.

$$\text{Haremos}\left\{\begin{array}{l} de-ab=A\\ af-be=B\\ ce-ag=C\\ di-am=D\\ ak-bi=E\\ ci-al=F \end{array}\right.$$

Cuyos supuestos transforman las equaciones precedentes en $z=\frac{A+By}{C}$, y $z=\frac{D+Ey}{F}$, que dán $AF+BFy=DC+CEy$, de donde sacarémos $y=\frac{AF-CD}{CE-BF}$. Si substituimos este valor de y en algunos de los dos valores de z hallados antes, pongo por caso en el primero, ro, hallarémos $z = \frac{A + \frac{ABF - BCD}{CE - BF}}{C}$ que se reduce á $z = \frac{AE - BD}{CE - BF}$.

Estos valores de y y z los substituiremos en alguno de los valores de x que hallamos antes, en $\frac{d - cz - by}{a}$, por egemplo, y tendremos $x = \frac{d}{a} - \frac{c}{a} \times \left(\frac{AE - BD}{EC - BF}\right) - \frac{b}{a}\left(\frac{AF - DC}{CE - BF}\right)$, ó $x = \frac{d(CE - BF) - c(AE - BD) - b(AF - DC)}{a(CE - BF)}$.

Supongamos ahora que en el primer almacen hay 30 fanegas de centeno, 20 de cebada, y 10 de trigo, y que su importe sea 230 reales.

Que en el segundo almacen hay 15 fanegas de centeno, 6 de cebada, y 12 de trigo, y que haya costado 138 reales.

Que en el tercer almacen hay 10 fanegas de centeno, 5 de cebada, y 4 de trigo, y que ha costado 75 reales.

Para averiguar á cómo sale cada fanega de centeno, de cebada, y de trigo, haremos $a = 30$, $b = 20$, $c = 10$, $d = 230$, $e = 15$, $f = 6$, $g = 12$, $h = 138$, $i = 10$, $k = 5$, $l = 4$, $m = 75$, cuyos supuestos darán $de - ah = A = -690$, $af - be = B = -120$, $ce - ag = C = -210$, $di - am = D = 50$, $ak - bi = E = -50$, $ci - al = F = -20$, cuyos valores substituidos en $AF - CD$, $CE - BF$, $AE - BD$ resultará 24300, 8100, 40500, y por consiguiente $y = \frac{24300}{8100} = 3$, $z = \frac{40500}{8100} = 5$, $x = \frac{230 \times 8100 - 10 \times 40500 - 20 \times 24300}{30 \times 8100} = 4$.

Luego cada fanega de centeno costó 4 reales, cada fanega de cebada 3 reales, y cada fanega de trigo 5 reales.

304. Cuestion X. *Hallar la suma de una progresion arismética* $\div a . a + d . a + 2d . a + 3d$ *&c.*

Es-

Escríbola dos veces en esta forma

$$\begin{array}{l} \div a \quad . a + d . a + 2d . a + 3d \\ a + 3d . a + 2d . a + d . a. \end{array}$$

Por ser iguales las dos progresiones, la suma de los términos de cada una es la mitad de la suma de los términos de ambas. Pero se echa de ver que dos términos correspondientes qualesquiera de la progresion escrita en esta forma se corresponden, y no pueden dejar de componer una misma suma, que es igual á la suma del término primero con el último de la progresion propuesta. Luego la suma de ambas progresiones será la suma del primero y último término tomada tantas veces como términos hay; luego la suma de una progresion no mas será la suma del primero y último término, tomándola un número de veces igual á la mitad del número de los términos. Y como (261) el último término (que llamarémos u) de una progresion arismética cuyo número de términos es n; la diferencia, d; y a el primero, es $a + (n - 1)d$, será la suma de la progresion $s = (a + u)\frac{n}{2}$.

305. Cuestion XI. *Dadas tres de estas quatro cosas, el primer término, el último, el número de los términos, y la suma de todos los términos de una progresion arismética, hallar la quarta.*

Si llamamos a el primer término; u, el último; n, el número de los términos; y s, la suma de todos los términos, tendremos (304) 1.° $s = (a + u)\frac{n}{2}$, que dá inmediatamente el valor de s; de donde sacarémos 2.° $n = \frac{2s}{a + u}$; 3.° $u = \frac{2s}{n} - a$; 4.° $a = \frac{2s}{n} - u$.

306. Cuestion XII. *Hallar la suma de todos los términos de una progresion geométrica creciente, dado el primer término* a, *la razon* q, *y el último término* u.

Es evidente por lo dicho (265) que el segundo do término será aq, y dejamos probado (245) que en una serie de razones iguales la suma de todos los antecedentes es á la suma de todos los consecuentes, como un antecedente qualquiera es á su consecuente. Luego si llamamos s la suma de todos los términos de la progresion, será $s - u$ la suma de todos los antecedentes, y $s - a$ la suma de todos los consecuentes. Tendremos, pues, $s - u : s - a :: a : aq$; luego (241) $saq - uaq = as - aa$, ó, dividiéndolo todo por a, $sq - uq = s - a$, y finalmente, trasladando s al primer miembro, y $-uq$ al segundo, $sq - s = uq - a$, ó $s(q-1) = uq - a$, y últimamente $s = \frac{uq-a}{q-1}$.

307. La misma fórmula sirve tambien para sumar una progresion geométrica decreciente. Propongámonos sumar esta $\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8}$ &c. continuada al infinito, en cuyo supuesto su último término ha de ser cero. Para aplicarla la fórmula, transformo la progresion en una progresion creciente, trastornándola, y será su primer término $=0$, su esponente $=2$, su último término será $\frac{1}{2}$; luego con hacer las substituciones correspondientes en $s = \frac{uq-a}{q-1}$, sacarémos $s = \frac{2\times\frac{1}{2}-0}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$. Luego la suma de la progresion geométrica decreciente propuesta continuada al infinito es 1.

308. Cuestion XIII. *Dadas tres de estas quatro cosas, el primer término, el último, la razon, y el número de los términos de una progresion geométrica hallar la quarta.*

Por lo dicho (265) si el primer término es a; q, el esponente; n, el número de los términos, y u el último término, tendremos $u = aq^{n-1}$.

Luego 1.° $a = \frac{u}{q^{n-1}}$; 2.° $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$; y 3.° para hallar el valor de n, transformo $u = aq^{n-1}$ en $L.u = L.a + (n-1)L.q$ (271 y 272); de aquí saco $(n-1)L.q = L.u - L.a$, despues $n - 1 = \frac{L.u - L.a}{L.q}$, y finalmente $n = \frac{L.u - L.a}{L.q} + 1$.

309. Cuestion XIV. *Manifestar los fundamentos y la práctica de la regla llamada de dos falsas posiciones.*

Primero darémos á conocer por medio de un egemplo muy sencillo en qué consiste esta regla.

Se me piden dos números cuya suma sea 13, y la diferencia 5.

Supongo que el menor de los dos números sea 2; el mayor será 7, y la suma de los dos 9. Por consiguiente hay en este supuesto 4 de equivocacion, que faltan para que la suma de los dos números sea 13, ó hay en este supuesto -4 de equivocacion. Supongo despues que el número menor sea 3, el mayor será 8, la suma 11, y habrá una equivocacion de -2. Sé por otra parte que el número que busco es 4 (295), y veo que la primera equivocacion se há á la segunda, como la diferencia entre el primer número supuesto, y el número que busco es á la diferencia entre el segundo número supuesto, y el mismo número que busco; porque $-4 : -2 :: 2 : 1$. Hemos de dar un método general para hallar en este caso el número que se busca.

Llámole x; a, el primer número supuesto; b, el segundo; c, la primera equivocacion; d, la segunda. Digo, pues, que mientras hubiere proporcion entre los errores y las diferencias indicadas, tendremos $c : d :: x - a : x - b$, y por consiguiente $x = \frac{bc - ad}{c - d}$.

Luego se ha de multiplicar cada número supuesto por la equivocacion que corresponde al otro, y dividir la diferencia de los dos productos por la de los errores quando llevaren un mismo signo; y si los dos errores llevaren signos contrarios, se partirá la suma de los productos

ductos por la suma de los errores. Porque si fuera d, por egemplo, negativa, la fórmula sería $x = \frac{bc + ad}{c + d}$.

310. Quando ninguno de los dos números supuestos es el que se busca, se puede abreviar la operacion, averiguando qué correccion se le debe hacer para que salga el número que se busca. Para lo qual, llamemos y esta correccion; d, la menor equivocacion; b, el número del qual resulta, y quédese lo demás lo propio que antes. Es constante que si fuese b menor que x, tendrémos $b + y = x = \frac{bc - ad}{c - d}$. Luego en este caso $y = \frac{(b - a)d}{c - d}$; pero si fuese $b > x$, sería $b - y = x = \frac{bc - ad}{c - d}$, é $y = \frac{(a - b)d}{c - d}$. Quiero decir que en ambos casos se ha de multiplicar la diferencia de los dos números supuestos por la menor equivocacion, y dividir su producto por la diferencia de los errores quando son de un mismo signo, ó por su suma quando llevan signos contrarios.

311. *He recibido un oficial holgazan, y con la mira de estimularle al trabajo le ofrezco* 15 *reales cada dia que trabajáre, con la condicion de que cada dia que holgáre no solo no le daré nada, sino que él me dará* 8 *reales. Ajústole la cuenta al cabo de* 15 *dias, y alcanza* 110 *reales. Se pregunta ¿quántos dias trabajó?*

Supongo que trabajó 6 dias; pero en este supuesto no le tocará cobrar mas que 18 reales. Hay, pues, un error de 92 *de menos*, y es señal de que ha trabajado mas de 6 dias.

Supongo despues que ha trabajado 12 dias, pero en este supuesto alcanzaría 156 reales. Hay, pues, un error de 46 *de mas*, y por consiguiente los errores llevan signos diferentes.

Dispongo, pues, los números supuestos, y las diferencias como sigue:

6	12
-92	$+46$

Multiplico el primer número por la segunda equivocacion, y el segundo por la primera equivocacion, y dividiendo la suma 1380 de los dos productos por 138 suma de los dos errores, saco 10 que espresa los dias que el oficial trabajó.

Si despues de verificar con el primer supuesto que el oficial trabajó mas de 6 dias, supusiera que trabajó 9, sería tambien negativo el segundo error 23, y en este caso

6	9
-92	-23

Multiplicando los números por los errores, conforme se dijo, y dividiendo la diferencia 690 de los productos, por la diferencia 69 de los dos errores, sacaría tambien 10.

II.° *De dos jugadores el mas diestro ha puesto* 12 *reales contra* 8 *cada juego; despues de* 10 *juegos, el otro le paga* 20 *reales. ¿Quántos juegos ganó el primero?*

Si hubiera ganado 6, el otro hubiera ganado 4, y estarían en paz; hay, pues, un error de -20. Si hubiera ganado 8 juegos, el otro hubiera tenido que darle 40 reales. Hay, pues, una equivocacion de $+20$.

6	8
-20	$+20$

Parto 280 suma de los productos, por 40 suma de los errores, y saco que el jugador mas diestro ganó 7 juegos.

Como ninguno de los dos números supuestos es el verdadero, y la diferencia es 2, la multiplico por -20 ó $+20$, pues son iguales los dos errores, y no hago caso de sus signos al egecutar la multiplicacion y la division, y parto el producto 40 por la suma de las equivocaciones que tambien es 4. El cociente señala la correccion que cada número necesita para que sea el verdadero, añadiéndola al menor ó restándola del mayor.

312. Cuestion XV. *Declarar la regla de Aligacion, ó en otros términos.*

Se han comprado dos calidades de un mismo género, la una A, *cuyo precio es* m; *la otra* B, *cuyo precio es* n; *se pregunta ¿á qué precio se ha de vender la mezcla para no perder ni ganar?*

Llamo x este precio medio. Es constante que la suma de los géneros ha de ser á la suma de su valor como una parte de la mezcla á su valor ó precio que llamarémos x. Luego $A+B : Am+Bn :: 1 : \frac{Am+Bn}{A+B} = x$.

Supongamos que se me pregunte *¿á cómo se ha de vender una mezcla hecha con 6 marcos de plata de á 200 reales el marco, y con 12 de á 144 reales para no perder ni ganar?* Aquí tenemos $A=6$, $B=12$, $m=200$, $n=144$, $Am+Bn=2928$, $A+B=18$; luego $\frac{Am+Bn}{A+B} = \frac{2928}{18} = 162\frac{2}{3}$.

313. Cuestion XVI. *Dados los precios de dos géneros* A *y* B, *hallar en qué proporcion se han de mezclar unos con otros para venderlos á un precio medio* m.

Sean $m+a$, y $m-d$ los precios de los dos géneros; x é y las porciones que de cada uno han de entrar respectivamente en la mezcla. La misma cuestion hace patente que si multiplicamos la porcion de cada género que ha de entrar en la mezcla por su precio, y sumamos los productos, su suma ha de ser igual á la suma de las dos porciones multiplicadas por el precio medio; quiero decir, que si escribimos las porciones, el precio de los géneros, y el precio medio de este modo

 m

$$m\begin{Bmatrix} m+a \\ m-d \end{Bmatrix}\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

Tendremos $(m+a)x+(m-d)y=(x+y)m$, ó $mx+ax+my-dy=mx+my$, de donde se saca $ax=dy$. Y como se viene á los ojos que de la cantidad que mas vale he de tomar menos que el precio medio, podemos hacer $x=d$, y tendré $y=a$; luego las cantidades se podrán escribir de este modo:

$$m\begin{Bmatrix} m+a \\ m-d \end{Bmatrix}\begin{matrix} d \\ a \end{matrix}$$

Y significa que de la cantidad de mas valor he de tomar tanto como espresa la diferencia que vá del precio medio al precio menor, y de la menor tanto como la diferencia que vá del precio medio al precio mayor.

Si quisiéramos *averiguar*, por egemplo, *qué porcion de vino de á 15 reales la arroba se ha de mezclar con vino de á 8 reales la arroba para hacer una mezcla que pueda venderse á 12 reales*, tendríamos $m=12$, $m+a=15$, $m-d=8$, $d=4$, y $a=3$.

Por consiguiente he de tomar

$$12\begin{Bmatrix} 15 \,.\,.\, 4 \\ 8 \,.\,.\, 3 \end{Bmatrix}$$

tres arrobas del vino de á 8, y 4 del vino de á 15 reales.

Si la mezcla se hubiese de hacer con vino de á 15, de á 8, y de á 10 reales; dispondria las cantidades de este modo:

$$12\begin{Bmatrix} 15 \,.\,.\, 4 \,.\,.\, 2=6 \\ 10 \,.\,.\, 3 \\ 8 \,.\,.\, 3 \end{Bmatrix}$$

 Obran-

Obrando primero como si no hubiera mas que vino de á 15, y vino de á 8, y despues como si no le hubiera mas que de á 15, y de á 10, sacaría que se deberían tomar 6 arrobas del vino de á 15, 3 del de á 10, y 3 del de á 8.

II. *Un Panadero quiere hacer con cebada, centeno y trigo pan que pueda vender á 28 maravedís la libra. Tiene* $8\frac{1}{2}$ *celemines de trigo con los quales haria pan de á 36 maravedís la libra. El pan hecho con centeno solo le saldria á 18 maravedís, y el que haria con cebada le saldria á 9 maravedís. ¿Qué porcion ha de mezclar de cebada y centeno con los* $8\frac{1}{2}$ *celemines de trigo para que el pan le salga á 28 maravedís la libra?*

$$28\begin{cases}36\,..\,19\,..\,10 = 29\\ 18\,..\;\;8\\ 9\,..\;\;8\end{cases}$$

Teniendo presente lo dicho hasta aquí, sacaré que necesitaría el panadero 29 celemines de trigo, 8 de cebada, y 8 de centeno.

Pero como el panadero no tiene mas que $8\frac{1}{2}$ celemines de trigo, necesitará de los demas granos menos á proporcion que si tuviera los 19 celemines. Dirémos, pues, $29 : 8\frac{1}{2} :: 8 : \frac{(8\frac{1}{2})8}{29} = \frac{68}{29} = 2\frac{10}{29}$ celemines de centeno, y otros tantos de cebada.

III. *¿Qué porciones he de tomar de tres castas de café que cuestan el uno 10 reales la libra, el otro 7, y el último 3, para componer la cantidad de 64 libras que se pueda dár á 8 reales la libra?*

$$8\begin{cases}10\,..\,5\,..\,1 = 6\\ 7\,..\,2\\ 3\,..\,2\end{cases}$$

Hecho esto, diremos la suma de las diferencias es á la cantidad de la mezcla, como cada diferen-

rencia es á la cantidad que de ella ha de entrar en la mezcla.

$10 : 64 :: 6 : \frac{64\times6}{10} = 38\frac{2}{5}$ lib. del de á 10.

$10 : 64 :: 2 : \frac{64\times2}{10} = 12\frac{4}{5}$ lib. del de á 7, y del de á 3.

314. Cuestion XVII. *Manifestar los fundamentos, y la práctica de la regla de interés.*

Llámase regla de interés la que determina lo que se debe pagar por alguna porcion de dinero prestado con ciertas condiciones. Hay dos especies de interés, es á saber, el *simple*, y el *compuesto*; el primero es el que se paga por el principal, el segundo es el que se paga por el principal y los intereses que dejan de pagarse. Esto supuesto, lo que acerca de esta regla nos proponemos averiguar vá cifrado en esta pregunta.

Dado el capital, el tiempo que está puesto á interés, y el tanto por ciento que ha de ganar; hallar la suma que componen al cabo de un tiempo determinado el capital y los intereses juntos.

Llamemos el capital, p; el tiempo, t; r, el interés que dá un real cada año; s, la suma que buscamos. Diremos, pues, si un real dá r interés en un año ¿quánto dará el principal p? ó $1 : r :: p : pr$: será, pues, pr el interés que dará cada año el capital p. Despues diremos, si en un año p dá el interés pr ¿quánto dará al cabo del tiempo t? ó $1 : rp :: t : prt$: serán, pues, prt los intereses que dará el principal p al cabo del tiempo t; por consiguiente al cabo del tiempo t, será $s = p + prt$.

De aquí se sacará $p = \frac{s}{1+rt}$, $t = \frac{s-p}{pr}$, $r = \frac{s-p}{pt}$.

Supongamos que un usurero ha prestado 15600 rs. á 8 por ciento cada año, y que queramos saber quánto tendrá que cobrar al cabo de cinco años por el capital y los intereses caidos.

 Aquí

Aquí $p = 15600$, $r = 0,08$, porque como el interés es á 8 por ciento, dirémos $100 : 8 :: 1 : r = \frac{8}{100} = 0,08$; $t = 5$; luego será $s = 15600 + 15600 \times 0,08 \times 5 = 21840$.

Si en el supuesto de haberse pagado al cabo de 5 años por el capital y los intereses á 8 por ciento, la suma de 21840 rs. se nos preguntára quánto fue el capital, haríamos las substituciones correspondientes en la fórmula $p = \frac{s}{rt+1}$, y sacaríamos $p = 15600$ rs.

315. Cuestion XVIII. *Dada una suma de dinero que se ha de pagar cada año, el número de años que deja de pagarse, el interés anual que devenga por razon del atraso, hallar quánto se ha de pagar al cabo de dicho tiempo por la renta y los intereses.*

Llamarémos a la suma propuesta; t, el tiempo que deja de pagarse; r, lo que gana un real cada año; s, la suma que buscamos,

Esto supuesto, discurrirémos de este modo; una vez que la renta no se paga hasta cumplido el año, el primer año no devenga interés alguno, luego el interés del primer año es 0; al cabo del segundo año el interés será ar; al cabo del tercer año $2ar$; y al cabo de t años será $(t-1)ar$. Por consiguiente, al cabo de t años se deberá la suma de los intereses $0 + ar + 2ar + 3ar \ldots + (t-1)ar$, mas tantas veces la cantidad a quántos son los años que dejó de pagarse, ó ta. Pero la suma de $0 + ar + 2ar + 3ar \ldots\ldots + (t-1)ar$ es (304) $\frac{t.(t-1)ar}{2}$; luego al cabo de t años se deberá $\frac{t(t-1)ar}{2} + at = \frac{(t-1)r+2}{2} \times ta$, ó $s = \frac{(t-1)r+2}{2} \times ta$.

Luego $a = \frac{2s}{[(t-1)r+2]t}$, $t = \sqrt{\left[\frac{2s}{ar} + \left(\frac{2-r}{2r}\right)^2\right]} - \frac{2-r}{2r}$, $r = \frac{2s-2ta}{(t-1)ta}$.

Un negociante tiene que pagar á otro cien doblones cada año; pero como le ha de incomodar cumplir, consigue de su acreedor que no le pida nada por espacio de ocho años, ofreciendo que le pagará todos los atrasos con el interés á razon de 5 por 100.

Con hacer las substituciones correspondientes á este caso sacarémos $s = (0,05 \times 7 + 2) \times \frac{800}{2} = 940$.

316. Cuestion XIX. *Dado un capital, el tiempo que queda puesto á ganancias, y el interés anual, hallar quanto monta al cabo de dicho tiempo el capital junto con los intereses, á interés compuesto?*

Llamo a el capital; r, el interés que dá un real cada año; t, el tiempo. Luego será $1 + r = R$ lo que se deberá al cabo de un año por un real, y el interés que dá. Para hallar lo que se deberá al cabo del segundo año por un real y sus intereses á interés compuesto, hemos de considerar que á principios de este segundo año el principal puesto á ganancias es $1 + r$ ó R, pues siendo la cuestion de interés compuesto, los intereses r han de ser parte del principal en el segundo año. Dirémos, pues, si 1 dá $1 + r$ ó R al cabo de un año ¿quánto dará R en el mismo tiempo? ó $1 : R :: R : R^2$, cuyo quarto término es lo que se deberá á fines del segundo año por el capital y las ganancias á interés compuesto. Haciéndonos la misma consideracion, hallarémos que en el mismo supuesto será R^3 lo que se deberá al cabo del tercer año, y que por consiguiente al cabo de t años, la suma del capital, siendo este un real, y de los intereses á interés compuesto será R^t.

Luego para hallar lo que será la suma del capital, é intereses al cabo de t años, siendo a el principal, á interés compuesto, esto es, en el supuesto de agregarse cada año los intereses al capital, dirémos: si al cabo de t años un real puesto á interés compuesto dá R^t por el capital y los intereses ¿quánto dará a en los mismos supuestos? ó $1 : R^t :: a : aR^t$.

 Lue-

Luego $s = aR^t$; $a = \frac{s}{R^t}$: $R^t = \frac{s}{a}$, de donde sale (272) $tL.R = L.s - L.a$, y $t = \frac{L.s - L.a}{L.R}$; $L.R = \frac{L.s - L.a}{t}$.

Supongamos que parte del caudal de un pupilo consiste en una suma de 20000 pesos que su tutor ha puesto á ganancias á 5 por 100. Al cabo de un año el sugeto que tenia esta suma la vuelve pagando el interés estipulado. El tutor halla en el instante proporcion de emplear dicha cantidad al mismo interés, y forma un nuevo capital con los 20000 pesos, y el interés que dieron en el primer año, y coloca este nuevo capital. Emplea del mismo modo á principios del tercer año todo lo que cobró á fines del segundo, y prosigue á este tenor por espacio de seis años; veamos lo que ha de cobrar al cabo de este tiempo.

En este caso $a = 20000$; $t = 6$ años; r es el interés simple de un peso; $R = 1$ peso $+ r$, esto es un peso con el interés que dá en un año. Para sacar el valor de R, hemos de averiguar primero el de r, diciendo $100 : 5 :: 1 : 0{,}05 = r$; luego $R = 1 + r = 1{,}05$. Luego haciendo las substituciones correspondientes en la fórmula $s = aR^t$ saldrá $s = 20000 \times (1{,}05)^6 = 20000 \times 1{,}3401 = 26802$ pesos.

317. Cuestion XX. *Dada una cantidad que se ha de pagar cada año, el tiempo que deja de pagarse, y el interés; hallar quanto se deberá al cabo de un tiempo dado por los atrasos é intereses, á interés compuesto.*

Llamemos a la suma anual; t, el tiempo que deja de pagarse; r, el interés que dá un real en un año; $R = 1 + r$, la suma de un real y del interés que dá; s, la suma que se busca.

Lo que se debe al cabo del primer año es a; lo que se deberá al cabo del segundo es a, y el interés que dá a en un año, cuyo interés se halla con decir $1 : 1 + r$ ó $R :: a : aR$; al cabo del segundo año se deberá $a + aR$.

Por consiguiente al principio del tercer año hemos de considerar que la cantidad puesta á ganancias es $a + aR$; luego al fin del tercer año habrá que cobrar la renta anual a, y los intereses de a y aR; como los de a son aR, y los de aR son aR^2 (pues $1 : R :: a : aR$, y $1 : aR :: R : aR^2$) al cabo del tercer año la deuda será $a + aR + aR^2$, y al cabo de t años será $a + aR + aR^2 + \ldots aR^{t-1}$ la deuda, ó $a \times (1 + R + R^2 + R^3 + \ldots R^{t-1})$ que es una progresion geométrica, cuya suma es (306)

$$\frac{R \times R^{t-1} - 1}{R - 1} = \frac{R^t - 1}{r}, \text{ y será por lo mismo}$$

$$\frac{R^t - 1}{r} \times a = s \text{ la deuda al cabo de } t \text{ años.}$$

$$\text{Luego } a = \frac{rs}{R^t - 1}, \; R^t = \frac{rs}{a} + 1, \text{ ó } t = \frac{L.\left(\frac{rs}{a} + 1\right)}{Log.R};$$

$$\text{y } L.R = \frac{L.\left(\frac{rs}{a} + 1\right)}{t}.$$

Supongamos que la renta anual sean 2400 pesos, que deja de pagarse por espacio de 8 años, y que está estipulado que se pagará un quatro por ciento cada año; con hacer las substituciones correspondientes sacarémos que la suma $s = 22140$ pesos son con muy corta diferencia.

De las Cuestiones ó Problemas indeterminados.

318. Las cuestiones de esta clase son todas aquellas

llas que tienen menos condiciones que incógnitas, y admiten una infinidad de resoluciones; pero el número de estas resoluciones le limitan las mas veces algunas condiciones que por no poderse reducir á equacion no consienten sacar de un modo directo el número de las resoluciones que la cuestion admite.

Si se nos ofreciera resolver esta cuestion, hallar dos números cuya suma $= 24$; tendríamos $x + y = 24$, $x = 24 - y$. Se echa de ver que admitirá infinitas resoluciones esta cuestion, si x é y pudieren ser, como quisiéremos, números enteros ó fraccionarios, positivos ó negativos; con substituir en lugar de y el número que se nos antoge para sacar de $x = 24 - y$ un valor de x. Si hacemos, por egemplo, $y = 1$, $y = 1\frac{1}{2}$, $y = 2$, $y = 2\frac{2}{3}$ &c. sacarémos $x = 23$, $x = 22\frac{1}{2}$, $x = 22$, $x = 21\frac{1}{3}$ &c. Pero si fuere condicion espresa el sacar en números enteros positivos los valores de x, sería muy ceñido el número de las resoluciones, pues x no puede ser positiva sino en quanto y es menor que 24. Y pues suponemos que han ser números enteros los valores de x, la cuestion solo admitirá veinte y cinco resoluciones, incluyendo en ellas el valor $x = 0$, de suerte que suponiendo succesivamente $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$ &c. sacaríamos $x = 24$, $x = 23$, $x = 22$ &c.

319. Pero aun quando viene propuesta la cuestion con las dos condiciones de que sean enteros y positivos los valores de las incógnitas, no se viene tan facilmente á los ojos como en el caso propuesto lo que se debe egecutar. Manifiéstalo la siguiente cuestion.

Cuestion I. *¿De quántos modos se pueden dar 542 varas de tela dando piezas de á 17 varas, y recibiendo en cambio piezas de á 11 varas.*

Sea x el número de las piezas de á 17 varas, é y el de las piezas de á 11 varas. Las piezas de á 17 varas que se darán compondrán $17x$ varas, y las de á 11 varas que se recibirán, serán $11y$ varas; luego se habrán dado

do $17x - 11y$; y como son 542 varas las que se han de dar, será $17x - 11y = 542$, y sacando el valor de y que lleva el coeficiente menor, sale $y = \frac{17x - 542}{11}$.

No hay duda en que qualquier número que se substituya en lugar de x, se sacará un valor de y que satisfará á la pregunta; pero como han de salir en números enteros estos valores, pide maña el cumplir con esta circunstancia.

Para dar á entender como se consigue, hago en $y = \frac{17x - 542}{11}$ la division todo lo que se pueda, y sale $y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11}$; es, pues, preciso que $\frac{6x - 3}{11}$ sea un número entero. Sea u este número entero, y será $\frac{6x - 3}{11} = u$, y $6x - 3 = 11u$, y $x = \frac{11u + 3}{6}$ que, egecutando la division, dá $x = u + \frac{5u + 3}{6}$; luego es preciso que $\frac{5u + 3}{6}$ sea un número entero; sea t este número, y tendrémos $\frac{5u + 3}{6} = t$, y $5u + 3 = 6t$, y $u = \frac{6t - 3}{5} = t + \frac{t - 3}{5}$, ha de ser, pues, $\frac{t - 3}{5}$ un número entero; sea este s, tendrémos $\frac{t - 3}{5} = s$, y por consiguiente $t = 5s + 3$. Aquí se remata la operacion, porque es evidente que substituyendo en lugar de s un número entero qualquiera, siempre será t un número entero conforme pide la cuestion.

Volvamos ahora á los valores de x é y; ya que hemos hallado $u = \frac{6t - 3}{5}$, substituyendo en lugar de t su valor $5s + 3$, tendremos $u = \frac{30s + 18 - 3}{5} = 6s + 3$; y como hallamos antes $x = \frac{11u + 3}{6}$, escribiendo en lugar de u su valor, saldrá $x = \frac{66s + 33 + 3}{6} = 11s + 6$.

Fi-

Finalmente, como hallamos antes $y = \frac{17x - 542}{11}$, substituirémos en lugar de x su valor, y sacarémos $y = \frac{187s + 102 - 542}{11} = 17s - 40$. Luego los valores de x é y serán $x = 11s + 6$, é $y = 17s - 40$. En el primero podemos substituir en lugar de s el número entero que queramos: pero en el segundo no podemos substituir en lugar de s ningun número menor que 3, porque no puede ser positivo á no ser que $17s > 40$ ó $s > \frac{40}{17}$, esto es, mayor que 2.

Admite, pues, esta cuestion una infinidad de resoluciones diferentes, que se sacarán con substituir en los valores de x é y en lugar de s todos los números enteros imaginables desde 3 hasta el infinito; y así con hacer succesivamente $s = 3$, $s = 4$, $s = 5$ &c. sacarémos los correspondientes valores de x é y.

$x = 39$	$y = 11$
$x = 50$	$y = 28$
$x = 61$	$y = 45$
$x = 72$	$y = 62$
$x = 83$ &c.	$y = 79$ &c.

320. Cuestion II. *Componer 741 doblones con 41 piezas de tres especies, es á saber de á 24, de á 19, y de á 10 doblones.*

Sean x, y, z respectivamente los números de monedas de cada especie; ya que entre todas son 41, tendrémos 1.° $x + y + z = 41$.

2.° Como cada pieza de la primera especie vale 24 doblones, el número x de piezas compondrá $24x$ doblones; por lo mismo las y piezas de la segunda especie compondrán $19y$ doblones, y z piezas de la tercera especie serán $10z$ doblones; luego los valores juntos de los tres números de piezas diferentes montarán $24x + 19y + 10z = 741$ doblones por la cuestion.

To-

Tomo en cada una de las equaciones halladas el valor de una de las incógnitas, el de x por egemplo, y saco $x = 41 - y - z$, y $x = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$; luego $41 - y - z = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$, ó $984 - 24y - 24z = 741 - 19y - 10z$; despues de eliminado el denominador.

Ahora tomo el valor de y que lleva el coeficiente menor, y saco $y = \frac{243 - 14z}{5} = 48 - 2z + \frac{3 - 4z}{5}$; pero como y y z han de ser números enteros, es preciso sea $\frac{3 - 4z}{5}$ un número entero. Sea, pues, t este número, tendrémos $\frac{3 - 4z}{5} = t$, ó $3 - 4z = 5t$; luego $z = \frac{3 - 5t}{4} = -t + \frac{3 - t}{4}$; ha de ser, pues, $\frac{3 - t}{4}$ un número entero; sea u este número, y tendrémos $\frac{3 - t}{4} = u$, ó $3 - t = 4u$, y por consiguiente $t = 3 - 4u$.

Volvamos ahora á los valores de x, y, z. Ya que por lo que acabamos de sacar $z = \frac{3 - 5t}{4}$, saldrá, substituyendo en lugar de t su valor, $z = \frac{3 - 15 + 20u}{4} = \frac{20u - 12}{4} = 5u - 3$; y como hallamos antes $y = \frac{243 - 14z}{5}$, substituyendo en lugar de z su valor, tendrémos $y = \frac{243 - 70u + 42}{5} = \frac{285 - 70u}{5} = 57 - 14u$.

Finalmente, como hallamos $x = 41 - y - z$, tendrémos $x = 41 - 57 + 14u - 5u + 3 = 9u - 13$; de suerte que los valores de x, y, z son $x = 9u - 13$, $y = 57 - 14u$, $z = 5u - 3$, en cuyos valores podemos substituir en lugar de u el número entero que nos dé la gana, con tal que esta substitucion dé para los valores

de

de x, y, z números enteros positivos. Pero esta condicion trahe consigo estas tres 1.° que $9u$ sea mayor que 13, ó que $u > \frac{13}{9}$ ó $1\frac{4}{9}$; 2.° que $57 > 14u$ ó $u < \frac{57}{14}$; esto es, $u < 4\frac{1}{4}$. 3.° Finalmente que $5u > 3$ ó $u > \frac{3}{5}$; y esto no puede dejar de ser en verificándose la primera condicion; por lo que es muy limitado el número de las resoluciones, y queda reducido á 3 que se hallan con dar á u los valores 2, 3, 4, los únicos que permiten los términos de la cuestion. Por consiguiente con las 41 piezas espresadas no se puedan componer los 741 doblones sino tomando los números puestos aquí, que se sacan con hacer $u = 2$, $u = 3$, $u = 4$, y substituyéndolos en los valores de x, y y z.

x	y	z
5	29	7
14	15	12
23	1	17

De las Equaciones de segundo grado.

321. De lo dicho (284) se indicia que las equaciones de segundo grado son todas aquellas cuya incógnita está elevada á la segunda potencia. Pero puede una equacion de segundo grado no llevar mas que el quadrado de la incógnita qual es esta $xx - bb = cc$, cuya resolucion es muy facil (291); pues se reduce á $xx = bb + cc$, que dá $x = \sqrt{(bb + cc)}$; pero como la raiz de todo quadrado positivo puede ser positiva igualmente que negativa, pues $+ \times +$ dá $+$ al produćto, del mismo modo que $- \times -$ dá $+$, será $x = \pm \sqrt{(bb + cc)}$; tiene, pues, la incógnita dos valores en toda equacion de segundo grado.

Quando además del quadrado de la incógnita lleva tambien la equacion su primera potencia como esta $xx + ax = bb$, no se saca con tanta brevedad el valor de la incógnita, y la equacion se llama entonces *afećta* ó *mixta.* Sin embargo no tiene dificultad esta operacion,

cion, teniendo presente lo que dejamos dicho acerca de la formacion del quadrado de un binomio. Por lo dicho (221) consta que el quadrado de $x + a$, por egemplo, es $xx + 2ax + aa$; cuyo quadrado conviene reparar 1.° que se compone de tres términos; 2.° que el último término es el quadrado de la mitad de todo el coeficiente que multiplica la primera potencia de x, ó el quadrado de a.

322. Esto sentado, quando en una equacion propuesta la mayor potencia de la incógnita no pasa del segundo grado, y es negativo su quadrado se le hará positivo, trasladándole del un miembro al otro, porque todo quadrado negativo es un absurdo, pues bien lleve la raiz el signo $+$ ó el signo $-$, el quadrado que es el produćto de una raiz por otra, forzosamente ha de llevar siempre el signo $+$ (183). Se pasarán á un mismo miembro todos los términos que llevaren la incógnita, se hará que este miembro sea un quadrado cabal, añadiéndole lo que fuere menester, esto es el quadrado de la mitad del coeficiente que llevare la primera potencia de la incógnita, y añadiendo la misma cantidad al otro miembro, para que subsista la igualdad. Finalmente se sacará la raiz quadrada de cada miembro, y estará resuelta la equacion.

Si hubiéramos de resolver la equacion $ax - \frac{xx}{2} + dd = cc$; 1° eliminaríamos el denominador y saldría $2ax - xx + 2dd = 2cc$; 2.° haríamos positiva la cantidad $-xx$, pasando al mismo tiempo á un solo miembro todas las cantidades en que se halla la incógnita, y saldría $xx - 2ax = 2dd - 2cc$. Bien se echa de vér que al primer término le falta algo para que sea el quadrado cabal de un binomio, y que con añadirle el quadrado de la mitad de $2a$, ó el quadrado de a (321) será el primer miembro el quadrado de $x - a$, y prαćticando lo mismo para con el otro miembro, la equacion se transformará en $xx - 2ax + aa = aa + 2dd - 2cc$, cu-

cuya raiz es $x - a = \pm \sqrt{(aa + 2dd - 2cc)}$.

Si se me ofreciera resolver la equacion $9abxx - 3bbx = ad$, sacaría primero, dividiéndolo todo por $9ab$, $xx - \frac{bx}{3a} = \frac{d}{9b}$; despues añadiria á cada miembro el quadrado de la mitad de $\frac{b}{3a}$, ó el quadrado de $\frac{b}{6a}$ (321) que es $\frac{bb}{36aa}$, y sacaría $xx - \frac{bx}{3a} + \frac{bb}{36aa} = \frac{bb}{36aa} + \frac{d}{9b}$, y sacando últimamente la raiz quadrada hallaria $x - \frac{b}{6d} = \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{36aa} + \frac{d}{9b}\right)}$.

La equacion $x - xx = a$ se convertirá en $xx - x = -a$; al primer miembro le falta un término para que sea un quadrado cabal, y le falta (321) el quadrado de $-\frac{1}{2}$ por ser -1 el coeficiente de $-x$; añadiendo, pues, $\frac{1}{4}$ á cada miembro saldrá $xx - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - a$, y sacando la raiz sale $x - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{1-4a}{4}\right)}$, y $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-4a}{4}\right)}$.

Finalmente, el primer miembro de la equacion $xx + ax - x = aa$ tampoco es un quadrado cabal, porque las dos cantidades $ax - x$ no son mas que un término, pues son lo propio que $(a-1)x$. Luego he de añadir á cada miembro el quadrado de $\frac{a-1}{2}$, esto es, $\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$, y saldrá $xx + ax - x + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + aa$, y sacando la raiz sale $x + \left(\frac{a-1}{2}\right) = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + aa\right]}$, ó $x + \frac{a}{2} - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + aa\right]}$, ó $x = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2 - 2a + 1}{4} + aa\right)} = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{(5aa - 2a + 1)}}{2}$.

323. Cuestion I. *Hallar un número tal que si á su*

qua-

quadrado se le añade 8 *veces el mismo número sea la suma* 33.

Si llamo este número x, tendré $xx + 8x = 33$. Añadiendo á cada miembro el quadrado de $\frac{8}{2}$, ó el quadrado de 4 que es 16, saldrá $xx + 8x + 16 = 16 + 33$, ó $xx + 8x + 16 = 49$; saco la raiz quadrada, y hallo $x + 4 = \pm \sqrt{49}$, $x = -4 \pm \sqrt{49} = -4 \pm 7$. Luego $x = -4 + 7 = 3$, y $x = -4 - 7 = -11$.

De estos dos valores el primero satisface á la pregunta, pues añadiendo á 8 veces 3 el número 9 que es el quadrado de 3, la suma es con efecto 33; el segundo valor -11 que es negativo satisface á la misma pregunta proponiéndola al reves en estos términos: *Hallar un número tal que si de su quadrado se resta* 8 *veces el mismo número la resta sea* 33. Y de hecho, si ponemos esta cuestion en equacion, sacarémos una confirmacion de lo dicho (173) acerca de las cantidades positivas y negativas, porque sacarémos $xx - 8x = 33$, de cuya resolucion se sacará $x = \pm 7 + 4$, ó $x = 11$ y $x = -3$.

324. Cuestion II. *Se habian de repartir* 175 *rs. entre algunas personas, pero faltan dos que por ausentes no deben entrar á la parte. Con esto les tocan á cada uno de los particionarios presentes* 10 *rs. mas. ¿ Entre quántas personas se habia de repartir la suma propuesta?*

Llamo x el número de todos los particionarios; si no faltára ninguno, le tocaría á cada uno $\frac{175}{x}$; pero como faltan dos, la parte de los presentes será $\frac{175}{x-2}$, y ya que á cada uno le tocan con esto 10 rs. mas que si estuvieran todos, será $\frac{175}{x-2} - 10 = \frac{175}{x}$.

Elimino desde luego los denominadores, contentándome con indicar la multiplicacion, y saco $175x - 10$

 $(x-2)$

$(x-2)x = 175\times(x-2)$; haciendo las operaciones indicadas saco $175x - 10xx + 20x = 175x - 350$; borrando en cada miembro $175x$, y mudando despues los signos (322) sale $10xx - 20x = 350$, y dividiendo finalmente por 10 sale $xx - 2x = 35$. Añado, pues, á cada miembro el quadrado de -1 que es la mitad de -2 coeficiente del segundo término, cuyo quadrado es $+1$, y sale $x^2 - 2x + 1 = 36$, y sacando por último la raiz quadrada hallo $x - 1 = \pm 6$, y $x = \pm 6 + 1$, que dá $x = 7$, y $x = -5$. El primer valor es el que corresponde á la cuestion propuesta, porque $\frac{175}{7} = 25$, y $\frac{175}{7-2}$ ó $\frac{175}{5} = 35$ que excede á 25 en 10.

El segundo valor resolvería la cuestion en el caso de haberse de *repartir* 175 *rs. despues de agregarse dos personas mas, y de tocarle con esto* 10 *rs. menos á cada particionario.*

325. Cuestion III. *Compró un hombre un caballo y le vendió al cabo de algun tiempo en 24 doblones. Perdió en esta venta tanto por ciento como le habia costado el caballo. ¿En quánto le habia comprado?*

Llamemos x el número que buscamos; ya que por los términos de la cuestion, 100 se reducen á $100 - x$, sacarémos en que se ha de quedar x con hacer esta regla de tres $100 : 100 - x :: x : \frac{(100-x)x}{100}$, ó $\frac{100x - xx}{100}$, y porque vendió el caballo en 24 doblones, será $\frac{100x - xx}{100} = 24$, que se reduce á $100x - xx = 2400$, ó $xx - 100x = -2400$. Añado, pues, á cada miembro el quadrado de la mitad de -100, que es 2500, y sale $xx - 100x + 2500 = 2500 - 2400 = 100$, y sacando la raiz quadrada hallo $x - 50 = \pm 10$, y por lo mismo $x = 50 \pm 10$, que dá estos valores $x = 60$, y $x = 40$. Ambos resuelven la cuestion, por manera que el caballo pu-

pudo haber costado 60 ó 40 doblones. Quál de los dos costó no se puede determinar por los términos en que viene propuesta la cuestion. En el supuesto de haber costado 60 doblones, los 100 se reducirán á 40, y los 60 á 24. En el supuesto de haber costado 40 doblones los 100 se reducirán á 60, y los 40 á 24.

326. Cuestion IV. *Dos personas han formado una compañia de comercio; la una ha puesto* 30 *doblones que han estado* 17 *meses en el fondo comun: la segunda ha puesto su dinero cinco meses despues, quiero decir que solo ha estado* 12 *meses en el fondo comun. Al segundo asociado le tocan por su capital, y las ganancias* 26 *doblones. La ganancia total monta* $18\frac{3}{4}$ *doblones. ¿Quál fue el capital del segundo asociado, y quánto le toca de las ganancias á cada uno?*

Con hallar el capital del segundo, hallarémos despues con facilidad la ganancia de cada uno. Llamo, pues, x este capital, y como los 30 doblones del primero han estado 17 meses en el fondo comun, le han de dar la misma ganancia que darian 17 veces 30 doblones, ó 510 doblones en un mes. Ya que el capital x del segundo ha estado 12 meses en el caudal de la compañia, le ha de ganar lo mismo que 12 veces x doblones, ó $12x$ en un mes. En virtud de esto podemos suponer que la compañia duró un mes no mas, bien entendido que en este caso los capitales son 510 y $12x$. Esto supuesto, la ganancia del segundo será el quarto término de esta proporcion (298) $510 + 12x : 18\frac{3}{4} :: 12x : \frac{12x \times 18\frac{3}{4}}{510 + 12x}$, que se reduce á $\frac{225x}{510 + 12x}$; pero las ganancias del segundo con su capital x componen 26 doblones; luego $\frac{225x}{510 + 12x} + x = 26$.

Saco de aquí, con eliminar el denominador, $225x + x(510 + 12x) = 26(510 + 12x)$, ó con egecutar las multiplicaciones indicadas $225x + 510x + 12xx =$

 13260

$13260 + 312x$. Trasladando y reduciendo, sale $12xx + 423x = 13260$; divido por 12, y saco $xx + \frac{423x}{12} = \frac{13260}{12}$, que se reduce á $x^2 + \frac{141}{4}x = 1105$. Añado á cada lado el quadrado de $\frac{141}{8}$ mitad de $\frac{141}{8}$, y sale $xx + \frac{141}{4}x + \frac{19881}{64} = \frac{19881}{64} + 1105$; reduzco 1105 á quebrado, saco la raiz quadrada, y me sale $x + \frac{141}{8} = \pm\sqrt{\frac{90601}{64}} = \pm\frac{301}{8}$; luego $x = -\frac{141}{8} \pm \frac{301}{8}$; de cuyos dos valores solo resuelve la cuestion el valor $x = -\frac{141}{8} + \frac{301}{8} = \frac{160}{8} = 20$. Por consiguiente el segundo asociado puso 20 doblones, y ganó 6; el primero ganó $12\frac{3}{4}$ doblones.

Las cuestiones que hemos resuelto manifiestan que algunas (323 y 324) dan dos resoluciones, la una positiva, la otra negativa. Otras (325) dan dos resoluciones positivas. Pero si alguna diere negativas ambas resoluciones, es señal de que viene mal propuesta, y que se ha de proponer con condiciones contrarias. Hagámoslo patente.

327. Cuestion V. *Hallar un número tal que si á su quadrado le añadimos 9 veces el mismo número mas 50, sea la suma* 30.

Puesta esta cuestion en equacion será $x^2 + 9x + 50 = 30$, que por las reglas dadas será succesivamente $x^2 + 9x = -20$, $x^2 + 9x + \frac{81}{4} = \frac{81}{4} - 20 = \frac{1}{4}$, y sacando la raiz quadrada, sale $x + \frac{9}{2} = \pm\frac{1}{2}$, que dá $x = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -4$, y $x = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -5$.

Luego la cuestion se debería proponer en estos términos: *Hallar un número tal que si despues de añadir 50 á su quadrado, se resta de la suma 9 veces el mismo número, sea la resta* 30.

Consideraciones generales acerca de las Equaciones.

328. No solo resuelve el Algebra las cuestiones, mas tambien dá á conocer si vienen mal propuestas, ó si incluyen alguna contradiccion.

1.° Hay casos en que no deja de ser indeterminada la cuestion, bien que subministre tantas equaciones quantas son las incógnitas. Esto sucede siempre que condiciones que parecen diferentes son en substancia una misma, espresada de distintos modos. Si se nos propusiera esta cuestion: *Hallar dos números tales que la quarta parte de su suma sea* 48, *y que la mitad mas la quarta parte de su suma componga* 144. Llamarémos x el primer número que buscamos, el segundo y, y tendremos estas dos equaciones $\frac{x+y}{4} = 48$, $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4})(x+y) = 144$. La primera dá $x = 192 - y$, y la segunda dá tambien $x = 192 - y$. Estos dos valores de x son uno mismo. Por consiguiente la cuestion no tiene en realidad mas que una condicion, y no dá en realidad mas que una equacion. Y de hecho, con atender á los términos en que viene propuesta, se percibe que decir que la quarta parte de $(x+y)$ es 48, es decir en otros términos que la mitad mas la quarta parte, ú los tres quartos de $(x+y)$ son el triplo de 48 ó 144. En los casos de esta naturaleza el cálculo mismo dá á conocer si las condiciones propuestas son realmente distintas, ó vienen á ser una misma. Porque si son diferentes, dá equaciones diferentes para una misma incógnita; si son una misma, dá equaciones idénticas para una misma incógnita, como en el egemplo propuesto, donde hemos sacado estas dos equaciones idénticas, $x = 192 - y$, $x = 192 - y$.

2.° En otros casos, las condiciones de una cuestion dán mas equaciones que incógnitas se han de determinar. Entonces para que sea posible la cuestion, y no envuelva ninguna contradiccion, es preciso que las cantidades conocidas tengan tal relacion unas con otras que todas las equaciones se verifiquen á un tiempo. Supongamos, por egemplo, que de las condiciones de una cuestion espresadas por álgebra saquemos estas tres equaciones $ax+by=c$, $dx+ey=g$, $hx-my=n$; siendo $a, b, c, d, e, g, h, m, n$, cantidades conocidas, y x é y incógnitas.

Si comparamos la primera equacion con la segunda sacarémos $x=\frac{ce-bg}{ac-bd}$, $y=\frac{ag-cd}{ac-bd}$.

Si comparamos la primera con la tercera sacarémos $x=\frac{mc+bn}{ma+bh}$, $y=\frac{hc-an}{ma+bh}$.

Por consiguiente, si no hay incompatibilidad entre las condiciones de una cuestion, es preciso que los dos valores de x sean iguales uno con otro, ó que sean iguales uno con otro los dos valores de y; quiero decir que ha de ser $\frac{ce-bg}{ac-bd}=\frac{mc+bn}{ma+bh}$, y $\frac{ag-cd}{ac-bd}=\frac{hc-an}{ma+bh}$.

Estas dos últimas equaciones no espresan en realidad mas que una misma condicion; porque si despues de sacado el valor de x por medio de qualquiera de las dos comparaciones de que hemos hablado, substituimos este valor de x en una ú otra de las equaciones comparadas, para sacar el valor de y, haremos en realidad una operacion hecha ya de otro modo, al hacer la comparacion. Con efecto, cada una de las dos equaciones de antes se reduce á esta $hce-bgh-mag=aen-bdn-cdm$, que por consiguiente espresa la relacion que ha de haber entre las cantidades conocidas para que sea posible la cuestion propuesta. Si no se verificára esta equacion, la cuestion sería imposible. Se sacaria esta misma equacion de condicion, si al buscar los valores de x é y, comparamos la primera equacion primordial con la tercera, y despues la segunda con la tercera, en vez de comparar, conforme se ha hecho, la primera con las otras dos.

3.° Hay tambien cuestiones que no dejan de ser imposibles, aunque no den mas equaciones que incógnitas. Tambien manifiesta el cálculo esta imposibilidad, porque entonces pára el resultado numérico en una igualacion entre dos números diferentes, cuyo resultado es un absurdo. Supongamos, por egemplo, que de una cuestion se saquen estas dos equaciones $2x+3y=20$, $4x+6y=30$. La primera dá $=\frac{20-2x}{3}$, y la segunda $y=\frac{30-4x}{6}$. Luego sería $\frac{20-2x}{3}=\frac{30-4x}{6}$, ó $120-12x=90-12x$, ó $120=90$, cosa imposible.

4.° Es igualmente imposible una cuestion, quando en el valor de la incógnita hay alguna cantidad imposible de esta forma $\sqrt{-aa}$, por egemplo; porque como un quadrado negativo es imposible (322), eslo tambien la raiz quadrada, y toda raiz par de una cantidad negativa. Bien se echa de ver que esta imposibilidad solo se halla en las cuestiones cuya resolucion pára en equaciones de segundo grado, ó de grado par.

Se percibe que quanto mas elevado fuere el grado de las equaciones, tanto mas dificultosa será su resolucion. Eslo sin duda, y por este motivo han trabajado muchísimo los mas diestros analystas buscando medios para alcanzar y simplificar esta resolucion, ó hacerla mas general. A ciertos respectos ha quedado burlada su porfia, bien que á otros muchos no han sido infructuosos sus afanes. Los aficionados que desearen enterarse de las propiedades de las equaciones superiores, é imponerse en los métodos que para resolverlas se han inventado, podrán acudir al tomo II. de mi Curso.

PRINCIPIOS
DE GEOMETRIA.

329. EL espacio que ocupan los cuerpos tiene siempre tres dimensiones, que son *longitud*, *latitud*, y *profundidad* ó *grueso*. Aunque no existe cuerpo alguno que no tenga todas estas tres dimensiones juntas, solemos no obstante separarlas con el pensamiento: así, quando hablamos de la profundidad de un rio, por egemplo, no atendemos á lo que coge de largo ni de ancho.

Distinguiremos, pues, tres especies de estension, es á saber, la estension en sola longitud, que llamarémos *linea*: la estension en longitud y latitud solamente, que llamarémos *superficie*: finalmente la estension en longitud, latitud y profundidad, que llamarémos *volumen* ó *sólido*.

El obgeto de la Geometría es considerar las propiedades de cada una de estas tres especies de estension.

De las Lineas.

330. Suponemos en estos principios que todas las lineas y superficies que considerarémos estan en un mismo plano, ó superficie plana. Por *plano* entendemos una superficie que no tiene ni hoyos, ni eminencias, ni es curva; tal viene á ser la superficie de una mesa muy lisa, ó de un cristal. De modo que llamarémos plano una superficie sobre la qual si se aplica el canto de una regla, todos los puntos de ella estan en dicha superficie, y la tocan.

Hay tres especies de lineas, la *recta*, la *curva*, y la *mixta*; antes de definirlas conviene dar á conocer el punto.

Llá-

331. Llámanse *puntos* los estremos de una linea. Fig.
Tambien llamamos *punto* el lugar donde es cortada una linea, ó en donde las lineas se encuentran ó concurren. De modo que se puede considerar el punto como una porcion de estension que tuviese infinitamente poca longitud, latitud y profundidad.

332. Sentado esto, llámase linea *recta* aquella cuyos puntos están todos en una misma direccion; tal
es la linea AB. Por este motivo definen algunos la li- 1.
nea recta diciendo, que es el rastro que dejaria un punto que se moviese continuamente en una misma direccion. Si el punto A moviéndose sin desviarse para ir desde A á B, dejase rastro de sí á cada paso que diese, trazaría la linea recta AB.

333. La linea *curva* es aquella cuyos puntos no
estan en una misma direccion; la linea AEB es una 2.
linea curva; por lo que, definen algunos la linea curva diciendo, que es el rastro que deja un punto que camina desviándose á cada paso del camino recto.

334. Llámase linea *mixta* la que es en parte recta, y en parte curva; tal es la linea $ABCD$.

De estas definiciones dimanan las tres proposicio- 3.
nes siguientes, cuya evidencia es tan patente que no necesitan de prueba.

335. 1.° *Desde un punto á otro no se puede tirar mas de una linea recta, pero se pueden tirar una infinidad de lineas curvas.*

Solo con mirar la figura se vé patentemente que
desde el punto A al punto B no se puede tirar mas 4.
linea recta que la AB; bien que desde el primer punto al segundo se pueden tirar muchas lineas curvas, como las ACB, ADB, &c.

336. 2.° *La linea recta es la mas corta que se puede tirar desde un punto á otro.*

Por egemplo, la linea AB, tirada desde el pun-
to A al punto B, es mas corta que cada una de las 4.
li-

Fig. lineas *AEB*, *ADB*, *ACB*, que son mas largas á proporcion que mas se apartan de la recta *AB*, por ser mayor el rodeo del punto cuyo rastro se supone que son; por lo que, *es la linea recta la medida cabal de la distancia que hay entre dos puntos*, conforme probarémos mas adelante.

337. 3.° *Para determinar la posicion de una linea recta, basta conocer dos de sus puntos; de suerte que si se conoce la posicion de dos puntos, se conoce tambien la de toda la linea.* Como esta proposicion nos servirá muchísimo en adelante, es del caso detenernos en hacer patente su verdad.

Es evidente que muchas lineas rectas pueden pasar
5. por un mismo punto; por egemplo, la linea *CD*, y la linea *AB* pasan ambas por el punto *E*, y se puede hacer que pasen infinitas por dicho punto; por lo que, un punto sólo no determina la posicion ó direccion de una linea recta; pero si se toman dos puntos como *E* y *F*, no es posible tirar por estos dos puntos mas lineas rectas que la *CD*; porque es patente que todas las lineas rectas que pasáran por los dos puntos *E* y *F*, estarian echadas sobre la linea *CD*, y se confundirían con ella; bastan, pues, dos puntos para determinar la posicion de una linea recta.

338. Infiérese de esta última proposicion, que *dos lineas rectas no se pueden cortar sino en solo un punto.*

Porque si dos lineas como *AB* y *CD* que se cor-
5. tan en el punto *E*, se cortasen tambien en otro punto; como cada punto de interseccion es comun á ambas lineas, estas dos lineas tendrian dos puntos comunes, y como la posicion de una linea recta no pende (337) sino de dos puntos, las dos lineas tendrian comunes todos los demas puntos, y no formarian sino una sola linea recta, contra lo que hemos supuesto; por consiguiente dos lineas rectas no se pueden cortar sino en solo un punto.

Se-

Sería un dislate la consequencia que acabamos de inferir, si no se considerasen las lineas sin latitud; porque si admitiésemos alguna latitud en las lineas, es constante que tendria alguna extension el punto donde se cortan las dos lineas, y podria por lo mismo ser dividido en otros dos puntos que serían comunes á ambas lineas. Fig.

339. Sacamos tambien de la misma proposicion (337) *que si dos puntos como* C y D *de una recta están á igual distancia de otros dos puntos* A *y* B, *cada punto de la linea* CD *estará á igual distancia de los mismos puntos* A *y* B. Asi, *E* está tan distante de *A* como de *B*; lo propio se dirá de otro punto qualquiera de la linea *CD*. 5.

340. Las lineas rectas se trazan en el papel pasando por el canto de una regla bien recorrida una pluma, ó un lapiz, que deja por donde pasa un rastro de tinta, ó de lapiz. Para trazar lineas rectas en el terreno se plantan de trecho á trecho unos piquetes en la direccion de un mismo rayo visual; y de piquete á piquete, ó bien se pone una cuerda, ó bien se hace un surco, y así se forma una linea recta continua.

341. Las lineas se miden con otras lineas; pero en general *la medida comun de las lineas es la linea recta.* Medir una linea recta ó curva, ó una distancia qualquiera es buscar quantas veces cabe en dicha linea ó distancia una linea recta conocida y determinada que se toma por unidad. Esta unidad es de todo punto arbitraria, por lo que es infinita la variedad de medidas de distancias; de las quales daremos á conocer algunas mas adelante.

342. Las lineas que se miden en el terreno son por lo comun demasiado largas para poderlas trasladar al papel de su tamaño natural. Hay, pues, que reducirlas, representándolas con otras lineas menores, para cuyo fin

Fig. 6. fin sirven las *escalas de proporcion*, cuya construccion es como sigue. Se toma en una linea *AB* trazada en el papel al pie del dibujo que representa, una porcion *AC* á arbitrio para representar la unidad, ó un multiplo de la unidad que sirvió para medir en el terreno, esto es, para representar una ó muchas varas, si se midió la distancia á varas. Esta misma porcion *AC* que se repite en la misma linea *AB* el número de veces que parezca suficiente, ha de ser de tal magnitud que las distancias que por esta escala se arreglen, puedan caber en la hoja de papel donde se hace el dibujo. Por lo comun se repite la medida que se ha escogido por unidad diez veces, haciendo una señal en cada division, y desde allí adelante se repiten de diez en diez las unidades, señalando con números todas las divisiones por su orden conforme demuestra la figura. Si la unidad fuese bastante grande se puede dividir la primera en sus partes aliquotas, y estas en otras; pongo por egemplo, si la escala fuese de varas, se dividirá la primera vara en los quatro palmos que tiene, cada palmo en doce dedos, &c.

Para dos usos sirve esta escala. 1.° *Para tomar en ella un número determinado de partes*, pongo por caso 37. Se pondrá la una punta del compás en el número 30, y la otra sobre el número 7, y esta abertura cogerá 37 partes. 2.° *Para saber de quántas partes consta una linea determinada* DE. Se tomará con un compás la linea *DE*, y con esta misma abertura se pondrá una punta en el número 1. de la escala, y se observará sobre qué número cae la otra punta; si cayese, por egemplo, sobre el número 50, será señal de que la linea dada tiene 50 partes.

343. Entre todas las lineas curvas solo consideraré-mos en estos principios de Geometría la *circunferencia del círculo*. Llámase con este nombre la linea cur-

7. va *ABDFA* que traza el estremo *A* de la linea *CA*, moviéndose al rededor del punto fijo *C*, que se llama el *centro*.

344. A todo el espacio ó superficie que abraza la circunferencia le llamamos *círculo*, y á las lineas como *CA*, que desde el centro van á la circunferencia, las llamamos *radios* del círculo. Del modo con que concebimos que se forma el círculo, resulta: Fig. 7.

345. 1.° *Que todos los radios de un círculo son iguales entre sí.*

Porque no son otra cosa que la linea *CA*, cuyo estremo *A* traza la circunferencia, y que por consiguiente *todos los puntos de la circunferencia distan igualmente del centro.*

346. 2.° Que para *trazar una circunferencia* ABDFA *desde un centro* C, no hay sino abrir un compás de manera que cojan sus dos puntas la distancia *CA*. Plantaráse la una en el punto *C*, y se la hará dar la vuelta á la otra, no apartándose la primera del punto *C*; la linea curva que la segunda punta trazáre será la circunferencia que se pide. 7.

347. 3.° *Que las circunferencias cuyo centro está en un mismo punto, no pueden encontrarse sin confundirse en una sola circunferencia.*

Porque ó son iguales sus radios, ó son desiguales. 1.° si fueren iguales los radios de ambas circunferencias todos los puntos de cada una estarán á igual distancia del centro comun *C*; luego se confundirán en una sola las dos circunferencias. 2.° Si fueren desiguales los radios de ambas circunferencias, la que tuviere el radio menor *Ca* estará toda ella dentro de la que tuviere el radio mayor *CA*; luego no se encontrarán las dos circunferencias. 8.

348. 4.° *Que no tienen un mismo centro las circunferencias que se encuentran.*

Porque si tuvieran un mismo centro, no se encontrarian, en virtud de lo que acabamos de probar.

5.°

Fig. 349. 5.° *Que todos los diámetros de un círculo son tambien iguales entre sí.*

Porque llamamos *diámetro* una recta que pasando por el centro del círculo remata por ambos estremos en la circunferencia como la linea *BF*; luego se com-
7. pone un diámetro de dos radios; luego son iguales entre sí todos los diámetros.

9. 350. Las porciones *BA*, *AF*, *FD* &c. de la circunferencia se llaman *arcos*.

351. Una recta como *AF* tirada desde el un estremo *A* de un arco al otro estremo *F*, se llama *cuerda* ó *subtensa* de dicho arco.

Como una cuerda tiene un arco á cada uno de sus lados, por cuerda de un arco se entiende comunmente del arco menor.

352. Es evidente 1.° *que cuerdas iguales de un mismo círculo, ó de círculos iguales subtenden arcos iguales*; y recíprocamente, *arcos iguales de un mismo círculo, ó de círculos iguales tienen cuerdas iguales.*

9. Porque si la cuerda *DG* es igual á la cuerda *DF*, é imaginamos que se dobla la figura por la linea *DC*, para que *DG* cayga sobre *DF*, es patente que siendo el punto *D* comun, y cayendo el punto *G* de la linea *DG* sobre el punto *F* de la linea ó cuerda *DF*, todos los puntos del arco *DG* han de caer sobre el arco *DF*, pues si alguno de dichos puntos no cayese sobre el arco *DF*, no estarian todos los puntos del arco *DF* á la misma distancia del centro *C* que todos los puntos del arco *DG*, y por consiguiente todos los puntos de la circunferencia á que pertenecen estos dos arcos no estarian á la misma distancia del centro, cuya consecuencia repugna con lo demostrado (345).

10. 353. 2.° *Si en un mismo círculo* ADBCA, *ó en círculos iguales un arco* AFC *fuere mayor que otro* AGD, *la cuerda* AC *del primero será tambien mayor que la cuerda* AD *del segundo.*

Ima-

Imaginémos el círculo *ADBCA* doblado por el Fig.
diámetro *AB*; por estar todos los puntos de ambos arcos á igual distancia del centro del círculo cuyos son, se aplicará todo el arco *AGD* sobre el arco *AFC*, y 11.
el punto *A* será comun á los dos arcos, y á las dos cuerdas *AD*, *AC*, y el punto *C* estremo del arco mayor estará á mayor distancia del punto *A*, que el punto *D* estremo del arco menor, por coger, segun suponemos, el primer arco mayor porcion de la circunferencia que el otro. Pero el punto *C* es tambien estremo de la cuerda del arco mayor, y *D* es el otro estremo de la cuerda del arco menor; luego mayor distancia hay entre los dos estremos de la cuerda del arco mayor, que entre los dos estremos de la cuerda del arco menor. Luego &c.

354. 3.° *El diámetro es la mas larga de todas las cuerdas.* 12.

Porque el diámetro *BD* es igual á los dos radios *AC*, *CF* juntos (349); pero estos dos radios juntos son mayores que la cuerda *AF* (336) que es una linea recta que desde el punto *A* vá al punto *F*, y como probaríamos lo mismo por qualquiera punto del radio *CE* que pasáre la cuerda *AF*, queda probado que es el diámetro la mayor de todas las cuerdas.

355. Llámanse *círculos concéntricos* los que tienen sus centros en un mismo punto. Tales son los dos círculos *ABDA*, *abda*. Al espacio que hay entre las dos 8.
circunferencias se le llama *corona* ó *ánulo*.

356. Han convenido los Matemáticos en dividir toda circunferencia de círculo, grande ó pequeña, en 360 partes iguales que llaman *grados*; dividen el grado en 60 partes iguales que llaman *minutos*; cada minuto en 60 partes iguales que llaman segundos; cada segundo en otras 60 partes iguales que llaman *terceros*, y así prosiguiendo.

Para señalar los grados se usa esta señal. . . . o,

pa-

Fig. para los minutos esta. . . . . '
para los segundos . . . . ''
para los terceros . . . . '''
de modo que para espresar 5 grados, 19 minutos, 28 segundos, y 49 terceros se pone 5° 19′ 28″ 49‴.

Por grado no se ha de entender una cantidad absoluta, sino solo una de las 360 partes de qualquiera circunferencia grande ó pequeña. Así, una circunferencia por pequeña que sea, tiene tantos grados como otra mayor; pero los tiene menores á proporcion, del mismo modo que una cantidad sea la que fuere, grande ó pequeña, tiene dos mitades que tienen con ella la misma razon que las mitades de otra cantidad mayor con dicha cantidad.

De los Angulos, y de su medida.

357. Llamamos *ángulo* la abertura que forman una con otra dos lineas que concurren en un punto que se llama *punta* ó *vértice* del ángulo: tal es la abertura
13. *BAC* que forman las dos lineas *AB*, *AC* que se llaman los *lados* de dicho ángulo *BAC*. El ángulo que acabamos de definir se llama *ángulo plano*.

El ángulo se llama *rectilineo* quando sus lados son dos lineas rectas; *curvilineo*, quando son dos lineas curvas; y *mixtilineo*, quando el un lado es una linea recta, y el otro una linea curva. Aquí considerarémos los ángulos rectilineos no mas.

Quando tengamos que nombrar algun ángulo usarémos de tres letras, una que estará en el vértice del ángulo, y dos que estarán en los lados. Al nombrar estas tres letras, nombrarémos siempre en segundo lugar la que estuviere en el vértice, para precaver así las equivocaciones que de no hacerlo podrian resultar, particularmente quando un mismo punto es vértice de muchos ángulos. En virtud de esto, para nombrar el án-

gulo que forman las dos lineas *AB*, *AC*, dirémos el ángulo *BAC*, ó el ángulo *CAB*. Fig.
13.

358. Para enterarse bien de lo que es un ángulo, conviene imaginar que la linea *AB* estaba primero sobre la *AC*, y se la ha hecho mover al rededor del punto *A* (del mismo modo que se mueve una pierna de compás al rededor de su charnela) para que llegue á la posicion *AB* en que está actualmente. La cantidad que *AB* ha andado en este movimiento, apartándose de *AC*, es lo que llamamos *ángulo*.

359. De aquí se infiere 1.° *que la cantidad de un ángulo no pende de la longitud de sus lados, sí solo de la abertura, inclinacion ó distancia que hay entre dichos lados.* 13.

Así, el ángulo *BAC* es igual al ángulo *EAF*, ó por mejor decir es el mismo ángulo, aunque los dos lados *BA* y *CA* que le forman, sean mas cortos que los lados *EA* y *FA*.

360. 2.° *Que si dos ángulos* BAC, bac *son iguales, y se pone el vértice del uno encima del vértice del otro, de modo que el lado* ab *del uno cayga encima del lado* AB *del otro; el lado* ac *del primero caerá por precision encima del lado* AC *del segundo.*

Porque si cayera *ac* fuera ó dentro del ángulo *BAC*, sería el ángulo *bac* mayor ó menor que el ángulo *BAC*, y no serian iguales los dos ángulos, conforme se supone.

361. Se colige igualmente de la generacion del ángulo que *la medida de un ángulo* BAC *cuyo vértice está en el centro del círculo, es el arco* BC *que abrazan sus lados.* 13.

Porque es evidente que crece ó mengua dicho arco á medida que crece ó mengua el intérvalo que cogen los dos lados. Pero acabamos de ver (359) que de solo este intervalo pende la cantidad del ángulo; queda, pues, probado que un ángulo cuyo vértice está en el centro del

Fig. del círculo, se mide con el arco que abrazan sus lados.

13. 362. Es indiferente trazar el arco que ha de medir un ángulo á poca ó mucha distancia del vértice. Porque sea grande ò pequeña la circunferencia cuyo centro está en el vértice del ángulo, el arco que comprehenden los dos lados del ángulo, es de igual valor ó igual número de grados respectivo; quiero decir, que dicho arco cogerá un mismo número de grados de su círculo. Por egemplo, el arco *ab* tiene tantos grados como el arco *AB*, porque si el uno fuere la octava parte de su circunferencia, el otro será tambien la octava parte de la circunferencia cuyo arco es.

363. Estos arcos de diferentes círculos, que cogen igual número de grados, y son respectivamente una misma parte de la circunferencia á que pertenecen, se llaman arcos *proporcionales* ó *semejantes*.

13. 364. Luego *para dividir un ángulo en muchas partes iguales, basta dividir el arco que le mide, en el número de partes iguales que se piden, y tirar desde los puntos de division lineas al vértice de dicho ángulo.*

365. Y para *formar un ángulo igual á otro ángulo*; por egemplo, para formar en el punto *a* de la linea *ac* un ángulo igual al ángulo *BAC*, es menester trazar con una abertura de compás arbitraria, y desde el punto *a* como centro un arco indefinito *cb*; aplicando despues la punta del compás en el vértice *A* del ángulo dado *BAC*, se trazará con la misma abertura el arco *BC* comprehendido entre los dos lados de dicho angulo; tomando con el compás el intérvalo que hay desde *C* á *B*, y llevándole desde *c* á *b*, quedará determinado el punto *b*, por el qual, y por el punto *a*, se tirará *ab* que formará con *ac* un angulo *bac* igual al ángulo dado *BAC*.

Porque el arco *bc* mide el ángulo *bac* (361), y el arco *BC* mide al ángulo *BAC*; pero estos dos arcos son iguales, porque pertenecen á círculos iguales, y tie-

tienen cuerdas iguales (352), pues se ha tomado la distancia *bc* igual á la *BC*; luego &c. Fig.

366. Si atendemos al número de grados que puede coger un ángulo, hallarémos que puede ser de tres especies; es á saber *recto*, *obtuso*, y *agudo*.

El *ángulo recto* es el que tiene por medida un arco de 90 grados ó la quarta parte de la circunferencia. Los ángulos *DAE*, *EAB* son rectos. 14.

367. Llámase *ángulo obtuso* el que tiene por medida un arco de mas de 90 grados, como el ángulo *FAB*.

368. El *ángulo agudo* es el que tiene por medida un arco que no llega á 90 grados; los ángulos *DAF*, *FAE* son agudos.

369. De todo esto es facil inferir 1.° que *todos los ángulos rectos son iguales entre sí*, pues todos cogen 90 grados. 2.° que *no son iguales entre sí todos los ángulos obtusos*, pues un ángulo obtuso puede pasar de 90° mas ó menos que otro. 3.° que *tampoco son iguales entre sí todos los ángulos agudos*, pues un ángulo agudo puede acercarse mas ó menos que otro al ángulo recto.

370. Llámase *complemento* de un ángulo lo que se le debe añadir ó quitar para que valga 90 grados. El ángulo *EAF* es complemento del ángulo *DAF*, y del ángulo *FAB*, pues *DAF* + *EAF* valen el ángulo recto *DAE*; y *FAB* — *EAF* tambien valen el ángulo recto *BAE*. 14.

371. El *suplemento* de un ángulo es el ángulo que se le debe añadir, para que la suma de los dos forme el valor de dos ángulos rectos ó 180°: *DAF* es el suplemento de *FAB*.

372. Como el valor de los ángulos no se distingue del valor de los arcos que los miden, quanto hemos dicho del complemento y suplemento, respecto de aquellos, se aplica igualmente á estos.

373. De la naturaleza del complemento y suplemento se infiere que *los ángulos y arcos iguales tienen* com-

N2

Fig. *complementos y suplementos iguales*; y recíprocamente que *son iguales los ángulos ó los arcos quando tienen complementos ó suplementos iguales.*

13. 374. El método declarado (361) para valuar un ángulo nos autoriza para inferir 1.° que *una linea recta* AB *que cae sobre otra* CD, *forma con esta dos ángulos* BAC, BAD *que valen juntos* 180°.

Porque podemos considerar el punto *A* como centro de un círculo cuyo diámetro es *CD*; y pues los ángulos *BAC* y *BAD* tienen por medida los arcos *BC* y *BD* que componen la semicircunferencia, valdrán por consiguiente los dos juntos 180 grados.

15. 375. 2.° *Que si desde un mismo punto* A *se tiran quantas rectas* AC, AE, AF, AG &c. *se quisieren, todos los ángulos juntos* BAC, CAD, DAE, EAF, FAG, GAB *que comprehenden, no pasarán de* 360°, *ni valdrán menos tampoco.*

Porque no pueden coger mas ni menos que toda la circunferencia.

376. De lo dicho (374) se infiere, que *todo diámetro* DB, por egemplo, *divide la circunferencia en dos partes iguales.*

Porque ya que los dos ángulos *DAF* y *FAB* cogen juntos un arco de 180°, cogerán la mitad de toda la circunferencia que consta (356) de 360°.

16. 377. *Si dos lineas rectas* AC, AD *tiradas desde el estremo* A *de otra linea forman con esta dos ángulos* BAC, BAD *cuya suma valga dos ángulos rectos, dichas dos lineas serán una sola y misma linea.*

Tírense desde *A* á dos puntos *F* y *E*, uno encima, y otro debajo de la linea *AC*, las rectas *AF* y *AE*. Si las dos lineas *AC*, *AD* no formasen una sola y misma linea *DAC*, la linea *AD* prolongada pasaría por encima, ó por debajo de la linea *AC*.

1.° Si pasase por encima, y fuese, por egemplo, la linea *DAF*, la suma de los ángulos *BAD* y *BAF* valdría dos ángulos rectos (374). Pero por lo supuesto, la suma de los dos ángulos *BAD*, *BAC* es tambien igual á la de dos rectos. Luego la suma de los ángulos *BAD* y *BAF* sería igual á la de los ángulos *BAD* y *BAC*: bien se vé que esto no puede ser. Fig. 16.

2.° Si pasase por debajo, y fuese, por egemplo, la linea *DAE*, la suma de los ángulos *BAD*, *BAE* sería igual á la de dos ángulos rectos (374). Pero por lo supuesto, los ángulos *BAD* y *BAC* juntos valen tambien dos ángulos rectos; luego la suma de los dos ángulos *BAD* y *BAE* sería igual á la de los ángulos *BAD* y *BAC*; y como tambien es evidente que esto no puede ser, resulta que la linea *DA* prolongada es la misma linea *AC*, y por consiguiente las dos lineas *AD* y *AC* son una misma linea.

378. Una vez que son iguales los ángulos quando lo son sus suplementos (373), se sigue que *los ángulos* BAC, EAD *opuestos al vértice, y formados por dos rectas* BD *y* EC *que se cruzan, son iguales*. Porque *BAC* tiene por suplemento *CAD*, y *EAD* tiene tambien el mismo suplemento; luego &c. 17.

De las Perpendiculares, Obliquas y Paralelas.

379. Dícese de una linea recta que es *perpendicular* á otra linea recta, quando cae sobre esta sin inclinarse ni á un lado, ni á otro. *AC* es perpendicular á *BD*. 18.

380. De aquí se infiere 1.° que *quando una linea es perpendicular á otra, forma con ella dos ángulos iguales y rectos* (374 y 366).

381. 2.° Que *si una linea que encuentra á otra, forma con ella ángulos rectos, y por consiguiente iguales* (369), *es indispensablemente perpendicular á esta linea.*

Porque si forma ángulos iguales, no se inclina ni ácia un lado ni ácia otro; luego será perpendicular (379).

Fig. 18. 382. 3.° Que *quando una linea* AE *es perpendicular á otra linea* BD, *esta es tambien perpendicular á la linea* AE.

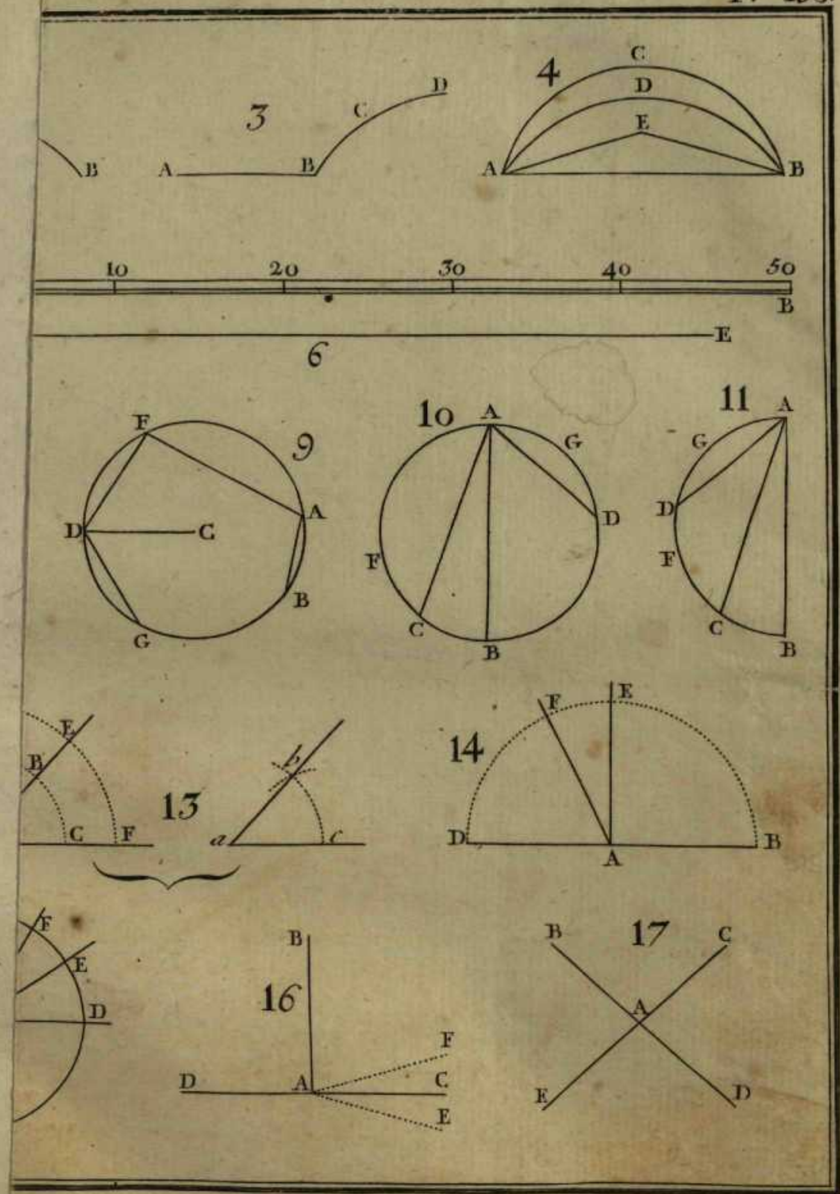
Porque siendo *AE* perpendicular á *BD*, los ángulos *ACB*, *ACD* serán iguales (380); pero *ACD* es igual á *BCE* (378); luego *ACB* es igual á *BCE*; luego la linea *BC* no se inclina ni ácia *AC*, ni ácia *EC*; luego es perpendicular á *AE*.

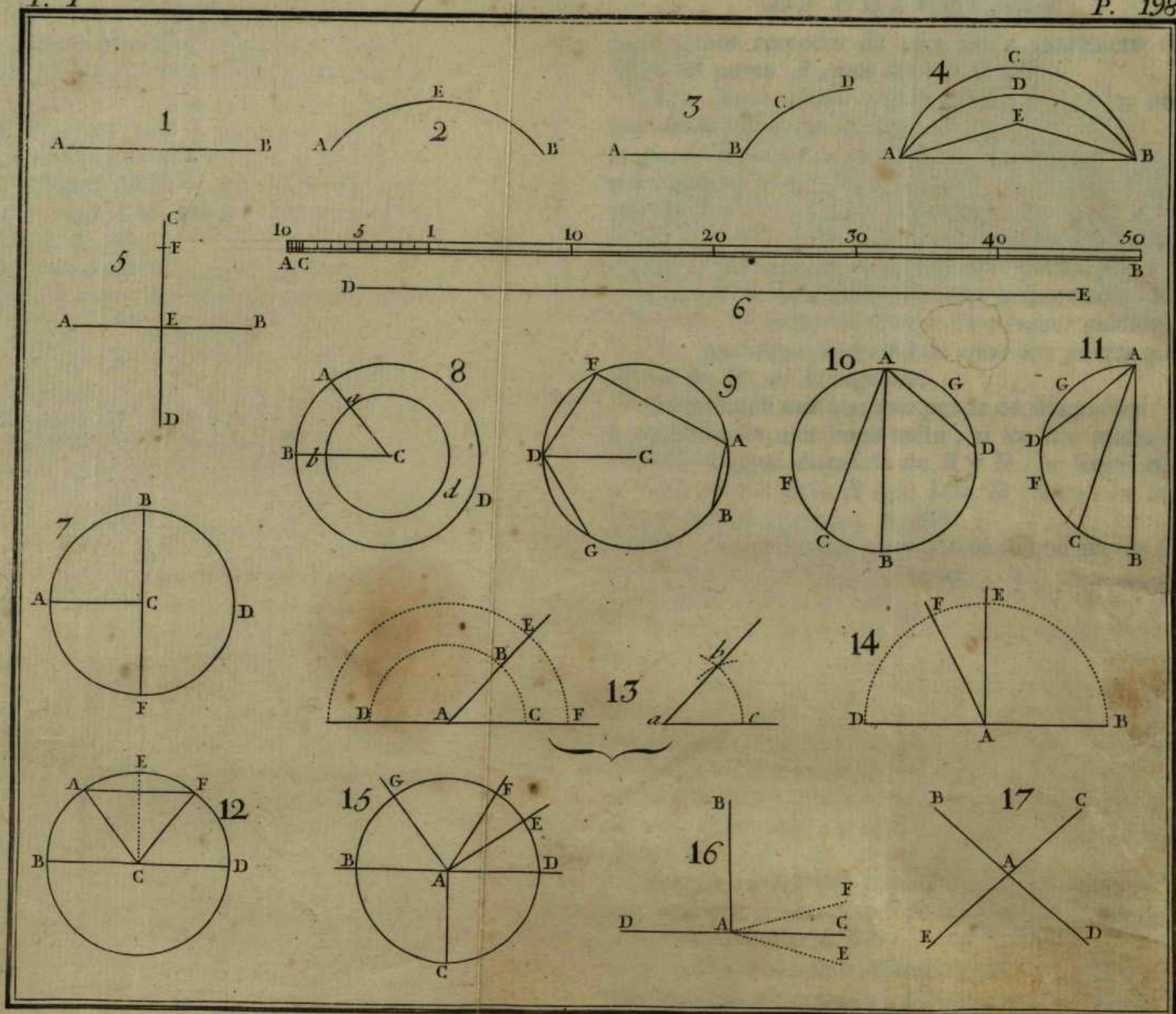
18. 383. 4.° Que *si un punto* A, por egemplo, *de una linea* AC *perpendicular á* BD *está igualmente distante de los puntos* B *y* D, *todos los demás puntos de la* AC *están tambien igualmente distantes de* B *y* D.

Porque si el punto *F*, ú otro qualquiera de la perpendicular no estuviera á igual distancia de *B* y *D*, es evidente que *AC* se inclinaría ácia algun lado, y por consiguiente no sería perpendicular á *BD*, contra lo que suponemos. Lo que probamos de *A*, se prueba igualmente de todos los puntos de la perpendicular.

18. 384. 5.° Que *desde un punto* A *fuera de una linea* BD *no se puede tirar mas de una perpendicular á dicha linea.*

Para probarlo, tomarémos en la *BD* dos puntos igualmente distantes de *A*. Ya que la linea *AC* es perpendicular á *DB*, y su punto *A* está á igual distancia de *D* y *B*, todos los demás puntos de esta perpendicular han de estar á igual distancia de *D* que de *B* (383); luego está el punto *C* igualmente distante de *D* y *B*. Pero de esto se infiere que ninguna otra linea qual sería *AG*, tirada desde el punto *A*, puede ser perpendicular á *BD*; porque si así fuese, por estar el punto *A* de la *AG* á igual distancia de *B* que de *D*, todos sus demás puntos lo estarian tambien (383). Pero el punto *G* no está á igual distancia de *B* que de *D*, porque estándolo el punto *C*, el punto *G* que está entre *B* y *C* estará mas cerca de *B* que de *D*. Luego la linea *AG* no es perpendicular á *BD*. Lo propio pro-




1
2
3
4
5
10 5 1 10 20 30 40 50
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17

probarémos respecto de otra linea qualquiera tirada desde el punto A, que no sea la AC. Fig. 18.

385. Este mismo razonamiento sirve para probar que *desde un punto* C *sobre la misma linea* BD, *no se la puede levantar mas de una perpendicular.* No hay mas diferencia que la de tomar en la linea BD dos puntos B y D á iguales distancias del punto C, del mismo modo que en la proposicion antecedente tomamos B y D á iguales distancias del punto A.

386. *Una linea recta* AC *será perpendicular á otra recta* BD, *si tuviere la primera dos puntos qualesquiera* A, C, *igualmente distantes de otros dos puntos qualesquiera* B, D, *de la segunda.* 18.

Porque una vez que solo pende de dos puntos (337) la posicion de una linea recta, si los dos puntos A y C están á igual distancia de B y D, la linea AC no se inclina mas ácia B que ácia D; luego la AC es perpendicular (379) á la BD.

387. Ya será facil en virtud de lo que acerca de las perpendiculares dejamos sentado, 1.° *tirar desde un punto dado* C *en una recta*, ó 2.° *desde un punto dado* A *fuera de una recta* BD, *una perpendicular á la misma recta.* 19. 20.

1.° Desde el punto C como centro, y con un intervalo qualquiera $CE = CF$, trácense dos arcos que corten la recta propuesta en E y F; desde los puntos E y F, con una abertura mayor de compás, trácense dos arcos que se corten en A; por los puntos A y C tírese AC, y esta linea será perpendicular á BD. 19.

Porque tendrá dos puntos A y C igualmente distantes de dos puntos E y F de la linea BD; luego (386) será perpendicular á BD.

2.° Desde el punto A como centro, y con una misma abertura de compás, trácense dos arcos que corten BD en los puntos E y F. Desde estos últimos pun- 20.

Fig. tos como centros, y con la misma ú otra abertura de
20. compás, trácense dos arcos que se corten en *C*; por los puntos *A* y *C* tírese la linea *AC*, esta será perpendicular á *BD*; porque tendrá dos puntos *A* y *C* cada uno á igual distancia de *E* que de *F* (386).

Si se quisiese *tirar la perpendicular al estremo* D *de la linea* BD, se prolongará esta linea, para practicar despues lo que acabamos de declarar.

21. 388. Tambien podremos *dividir una linea* AB *en dos partes iguales.*

Desde los puntos *A* y *B* como centros, y con una misma abertura de compás, trácense dos arcos que se corten en *D*. Desde los mismos puntos, y con una misma abertura de compás (que puede ser distinta, si se quiere, de la primera), trácense dos arcos que se corten en *E*; tírese *DE* que tendrá dos puntos *D* y *E*, y por consiguiente (339) todos los demás, igualmente distantes de *A* y *B*; luego estará el punto *C* á igual distancia de *A* que de *B*; luego dividirá *DE* la *AB* en dos partes iguales.

Como no hay duda en que la *DE* es (386) perpendicular á *AB*, puede tambien servir este método para tirar una perpendicular á una linea dada.

389. Dícese de una linea que es *oblicua*, respecto de otra quando se inclina ácia algun lado. *BD* es oblicua
22. para con *AC*. De donde inferirémos:

390. 1.° Que *una linea oblicua á otra, forma con esta dos ángulos desiguales que son suplemento el uno del otro* (371 y 374.).

391. 2.° Que *si una linea que encuentra otra, forma dos ángulos desiguales, será oblicua respecto de ella*; pues por razon de formar los dos ángulos desiguales se inclina mas ácia un lado que ácia otro.

392. *Si desde un mismo punto* C *se tiran á la linea*
23. AB *la perpendicular* CD, *y la oblicua* CF, *la perpendicular* CD *será mas corta que la oblicua* CF.

Pró-

Prolónguese *CD* hasta *H*, de suerte que sea *HD* Fig.
igual á *CD*, y tírese la oblicua *HF*. Esta oblicua *HF* 23.
será necesariamente igual á la otra oblicua *CF*; porque ya que la *CH* es perpendicular á la *AB*, esta *AB* será tambien perpendicular á la *CH* (382). Pero su punto *D* está á igual distancia de los dos puntos *C* y *H*, por ser *HD* igual á *CD*; por consiguiente otro punto qualquiera *F* de la perpendicular *AB* está (383) tan distante de *C* como de *H*; luego *HF* es igual á *CF*.

Sentado esto, la linea *CDH* es mas corta que la linea *CFH* (336); luego la mitad de *CDH* es mas corta que la mitad de *CFH*; pero la mitad de *CDH* es *CD*, y la mitad de *CFH* es *CF*; luego la perpendicular *CD* es mas corta que la oblicua *CF*.

393. De aquí se infiere lo que digimos (336) es á saber que *la perpendicular es la linea mas corta que desde un punto se la puede tirar á otra linea*, y que por lo mismo, *la linea perpendicular es la medida verdadera de la distancia que hubiere entre dos puntos.*

394. *Entre todas las oblicuas* CF, CG *y* CE *que* 23.
desde un punto C *se la pueden tirar á una linea* AB; 1.° *la oblicua* CG *mas distante de la perpendicular* CD *será la mas larga*; 2.° *las que se tiraren á distancias iguales de la perpendicular serán iguales entre sí*; *y recíprocamente.*

1.° Para probar que la oblicua *CG* es mas larga que la oblicua *CF*, prolónguese la perpendicular *CD* hasta el punto *H*, de modo que *HD* sea igual á *CD*, y desde el punto *H* tírense las lineas *HF* y *HG*; será fácil de probar como antes (392), que estas dos lineas son iguales á las oblicuas *CF* y *CG*; así *CF* es la mitad de *CFH*, y *CG* la mitad de *CGH*. Pero es evidente que *CGH* es mas larga que *CFH*, porque se aparta mas del camino mas corto *CDH* (336); luego la oblicua *CG* es tambien mas larga que la oblicua *CF*.

2.° Las oblicuas *CF* y *CE* igualmente distan-

tes

Fig. tes de la perpendicular son iguales entre sí; porque ti-
23. rando la *HE* es evidente que las dos lineas *CFH* y *CEH* son iguales pues se apartan igualmente de la linea recta *CDH*; por consiguiente sus mitades *CF* y *CE* son tambien iguales. La recíproca se prueba del mismo modo.

395. De donde resulta *que desde un mismo punto* C *no se la pueden tirar á una linea mas de dos lineas iguales*; porque no se pueden tirar mas de dos oblicuas igualmente distantes de la perpendicular.

396. Dos lineas rectas trazadas sobre un mismo plano son *paralelas* quando están en todos sus puntos á
24. igual distancia la una de la otra. Las lineas *AB*, *CD* son paralelas. De aquí se puede inferir:

397. 1.° Que *las paralelas aun quando se las prolongue infinitamente no se pueden encontrar*, pues han de estár por su naturaleza siempre á la misma distancia la una de la otra.

24. 398. 2.° Que *las lineas* EF, GH *tiradas desde la una paralela perpendicularmente á la otra son iguales*, pues estas perpendiculares miden la distancia que hay entre las dos paralelas (393), cuya distancia es siempre una misma (396).

399. 3.° Que *si dos lineas fueren paralelas, otra linea que fuere paralela á la una será tambien paralela á la otra.*

Porque la tercera linea no puede estár en todos sus puntos á igual distancia de la una de las dos paralelas, sin estár tambien en todos sus puntos á igual distancia de la otra paralela.

400. Sin embargo de lo que acabamos de decir de las lineas paralelas, suelen considerarlas algunas veces los Matemáticos como lineas que se encontrarían prolongadas al infinito. Porque aunque estén separadas por algun intervalo determinado y por consiguiente limitado dos lineas cuya longitud se supone infinita, dicho intervalo se puede considerar como ninguno respec-

pecto de la infinita longitud de dichas lineas. Por lo que *dos lineas que solo se encuentran prolongadas al infinito, y dos lineas paralelas son una misma cosa*; como tambien *podemos considerar recíprocamente dos lineas paralelas como dos lineas que se encontrarían prolongadas al infinito.* En el discurso de esta obra se nos proporcionarán ocasiones de manifestar quán util y exacto es este modo de considerar las paralelas. Fig.

401. *Dos lineas paralelas como* AB *y* CD *cortadas* 25.
por otra linea EF *que se llama* secante, *están igualmente inclinadas ácia un mismo punto* E *de la secante.*

Porque si las dos paralelas *AB* y *CD* no estuviesen igualmente inclinadas repecto de *EF* ácia el punto *E*, de modo que la paralela inferior, por egemplo, estuviese mas inclinada que la superior ácia el mismo punto, dichas dos lineas se irían arrimando la una á la otra, y por consiguiente no serían paralelas.

402. Toda secante forma con las paralelas varios angulos en que hemos de parar la consideracion. Unos están entre las paralelas, y se llaman *internos*, como 25.
los angulos *I*, *K*, *L*, *M*. Otros están fuera de las paralelas, y se llaman *esternos*; tales son los ángulos *G* y *N* en la parte de arriba, y *P* y *H* en la de abajo. Quando se comparan de dos en dos los ángulos, ya internos, ya esternos, se llaman *alternos* aquellos que están á distintos lados de la secante, uno á la derecha y otro á la izquierda, uno arriba y otro abajo: los ángulos *I* y *M*, *L* y *K* son *alternos internos*; los ángulos *N* y *P*, *G* y *H* son *alternos esternos.*

403. *Los dos ángulos que forman las paralelas á un* 25.
mismo lado de la secante, uno interior y otro esterior, como los ángulos M *y* N, *son iguales.*

Porque una vez que la cantidad de un ángulo pende de la inclinacion de las dos lineas que le forman (359), y las dos paralelas están igualmente inclinadas respecto de la secante *EF* (401), se sigue que los ángulos *M*

Fig. *M* y *N* que forman las paralelas con *EF*, son iguales.
25. Por lo mismo el ángulo esterior *H* y el ángulo interior *K*, que están debajo de las paralelas, á un mismo lado de la secante, son tambien iguales. Del mismo modo probaríamos que son tambien iguales entre sí los ángulos *G* y *L* del otro lado de la secante, y tambien los ángulos *P* é *I*. De aquí inferirémos que:

26. 404. 1.° *Los ángulos alternos internos* AGH, DHE *son iguales.*

Porque acabamos de probar (403) que *AGH* es igual á *CHF*; pero *CHF* es igual (378) á *DHE*; luego *AGH* es igual á *DHE*.

405. 2° *Los ángulos alternos esternos* BGE, CHF *son iguales.*

Porque *BGE* es igual á *AGH* (378); pero hemos visto (403) que *AGH* es igual á *CHF*; luego *BGE* es igual á *CHF*.

406. 3.° *Los ángulos* BGH, DHG *son suplemento el uno del otro*; porque *BGH* es suplemento de *BGE*, que es igual (403) á *DHG*.

407. 4.° *Los ángulos* BGE, DHF, *ó* AGE, CHF *son suplementos el uno del otro*; porque *DHF* tiene por suplemento á *DHG*, que es igual (403) á *BGE*.

408. Todas estas propiedades se verifican quando dos líneas paralelas son cortadas por otra linea; y recíprocamente *todas las veces que una línea recta cortáre otras dos lineas rectas, de modo que se verifique alguna de estas propiedades, se podrá inferir que las dos cortadas son paralelas*; esto se demuestra del mismo modo sin variar en nada.

409. De las propiedades que acabamos de demos-
27. trar podemos inferir 1.° que *si dos ángulos* ABC, DEF *vueltos ácia un mismo lado, tienen sus lados paralelos, son iguales.*

Porque si imaginamos el lado *DE* prolongado hasta encontrar *BC* en *G*, los ángulos *ABC*, *DGC* serán iguales (403), y por la misma razon el ángulo *DGC* será igual al ángulo *DEF*; luego *ABC* es igual á *DEF*.

410. 2.° Que *si la linea* GH *es perpendicular á las otras dos* AB, CD, *estas dos lineas son paralelas.* Fig. 24.

Porque una vez que *GH* es perpendicular á *AB*, y á *CD*, los ángulos alternos internos *GHD*, *HGE* por ser rectos serán iguales (369); luego las lineas *AB* y *CD* son paralelas (408).

411. 3.° Que *para tirar por un punto dado* H *una linea* CD *paralela á una linea* AB, es menester tirar á arbitrio por el punto *H* la linea indefinita *HGE* que corta *AB* en un punto qualquiera *G*; despues se tirará por el punto *H* la linea *HD*, que forme con *HE* (365) el ángulo *EHD* igual al ángulo *EGB* que esta forma con *AB*; la linea *HD* tirada por este método, será paralela á *AB* (408). 26.

412. 4.° Que *si dos lineas* CD, EF *fueren perpendiculares á otra linea* AB, *serán paralelas entre sí.* 28.

Porque los ángulos en *C* y en *E* serán rectos; luego será el ángulo *DCE* suplemento del ángulo *FEC*; luego serán dichas lineas paralelas entre sí (408).

413. 5.° Que *si* CD y EF *fueren paralelas, y una de ellas* CD *fuere perpendicular á* AB, *lo será tambien* EF.

Porque los ángulos *DCE*, *FEC* son suplemento uno de otro (406), pues suponemos *CD* paralela á *EF*; luego será el ángulo *FEC* recto, pues suponemos que *DCE* lo es; luego *EF* será tambien perpendicular á *AB* (381).

De las Lineas rectas consideradas en el círculo.

414. *Una linea* CP *tirada desde el centro de un círculo perpendicularmente á una cuerda* FM, *divide esta cuerda en dos partes iguales.* 29.

La linea *CP*, por ser tirada desde el centro, tiene un punto *C* igualmente distante de los estremos *F*, *M* de la cuerda *FM*, porque está el centro á igual distancia

Fig. cia de todos los puntos de la circunferencia (345). Fuera
29. de esto, por ser *CP* perpendicular á la cuerda, todos los demás puntos de dicha linea *CP* están (383) á igual distancia de los puntos *M*, *F*; luego el punto *P* está á igual distancia de *M* que de *F* y por consiguiente *MP*=*PF*.

415. Luego si se prolonga la perpendicular *CP* hasta *R*, este punto *R* que es comun á la linea *CR* y al arco *FRM*, estará (383) á igual distancia de *M* que de *F*, y por consiguiente *la linea* CR *perpendicular á la cuerda corta por el medio el arco FRM que subtende la cuerda.*

29. 416. Y recíprocamente, *si una linea* CP *que pasa por el centro divide por el medio una cuerda, será perpendicular á dicha cuerda.*

Porque una vez que *CP* divide la cuerda *FM* en dos partes iguales, el punto *P* está á igual distancia de *F* que de *M*; y porque *CP* pasa tambien por el centro, tiene otro punto *C* á igual distancia de *F* que de *M*; luego *CP* es (386) perpendicular á *FM*.

29. 417. *Si la linea* CP *es perpendicular á la cuerda* FM, *y la divide en dos partes iguales, pasa por el centro.*

Porque estará el punto *P* á igual distancia de *F* que de *M*, por dividir *CP* la *FM* en dos partes iguales; y por ser *CP* perpendicular á *FM*, todos los demas puntos de *CP* estarán á igual distancia de *F* que de *M* (383). Luego pasará dicha linea por el centro *C*, que es un punto igualmente distante de *F* que de *M* (345).

29. 418. *Si la linea* CR *que pasa por el centro divide la cuerda* FM *en dos partes iguales, dividirá tambien en dos partes iguales el arco* FRM.

Porque en virtud de lo demostrado (416) la linea *CR* es perpendicular á la cuerda *FM*, una vez que la divide en dos partes iguales, y pasa por el centro; y por consiguiente (415) divide tambien *CR* el arco *FRM* en dos partes iguales,

De

419. De aquí inferirémos 1.º que si tiramos *fm* paralela á *FM*, la linea *CR* será tambien (413) perpendicular á *fm*, y serán iguales los arcos *Rf*, *Rm* (415); luego si de los arcos iguales *FR*, *MR* restamos los arcos iguales *fR*, *mR*, resultará *Ff*=*Mm*; quiero decir que *los arcos de un mismo círculo comprehendidos entre paralelas son iguales.* Fig. 29.

420. 2.º Para *hacer que pase un círculo por tres puntos dados* A, B, D que no estén en una misma direccion, se tirarán las lineas *AB*, *BD* que han de ser cuerdas del círculo que se busca; se dividirán estas cuerdas en dos partes iguales cada una (388) con las perpendiculares *EC*, *FC*; el punto *C* donde se encuentran estas dos lineas será el centro del círculo, pues ambas han de pasar por el centro (417). 30.

421. Si estuviesen en una misma direccion los puntos *A*, *B*, *D*, las dos lineas *EC*, *FC* no se encontrarian; porque como serían perpendiculares á dicha recta, serían (412) paralelas. Luego *no puede una linea recta cortar un círculo en tres puntos.*

422. Para *hallar el centro de un círculo no conociendo mas que un arco de él*, se tirarán dos cuerdas en el arco propuesto, y se practicará lo propio que acabamos de declarar.

423. 3º Para *dividir un ángulo ó un arco en dos partes iguales, pongo por caso el ángulo* BAC. 31.

Desde su vértice como centro, y con un radio arbitrario, se describirá el arco *DE*; desde los puntos *D* y *E* como centros, y con un mismo radio se trazarán dos arcos *op*, *mn* que se corten en un punto *G*, por el qual, y por el punto *A* se tirará *AG*, que por ser perpendicular (386) á la cuerda *DE*, la dividirá (414) en dos partes iguales, y por consiguiente dividirá tambien (415) el arco *DIE*, y el ángulo *BAC*, pues los ángulos parciales *BAG*, *EAG* tienen por medida (361) los dos arcos *DI* y *EI*.

4.º

Fig. 32. 424. 4.º Despues de dividido el arco FRM en dos partes iguales con la linea CR, y tiradas las cuerdas RF, RM, se dividirán en dos partes iguales los arcos que dichas cuerdas subtenden, tirando por el centro C perpendiculares á dichas cuerdas, y así prosiguiendo; de suerte que se podrá dividir primero un arco qualquiera en dos partes iguales; despues en quatro, dividiendo cada una de las dos primeras en dos; despues en 8 &c. segun la progresion $\div 2:4:8:16$ &c.

33. 425. Llamamos *tangente* de un círculo una linea AD que toca la circunferencia sin cortarla aunque se la prolongue.

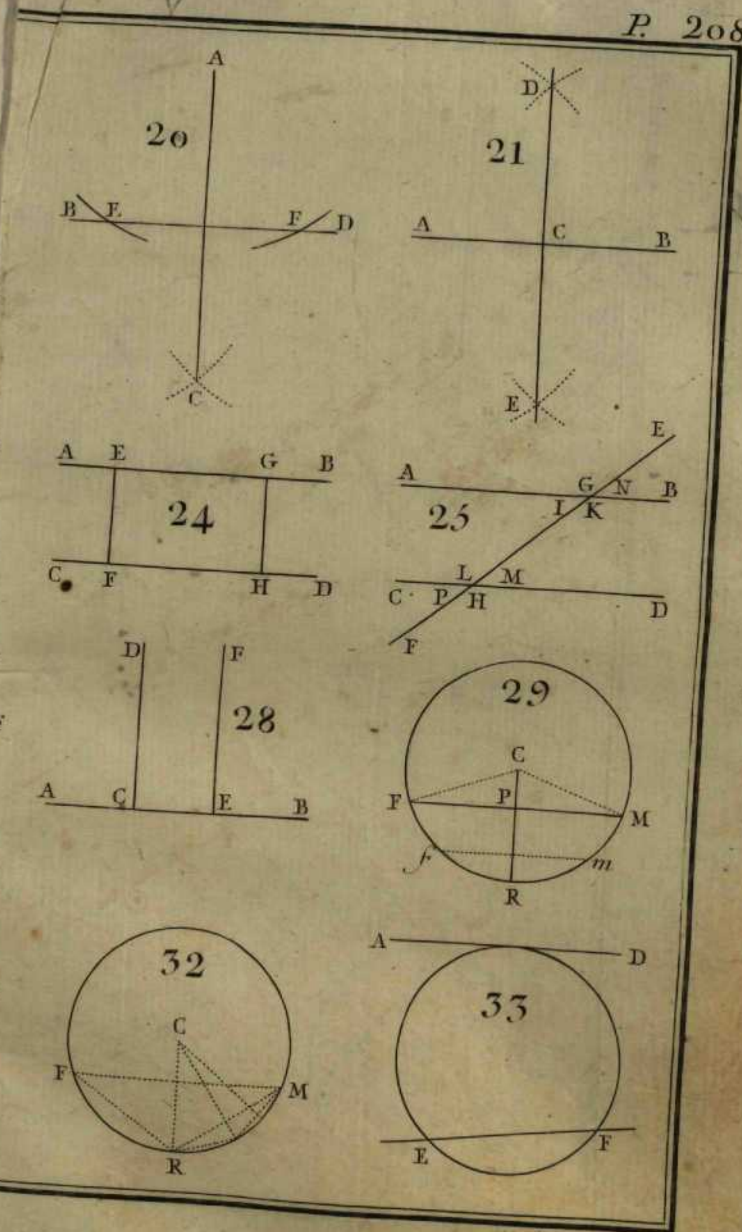
33. Llámase *secante* del círculo toda linea como EF que encuentra el círculo en dos puntos, y parte de ella está fuera del círculo.

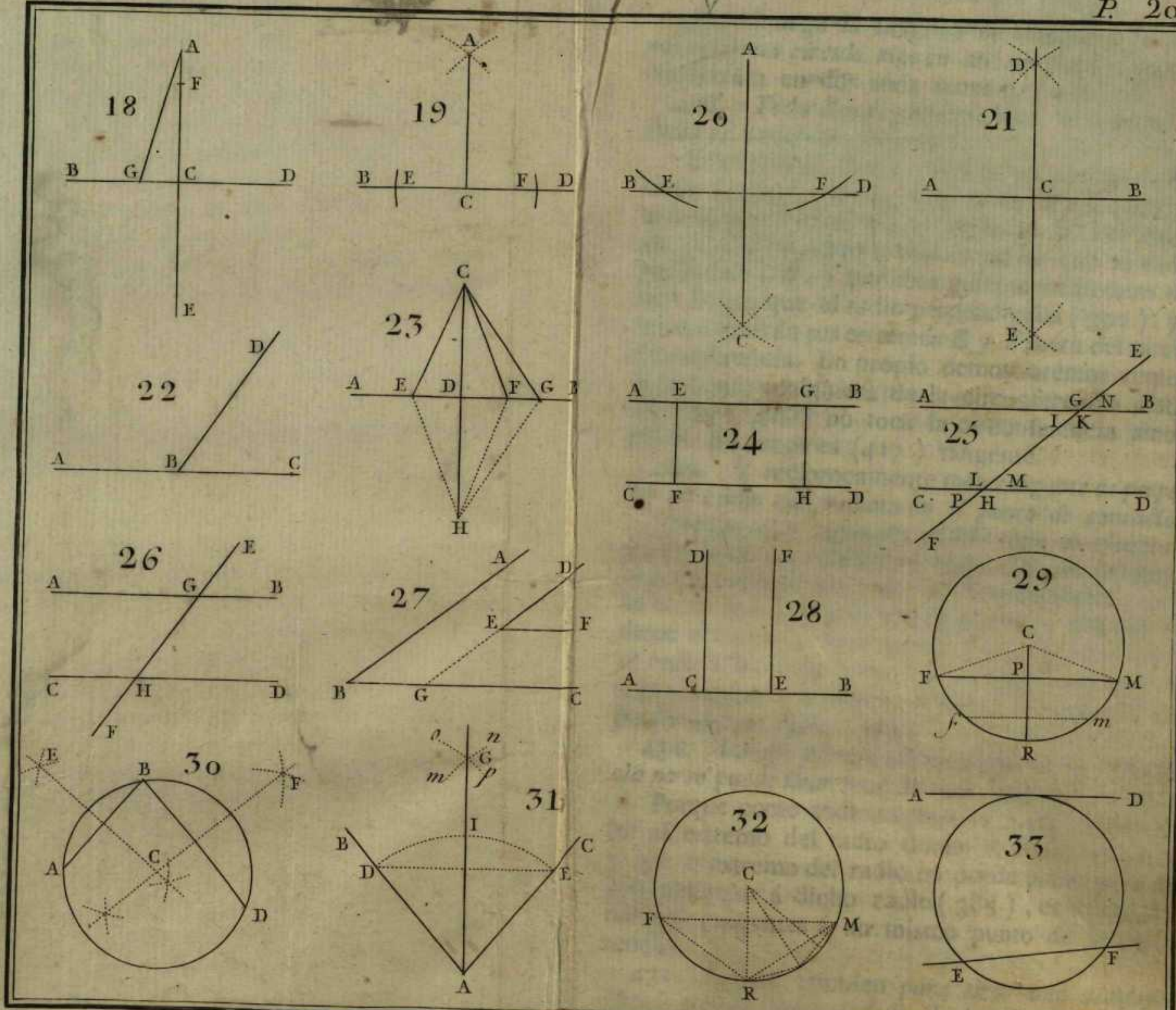
34. 426. *Toda recta* FG *que corta la circunferencia en dos puntos* A *y* B *es secante del círculo.*

Tírense á los puntos A y B donde la recta FG encuentra la circunferencia los dos radios CA, CB. Por ser iguales estos dos radios entre sí, no pueden ser ambos perpendiculares á la FG (384), y cada uno de ellos estará á igual distancia de la perpendicular tirada desde el centro C (394), y así la perpendicular CD tirada desde el centro caerá en medio de AB. Pero esta perpendicular CD es menor (392) que el radio CA ó CB, y son tambien mas cortas que estos radios todas las rectas tiradas desde el centro C á qualquiera de los puntos que están entre A y B (394); luego todos los puntos de la recta AB están dentro del círculo. Como son mas largas las oblicuas tiradas desde un mismo punto C á la recta FG, á proporcion de lo mas distantes que están de la perpendicular CD (394), resulta que si están en la circunferencia los puntos A y B, estarán fuera de ella los puntos de la recta FG que estén entre A y F, ó entre B y G; luego la recta FG será secante del círculo (425).

Lue-

P. 208.




18
A F B G C D E
19
A B E C F D
20
A B E F D C
21
D A C B E
22
D A B C
23
C A E D F G B H
24
A E G B C F H D
25
E A G N B I K L M C P H D F
26
E A G B C H D F
27
A D E F B G C
28
D F A C E B
29
C F P M f m R
30
E B F A C D
31
o n G m p I C B D E A
32
C F M R
33
A D E F

427. Luego *la tangente no encuentra la circunferencia de un círculo sino en solo un punto*: porque si le encontrára en dos sería secante. (426). Fig.

428. *Toda linea perpendicular al estremo de un radio es tangente del círculo.*

Es constante que si tiramos las dos lineas *CE*, *CF*, serán (384) oblicuas á la linea *ABD*, que suponemos perpendicular en el estremo *B* del radio *CB*, 35. por ser tiradas desde el mismo punto que el radio perpendicular *CB*, y por consiguiente serán estas oblicuas mas largas que el radio perpendicular (392), y por lo mismo tendrán sus estremos *E* y *F* fuera del círculo y la circunferencia. Lo propio demostrarémos respecto de otro punto qualquiera de la circunferencia distinto de *B*; luego *ABD* no toca la circunferencia sino en el punto *B*; luego es (427) tangente.

429. Y recíprocamente *toda tangente es perpendicular al radio que remata en el punto de contacto.*

Porque si la tangente *ABD* toca el círculo en el punto *B* donde remata el radio *CB*, es evidente que 35. pues la tangente no corta la circunferencia, no entra en el círculo, y por consiguiente es imposible tirar desde el centro á la tangente una linea mas corta que el radio *CB*; luego este radio es perpendicular (393) á la tangente, y recíprocamente la tangente es perpendicular al radio (382).

430. Luego *por un mismo punto de la circunferencia no se puede tirar mas de una tangente.*

Porque como toda tangente es (429) perpendicular al estremo del radio tirado al punto de contacto, y por el estremo del radio no puede pasar mas de una perpendicular á dicho radio (385), es imposible tirar dos tangentes á un mismo punto de la circunferencia.

431. Luego tambien *para tirar una tangente al círculo por un punto dado* B, basta tirar á dicho punto 35.

un

Fig. un radio CB, en cuyo estremo B se levantará una perpendicular (387) que será la tangente (428).

36. 432. *Si desde un punto* A *que no sea el centro de*
37. *un círculo, se tiran á la parte de la circunferencia que mas dista de dicho punto, varias rectas* AB, AD, AE; 1.° *la recta* AB *que pasa por el centro es la mas larga.*

2.° *De las dos rectas* AD, AE *que no pasan por el centro, la que tiene su estremo* D *mas inmediato al punto* B *de la que pasa por el centro, es la mas larga.*

Tírense los radios CD, CE á los estremos de las rectas AD, AE que no pasan por el centro.

Tendrémos 1.° CB igual á CD (345); añadiendo á cada una de estas lineas la parte AC, tendrémos la linea $AB = AC + CD$; pero como (336) las dos lineas $AC + CD$ juntas son mayores que la linea AD; AB será tambien mayor que AD. Del mismo modo probaríamos que AB es mayor que AE, esto es, que la recta AB que pasa por el centro es mas larga que otra qualquiera linea AD ó AE tirada desde el punto A á la circunferencia.

2.° Las lineas $CO + OD$ juntas son mayores que la linea CD (336); pero $CE = CD$ (345); luego $CO + OD > CE$. Si de la CE quitamos OC, y la quitamos tambien de la suma $CO + OD$, la recta OD será mayor que la recta OE. Añadiendo á cada una de estas cantidades la linea AO, será $AO + OD = AD > AO + OE$. Pero $AO + OE > AE$; luego con mas razon será $AD > AE$. Luego &c.

36. 433. *Si desde el punto A que no sea el centro de*
37. *un círculo, se tiran á la parte de la circunferencia que está mas cerca de dicho punto, varias rectas* AM, AN *&c. la linea* AM, *que prolongada pasaría por el centro* C, *es la mas corta.*

Probarémos que es la recta AM la mas corta si probamos que otra recta qualquiera AN, tirada desde el centro á la circunferencia, cuya prolongacion no pase

por

por el centro, es mas larga que AM; á cuyo fin tírese el radio CN. Fig.

Si está el punto A dentro del círculo, las lineas NA, 36.
y AC juntas serán mas largas que la linea NC; pero NC es igual á MC; luego $NA + AC > MC$; si de una y otra cantidad se restare la misma linea AC, la resta NA será mayor que la resta MA.

Si estuviese el punto A fuera del círculo, será AN 37.
$+ NC > AC$; restando de una parte el radio NC, y de otra el radio MC, será la resta AN mayor que la resta AM.

434. Luego 1.° *Desde un punto* A *que no es el cen-* 36.
tro de un círculo no se pueden tirar á la circunferencia 37.
tres lineas iguales.

Porque no se puede decir que entre estas tres lineas iguales sea la una la que pasa por el centro, pues acabamos de demostrar que es mayor, ó menor que qualquiera de las otras. Tampoco se puede suponer que de estas tres lineas iguales, haya dos á un lado, y otra á otro lado, pues las que están á un mismo lado son forzosamente desiguales (432), á no ser que se confundan una con otra.

435. 2.° *Si las circunferencias de dos círculos* X *y* Z
se encuentran en dos puntos D *y* E *se cortan por precision.* 38.
Porque como los radios CD, CE del círculo X son iguales, están á igual distancia (394. 2.°) del estremo B de la linea CB, y son mas largos que la CB, y que todas las lineas tiradas al arco DBE (433); luego todo el arco DBE está dentro de la circunferencia del círculo X; luego las dos circunferencias se cortan por precision.

436. 3.° *Si dos circunferencias de círculo* X *y* Z *se tocan en un punto* B, *dentro ó fuera, los centros* C, G 39.
de estos dos círculos, y el punto de contacto B *estarán en una misma linea recta.*

Porque yá que la linea CB va desde el centro al punto de contacto B, no tiene que salir de la circunferencia del círculo X para encontrar la del círculo Z;

 lue-

Fig. luego es la mas corta; luego es perpendicular (393), y por lo mismo pasa (433) por el centro. Por consiguiente, quando dos circunferencias se tocan los centros y los puntos de contacto están en una misma linea recta.

De aquí, y de lo probado (414 y sig.) sacarémos la resolucion de las tres cuestiones siguientes, que ocurren mucho en la práctica de la Arquitectura.

40. 437. Cuestion I. *Entre dos paralelas* AB, CD, *tra-*
41. *zar con dos arcos iguales un talon derecho ó reverso* BGD *en la salida dada* BK.

Para que los perfiles de estas molduras hagan buen
40. efecto, es preciso que el origen y el remate de la curva sean perpendiculares á las lineas *AB*, *CD*, quando el talon es derecho; y que las mismas lineas *AB*, *CD*
41. toquen los mismos estremos, quando es reverso. Luego es preciso que los centros *F* y *L* de los dos arcos estén en las lineas *AB*, *CD* en el primer caso; y que los mismos centros estén en lineas perpendiculares á los estremos *B* y *D* de las mismas *AB*, *CD*, en el segundo caso.

Sentado esto, será muy facil de trazar cada una de
40. las dos curvas. Despues de tirada la *BD*, se la dividirá por el medio en G; tirando despues una perpendicular en medio de *BG*, el punto *F* donde cortará la linea *AB*, será el centro de la primera parte del talon, y el punto *L* donde la linea *FG* encontrará la *CD* prolongada, será el centro de la segunda parte.

Para trazar el talon reverso, el punto *F* se tomará
41. en el punto de interseccion de la perpendicular al medio de *BG* con la que está en el estremo de *AB*, y el punto *L* se determinará tomando $GL = GF$, en la prolongacion de esta misma linea.

438. Tambien se suelen trazar el talon derecho y
42. reverso del modo siguiente. Despues de tirada la *BD*,
43. y dividida por el medio en *G*, se pone en *G* una punta del compas, y con la abertura $GB = GD$, se trazan dos

dos arcos de círculo *BF* y *DL*; con la misma abertu- Fig.
ra de compas *GB*, y desde los centros *B* y *D*, se tra- 42.
zan otros dos arcos *GF* y *GL* que corten los primeros 43.
en *F* y *L* que serán los centros de las dos partes de la curva. Poniendo, pues, una punta del compas primero en *F*, y luego en *L*, con la abertura *FG* se trazan los dos arcos *BG* y *GD* que juntos forman el perfil del talon derecho y reverso.

Este método pasa en opinion de algunos por defectuoso, porque en el talon derecho los arcos *GB* y *GD* no son perpendiculares á las lineas *AB* y *CD*; y en el reverso, porque los arcos *GB* y *GD* no tocan las lineas *AB* y *CD*, sí las cortan, cuyos dos defectos, ó se han de enmendar á mano, ó han de quitar al perfil su buen efecto.

439. Cuestion II. *Entre dos paralelas* AB, DE *tra-* 44.
zar una escocia BFKME.

Desde los puntos *B* y *E* que han de ser los estremos de la escocia, se bajará la perpendicular *Bb*, y se levantará la perpendicular indefinita *EO*. Se tomará en la *Bb* su tercera parte *CB*, y se trazará el arco de círculo *BF*; hecho esto, se prolongará *CF* como su quarta parte, y con el radio *GF* se trazará otro arco *FK* á arbitrio, que remate en *K*; tomando despues la linea *IK*, tambien mayor que *GF*, se llevará desde *E* á *L*, y tirando la *IL* se levantará en medio de esta linea una perpendicular que cortará la *EL* en un punto *O*. Tirando finalmente la linea *OI* indefinita; desde los puntos *I* y *O* como centros, con los radios *IK*, *OE* se trazarán los arcos finitos *KM*, *ME*, y quedará trazada la escocia.

440. Algunos se valen para trazar geométricamen- 45.
te la escocia del siguiente método. Desde el punto *B* estremo superior de la escocia, se baja á la *DE* la perpendicular *Bb* que se divide por el medio con la recta indefinita *FCG*. Desde el punto *C*, medio de *Bb*, co-

Fig. como centro, y con la abertura CB se trazará el arco
45. BF. Desde el punto F donde este arco encuentra la FC se tira al estremo inferior E de la escocia la recta FE que se divide por el medio con la perpendicular HI; y desde el punto G donde la HI encuentra la FC prolongada, se traza con la abertura GF el arco FDE que concluye el perfil de la escocia.

Aunque la escocia trazada de este modo es de mucha gracia, padece sin embargo el inconveniente de que como el arco FDE se mete dentro del listel DE, el canto E de dicho listel forma un ángulo muy agudo, y queda por lo mismo espuesto á rozarse y desmoronarse con mucha facilidad, por cuyo motivo se suele dejar una parte EK del listel plana, retirando adentro el principio de la escocia.

46. 441. Cuestion III. *Sobre una linea dada* AD, *inclinada al orizonte, trazar un arco en rampa* AFD *con dos aberturas de compas.*

Despues de tirada la orizontal AB, terminada en el punto B, donde remata la perpendicular bajada desde el punto D; levántese en el punto C medio de AD, la vertical CF, haciéndola igual á CA, y tírese AF; por el medio K de esta linea, y el punto C, tírese la KCG perpendicular al medio de AF, y desde el punto G donde corta la orizontal AB, como centro, con el radio GA, trácese el arco AF. Finalmente despues de tirada la DO, paralela á AB, y que encuentra FG en O, desde este punto como centro, trácese el arco FD, que concluirá el arco en rampa que se pide.

De los Ángulos considerados en el círculo.

47. 442. *El ángulo* ETA *que forma una tangente con una cuerda, tiene por medida la mitad del arco que la cuerda subtende.*

Tírese por el centro C el diámetro BD, paralelo á la cuerda AT, y el diámetro FH perpendicular á la misma cuerda; el ángulo ETC que forman la tangente y el radio será recto, por ser el radio CT perpendicular á la tangente (429); es tambien recto el ángulo FCD; luego el quadrante de círculo FD es la medida de cada uno de dichos ángulos; pero el ángulo $ETA = ETC - ATC = ETC - DCT$ (porque ATC, TCD son alternos internos) (404). Y como el ángulo TCD tiene por medida el arco TD, resulta que ETA tiene por medida el arco $TF = \frac{TFA}{2}$ (415). Luego &c. — Fig. 47.

443. Los dos ángulos ETA, MTA, valen juntos (374) dos ángulos rectos; luego tienen por medida la mitad del circulo, ó $\frac{TFA}{2} + \frac{AHT}{2}$; pero el ángulo ETA tiene (442) por medida $\frac{TFA}{2}$; luego MTA tiene por medida la mitad del arco AHT. — 47.

444. *El ángulo* DTE *cuyo vértice está en la circunferencia, formado por el concurso de dos cuerdas* DT, TE, *tiene por medida la mitad del arco* DE *que abrazan sus lados.* — 48.

Por el vértice T tírese la tangente AB; la suma de los tres ángulos $BTE + ETD + DTA = 180°$ (374); luego estos ángulos tienen por medida un semicírculo ó $\frac{TE}{2} + \frac{ED}{2} + \frac{DGT}{2}$; pero (442) el ángulo ATD tiene por medida $\frac{DGT}{2}$, y el ángulo BTE tiene por medida $\frac{TE}{2}$; luego el ángulo ETD tiene por medida la mitad del arco ED que abrazan sus lados.

445. De esta última proposicion se sigue 1.° que *el ángulo del centro* DCE *que descansa sobre el arco* DE *es duplo del ángulo inscripto* DTE *que abraza el mismo arco.* — 48.

O4 Por-

Fig. Porque la medida del ángulo en el vértice es la mitad del arco que mide el ángulo en el centro.

49. 446. 2.° Que *todos los ángulos* BAE, BCE, BDE *que tuvieren su vértice en la circunferencia y abrazaren con sus lados un mismo arco* BE *ó arcos iguales, serán iguales.*

Porque el valor de cada uno será la mitad del mismo arco *BE* (444).

50. 447. 3.° Que *todo ángulo* ABD, *cuyo vértice estuviere en la circunferencia y cuyos lados pasasen por los estremos de un diámetro, será recto ó de* 90°.

Porque tendrá por medida (444) la mitad de la semicircunferencia.

50. 448. 4.° Que *todo ángulo* ABC *que abrazare un arco* AEC *mayor que la semicircunferencia será obtuso, y todo ángulo* ABE *que abrazare menos de la semicircunferencia será agudo.*

Porque el primero tendrá por medida la mitad de un arco mayor que la semicircunferencia, y el otro la mitad de un arco menor que la semicircunferencia.

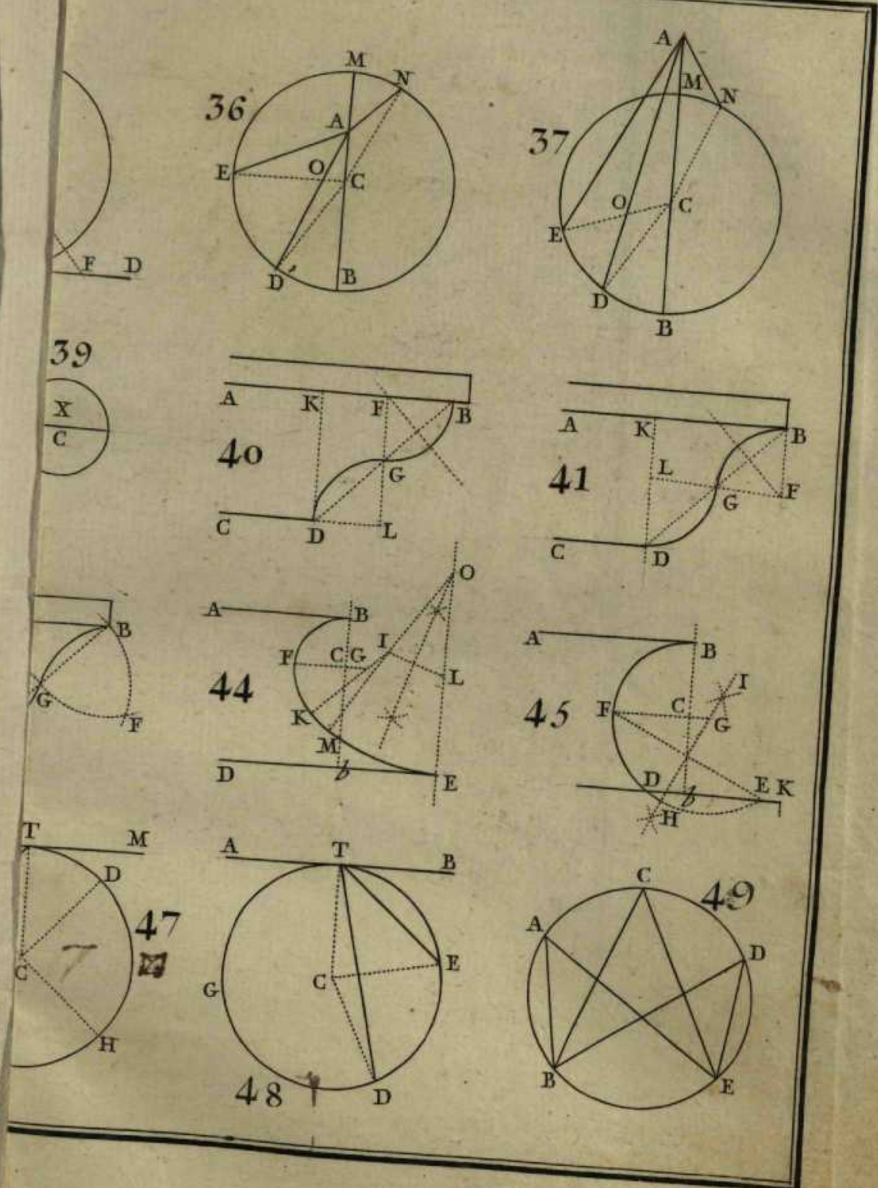
51. 449. *El ángulo* BAD *cuyo vértice no está en el centro, pero sí dentro del círculo, tiene por medida la mitad de la suma de los arcos comprehendidos entre sus lados, prolongados, si es menester.*

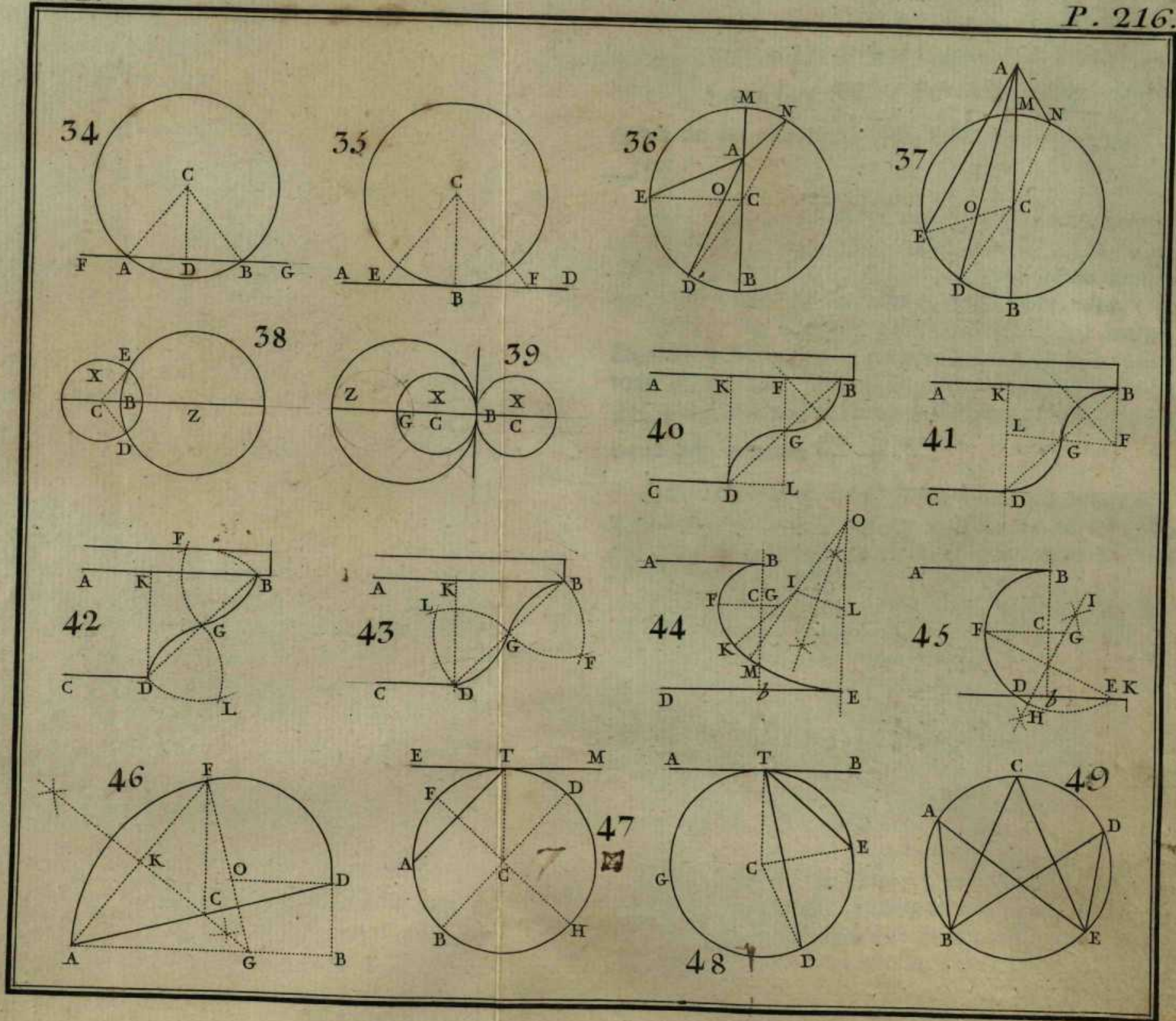
Por el punto *F* tírese *FH* paralela á *CD*; los ángulos *BAD*, *BFH* serán iguales (403); pero el ángulo *BFH* tiene por medida (444) la mitad de *BDH*, ó $\frac{BD}{2}+\frac{DH}{2}$ $=\frac{DB}{2}+\frac{CF}{2}$, pues los arcos comprehendidos entre paralelas son iguales (419).

52. 450. *El ángulo* BAC *cuyo vértice está fuera del círculo, y cuyos lados rematan en la parte cóncava de la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco cóncavo* BC *comprehendido entre sus lados, menos la mitad del arco convexo* ND.

Tí-

P. 216.




34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49

Tírese MN paralela á AC; los ángulos CAB, MNB Fig.
serán iguales (403); pero el ángulo MNB tiene por me- 52.
dida $\frac{MB}{2}$ (444), y $MB = BC - MC = CB - DN$, por razon de las paralelas MN, CD (419); luego $\frac{MB}{2} = \frac{CB}{2} - \frac{DN}{2}$.

451. *El ángulo* EFB *cuyo vértice está en la circunferencia, formado por una cuerda* BF, *y la prolongacion* EF *de otra cuerda* FH, *tiene por medida la semisuma de los arcos que las dos cuerdas subtenden.* 53.

Porque los ángulos BFH, BFE valen juntos dos ángulos rectos (374), y tienen por medida la mitad de todo el círculo; pero el ángulo BFH tiene por medida (444) la mitad del arco BDH; luego el ángulo EFB tiene por medida $\frac{HF}{2} + \frac{FCB}{2}$.

452. *El ángulo* BAC *formado por una tangente* AB *y una secante* AC *tiene por medida la mitad del arco cóncavo* TFC, *menos la mitad del arco convexo* TD *que sus lados interceptan.* 54.

Porque si desde el punto de contacto T se tira la cuerda TE paralela á la secante AC, el ángulo BTE tendrá por medida (442) la mitad del arco $TFE = TFC - EC = TFC - TD$ (419). Y como por razon de las paralelas ET y AC, el ángulo BTE es igual al ángulo BAC (403), se sigue que este tendrá tambien por medida la mitad del arco $TFC - TD$.

Las propiedades que hemos sentado de los ángulos en el círculo nos suministran

453. 1.° Un método para *levantar una perpendicular en el estremo* B *de una linea* AB *que no se puede prolongar.* 55.

Desde un punto C qualquiera, fuera de la linea dada, y con el interválo CB se trazará un círculo; por el punto A donde este círculo corta la linea dada, y el centro C, se tirará el diámetro AD, y por los puntos

tos

Fig. tos *D* y *B*, la *DB* que será la perpendicular que se pide.

Porque como el ángulo *ABD* abraza el diámetro, será forzosamente recto (447).

56. 454. 2.° Para *tirar dos tangentes á un círculo desde un punto dado* A *fuera de dicho círculo.*

Se dividirá la distancia *AC* entre el centro del círculo dado, y el punto *A* en dos partes iguales en el punto *E*, desde el qual, y con el radio *EA* se trazará el círculo *BAD*: por los puntos *D* y *B* donde este último círculo corta el círculo propuesto, y por el punto dado *A*, se tirarán las lineas *AD*, *AB* que serán tangentes del círculo *C*.

Porque tirando los radios *CD*, *CB*, los ángulos *ADC*, *ABC* descansan sobre el diámetro *AC*; luego (447) son rectos; luego las lineas *AD*, *AB* son perpendiculares á los radios *CB*, *CD* (381); luego son (428) tangentes del círculo dado.

57. 455. 3.° *Para trazar sobre una linea dada* BD *una porcion de círculo capaz de un ángulo dado* qrs; esto es, *una porcion de círculo tal que todos los ángulos* BAD *que tengan su vértice en la circunferencia de dicho círculo, y descansen en el arco cuya cuerda es* BD, *sean iguales al ángulo dado* qrs.

En el uno de los estremos de la linea dada *BD* se formará (365) el ángulo *DBF* igual al ángulo dado *qrs*; se levantará sobre *BF* una perpendicular indefinita *BC*, y en medio de *BD* otra perpendicular *CI* que corte la primera en algun punto *C* que será el centro del círculo que se pide.

Porque como el ángulo *DBF* es por construccion igual al ángulo *qrs*, y al mismo tiempo le forman una tangente y una cuerda, su medida será (442) la mitad del arco *BID* que sus lados abrazan; pero otro qualquier ángulo *BAD* que descanse sobre el mismo arco tendrá (444) tambien la misma medida; luego será igual al ángulo dado *qrs*.

Es-

456. Esta última proposicion sirve entre otros usos para *determinar la posicion de uno ó muchos puntos, sean los que fueren, con tal que se conozcan los ángulos que forman los rayos visuales que desde dichos puntos van á tres objetos de posicion conocida.* Fig.

Por egemplo, supongamos que nos importe determinar la posicion de una roca *D* que se halla á cierta distancia de la costa, y que sepamos el valor de los ángulos *ADB*, *BDC* que forman los rayos *DA*, *DB*, 58.
DC que desde el punto *D* van á dar en tres objetos cuya posicion se conoce ya en el mapa. Para conseguirlo, basta tirar las lineas *AB*, *BC*, y trazar sobre ellas unas porciones de círculo capaces de los ángulos dados *ADB*, *BDC*. Es evidente que el punto que vamos á determinar en el mapa caerá en la interseccion comun de las circunferencias *ADB*, *BDC*.

De las Lineas que incluyen espacio, ó de las figuras planas.

457. Llámase, en general, *figura* un espacio terminado ó cerrado por todas partes: por cuya razon en qualquier figura hay dos cosas que considerar, es á saber, las lineas que la forman, cuyo conjunto se llama *ámbito*, *contorno*, ó *perímetro* de la figura, y el espacio ó superficie que el perímetro encierra. Por ahora solo considerarémos el primero de estos dos puntos, dejando para mas adelante tratar del segundo.

458. Las *figuras planas*, que son las únicas que considerarémos en estos principios de Geometría, no se distinguen del plano que ya dejamos definido (330).

459. Las *figuras curvas* son aquellas que no tienen todos sus puntos tan altos ó tan bajos unos como otros; la superficie de una bola forma una figura curva.

460. Las *figuras mixtas* son todas aquellas que en parte son planas, y en parte curvas.

Co-

Fig. 461. Como el perímetro de una figura plana se puede componer de lineas reçtas, curvas ó mixtas, es forzoso distinguir las figuras en *reçtilineas*, *curvilineas* ó *mixtilineas*. Por ahora trataremos de las reçtilineas no mas, y entre las curvilineas solo haremos mencion del círculo.

462. Quando dos ó mas figuras tienen sus perímetros de igual estension, se llaman *isoperímetras*.

59. 463. Decimos de una figura $ABDC$ que está *inscripta* en un círculo, ó de un círculo que está *circunscripto* á una figura, quando todos los ángulos de la figura estan en la circunferencia de dicho círculo.

60. Llamamos círculo *inscripto* en una figura, ó figura *circunscripta* á un círculo $ABCDE$, aquella cuyos lados son todos tangentes del espresado círculo.

59. 464. Finalmente llamamos *diagonal* una linea que desde uno de los ángulos de la figura vá á parar á otro ángulo opuesto. AD es una diagonal de la figura $ABCD$.

De los Triángulos, y de su igualdad.

61. y sig. 465. Para terminar un espacio se necesitan por lo menos tres lineas reçtas AB, AC, BC, y entonces este espacio se llama *triángulo reçtilineo*; y las tres lineas que le forman, *lados del triángulo*.

466. En un triángulo se pueden considerar ó bien sus lados, ó bien sus ángulos.

467. Por razon de sus lados puede haber triángulos de tres especies, y son

61. 1.° El *Triángulo equilátero*, quando sus tres lados son iguales.

62. 2.° El *Triángulo isósceles*, quando solo tiene iguales dos lados.

3.°

3.° El *Triángulo escaleno*, quando son desiguales todos sus tres lados. Fig. 63.

468. Por razon de sus ángulos se divide tambien el triángulo en

1.° *Triángulo reçtángulo*, que es el que tiene uno de sus ángulos reçto; el lado opuesto al ángulo recto se llama la *hypotenusa*. AC es la hypotenusa del triángulo ABC reçtángulo en B. 64.

2.° *Triángulo acutángulo*, y es el que tiene todos sus tres ángulos agudos. 61. 62.

3.° *Triángulo obtusángulo*, que tiene uno de sus ángulos obtuso. 63.

469. El lado inferior AC de qualquier triángulo suele llamarse *base* de dicho triángulo, bien que se puede considerar como base qualquiera de los demás lados. 61. y sig.

470. Una linea BD tirada perpendicularmente á la base AC, ó á su prolongacion desde el vértice del ángulo opuesto, se llama la *altura del triángulo*. 63. 64.

471. De la definicion que hemos dado del triángulo, resulta que *la suma de dos lados de un triángulo qualquiera, tomados como se quisiere, es siempre mayor que el tercer lado*; por egemplo, $AB+BC$ valen mas que AC. Porque siendo AC la linea reçta que vá desde A á C, es el camino mas corto (336) para ir desde el uno de los puntos al otro. 63. 64.

472. Dejamos probado (420) que se puede trazar siempre que se quisiere, una circunferencia de círculo por tres puntos dados que no estén en linea reçta; de aquí inferirémos que

Se puede trazar, siempre que se quisiere, una circunferencia de círculo por los vértices de los tres ángulos de un triángulo; de donde resulta:

473. 1.° *Que si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos á dichos ángulos serán tambien iguales*; y recíprocamente, *si dos lados de un trián-*

Fig. *triángulo son iguales, los ángulos opuestos á estos lados serán tambien iguales.*

65. Porque si trazamos una circunferencia por los tres ángulos *A*, *B*, *C*, y fueren iguales los ángulos *ABC*, *ACB*; los arcos *ADC*, *AEB* cuyas mitades les sirven de medida (444) serán indispensablemente iguales; luego las cuerdas *AC*, *AB* serán iguales (352). Y recíprocamente, si los lados *AC*, *AB* son iguales, los arcos *ADC*, *AEB* serán iguales; luego los ángulos *ABC*, *ACB* que tienen por medida la mitad de estos arcos, serán iguales.

474. Luego *los tres ángulos de un triángulo equiláterto son iguales, y vale cada uno por consiguiente el tercio de* 180° *ó* 60°.

65. 475. 2.° *Que en un mismo triángulo* ABC *el mayor lado está opuesto al mayor ángulo*, y recíprocamente.

Porque si el ángulo *ABC* es mayor que el ángulo *ACB*, el arco *ADC* será mayor (444) que el arco *AEB*, y por consiguiente la cuerda *AC* mayor que la cuerda *AB* (353). La recíproca se demuestra del mismo modo.

65. 476. *En un triángulo qualquiera BAC la suma de los tres ángulos vale dos ángulos rectos.*

Porque si se circunscribe un círculo á dicho triángulo (472), cada uno de los ángulos del triángulo tendrá por medida la mitad del arco comprehendido entre sus lados (444); luego los tres ángulos juntos tendrán por medida la mitad de la suma de los tres arcos que sus tres lados abrazan, ó la mitad de toda la circunferencia, que vale 180°; luego valen dos ángulos rectos.

477. De esta última proposicion, inferirémos 1° que *no puede haber en un triángulo mas que un ángulo recto, ó un ángulo obtuso, siendo preciso que los otros dos sean agudos*; porque á no ser así habría triángulos cuyos tres ángulos valiesen mas de 180°.

2.°

478. 2.° *Que en conociendo dos ángulos de un triángulo es conocido el tercero, cuyo valor es lo que les falta á los otros dos para valer* 180°. *Y en conociendo un ángulo, es conocida la suma de los otros dos*, que es lo que le falta al primer ángulo para llegar á 180°. Fig.

479. 3.° *Que si en un triángulo* ABC *prolongamos el lado* BC, *el ángulo esterno* ACD *será igual á la suma de los dos internos* A *y* B *opuestos á dicho lado.* 66.

Porque $ACD + ACB$ valen 180° (374); pero $CAB + ABC + ACB$ valen (476) tambien 180°; luego quitando de estas dos sumas iguales el ángulo *ACB*, resulta $ACD = CAB + ABC$. 66.

480. 4.° Que *quando dos ángulos de un triángulo son iguales á dos ángulos de otro triángulo, el tercer ángulo del uno es por precision igual al tercer ángulo del otro*, porque los tres ángulos de cada triángulo valen juntos 180° (476).

481. 5.° Que *los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son siempre complemento el uno del otro.*

Porque una vez que vale 90° el uno de los tres ángulos de un triángulo, los otros dos juntos han de valer tambien 90° (478).

482. *Dos triángulos son iguales siempre que los tres lados del uno son iguales á los tres lados del otro.*

Sea $AB = ab$, $AC = ac$, $BC = bc$. Desde los puntos *A* y *B* como centros, y con los radios *AC*, *BC*, trácense unos arcos *mn*, *op* que se corten en *C*. Sobrepóngase el lado *ab* al lado *AB*, el punto *a* al punto *A*, y el punto *b* al punto *B*. Por ser $AC = ac$, y $BC = bc$, tendrá la linea *ac* su estremo *c* en algun punto del arco *mn*, la linea *bc* tendrá tambien su estremo *c* en algun punto del arco *op*; luego se juntarán estas dos lineas en el punto *C* que es la interseccion de los dos arcos; luego caerá el punto *c* sobre el punto *C*, y se confundirán uno con otro los dos triángulos; luego serán iguales. 67.

Dos

Fig. 67. 483. *Dos triángulos son iguales, quando tienen un lado igual á un lado adyacente á dos ángulos iguales, cada uno al suyo.*

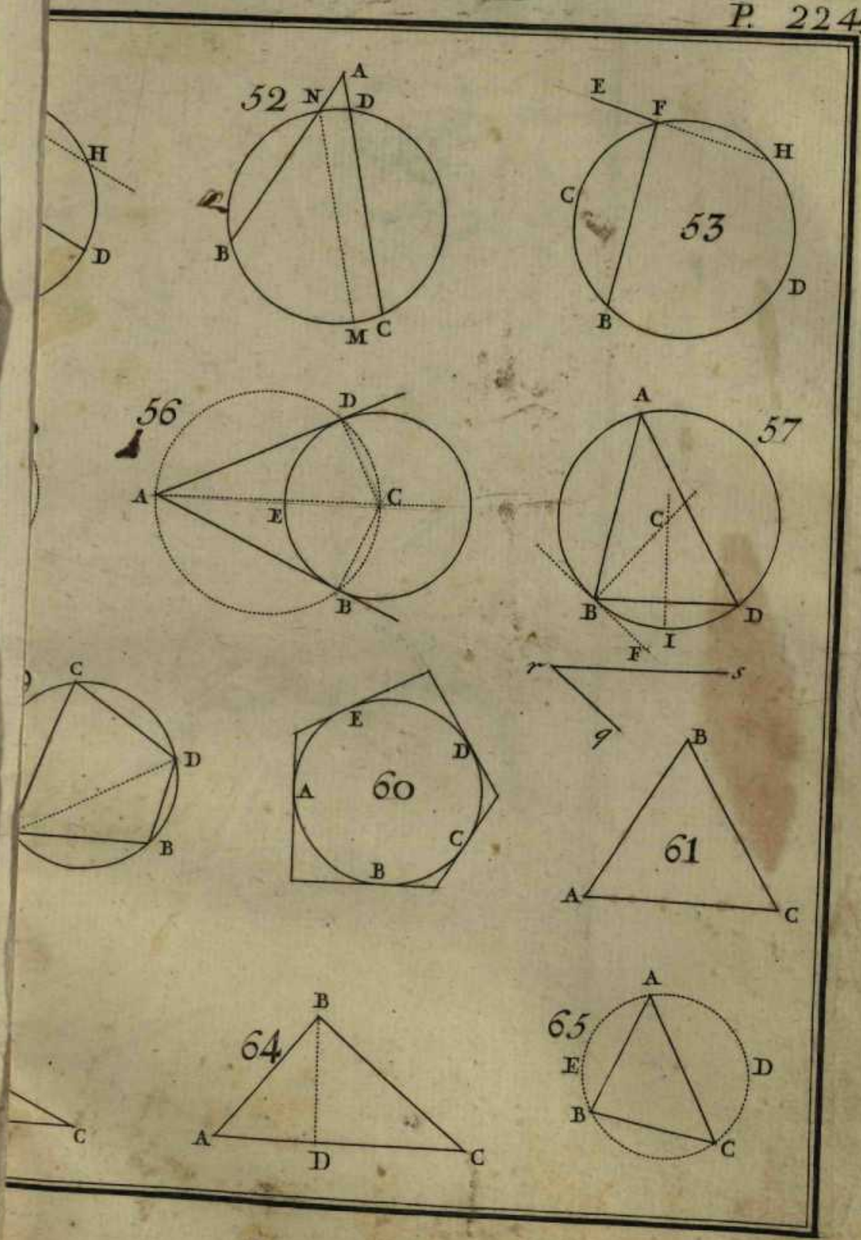
Sea $AB = ab$, el ángulo $A = a$, $B = b$, y sobrepóngase el lado ab á AB. Por ser el ángulo a igual al ángulo A, y el ángulo b igual al ángulo B, el lado ac caerá (360) sobre AC, y el lado bc sobre BC; luego los dos lados ac y bc se encontrarán en el punto C, y se confundirán los dos triángulos; luego serán iguales.

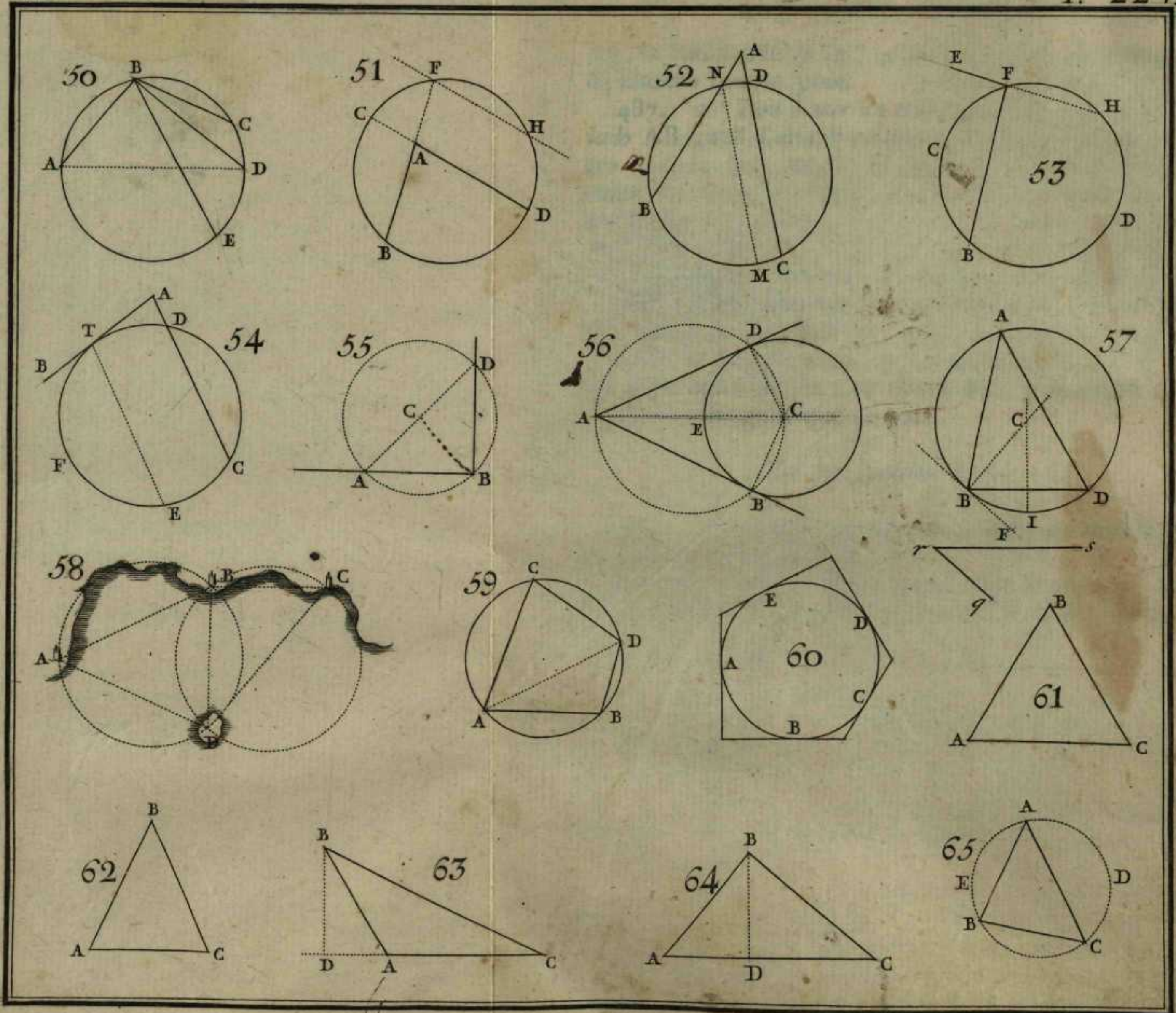
67. 484. *Son iguales dos triángulos siempre que tienen dos lados iguales cada uno al suyo, é igual el ángulo que forman dichos lados.*

Sea el ángulo A igual al ángulo a, el lado $AB = ab$, $AC = ac$; sobrepóngase AB á ab, y AC á ac (lo que es muy factible (360) por ser iguales los dos ángulos A y a), y se confundirán dichos lados; el punto C se confundirá con el punto c, y el punto B con el punto b; luego CB se confundirá con cb; luego los dos triángulos se confundirán, y serán por consiguiente iguales.

67. 485. De las tres proposiciones últimamente demostradas se sacan tres métodos para *formar* 1.° *un triángulo* ABC *cuyos lados sean iguales á los de otro triángulo* abc. Se tomará $AB = ab$; desde el punto A con un radio $= ac$, segundo lado conocido, y desde el punto B con otro radio $= bc$ tercer lado conocido, se trazarán dos arcos mn y op que se cortarán en C, y tirando CA y CB, quedará formado el triángulo que se pide.

486. Esto manifiesta lo que se ha de egecutar para formar un triángulo cuyos tres lados sean iguales á tres lineas dadas; y asimismo el modo de *formar un triángulo equilátero sobre una linea dada* AB. Desde los puntos A y B como centros, y con un radio $= AB$ se trazarán unos arcos que se corten en C, y con tirar




50 B C A D E
51 F C H A D B
52 A N D B M C
E F H C 53 D B
A T D 54 B F C E
55 D C A B
56 D A E C B
A 57 C B D F I
r s q
58 B C A D
59 C D A B
E D A 60 C B
B 61 A C
B 62 A C
B 63 D A C
B 64 A D C
A 65 E D B C

rar las lineas *AC* y *BC* quedará trazado el triángulo equilátero que se pide. Fig.

487. 2.° Para *hacer un triángulo* ABC *que tenga un lado* AB *igual á una linea dada, y los ángulos adyacentes á dicho lado iguales á dos ángulos dados*. Se formará sobre *AB* el ángulo *B* igual al uno de los ángulos dados, y el ángulo *A* igual al otro ángulo dado (365); los lados *BC*, *AC* se juntarán en el punto *C*, y quedará trazado el triángulo que se pide. 67.

488. Para *construir un triángulo* ABC, *conociendo dos lados, y el ángulo que forman*, se hará el ángulo *A* igual al ángulo dado, y los lados *AB*, *AC* iguales á los lados dados; se tirará *BC*, y quedará formado el triángulo que se pide. 67.

De los Quadriláteros.

489. Llamamos *quadrilátero* una figura terminada por quatro lineas rectas.

490. Una figura quadrilátera *ABCD* puede no tener lado ninguno paralelo á otro, y entonces se llama *trapezoide*. 69.

491. Quando el quadrilátero tiene dos lados no mas paralelos, como *AD* y *BC*, se llama *trapecio*. 70.

492. Y finalmente se llama *paralelogramo* al quadrilátero *ABCD* que tiene sus lados opuestos paralelos. 71. y sig.

493. De aquí se infiere que puede haber quatro especies de paralelogramos, que distinguirémos con nombres particulares.

1.° Quando los ángulos y lados contiguos del paralelogramo son desiguales, se le llama *romboide*. 71.

494. 2.° Si los lados del paralelogramo fueren iguales, y desiguales sus ángulos, se le llamará *rombo*. 72.

495. 3.° Llámase *rectángulo* el paralelogramo quando son rectos, y por consiguiente iguales todos 73.

 sus

Fig. sus ángulos, y desiguales los lados contiguos.

74. 496. 4.° Finalmente se llama *quadrado* al paralelogramo que tiene iguales sus ángulos y sus lados.

71. 497. El lado inferior *AD* de un quadrilátero suele
72. llamarse su *base*.

498. Y se llama *altura* del quadrilátero una perpendicular *BE* tirada á la base ó á su prolongacion desde el lado opuesto.

70. 499. *Todos los ángulos juntos de un quadrilátero* ABCD *son iguales á quatro ángulos rectos.*

Porque si tiramos la diagonal *AC* dividirá el quadrilátero en dos triángulos, cuyos ángulos son los mismos que los del quadrilátero; pero los ángulos de cada triángulo valen dos ángulos rectos (476); luego los ángulos de todo el quadrilátero valen dos veces dos ángulos rectos, que son quatro ángulos rectos.

75. 500. *Si un quadrilátero* ABCD *tuviere iguales y paralelos dos lados opuestos* AB, CD, *tendrá tambien iguales y paralelos los otros dos lados* AD, CB.

Porque si tiramos la diagonal *AC*, el ángulo *BAC* será igual al ángulo *DCA* (404), y los dos triángulos *ABC*, *ADC* tendrán un ángulo igual á un ángulo, el lado *AB* igual al lado *DC* por el supuesto, y el lado *AC* comun; luego serán iguales (484), y tendrán los lados *AD* y *BC* iguales, y el ángulo *BCA* igual al ángulo *DAC*; luego (408) *AD* y *BC* serán paralelos.

75. 501. *La diagonal* AC *de un paralelogramo* ABCD *le divide en dos triángulos iguales.*

Porque los dos triángulos *ABC*, *ADC* tienen el ángulo *DAC* igual al ángulo *ACB* (404), el ángulo *DCA* igual al ángulo *BAC*, y el lado *AC* comun á ambos triángulos; luego serán iguales (483); luego &c.

76. 502. De aquí podemos inferir, que *las partes* AD, BC *de dos paralelas interceptadas entre otras dos paralelas* AB, DC, *son iguales.*

Porque siendo, segun suponemos, *AB* y *DC*, *AD* y

BC paralelas, la figura *ABCD* será un paralelogramo (492), y por consiguiente la diagonal *AC* le dividirá en dos triángulos iguales (501), que tendrán todos sus tres lados iguales cada uno al suyo; luego *AD*=*BC*. Fig.

503. *En un paralelogramo* ABCD *los ángulos opuestos* A *y* C, B *y* D *son iguales, como tambien los lados opuestos* AD *y* BC, AB *y* DC. 75.

Porque siendo paralelos los lados *AD* y *BC* por la naturaleza del paralelogramo, los ángulos *D* y *C* valen juntos dos ángulos rectos (407), y por la misma razon *A* y *D* juntos valen otros dos ángulos rectos; luego *A* y *C* tienen un mismo suplemento *D*; luego son iguales (373). Del mismo modo puntualmente demostrarémos que *B* y *D* son tambien iguales.

La segunda parte de la proposicion queda probada arriba (502), una vez que son paralelos cada dos lados opuestos de un paralelogramo.

504. De aquí resulta 1.° que *si en un paralelogramo un ángulo* A *es recto, lo serán todos quatro.* 73.

Porque si *C* es recto, una vez que es suplemento de *D* (407), *D* será tambien recto; pero *C* es igual á su opuesto *A* (503), y *D* es igual á su opuesto *B*; luego todos quatro ángulos son rectos.

505. 2.° Que *si dos lados* AD, AB *de un paralelogramo contiguos á un ángulo* A *son iguales, los quatro serán iguales.* 74.

Porque *AD* es igual á su opuesto *BC* (503), y como *AD*=*AB*, se sigue que *BC*=*AB*; este es igual á su opuesto *CD*; luego todos quatro son iguales.

506. 3.° Que las propiedades de los paralelogramos son 1.ª *que tengan los lados opuestos paralelos* (492). 2.ª *que tengan estos mismos lados opuestos iguales* (503). 3.ª *que tengan iguales los ángulos opuestos* (503). Por consiguiente para saber si una figura de quatro lados es un paralelogramo, basta saber si concurre en ella alguna de estas tres condiciones.

Fig. 507. La primera de estas tres condiciones nos suministra un método para *formar un paralelogramo que tenga uno de sus ángulos igual al ángulo dado* a *comprehendido entre las dos lineas* ad *y* ab *tambien dadas de magnitud.*

77. Se tomará $AB = ab$, y en el punto A se formará el ángulo DAB igual al ángulo dado a; se hará $AD = ad$, y por el punto D se tirará DC paralela á AB; finalmente tirando por el punto B la CB paralela á AD, quedará concluido el paralelogramo.

508. Si el ángulo dado fuese de 90°, será rectángulo el paralelogramo (495); y si en este mismo supuesto fuere $ad = ab$, será un quadrado (496).

De los Polygonos.

509. Llamamos *polygono* toda figura terminada por mas de quatro lados. Quando el polygono tiene cinco lados se llama *pentágono*; quando tiene seis, *exágono*; quando tiene siete, *eptágono*; y succesivamente se llama *octógono*, *eneágono*, *decágono*, *undecágono*, *dodecágono*, quando tiene ocho, nueve, diez, once, ó doce lados.

78. 510. Un polygono es *regular* quando son iguales entre sí todos sus ángulos, y todos sus lados; y es *irregular* quando no son iguales todos sus ángulos, y todos sus lados.
79.

78. 511. Se llama *ángulo saliente* de un polygono á todo ángulo cuyo vértice cae fuera de la figura como los ángulos A, B, C &c.

79. 512. Y se llama *ángulo entrante* al ángulo cuyo vértice se mete dentro de la figura. CDE es un ángulo entrante.

78. 513. Llámanse *radios rectos* ó *apotemas* de un polygono las perpendiculares CP, CQ, bajadas desde el punto medio ó *centro* del polygono á los lados de él.

Y se llaman *radios oblicuos* las lineas CA, CB tiradas desde el centro á los ángulos del polygono. Fig.

514. Si desde un punto C tomado dentro de un polygono, se tiran lineas á todos los ángulos, es evidente que resultarán tantos triángulos como lados tiene el polygono; luego *un polygono qualquiera se puede dividir en tantos triángulos como lados tiene.* 78.

515. Y si desde uno de los ángulos de un polygono qualquiera se tiran diagonales á todos los ángulos, excepto á los dos inmediatos, quedará el polygono dividido en tantos triángulos, menos dos, como lados tiene. 79.

516. Luego 1.° *la suma de todos los ángulos interiores de un polygono qualquiera vale tantas veces 180°, menos dos, como lados tiene.*

Porque como los ángulos de todos los triángulos ACB, BCD, DCE &c. en que está dividido el polygono, valen tantas veces 180° como lados hay (476), si de la suma se restan 360° ó dos veces 180° que valen todos los ángulos que forman en el centro los vértices de los triángulos (375), el residuo será la suma de los ángulos interiores del polygono. 78.

Del mismo modo se verifica la proposicion en un polygono que esté dividido desde uno de sus ángulos; porque como la suma de los ángulos interiores del polygono $ABCDEF$ es evidentemente la misma que la suma de los ángulos de los triángulos ABC, ACD &c. en que está dividido el polygono; valdrán todos los ángulos del polygono lo mismo que todos los ángulos de los triángulos que le componen, esto es, tantas veces 180° (476) como lados tiene, menos dos (515). 79.

El ángulo CDE para ser comprehendido en esta proposicion, se ha de contar no por la parte CDE, sino por la parte $ACDE$ que se compone de los ángulos ADE, ADC; y aunque es un ángulo de mas de 180°, es lo mismo que otro ángulo qualquiera que no llegue á 180°; pues como todo ángulo es la canti-

Fig. tidad que una linea recta que se ha movido al rededor de un punto fijo, se ha apartado de otra, la vuelta que dé, coja mas ó menos que 180°, siempre se ha de contar por ángulo.

78. 517. Luego 2.° se puede *hallar quanto vale cada ángulo interior de un polygono regular*, buscando quanto valen juntos todos sus ángulos interiores (516), y dividiendo el valor total por el número de los lados. Por egemplo, el ángulo de un pentágono regular vale 108°; porque como son cinco sus lados, tomaré 180° cinco veces menos dos, esto es, tres veces, y saldrán 540° que es el valor de los cinco ángulos interiores; y pues todos son iguales entre sí, cada uno será la quinta parte de 540° ó 108°.

78. 518. *Si se dividen en dos partes iguales los ángulos de un polygono regular, con los radios oblicuos* AC, BC *&c. todas estas lineas se encontrarán en* C, *y serán iguales.*

Porque por ser igual el ángulo A al ángulo B, los ángulos CAB, CBA, serán mitades de ángulos iguales; luego estos ángulos serán iguales, y el triángulo ABC será isósceles (473); luego $AC=BC$. Del mismo modo se probará que $BC=DC$ &c.

80. 519. Luego 1.° *si desde el punto* C, *centro del polygono, y con el radio* CA, *se describe un círculo, resultará un polygono inscripto en el círculo.*

Pues siendo $AC=BC=DC$ &c. la circunferencia del círculo que se describa con el radio AC pasará por los vértices de todos los ángulos.

520. 2.° *Un polygono regular se puede dividir en tantos triángulos iguales como lados tiene.*

Porque los triángulos ACB, BCD &c. serán todos iguales (482), pues tendrán todos sus lados iguales.

521. 3.° *El lado* AB *del exágono regular es igual al radio del círculo.*

Porque AB es la cuerda de un arco igual á la sexta

ta parte de la circunferencia; luego el ángulo ACB vale 60°; pero los ángulos CAB, CBA son iguales entre sí (473) por estar opuestos á lados iguales (518); luego cada uno vale 60°; luego el triángulo ABC tiene iguales todos sus ángulos, y es por consiguiente equilátero (474); luego $AC=AB$. Fig. 80.

522. Luego para *inscribir un exágono en un círculo*, bastará llevar el radio seis veces sobre la circunferencia.

523. De aquí se sigue que *el perímetro del exágono regular inscripto en el círculo, es tres veces mayor que el diámetro de dicho círculo.* Y como la circunferencia del círculo es mayor (336) que el perímetro del exágono inscripto, la circunferencia del círculo es mas de tres veces mayor que su diámetro; quiero decir que la razon entre la circunferencia y el diámetro es mayor que la razon de 3 á 1, ó de 21 á 7.

524. *El radio recto de un polygono regular divide el lado correspondiente en dos partes iguales.* 80.

Porque si imaginamos un círculo circunscripto al polygono propuesto, cada uno de sus lados será una cuerda de dicho círculo, y estará dividida en dos partes iguales (414) por la perpendicular á dicho lado tirada desde el centro.

525. Y pues hemos demostrado que todos los radios oblicuos son iguales (518), el triángulo CAB será isósceles; luego *la perpendicular bajada desde el vértice de un triángulo isósceles á la base, la divide en dos partes iguales*; y por consiguiente, la misma perpendicular divide tambien el ángulo ACB en dos ángulos iguales; pues los ángulos ACQ, QCB son ángulos opuestos á lados iguales de triángulos iguales.

526. *Los radios rectos* CP, CQ *de un polygono regular son todos iguales entre sí.* 81.

Porque como los triángulos CQA, CQB tienen un ángulo recto cada uno en Q, el lado $AQ=QB$ (524),

 y

Fig. y el lado QC es comun á ambos, serán iguales (484),
81. y por consiguiente el triángulo CQA será mitad del triángulo ACB. Del mismo modo probarémos que el triángulo CPA es mitad del triángulo ACF; pero ACB y ACF son iguales (520); luego sus mitades CPA, CQA tambien lo son; luego $CP = CQ$.

Del mismo modo se probará la igualdad de los demás radios rectos.

81. 527. Luego 1.° para *inscribir un círculo en un polygono regular dado*, desde el centro del polygono, y con un intervalo igual á un radio recto CP, se trazará una circunferencia que tocará todos los lados del polygono, pues siendo CQ perpendicular á AB, AB será tangente (428) de la circunferencia que pasa por el estremo de CQ.

81. 528. Luego 2.° *el radio oblicuo* CA *de un polygono regular divide el ángulo* PAQ *del polygono en dos partes iguales.*

Porque siendo (526) $CP = CQ$, el ángulo en P igual al ángulo en Q, y el lado AC comun á los dos triángulos CAP, CAQ, serán totalmente iguales (484), y por consiguiente el ángulo $CAP = CAQ$.

529. *Entre todos los polygonos regulares inscriptos en un mismo círculo, el perímetro del polygono que tiene mas lados es mayor que el perímetro del polygono que menos lados tiene.* Por egemplo, el perímetro de un pentágono inscripto en un círculo, es mayor que el perímetro de un quadrado inscripto en el mismo círculo.

Porque siendo la circunferencia del círculo mayor que el perímetro de qualquier polygono inscripto (336), es evidente que quanto mas se acerca á la circunferencia el perímetro de un polygono inscripto, tanto mayor será su perímetro. Pero el perímetro del pentágono se arrima mas á la circunferencia que el del quadrado, pues los lados del pentágono son cuerdas menores que los lados del quadrado, y quanto menores son las cuerdas, menos se distinguen de los arcos á que pertenecen; luego el perímetro del pentágono es mayor que el del quadrado.

Fig.

530. *Entre todos los polygonos regulares circunscriptos á un mismo círculo ó á círculos iguales, el que mas lados tiene, tiene el menor perímetro.*

Porque como la circunferencia de un círculo es menor que el perímetro de qualquiera polygono circunscripto; quanto mas se acerque á la circunferencia el polygono circunscripto, tanto menor será su perímetro. Pero el perímetro se acerca tanto mas á la circunferencia quanto mas lados tiene, porque siendo estos lados tangentes, se apartan tanto menos de la circunferencia, quanto menores son; luego quantos mas lados tiene un polygono circunscripto, tanto menor es su perímetro.

531. Síguese de esto, que si un polygono, sea inscripto, sea circunscripto, tuviese una infinidad de lados, su perímetro se acercaría infinitamente á la circunferencia, y se confundiria con ella, y por consiguiente se podria tomar por la misma circunferencia, por cuya razon *se puede considerar el círculo como un polygono regular de una infinidad de lados.*

De las Lineas proporcionales.

532. *Si sobre una linea* AV *que forma con otra linea* AZ *un ángulo qualquiera* VAZ, *se toman las partes iguales* AB, BC, CD, DE, *y desde los puntos de division* B, C, D, E *se tiran las paralelas* BF, CG, DH, EI *que encuentren la* AZ *en los puntos* F, G, H, I, *y desde estos puntos se tiran paralelamente á* AV *las rectas* FS, GT, HX; 1.° *todas las partes* AF, FG, GH, HI *de la recta* AZ *serán iguales entre sí*: 2.° *todas las partes* EM, MO, OP, PI *de la* EI *serán tambien iguales entre sí.* 82.

Por-

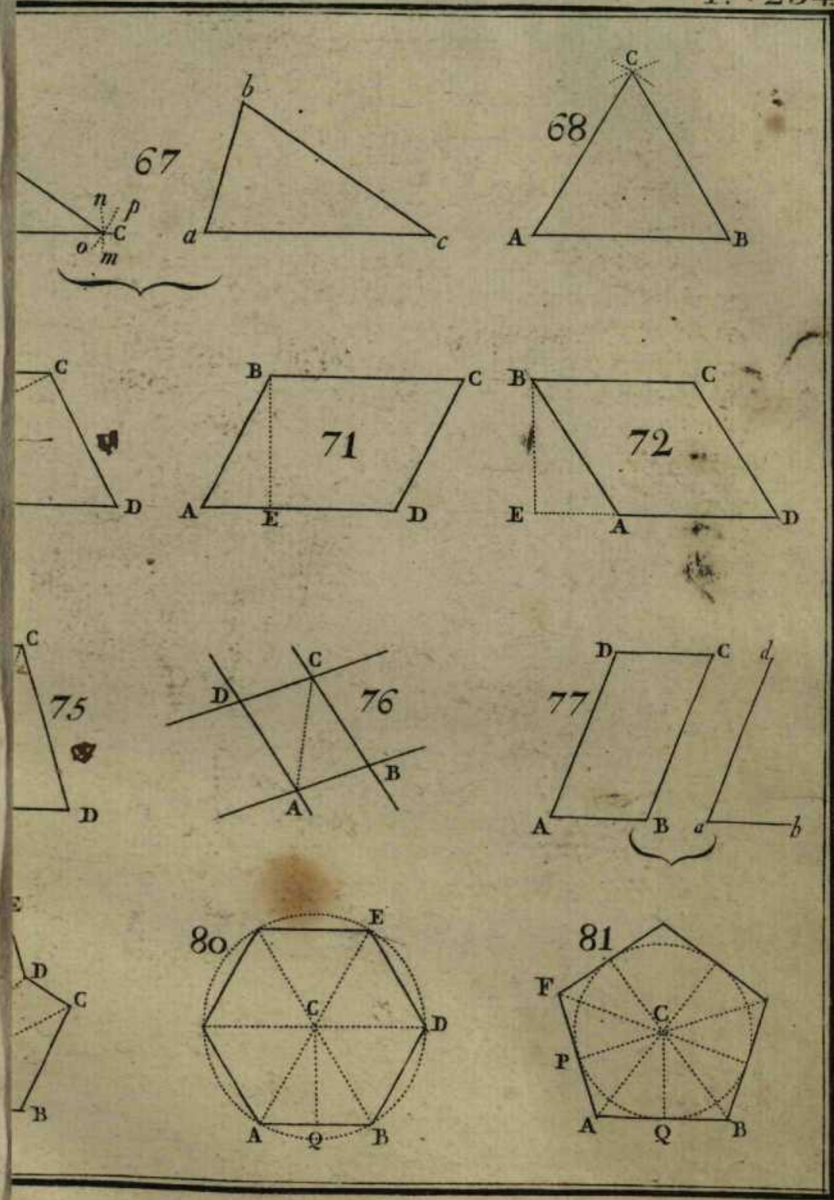
Fig. 82. Porque 1.° segun suponemos $AB = BC$, y por ser $BCKF$ un paralelogramo (492), será $FK = BC$ (503); luego $KF = AB$. Pero por razon de las paralelas FS, AV, el ángulo KFG es igual (403) al ángulo BAF, y el ángulo FKG igual al ángulo ACG; y por razon de las paralelas CG, BF, el ángulo ACG es igual al ángulo ABF. Luego el ángulo FKG es igual al ángulo ABF. Por consiguiente los dos triángulos FKG, ABF que tienen un lado igual adyacente á dos ángulos iguales, serán totalmente iguales (483); luego $FG = AF$. Del mismo modo puntualmente se demostrará que los triángulos GNH, HPI son iguales á los triángulos FKG y GNH; luego todas las partes AF, FG, GH, HI de la recta AZ son iguales entre sí.

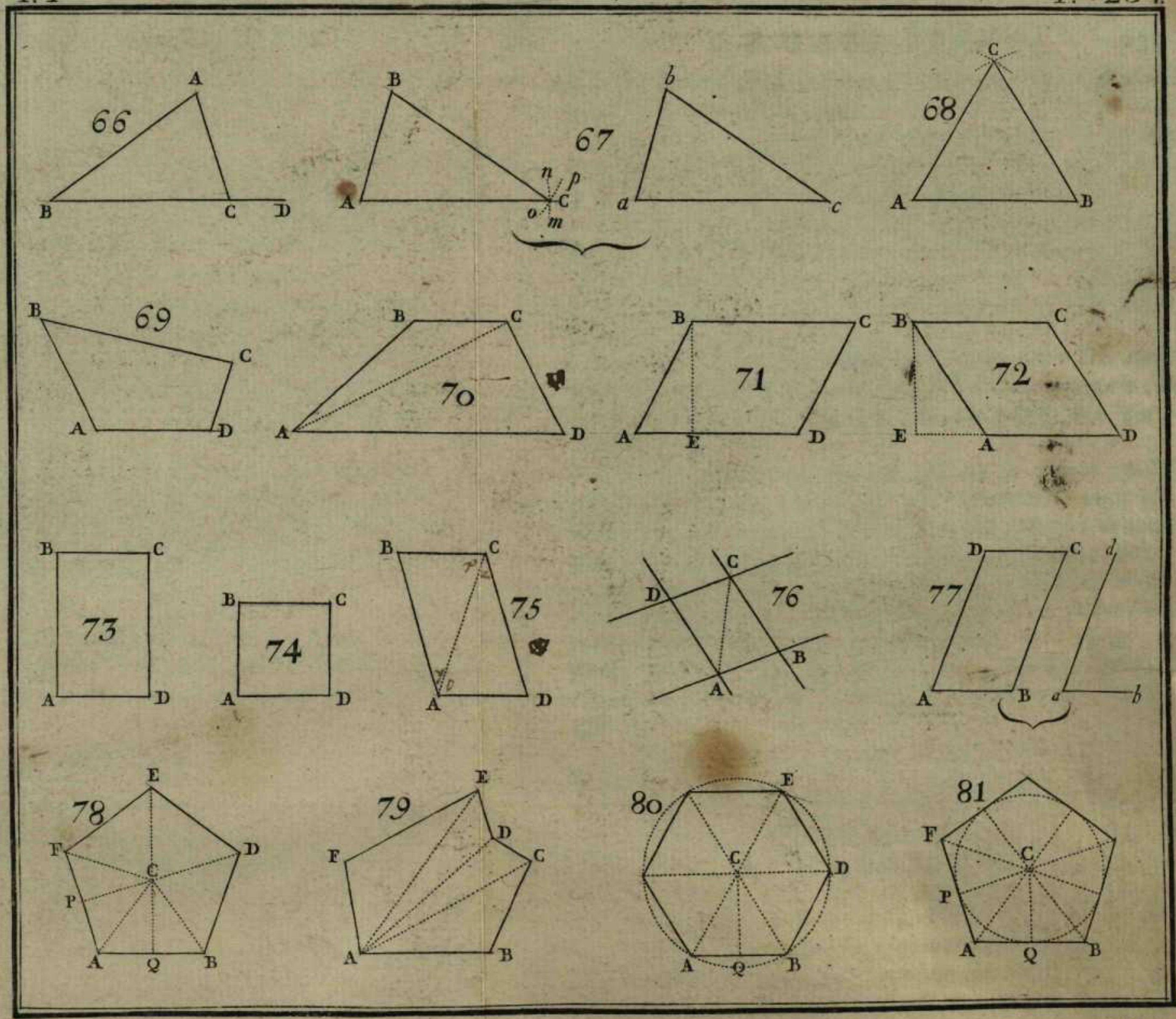
2.° En el paralelogramo $BCKF$, $BF = CK$ (503), y como los dos triángulos ABF, FKG son totalmente iguales, el lado $KG = BF$, y por lo mismo $KG = CK$. En el paralelogramo $CDLK$, $LD = KC$; en el paralelogramo $KLNG$, $LN = GK$; y como los dos triángulos GNH, FKG son totalmente iguales, será $HN = GK$. Luego $HN = NL = LD = GK = BF$. Asimismo se demostrará que $IP = PO = OM = ME = FB$. Luego son iguales todas las partes de la recta EI.

533. Luego 1.° *si* AB *es la mitad, por egemplo, de* AF, BC *será tambien la mitad de* FG, CD *la mitad de* GH *&c.* Lo mismo diremos de dos, tres ó quatro partes juntas de la AV, comparadas con otras dos, tres ó quatro partes juntas de la AZ; y por consiguiente como AD ó DE será la misma parte de AH ó HI que AB de AF, tendremos $AD : AH :: AB : AF$, y $DE : HI :: AB : AF$. Por la misma razon será $AE : AI :: AB : AF$; luego por causa de la razon $AB : AF$ comun á estas tres proporciones, será $AD : AH :: DE : HI :: AE : AI$.

83. 534. 2.° *Luego si desde un punto* D *tomado á arbitrio en uno de los lados de un triángulo* ABC, *se tira una*

P. 234




66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81

una paralela DE *á la base* AC, *el otro lado quedará cortado proporcionalmente.* Fig. 83.

Porque en virtud de lo que acabamos de probar (533), $BD : BE :: DA : EC$, ó $BD : DA :: BE : EC$, y $BD : BE :: BA : BC$ ó $BD : BA :: BE : BC$.

Si desde el punto E se tira la EF paralela al otro lado BA, será (502) $AF = DE$, y tendremos $CF : CE :: AF = DE : EB$, y $CF : CE :: CA : CB$; por consiguiente $AF = DE : EB :: CA : CB$ ó $DE : CA :: EB : CB$.

535. 3.° Y recíprocamente *si una linea* DE *corta proporcionalmente los lados* BA, BC *de un triángulo, de modo que* BD : BA :: BE : BC, *la linea* DE *será paralela á la base* AC.

Porque como la paralela á AC ha de cortar en BC una parte BE que tenga con BC la misma razon que BD con BA (534); verificándose esto segun suponemos, es señal evidente de que DE es paralela á AC.

536. 4.° Luego *si desde un punto* S *tomado á arbitrio fuera de una linea* MN *se tiran á dicha linea otras muchas lineas* SM, SO, SP, SN, *toda recta* QT *paralela á* MN *cortará estas lineas en partes proporcionales, y será* QR : MO :: RV : OP :: VT : PN *ó* QR : RV : VT :: MO : OP : PN. 84.

Porque como la recta QR corta paralelamente á la base el triángulo SMO, será (534) $QR : MO :: SR : SO$. Por la misma razon el triángulo SOP dá $SR : SO :: RV : OP :: SV : SP$. Asimismo el triángulo SPN dá $SV : SP :: VT : PN$. Luego tomando de esta serie de razones iguales solamente aquellas que nos hagan al caso, sacarémos $QR : RV : VT :: MO : OP : PN$.

Esta misma proposicion se verifica quando la recta QT corta las prolongaciones de las rectas SM, SO, 85.
SP, SN. Porque si en SM tomamos $Sq = SQ$, y tiramos qt paralela á MN, todos los triángulos Sqr, Sru, Sut &c. serán totalmente iguales á los triángu-

los

Fig. los *SQR*, *SRV*, *SVT*, porque cada uno tendrá un lado igual adyacente á dos ángulos iguales. Pero, segun acabamos de ver, *qr* : *ru* : *ut* :: *MO* : *OP* : *PN*; luego *QR* : *RV* : *VT* :: *MO* : *OP* : *PN*.

84. 537. 5.° Y recíprocamente *si se cortan proporcionalmente en los puntos* Q, R, V, T *las lineas* SM, SO, SP, SN *tiradas desde el punto* S *á distintos puntos de la* MN, *la linea* QT *que pasáre por todos estos puntos, será una recta paralela á* MN.

Porque siendo por el supuesto *SQ* : *SM* :: *SR* : *SO* :: *SV* : *SP* :: *ST* : *SN*, *QR* será (535) paralela á *MO*, *RV* á *OP*, *VT* á *PN*, y por consiguiente *QT* á *MN*.

86. 538. *La linea* AD *que divide en dos partes iguales el ángulo* A *de un triángulo* ABC, *corta el lado opuesto* BC *en dos partes* BD, DC *proporcionales á los lados* AB, AC, *de modo que* BD : DC :: AB : AC.

Porque si por el punto *B* tiramos paralelamente á *DA* la recta *BE*, que encuentre en *E* el lado *CA* prolongado, el ángulo *ABE* será igual (404) al ángulo *BAD*, y el ángulo *BEA* igual (403) al ángulo *DAC*; pero el ángulo *BAD* es igual por el supuesto al ángulo *CAD*; luego los ángulos *ABE* y *BEA* son iguales; luego (473) *EA* = *AB*. Pero por razon de las paralelas *BE*, *DA* tenemos (534) *BD* : *DC* :: *EA* : *AC*; luego substituyendo en lugar de *EA* su igual *AB*, sacarémos *BD* : *DC* :: *AB* : *AC*.

87. 539. *Si desde los puntos* M *y* P *de una recta* MP *se levantan las lineas* MN, MR, PQ, PV *paralelas de dos en dos, y proporcionales, de modo que siendo* MN *paralela á* PQ, *y* MR *paralela á* PV, *sea* MN : PQ :: MR : PV; *las tres lineas* MP, NQ, RV *que se tiren por los estremos de dichas paralelas concurrirán en un mismo punto* S.

Porque sea *S* el punto de concurso de *MP* y *NQ*, y *s* el punto de concurso de *MP* y *RV*. El triángulo *SMN* cortado con la linea *PQ* paralela á su base *MN* dará (534) *SM* : *SP* :: *MN* : *PQ*, y por la misma razon el triángulo *sMR* cortado con la linea *PV* paralela á su base *MR* dará *sM* : *sP* :: *MR* : *PV*; luego una vez que por el supuesto *MN* : *PQ* :: *MR* : *PV*, será *SM* : *SP* :: *sM* : *sP*, y por consiguiente (244) *SM* — *SP* : *SP* :: *sM* — *sP* : *sP*, esto es *PM* : *SP* :: *PM* : *sP*, y como *PM* = *PM*, será *SP* = *sP*; por cuya razon los puntos *S* y *s* se confundirán uno con otro.

Aunque son infinitas las aplicaciones que se pueden hacer de la doctrina de las lineas proporcionales, nosotros nos contentarémos por ahora con aplicarla á la resolucion de varias cuestiones tan útiles como importantes.

540. Cuestion I. *Dividir una linea dada en partes iguales, ó en partes que tengan entre sí razones dadas.* 88.

Supongamos que nos convenga dividir la linea *AR* en dos partes que tengan entre sí la razon de 7 á 3, por egemplo. Por el punto *A* se tirará una linea indefinita *AZ* que forme con *AR* un ángulo qualquiera *RAZ*, y tomando una abertura de compas arbitraria *AB*, se señalarán en *AZ* diez divisiones iguales; desde el estremo *Q* de la última se tirará al estremo *R* de la *AR* la *QR*, y tirando por el punto *D*, estremo de la tercera division, la *DI* paralela á *QR* quedará dividida *AR* en dos partes *RI*, *AI* que serán entre sí como 7 á 3; porque (534) *RI* : *AI* :: *DQ* : *AD* :: 7 : 3, por construccion.

Si hubiéramos de dividir la misma linea *AR* en un número mayor de partes proporcionales, pongo por caso, en cinco partes que fuesen entre sí como los números 2, 3, 5, 6, 7; sumaríamos unos con otros estos números, y saldría 23; tomando 23 aberturas de compas iguales sobre *AZ*, y tirando paralelas á QR por los puntos de la 2.ª 3.ª 5.ª 6ª y 7ª division de *AZ*, quedaría *AR* dividida como se pide.

Si

Fig. 88. Si las razones nos las diesen en lineas, pondríamos todas estas lineas sobre AZ á continuacion unas de otras.

541. Del mismo modo procederíamos para *dividir la linea* AR *en partes iguales.* Porque si hubiéramos de dividir AR en 10 partes iguales; sobre AZ tomaríamos diez partes iguales qualesquiera, y desde todos los puntos de division tiraríamos paralelas á QR que dividirian AR en las diez partes que se piden.

89. 542. Cuestion II. *Hallar una quarta proporcional á tres lineas dadas* GH, IK, LM.

Se tirarán dos lineas AV, AZ que formen un ángulo qualquiera VAZ; se trasladarán á la primera, GH desde A á B, é IK desde A á C; en la segunda se pondrá LM desde A á E; se tirará BE, y á esta la paralela CF; la recta AF será la quarta proporcional que se busca.

Porque (534) AB ó $GH : AC$ ó $IK :: AE$ ó $LM : AF$.

90. 543. Por este mismo método se *halla una linea tercera proporcional á dos lineas dadas* GH *é* IK. Porque tomando $AB = GH$, $AC = IK$, y $AE = IK$ otra vez, y haciendo la misma operacion de antes, tendrémos $AB = GH$, $AC = IK :: AE = IK : AF$, ó $\div GH : IK : AF$; luego AF es la tercera proporcional que se busca.

91. 544. Cuestion III. *Por un punto dado* F *tirar una recta* FG *que se encamine en derechura al punto de concurso de dos lineas* AB, DE, *quando este punto está demasiado distante para poderle determinar.*

Se tirarán desde dos puntos qualesquiera de la AB dos paralelas AD, BE que rematen en la DE; desde el punto A se tirará al punto dado F la AF, y á esta paralela indefinita BL, y en ella se tomará la parte BG quarta proporcional á las tres lineas AD, BE, AF; tirando FG, esta será la linea que se pide.

Por-

Porque siendo por construccion $AD : AF :: BE : BG$, por lo demostrado (539) AB, DE y FG irán á concurrir á un mismo punto. Fig. 91.

545. Cuestion IV. *Construir una escala general muy exacta, conocida con el nombre de* escala de mil partes. 92.

Se dividirá la linea AB que ha de contener mil partes, sean varas, pies ú otra medida qualquiera, en diez partes iguales AO, $O100$ &c. y cada una de estas divisiones representará 100 varas. En los estremos A y B de la linea AB se levantarán las perpendiculares iguales AC, BE de la longitud que se quisiere, que se dividirán en diez partes iguales cada una y por los puntos de division se tirarán paralelas á la linea AB. Se dividirán igualmente en diez partes iguales las lineas AO y CD, y desde los puntos O, 10, 20, 30 &c. del lado inferior AB se tirarán rectas á los puntos 10, 20, 30 &c. del lado superior DC, y estará concluida la escala.

Darémos la razon en que se funda la construccion de esta escala, manifestando al mismo tiempo uno de los usos para que sirve.

Supongamos, por egemplo, que nos convenga tomar en esta escala una linea que contenga 458 pies. Por decontado, los 400 pies cogen la distancia $O400$ de la escala; vamos á buscar los 58 pies restantes.

Como las lineas AC y OD de la escala están divididas en diez partes iguales, la parte tu que corresponde al primer punto de division, representará un pie, pues por estar cortado proporcionalmente (534) el triángulo $OD10$ con la paralela tu, tendrémos $OD : Ot :: D10 : tu$, y como por construccion Ot es la décima parte de OD, tu será tambien la décima parte de $D10$; pero $D10$ es la décima parte de CD que representa 100 pies; luego tu, que es la décima parte de $D10$, será la centésima parte de CD; esto es valdrá un pie. Por la misma razon la parte mr de la linea $m8$ correspondiente

al

Fig. al punto de division 8 de AC representará 8 pies. Y como rN ú $O50$ representa 50 pies, se sigue que la linea mN vale 58 pies. Si á esta linea $mN = 58$ pies se la añade la distancia $O400 = 400$ pies, la suma HN valdrá los 458 pies que se piden.

De la semejanza de las Figuras.

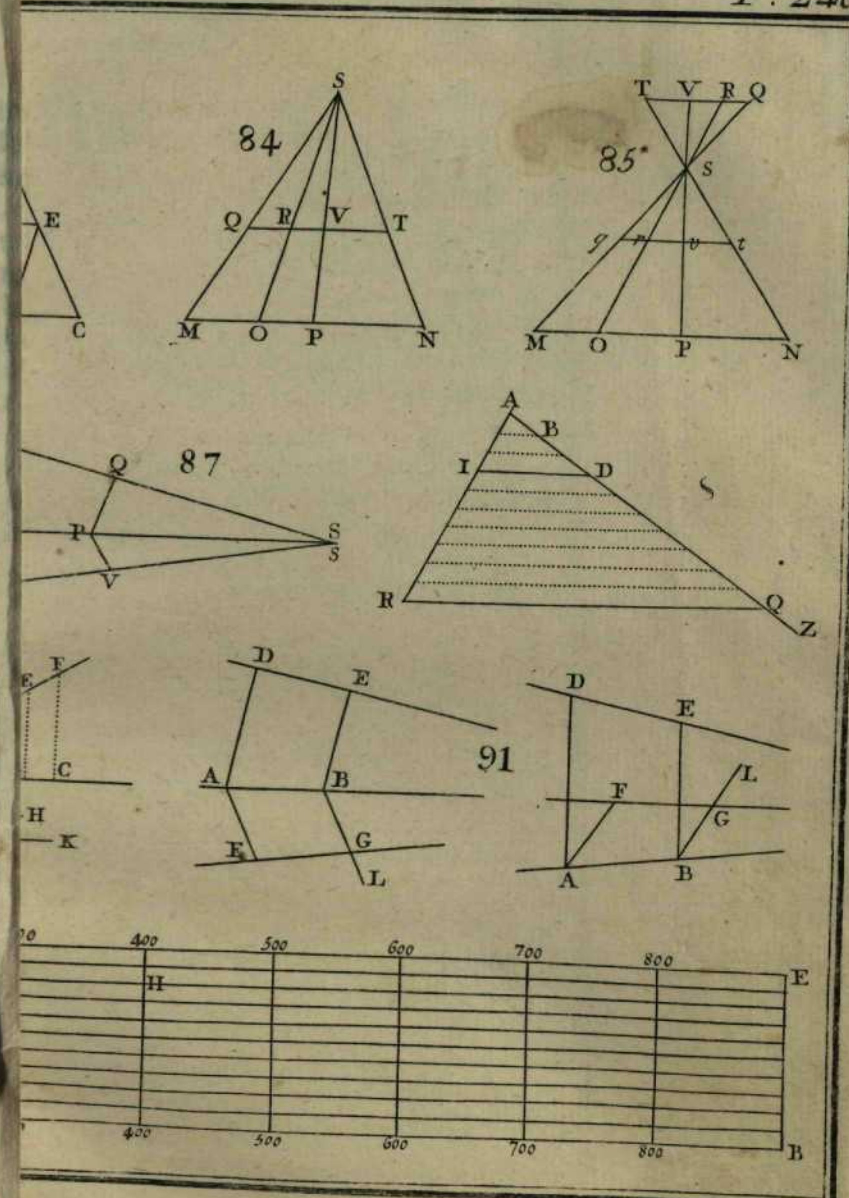
93. 546. Se dice que son *semejantes* dos figuras quando en la comparacion de una con otra, los ángulos de la una son iguales á los ángulos de la otra, y los lados de la primera proporcionales á los lados correspondientes de la segunda. Los dos triángulos ABC, abc serán semejantes si ademas de ser el ángulo A igual al ángulo a, el ángulo B igual al ángulo b, y el ángulo C igual al ángulo c, es $AB : ab :: AC : ac :: Bc : bc$.

Estos lados correspondientes se llaman *lados homólogos*, y para que se puedan llamar así dos lados es menester que los ángulos adyacentes al primero sean iguales á los ángulos adyacentes al segundo.

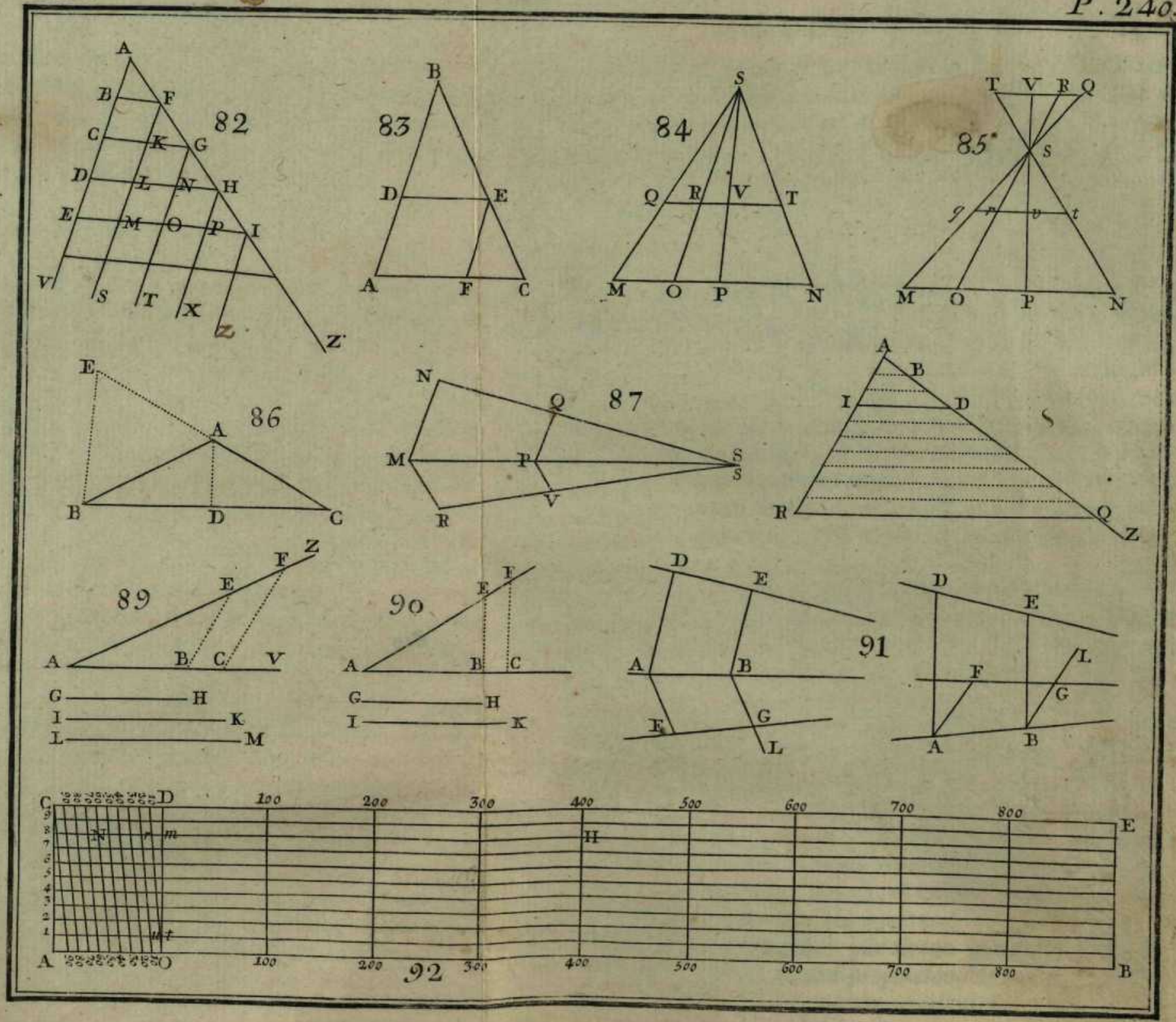
Se nos hace forzoso prevenir que *dos figuras de un mismo número de lados pueden tener todos sus ángulos iguales, sin ser por eso semejantes*; porque la igualdad de los ángulos no arguye que sean iguales las razones entre los lados comparados de dos en dos. Y recíprocamente, *dos figuras pueden tener todos sus lados proporcionales, sin que sean semejantes una á otra*; porque de la proporcion de los lados no se infiere que sean iguales los ángulos comprehendidos entre lados proporcionales. Y aunque lo que acabamos decir no se entiende con los triángulos, lo prevenimos para precaver las equivocaciones que en los demas polygonos podrían resultar de no tener presente esta advertencia.

93. 547. *Dos triángulos* ABC, abc *que tienen proporcionales sus tres lados homólogos, tienen los ángulos iguales cada uno al suyo, y son por lo mismo semejantes.*

So-



T. 1. P. 240.



Sobre los lados AB, AC del triángulo BAC tómense las partes Ab', Ac' respectivamente iguales á los lados ab, ac, y tírese $b'c'$. Ya que segun suponemos $AB : AC :: ab : ac$, será por construccion $AB : AC :: Ab' : Ac'$; luego la linea $b'c'$ divide los lados del triángulo ABC en partes proporcionales; luego es paralela (535) á la base BC, y proporcional á la misma base (534). Tendrémos, pues, $Ab' : b'c' :: AB : BC$; pero por el supuesto $AB : BC : ab :: bc$; luego $Ab' : b'c' :: ab : bc$; luego $b'c' = bc$, y por consiguiente ya que el triángulo $b'Ac'$ y el triángulo bac tienen sus tres lados iguales, serán (482) iguales. Pero el triángulo $b'Ac'$ es semejante al triángulo BAC, porque ademas de tener uno y otro los lados proporcionales, segun hemos visto; el ángulo A es comun á ambos, y los ángulos b', c' son respectivamente iguales á los ángulos B, C por razon de las paralelas BC, $b'c'$ (403); luego el triángulo bac será tambien semejante al triángulo BAC. Fig. 93.

548. *Dos triángulos* ABC, abc *son semejantes quando tienen un ángulo igual comprehendido entre dos lados proporcionales.* 93.

Sea el ángulo $A = a$, y supongamos que $ab : ac :: AB : AC$. Tomemos $Ab' = ab$, y tiremos $b'c'$ paralela á BC, y tendrémos (534) $Ab' : Ac' :: AB : AC$; luego $ab : ac :: Ab' : Ac'$; pero $ab = Ab'$; luego $ac = Ac'$; luego (484) los dos triángulos abc y $Ab'c'$ son iguales. Y como el triángulo $Ab'c'$ es semejante al triángulo ABC (547), pues por razon de la paralela $b'c'$ uno y otro tienen iguales sus ángulos (403), y proporcionales sus lados (534), es evidente que los triángulos ABC y abc son semejantes.

549. *Dos triángulos que tienen iguales los ángulos cada uno al suyo, tienen proporcionales sus lados homólogos, y son por consiguiente semejantes.* 93.

Supongamos el ángulo $a = A$, $b = B$, $c = C$. Tó-

Fig. mese en la AB la parte $Ab' = ab$, y tírese la paralela
93. $b'c'$ que dividirá (534) proporcionalmente los lados del triángulo ABC, y dará $Ab' : Ac' : b'c' :: AB : AC : BC$; luego los dos triángulos $Ab'c'$ y ABC son semejantes (547). Por otra parte, como el triángulo $Ab'c'$ es igual (483) al triángulo abc, pues por el supuesto $Ab' = ab$, $A = a$ y $b' = B = b$; los triángulos ABC y abc son semejantes.

550. De esta última proposicion inferirémos 1.°, que *quando dos ángulos de un triángulo son iguales á otros dos ángulos de otro triángulo cada uno al suyo, los dos triángulos son semejantes.*

Porque quando dos ángulos de un triángulo son respectivamente iguales á otros dos ángulos de otro triángulo, el tercer ángulo del primero es (480) indispensablemente igual al tercer ángulo del segundo.

551. 2.° Luego *dos triángulos rectángulos serán semejantes siempre que ademas del ángulo recto tengan un ángulo igual ó comun á los dos.*

Y asimismo, *dos triángulos isósceles serán semejantes siempre que el uno de los ángulos opuesto á los lados iguales fuere igual ó comun á uno y otro.*

552. 3.° Y pues dos ángulos que están vueltos ácia un mismo lado, y tienen sus lados paralelos, son iguales (409); *dos triángulos que tengan todos sus lados paralelos, tendrán tambien sus ángulos iguales cada uno al suyo, y serán por consiguiente* (549) *semejantes.*

553. 4.° Luego *dos triángulos que tienen sus lados perpendiculares cada uno al suyo, tendrán tambien estos mismos lados proporcionales, y serán por consiguiente semejantes.*

Porque si se le hace dár un quarto de conversion al uno de dichos triángulos, sus lados llegarán á ser paralelos á los del segundo.

94. 554. *Si desde el ángulo recto* A *de un triángulo rec-*

tángulo BAC *se baja una perpendicular* AD *al lado* Fig.
opuesto BC ; 1.° *los dos triángulos* ADB , ADC *serán* 94.
semejantes el uno al otro, y al triángulo BAC. 2.° *la perpendicular* AD *será media proporcional entre las dos porciones ó segmentos* BD y DC *de la hypotenusa.* 3.° *cada lado* AB *ó* AC *del ángulo recto será medio proporcional entre la hypotenusa y el segmento correspondiente* BD *ó* DC.

1.° Los triángulos BAD, DAC tienen un ángulo recto en D, y cada uno un ángulo comun con el triángulo BAC; luego son (551) semejantes á este último triángulo, y por consiguiente semejantes entre sí.

2.° Luego comparando los lados homólogos de los dos triángulos ADB y ADC, tendrémos $BD : AD :: AD : DC$.

3.° Comparando los lados homólogos de los triángulos ADB y BAC, sacarémos $BD : AB :: AB : BC$. Finalmente comparando los lados homólogos de los triángulos ADC y BAC, tendrémos $CD : AC :: AC : BC$.

Donde se vé que AD es media proporcional entre BD y DC; AB media proporcional entre BD y BC, y finalmente AC media proporcional entre CD y BC.

555. *Si desde dos ángulos homólogos* A *y* a *de dos figuras semejantes, se tiran diagonales* AC, AD; ac, ad *á los demas ángulos, los triángulos homólogos ó colocados del mismo modo en cada figura serán semejantes.* 95.

Porque siendo semejantes las dos figuras, segun suponemos, el ángulo b será igual al ángulo B, y el lado $AB : ab :: BC : bc$; luego los dos triángulos ABC, abc son semejantes (548); luego el ángulo BCA es igual al ángulo bca, y $AC : ac :: BC : bc$. Si de los ángulos iguales BCD, bcd se quitan los ángulos iguales BCA, bca, los ángulos residuos ACD, acd serán iguales; pero $BC : bc :: CD : cd$; luego ya que acabamos de probar que $BC : bc :: AC : ac$, tendrémos $CD : cd :: AC :$

Fig. 95. *AC*: *ac*; luego los dos triángulos *ACD*, *acd* serán (548) tambien semejantes. Lo mismo probarémos y del mismo modo de los triángulos *ADE* y *ade*, y de todos los triángulos que hubiere á mas de estos, si fuere mayor el número de los lados de la figura.

95. 556. *Si dos figuras* ABCDE, abcde *constan de un mismo número de triángulos semejantes, y dispuestos del mismo modo, serán semejantes.*

Porque los ángulos *B* y *E* son iguales á los ángulos *b* y *e*, pues son semejantes los triángulos: y por la misma razon los ángulos parciales *BCA*, *ACD*, *CDA*, *ADE* son iguales á los ángulos parciales *bca*, *acd*, *cda*, *ade*; luego los ángulos totales *BCD*, *CDE* son iguales á los ángulos totales *bcd*, *cde*, cada uno al suyo. Por otra parte, la semejanza de los triángulos nos dá esta serie de razones iguales *AB*: *ab*:: *BC*: *bc*:: *AC*: *ac*:: *CD*: *cd*:: *AD*: *ad*:: *DE*: *de*:: *AE*: *ae*; tomando en esta serie las razones cuyos términos son lados de los polygonos, sacarémos *AB*: *ab*:: *BC*: *bc*:: *CD*: *cd*:: *DE*: *de*:: *AE*: *ae*. Luego estos polygonos tienen tambien los lados homólogos proporcionales; luego son semejantes.

95. 557. Luego para *construir una figura semejante á otra figura propuesta* ABCDE, *y que tenga por lado homólogo á* AB *una linea dada* ab, se llevará la linea dada desde *A* á *f* en *AB*; por el punto *f* se tirará *fg* paralela á *BC*, que encuentre *AC* en *g*; por el punto *g* se tirará *gh* paralela á *CD*, que encuentre *AD* en *h*; finalmente por el punto *h* se tirará *hi* paralela á *ED*, y resultará una figura *Afghi* semejante á *ABCDE*.

95. 558. *Los contornos ó perímetros de dos figuras semejantes son entre sí como sus lados homólogos, ó sus diagonales homólogas*; esto es, si la figura *ABCDE* es semejante á la figura *abcde*, se verificará que *AB*+ *BC*+ *CD* + *DE* + *EA*: *ab* + *bc* + *cd* + *de* + *ea*:: *AB*: *ab*, ó :: *AD*: *ad* &c.

Porque en la serie de razones iguales *AB*: *ab*:: *BC*, *bc*::

bc:: *CD*: *cd*:: *DE*: *de*:: *AE*: *ae*, la suma de los antecedentes es á la suma de los consecuentes (245) como un antecedente es á su consecuente :: *AB*: *ab*; pero es evidente que la suma de los antecedentes es el perímetro de la figura *ABCDE*, y la suma de los consecuentes es el perímetro de la figura *abcde*; y por otra parte *AB*: *ab* :: *AD*: *ad*; luego *AB* + *BC* + *CD* + *DE* + *EA*: *ab* + *bc* + *cd* + *de* + *ea*:: *AB*: *ab*:: *AD*: *ad*. Fig. 95.

559. Si los polygonos fuesen regulares, siempre se verificará del mismo modo la proposicion; luego *los perímetros de los polygonos regulares son entre sí como sus lados homólogos, sus diagonales, sus radios rectos ú oblicuos.*

560. Luego 1.° *las circunferencias de los círculos son proporcionales á los radios, á los diámetros, á las cuerdas semejantes, y á los arcos semejantes.*

Porque podemos considerar los círculos como unos polygonos regulares de una infinidad de lados (531), en cuyo caso se confundirán por su pequeñez infinita los lados de los polygonos, que se pueden considerar como cuerdas de los círculos circunscriptos, con los mismos arcos que subtenden; y el perímetro del polygono no se distinguirá de la circunferencia del círculo, ni los radios oblicuos y rectos de los radios del círculo. Por consiguiente, los perímetros ó circunferencias son proporcionales á los radios, á los diámetros que son duplos de los radios, á las cuerdas semejantes, y á los arcos semejantes que son partes semejantes de los círculos cuyos son.

561. Luego 2.° si conociéramos á punto fijo la circunferencia de un círculo de diámetro conocido se podria determinar la circunferencia de otro círculo, cuyo diámetro fuese tambien conocido, haciendo esta proporcion: *el diámetro de la circunferencia conocida es á esta misma circunferencia, como el diámetro de la circunferencia que se pide es á esta segunda circunferencia.*

562. Pero para esto sería menester que supiéramos exac-

exactamente la razon que hay entre el diámetro y la circunferencia. Esta razon cabal hasta ahora no se ha hallado, bien que se conocen valores de ella tan aproximados que se pueden usar en la práctica sin ningun rezelo de error sustancial, pues aun quando se usára la misma razon cabal entre el diámetro, y la circunferencia, no por eso saldría con mayor exactitud la operacion.

Una de las razones entre el diámetro, y la circunferencia es la de 7 á 22, y la halló Arquimedes; Pedro Mecio halló la de 113 á 355; y últimamente se ha averiguado que el radio es á la semicircunferencia, y por consiguiente el diámetro á la circunferencia como 1: 3, 14159265358979932 &c. cuya aproximacion se ha continuado hasta ciento y veinte y siete decimales.

563. Qualquiera de estas tres razones es suficiente para *hallar la circunferencia de un círculo una vez conocido su diámetro*; por manera que si se pidiese quanto cogería la circunferencia de un círculo cuyo diámetro fuese de 20 pies, buscaríamos el quarto término de esta proporcion

$$7 : 22 :: 20 :$$

Este quarto término que es $62\frac{6}{7}$ es con muy corta diferencia la longitud de la circunferencia de un círculo de 20 pies de diámetro. Lo mismo hubiéramos hallado con cortísima diferencia si nos hubiéramos valido de la razon 113 : 355 ó de la de 1 : 3, 14159 &c.

564. Por medio de qualquiera de las tres razones espresadas entre el diámetro, y la circunferencia, podríamos *sacar el diámetro de un círculo si nos dieran conocida la circunferencia*, pues llamando C dicha circunferencia conocida, el quarto término de qualquiera de estas tres proporciones

$$22 : 7 :: C :$$
$$355 : 113 :: C :$$
$$3,14159 \text{ \&c} : 1 :: C :$$

se-

Fig.

sería el valor del diámetro que se busca.

565. Como en un mismo círculo las longitudes de los arcos son proporcionales al número de sus grados, es evidente que si se conoce la longitud de la circunferencia de un círculo ó su diámetro, se puede *hallar la longitud de un arco de un número de grados qualquiera*, haciendo esta proporcion : 360° son al número de grados del arco cuya longitud se busca, como la longitud de la circunferencia es á la del mismo arco.

Supongamos, por egemplo, que se nos pregunte ¿quántos pies tendrá un arco de 32° 40′ de un círculo de 20 pies de diámetro? Por lo dicho antes (563) hallarémos que la circunferencia es de $62\frac{6}{7}$ pies, y haciendo luego esta proporcion $360° : 32°40' :: 62\frac{6}{7} : 5\frac{19}{27}$, este quarto término $5\frac{19}{27}$ serán los pies que coge un arco de 32°40′ en un círculo de 20 pies de diámetro.

De las Lineas proporcionales en el círculo.

566 Dos lineas están cortadas en *partes recíprocamente proporcionales*, quando una de dichas lineas y su parte forman los estremos de una proporcion, y la otra linea y su parte forman los medios.

567. *Si desde un punto qualquiera* A *de un círculo se baja una perpendicular al diámetro, esta perpendicular será media proporcional entre las dos partes del diámetro* BC.

Tírense á los estremos del diámetro las cuerdas AB, 96.
AC; el ángulo A del triángulo BAC será recto (447), y los triángulos BAD, DCA serán semejantes (554), y darán $BD : AD :: AD : DC$; luego AD es media proporcional entre las dos partes del diámetro BD y DC.

568. Luego para *hallar una media proporcional entre dos lineas dadas* BD *y* DC; se juntarán las dos lineas dadas á continuacion una de otra, de modo que no formen

mas

Fig. mas que una sola linea *BC* que se dividirá por el medio
96. en *M*, y con un intervalo *BM* se trazará un semicírculo *BAC*; en el punto *D* donde se juntan las dos lineas dadas, se levantará la perpendicular *DA* que será (567) la media proporcional entre las partes *BD* y *DC* del diámetro, que son las lineas dadas.

569. *Toda cuerda* BA *tirada desde el estremo de un diámetro es media proporcional entre el diámetro y el segmento correspondiente* BD.

Porque los triángulos semejantes (554) *ADB*, *BAC* dan *BD* : *BA* : : *BA*: *BC*.

97. 570. *Las partes de dos cuerdas* CD, AB *que se cortan en un círculo, son recíprocamente proporcionales, esto es* AE : ED : : CE : EB.

Tírense *DA* y *BC*; los triángulos *DEA*, *BEC* tienen los ángulos en *E* opuestos al vértice, é iguales (378), y los ángulos *D* y *B* son tambien iguales (446), porque descansan sobre el mismo arco *AC*; luego serán semejantes (550) estos dos triángulos, y tendrémoss *AE*: *ED*:: *CE* : *EB*.

98. 571. *Si dos secantes* PC, PD *tiradas desde un mismo punto* P *fuera de un círculo, rematan en la parte cóncava* DC *de la circunferencia, las partes esternas* PA, PB *serán recíprocamente proporcionales á todas las secantes.*

Tírense las cuerdas *AD*, *BC*; los triángulos *PAD*, *PBC* serán semejantes (550) por tener el ángulo *P* comun, y abrazar los ángulos *D*, *C* el mismo arco *AB* (446; luego *PA* : *PB* : : *PD* : *PC*.

572. *Si desde un punto* P *fuera del círculo se le ti-*
99. *ran una tangente* PC, *y una secante* PB, *la tangente* PC *será media proporcional entre la secante entera* PB, *y su parte* PA *fuera del círculo.*

Porque si se tiran las cuerdas *CB*, *CA* al punto de contacto, resultarán dos triángulos semejantes (550) *CAP* y *CBP*, porque tendrán el ángulo *P* comun, é igua-

iguales los ángulos *CBP*, *ACP* que tienen por medi- Fig.
da la mitad del arco *CA* (442 y 444); luego *PB* : *CP*:: 99.
CP: *PA*.

573. Esta última proposicion nos enseña á *dividir* 100.
una linea dada BA *en media y estrema razon*, esto es á dividir una linea de modo que su parte mayor *BD* sea media proporcional entre toda la linea *AB*, y la parte menor *AD*.

Para este fin, en el estremo *A* de la linea *AB* levantarémos la *AC* perpendicular é igual á la mitad de la *AB*; desde el punto *C* con el radio *CA*, trazarémos un círculo; por los puntos *C* y *B* tirarémos la linea *BCF*, y desde el punto *B* con el radio *BE* describirémos el arco *ED* que cortará la *AB* de modo que *BA*: *BD* : : *BD* : *DA*.

Porque como *BA* es (428) tangente, tendrémos (572) *BF*: *BA* : : *BA* : *BE*, ó (244) *BF* — *BA*: *BA*:: *BA* — *BE* : *BE*; pero *BF* — *BA* = *BE* = *BD*, pues *BA* = 2 *CA* = *FE*, y tambien *BA* — *BE* = *BA* — *BD* = *DA*; luego substituyendo, *BD*: *BA* : : *DA*: *BD*, ó (243) *BA*: *BD* : : *BD*: *DA*.

De las Superficies.

574. Esta es la segunda de las tres especies de estension que hemos dado á conocer desde los primeros renglones de estos principios de Geometría; quiero decir, la estension en longitud y latitud.

Considerarémos la superficie plana, y con particularidad la que siendo terminada por lineas rectas se llama *rectilinea*.

De las superficies *curvilineas* solo considerarémos el círculo, y de las *mixtilineas* solo dos que tienen relacion con el círculo, y darémos á conocer mas adelante.

575. Con este motivo nos parece del caso prevenir que una *superficie curva* y una *superficie curvilinea*

Fig. *nea* son dos cosas muy distintas. Ya digimos (459) lo que es una superficie curva. Quando decimos que una superficie es curvilinea, solo queremos dár á entender que su perímetro se compone de una ó mas lineas curvas, aunque el espacio que dicho perímetro contiene sea una superficie plana; un círculo por egemplo, es una superficie curvilinea y plana al mismo tiempo.

En todo lo que hasta ahora hemos sentado acerca de las figuras, solo hemos atendido á su perímetro; desde aquí en adelante nos proponemos considerar el espacio que dicho perímetro encierra, y es propiamente lo que llamamos *superficie* ó *area*. Sentado esto:

101. 576. *Un triángulo rectilineo qualquiera* ABC *siempre es la mitad de un paralelogramo de igual base y altura que él.*

Porque si por el vértice del ángulo *C* imaginamos tirada una linea *CE* paralela al lado *BA*, y por el vértice del ángulo *A* otra linea *AE* paralela al lado *BC*, resultará un paralelogramo *ABCE* de igual base y altura que el triángulo *ABC* cuyo lado *AC* es la diagonal del paralelogramo. Y como hemos probado (501) que la diagonal de todo paralelogramo le divide en dos partes ó triángulos iguales; se sigue que cada uno de los dos triángulos *BAC* y *ACE* es la mitad del paralelógramo *ABCE*: luego &c.

102. 577. *Dos paralelogramos* ABCD, ABEF *que tienen una misma base* AB, *y están entre unas mismas paralelas ó tienen una misma altura, son iguales en superficie.*

Los triángulos *DAF*, *CBE* son totalmente iguales (484), porque los lados *AD*, *AF* del primero son respectivamente iguales (503) á los lados opuestos *BC* y *BE* del segundo, por ser estas lineas lados opuestos de paralelogramos. Por otra parte, los ángulos *DAF* y *CBE* comprehendidos entre estos lados iguales, son igua-

iguales tambien, por ser sus lados paralelos y estár vueltos ácia un mismo lado (409). Si de estos dos triángulos iguales *DAF*, *CBE* se quita el triángulo comun *CGF*, resultará el trapecio *ADCG* igual al trapecio *BGFE*; añadiéndoles á estas figuras iguales el triángulo *ABG*, resultará el paralelogramo *ABCD* igual al paralelogramo *ABEF*. Fig. 102.

578. Podemos, pues, inferir que *los triángulos de igual base y altura, ó que teniendo una misma base están comprehendidos entre unas mismas paralelas, son iguales en superficie*; pues son mitades de paralelogramos de una misma base y altura que ellos (576).

De la Medida de las superficies.

579. *Medir una superficie es determinar el número de veces que en dicha superficie cabe otra superficie conocida.*

Como la superficie que se toma por unidad de medida, ha de ser la mas sencilla que posible sea, se ha elegido el quadrado, por ser entre todas las figuras regulares la que por razon de la igualdad de sus lados, y de sus ángulos, se puede comparar mas facilmente con todas las demas figuras; por cuyo motivo *quadrar* ó *medir* una superficie es en la Geometría una misma cosa. Sin embargo, no es solo el quadrado el que se podría haber elegido por unidad de medida; qualquiera otra superficie haría los mismos oficios, y si se le ha dado al quadrado la preferencia, es, como dejamos dicho, porque con él se egecutan las medidas con mas facilidad.

580. Todo esto presupuesto, sea *abcd* la superficie que tomamos por unidad ó medida. Es evidente que 103.
quantas mas veces quepa en la base *AB* del paralelogramo que vamos á medir, la base *ab* de la superficie que nos sirve de medida, tantas mas veces cabrá en el pa-

Fig. paralelogramo esta misma unidad, sea la que fuere su
103. altura *EF*. Asimismo, quantas mas veces quepa en la altura *EF* del paralelogramo *ABCD* la altura *ef* de la superficie *abcd*, sea la que fuese su base *AB*, tantas mas veces cabrá tambien en el paralelogramo *ABCD* el paralelogramo *abcd*. Luego la superficie del paralelogramo que vamos á medir está con la superficie de la unidad en razon compuesta de los números de veces que en las dimensiones del paralelogramo caben las dimensiones de la unidad. De aquí inferirémos la regla siguiente.

Búsquese el número de veces que en la base AB *cabe la base* ab *de la unidad*; *búsquese tambien el número de veces que en la altura* EF *del paralelogramo que vamos á medir cabe la altura* ef *de la misma unidad*; *multiplíquense uno por otro estos dos números, el producto será el número de veces que se debe tomar la unidad* abcd *para sacar la superficie ó area del paralelogramo* ABCD.

102. 581. De donde se infiere 1.° que como el paralelogramo rectángulo *ABCD* es igual (577) al paralelogramo *ABEF* de la misma base y altura que él, para hallar la superficie de un paralelogramo qualquiera, se ha de multiplicar el número de veces que la base *ab* de la unidad cabe en la base *AB* del paralelogramo, por el número de veces que la altura *ef* de la unidad cabe en la altura del paralelogramo.

Es muy comun decir que *la superficie de un rectángulo es el producto de su base por su altura*; y aunque esta es una espresion abreviada que en la práctica no tiene inconveniente ninguno, y que por tanto nosotros mismos usarémos, sin embargo es de la mayor importancia observar que no se habla con propiedad quando se dice *multiplicar una linea por otra*; pues aun quando se pudiese multiplicar, y no se puede por no ser el multiplicador un número abstracto; como multiplicar és tomar cierto número de veces, si se multiplicase una linea por una linea, el producto que resultase sería una linea (34), y no una superficie como se pretende.

582. 2.° Luego para que dos paralelogramos sean iguales en superficie, basta que el producto de la base del uno multiplicada por su altura sea igual al producto de la base del otro por su altura; y por consiguiente *quando dos paralelogramos son iguales en superficie, tienen sus bases recíprocamente proporcionales á sus alturas*, esto es que la base y la altura del uno pueden considerarse como los medios de una proporcion, y la base y la altura del otro como los estremos, pues considerándolos así, el producto de los medios es igual al producto de los estremos, en cuyo caso forzosamente hay (242) proporcion.

583. 3.° Y como un triángulo es la mitad de un paralelogramo de una misma base y altura que él (576), *para hallar la superficie de un triángulo se ha de multiplicar la base por la altura, y tomar la mitad del producto*, ó lo que es lo mismo, *multiplicar su base por la mitad de su altura, ó su altura por la mitad de su base.*

584. 4.° Y por consiguiente, *quando dos triángulos son iguales, tienen sus bases recíprocamente proporcionales á sus alturas.*

585. *La superficie de un trapecio es igual al producto de su altura por la semisuma de las bases paralelas.* 104.

Si se tira la diagonal *DA*, resultarán dos triángulos *ABD*, *ACD* comprehendidos entre unas mismas paralelas *AB*, *CD*, y por consiguiente de una misma altura. La superficie del primero es igual á la mitad de *AB* multiplicada por su altura, y la superficie del segundo es igual á la mitad de *CD* multiplicada por la misma altura; luego la superficie del trapecio que es la misma que la de los dos triángulos, es igual

Fig. igual al produćto de su altura por la mitad de sus bases paralelas.

104. Si por el medio E de AC se tira EF paralela á las bases; esta linea EF será la mitad de la suma de las dos lineas AB y CD. Porque los triángulos semejantes CAD, EAG dán $CA : EA :: CD : EG$, y manifiestan que EG será la mitad de CD, pues EA es la mitad de CA. Y como EF es paralela á AB, DB estará cortada proporcionalmente á AC (534), y se probará del mismo modo que GF es la mitad de AB, considerando los triángulos semejantes DAB, DGF.

Luego *la superficie de un trapecio* ABCD *es igual al produćto de su altura por la linea* EF *tirada á distancias iguales de las dos bases opuestas.*

105. 586. *La superficie de un polygono regular* ABDEF *es igual al produćto del radio rećto* CM *por la mitad de su perímetro.*

Siendo regular el polygono, todos los triángulos ACB, BCD &c. que le componen, son totalmente iguales entre sí (520), y tienen (526) una misma altura CM; pero la superficie de uno de estos triángulos es igual (583) al produćto de su altura CM por la mitad de su base AB; luego la superficie entera que es igual á la de todos los triángulos juntos, es igual al produćto del radio rećto CM, que es la altura de los triángulos, por la mitad del perímetro de todo el polygono, mitad de las bases de todos los triángulos.

587. Y como la superficie de un triángulo cuya base fuese el perímetro de un polygono regular dado, y la altura la misma que la del radio rećto CM del polygono, sería (583) igual al produćto de la mitad de su base por su altura, resulta que *la superficie del polygono regular será igual á la de un triángulo que tenga por base el perímetro del polygono, y por altura la de su radio rećto.*

588. Una vez que se puede considerar (531) la circunferencia de un círculo como el perímetro de un polygono regular de una infinidad de lados, *la superficie de un círculo será igual al produćto del radio por la mitad de su circunferencia, ó al produćto de la circunferencia por la mitad del radio; ó á la superficie de un triángulo cuya base sea igual á la circunferencia del círculo, y la altura la misma que el radio.*

Porque el radio de un círculo qualquiera no se distingue del apotema del polygono regular de una infinidad de lados.

En virtud de esto, para *hallar la superficie de un círculo que tenga 20 pies de diámetro*, se calculará (563) su circunferencia, y se hallará que es de $62\frac{6}{7}$ pies. Multiplicando estos $62\frac{6}{7}$ pies por 5 que es la mitad del radio, saldrán $314\frac{2}{7}$ pies quadrados que será el valor de la superficie de dicho círculo.

589. Llamamos *sećtor de círculo* al espacio comprehendido entre dos radios CA, CB, y el arco correspondiente AB. 106.

Y se llama *segmento de círculo* el espacio $ADBA$ comprehendido entre el arco ADB, y la cuerda AB.

590. Una vez que un círculo se puede considerar (531) como un polygono regular de una infinidad de lados inscripto en dicho círculo, un sećtor de círculo se puede considerar como una porcion de este polygono regular, y su superficie como compuesta de una infinidad de triángulos que tienen su vértice en el centro, y por consiguiente tienen por altura el radio, y por bases el arco de dicho sećtor, pues la suma de estas bases es igual al arco. Luego para *hallar la superficie de un sećtor de círculo* ACB se ha de multiplicar el arco que le sirve de base por la mitad del radio.

Supongamos, por egemplo, que nos importe conocer la superficie de un sećtor de 32° 40′ en un círculo de 20 pies de diámetro. Buscarémos primero (565) la longitud del arco de 32° 40′ que será $5\frac{1}{2}\frac{9}{7}$; mul-

Fig. multiplicando luego $5\frac{19}{27}$ por 5 mitad del radio, sal-
106. drán $28\frac{14}{27}$; esta será la superficie de un sector de $32° 40'$.

591. Luego *para hallar la superficie del segmento* ADBA *se buscará la del sector, y de esta se restará la del triángulo, y el residuo será evidentemente la superficie del segmento.*

107. 592. *La superficie de una corona* X *se hallará buscando separadamente la superficie de los dos círculos que la componen, y restando la superficie del círculo menor de la superficie del círculo mayor, el residuo es la superficie de la corona.* Es evidente de suyo.

593. En virtud de las mismas reglas que hemos dado para la medida de las superficies regulares, podemos *hallar* tambien *la superficie de un polygono irregu-*
108. *lar qualquiera* ABCDE *cuyo perímetro se componga de líneas rectas.*

Porque una vez que sabemos ya (583) medir un triángulo, y que por otra parte sabemos tambien (514 y 515) que todo polygono se puede dividir en triángulos, buscando separadamente la superficie de cada uno de los triángulos en que está dividido el polygono, la suma de todas ellas compondrá la del polygono que se pide.

Sin embargo, aunque los dos modos indicados (514 y 515) de dividir un polygono en triángulos son tan seguros uno como otro, y es de todo punto arbitraria la eleccion del punto de division; no obstante eso, se ha de procurar que el polygono quede dividido en el menor número de triángulos posible, y aun si se puede, que cada dos triángulos tengan por base una linea comun, para sacar su area con una sola multiplicacion. Por egemplo, si tomamos la diagonal EC por base de los dos triángulos EDC, EBC, sacarémos su superficie multiplicando EC por la semisuma de las perpendiculares BH y DL. Sacando despues la superficie del trián-

triángulo ABE, con solas dos multiplicaciones sacaré- Fig.
mos la superficie total del polygono, lo que no se 108.
conseguiría dividiendo el polygono en triángulos desde un punto tomado dentro de él.

594. Por los mismos principios se puede *medir tambien la superficie de un polygono qualquiera termi-* 109.
nado por una linea curva irregular, resolviendo primero, conforme indica la figura, dicha superficie en un polygono rectilineo, y midiendo despues las superficies mixtilineas restantes ó bien como segmentos de círculo, pues siendo pequeñas sin error sustancial se pueden considerar así; ó bien como triángulos, pues entre una linea curva de muy corta estension, y una linea recta es muy corta la diferencia.

De la Reduccion y Division de las superficies.

El punto que vamos á tratar es, en muchas ocasiones, de la mayor utilidad para la medida y division de los campos; y aunque no nos detendremos mucho en él, daremos lo que nos parece suficiente para que los principiantes se puedan manejar por sí solos en este asunto, y hacer mayores adelantamientos.

595. Cuestion I. *Reducir un paralelogramo á quadrado*, esto es, *hacer un quadrado igual en superficie á un paralelogramo dado* ABCD. 110.

Desde el ángulo A se bajará AE perpendicular al lado opuesto BC; se buscará una media proporcional (568) entre la base BC, y la altura AE, cuya media proporcional será el lado del quadrado que se pide.

Porque en una proporcion continua (241) el producto de los estremos que ahora es la superficie del paralelogramo es igual al quadrado del término medio.

596. Luego 1.° una vez que un triángulo qualquiera es (576) la mitad de un paralelogramo de igual base

Fig. se y altura que él : para *formar un quadrado cuya superficie sea igual á la de un triángulo*, se construirá el quadrado sobre una media proporcional entre la altura y la mitad de la base, ó entre la base y la mitad de la altura.

597. 2.° Como la superficie de un círculo es igual á la mitad del producto de su circunferencia por el radio (588), *construyendo un quadrado sobre una media proporcional entre la mitad del radio y la circunferencia, ó entre la semicircunferencia y el radio, se hará un quadrado igual en superficie al círculo.* Pero como para hallar esta media proporcional es menester conocer el valor cabal de la circunferencia, cuyo valor solo sabemos hasta ahora por aproximacion (562), de aquí proviene que la cuestion de la quadratura del círculo no se puede resolver rigurosamente.

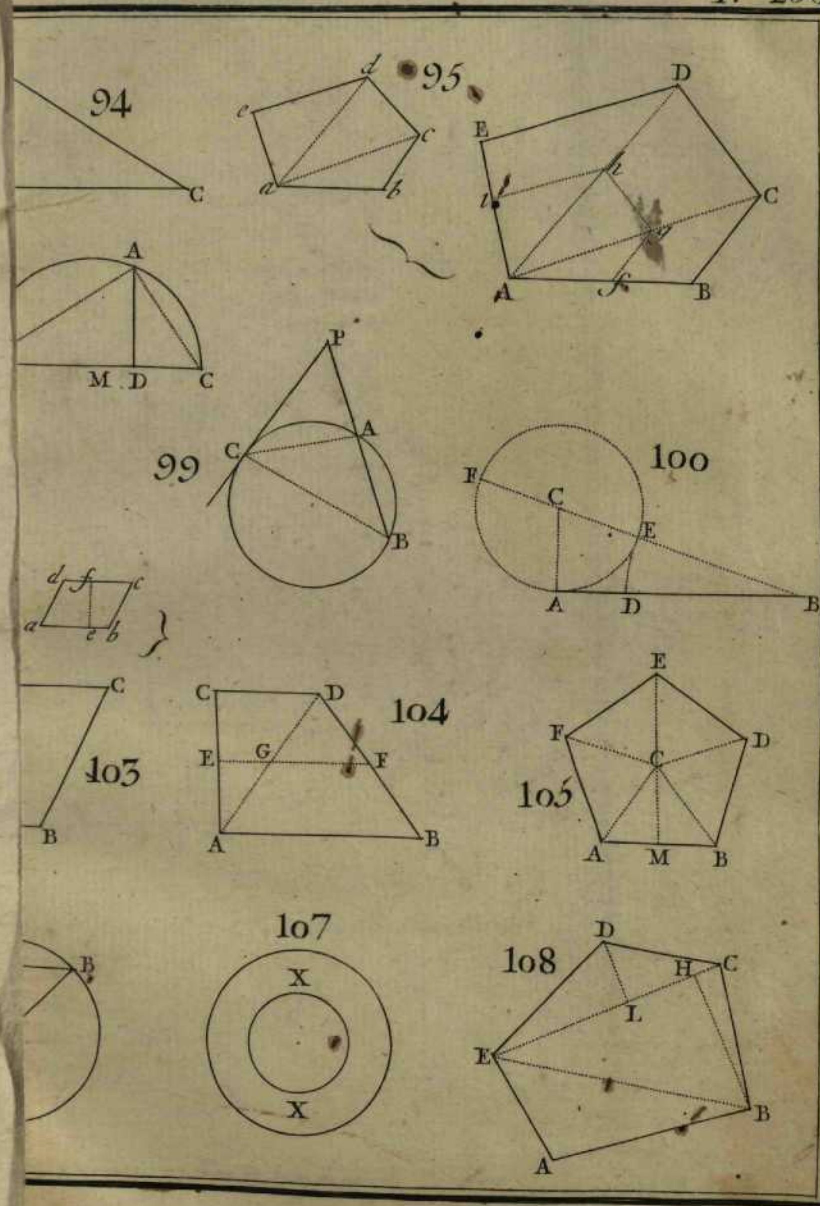
598. Cuestion II. *Reducir una figura rectilinea qualquiera á otra que la sea igual en superficie, y tenga un lado menos.*

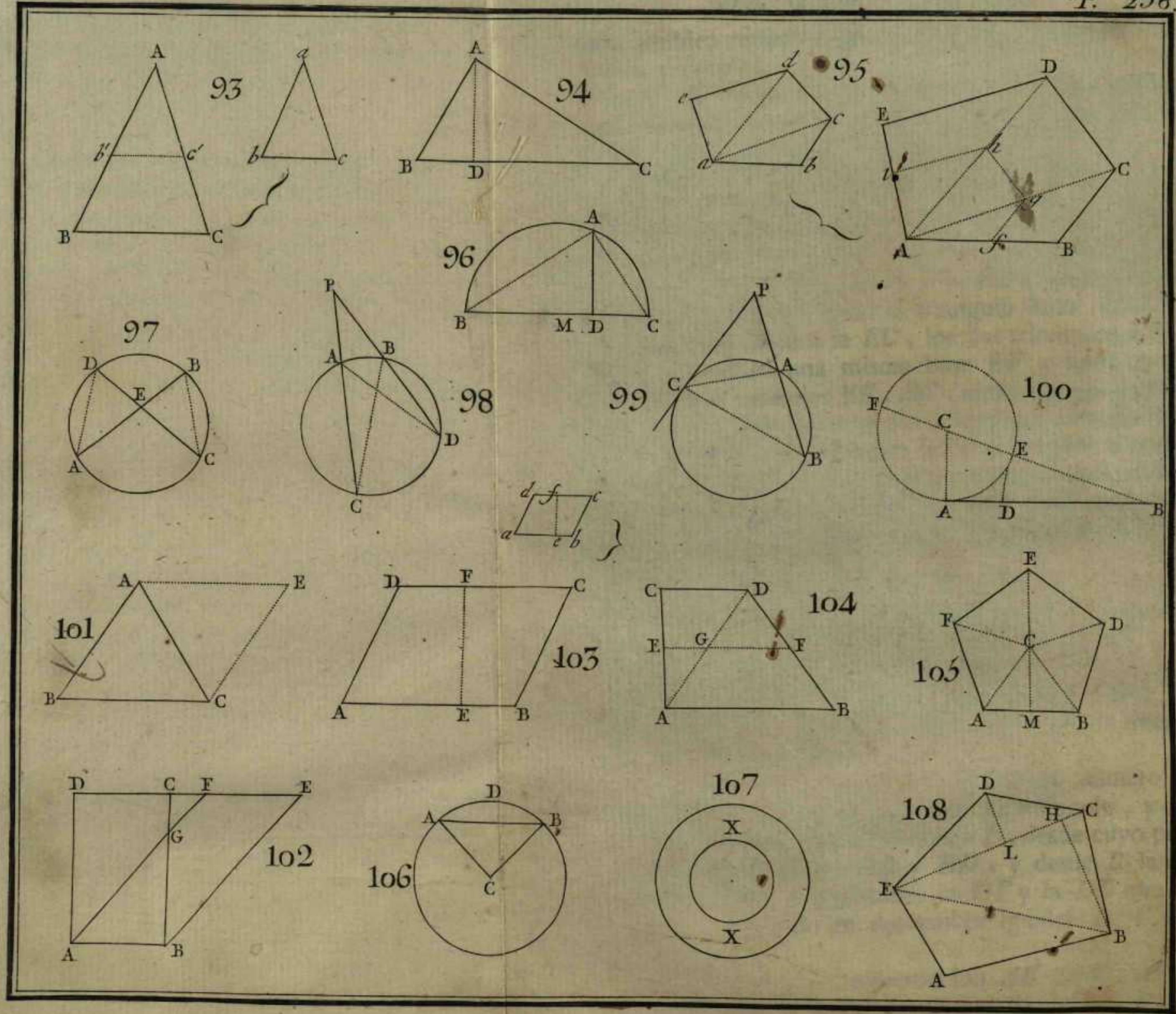
111. Sea el pentágono $ABCDE$ la figura que se quiere transformar; tírese la diagonal DB, y por el punto C la CF paralela á BD hasta que encuentre en F el lado AB prolongado; tírese tambien DF, y resultará un quadrilátero $AFDE$ igual al pentágono propuesto.

Porque al quadrilátero $ABDE$ le falta el triángulo BCD para ser igual al pentágono propuesto; luego si al quadrilátero $ABDE$ le añadimos el triángulo BDF igual al triángulo BCD, pues los dos tienen una misma base DB, y están entre unas mismas paralelas DB, CF (578), el quadrilátero $ABDE$ mas el triángulo BDF será igual al pentágono propuesto.

Del mismo modo se transformará el quadrilátero en triángulo; luego es facil reducir á triángulo qualquiera figura rectilinea; y como ya sabemos (596) hacer un quadrado igual á un triángulo dado, podremos

P. 258.




93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108

mos tambien reducir á quadrado qualquiera figura rectilinea propuesta. Fig.

599. Cuestion III. *Reducir un triángulo* ABC *á otro triángulo que tenga su vértice en un punto dado* D, *y le sea igual en superficie.* 112.

Desde el punto *D* se tirarán á los puntos *B* y *C* las lineas *DB*, *DC*, y por el vértice *A* del triángulo *ABC* la *AL* paralela á la base *BC*. Desde el punto *E* donde la *DB* corta la *AL*, se tirará la *EF* paralela á *DC*, y desde el punto *F* la *FD* al punto *D*. El triángulo *BDF* será igual al triángulo dado *ABC*.

Porque si tiramos la *EC*, los dos triángulos *EFC*, *EFD* que tienen una misma base *EF* y están entre unas mismas paralelas *EF*, *DC*, serán iguales (578), y si á cada uno de estos dos triángulos añadimos el triángulo *BFE*, el triángulo *BDF* será igual al triángulo *BEC*; pero *BEC* es igual al triángulo dado *ABC*, pues tiene la misma base *BC*, y está entre unas mismas paralelas *AL* y *BC*; luego el triángulo *BDF* es igual al triángulo *ABC*.

600. Si el punto *D* fuera dado en uno de los lados del triángulo *ABC*, haríamos la misma operacion, y la demostraríamos del mismo modo. La misma figura lo dá á entender bien claramente. 113.

601. Cuestion IV. *Dividir un triángulo* ABC *en quantas partes iguales se quiera, con lineas tiradas desde un punto dado* D. 114.

Se dividirá la base *AC* en el mismo número de partes iguales que se ha de dividir el triángulo, y sea por ahora en dos partes iguales en *E*, desde cuyo punto se tirarán las lineas *EB* y *ED*, y desde *B* la *BF* paralela á *DE*; y finalmente la *DF* y la *DB* que dividirán el triángulo en dos partes iguales *BDFA* y *DFCB*.

Porque siendo por construccion $AE = EC$, los dos triángulos *ABE* y *EBC* que tienen una misma altura,

 se-

Fig. 114. serán (578) iguales, y por consiguiente cada uno de ellos será la mitad del triángulo total *ABC*; y como por razon de las paralelas *BF*, *DE*, el triángulo *BFD* es igual al triángulo *BEF*, si de uno y otro se quita la parte comun *BOF*, el triángulo *OFE* será igual al triángulo *ODB*; luego si al triángulo *ABE* le quitamos el triángulo *FOE*, y le añadimos su igual *ODB*, resultará el trapezoide *AFDB* igual al triángulo *ABE*, y por lo mismo igual á la mitad del triángulo total *ABC*.

La segunda figura de este número sirve para quando el punto *D* dado está en uno de los lados del triángulo *ABC*; y en ella se demuestra del mismo modo que el trapezoide *AFDB* es igual al triángulo *ABE*; y por consiguiente á la mitad del triángulo *ABC*.

602. Cuestion V. *Dividir en dos partes iguales, por egemplo, un quadrilátero* ADCB *desde un punto* E *dado en uno de sus lados.*

Se tirarán las rectas *DE*, *DB*, y desde *C* la *CF*
115. paralela á la diagonal *DB*; cuya *CF* encontrará en *F* el lado *AB* prolongado. La recta *DF* (598) formará el triángulo *ADF* igual al quadrilátero propuesto *ABCD*. Divídase la base *AF* por el medio en *G*, y tírese *DG*; el triángulo *ADG* será la mitad del triángulo *ADF*, ó del quadrilátero *ABCD*. Finalmente desde *G* tírese *GH* paralela á *DE*, y tírese *EH* que dividirá en dos partes iguales el quadrilátero.

Por ser paralelas las rectas *DE*, *GH*, los dos triángulos *GHD*, *GHE* son iguales entre sí (578); quitándoles el triángulo comun *GHI*, el triángulo restante *DHI* será igual al restante *GIE*. Añadiendo uno y otro separadamente al mismo quadrilátero *AEID*, resultará el quadrilátero *AEHD* igual al triángulo *ADG*, y por consiguiente á la mitad del quadrilátero total *ABCD*.

116. 603. Cuestion VI. *Dividir un polygono en quantas partes iguales se quiera con lineas tiradas desde uno de sus ángulos.*

Sea el polygono *ABCDE* el que hemos de dividir en tres partes iguales, por egemplo. Empezarémos transformando dicho polygono en un triángulo (598), cuya base *FG* se dividirá en tres partes iguales en *H* é *I*, y tirando *DH*, *DI* estará dividido el polygono segun se pide. Fig. 116.

Porque cada uno de los triángulos *FDH*, *HDI*, *IDG* que tienen por base la tercera parte de *FG*, y la misma altura que el triángulo *FDG*, vale el tercio del triángulo *FDG*, y por consiguiente el tercio del polygono dado *ABCDE*.

604. En esta operacion suele ocurrir un caso en que hemos de parar la atencion. Supongamos que convenga *dividir un polygono* ABCDE *en muchas partes iguales, en quatro por egemplo, con lineas tiradas desde uno de sus ángulos* D. 117.

Despues de transformado dicho polygono en un triángulo (598), se dividirá su base *FG* en quatro partes iguales en *H*, *I*, *K*. Tirando *DH*, *DI*, *DK*, cada uno de los triángulos *FDH*, *HDI*, *IDK*, *KDG* será la quarta parte del triángulo *FDG*, y por consiguiente del pentágono *ABCDE*. Pero por quanto el punto *H* cae fuera del lado *AB*, se reducirá el triángulo *HDI* al quadrilátero *ALDI*, y esto se conseguirá facilmente tirando *HL* paralela á *DA*. Esta operacion es muy facil de demostrar en virtud de los principios que dejamos sentados.

Comparacion de las Superficies.

605. *Las superficies de los paralelogramos son entre sí generalmente como los productos de sus bases por sus alturas.*

Es evidente, pues siendo todo paralelogramo igual al producto de su base por su altura (581), sus superficies han de ser entre sí como estos productos que les son iguales.

Fig. 606. Luego *quando dos paralelogramos tienen una misma base, son entre sí como sus alturas; y quando tienen una misma altura, son entre sí como sus bases.*

Porque no se altera la razon de los produćtos omitiendo en cada uno el faćtor que tengan comun.

607. Luego como los triángulos son mitades de paralelogramos (576) de una misma base y altura que ellos, *los triángulos que tienen una misma altura son entre sí como sus bases; y los que tienen una misma base ó bases iguales, son entre sí como sus alturas.*

118. 608. *Las superficies de los paralelogramos semejantes son entre sí como los quadrados de sus lados homólogos.*

Porque las superficies de los paralelogramos $ABCD$ y $abcd$ son entre sí (605) como los produćtos de sus bases por sus alturas; esto es $ABCD : abcd :: BC \times AE : bc \times ae$. Pero si los paralelogramos $ABCD$, $abcd$ son semejantes, y si AB y ab son dos lados homólogos, los triángulos AEB, aeb serán semejantes (550), porque además del ángulo rećto en E y e, han de tener tambien el ángulo B igual al ángulo b: tendremos, pues, $AE : ae :: AB : ab$ ó $:: BC : bc$, por ser semejantes los paralelogramos; luego en los produćtos $BC \times AE$ y $bc \times ae$ podemos substituir la razon de $BC : bc$ en lugar de la de $AE : ae$ que es su igual, y entonces la razon de estos produćtos será la de $(BC)^2 : (bc)^2$; luego $ABCD : abcd :: (BC)^2 : (bc)^2$; y como es lícito tomar por base el lado que se quisiere, queda probado generalmente que las superficies de los paralelogramos semejantes son entre sí como los quadrados de sus lados homólogos.

609. *Los triángulos semejantes son tambien entre sí como los quadrados de sus lados homólogos.*

Porque son mitades (576) de paralelogramos de igual base y altura que ellos, y tienen entre sí las mitades la misma razon que los todos.

Las

610. *Las superficies de dos figuras semejantes qualesquiera son entre sí como los quadrados de sus lados homólogos, y de sus diagonales homólogas.* Fig.

Los triángulos homólogos en que pueden dividirse dos figuras semejantes (555), son evidentemente partes semejantes de dichas figuras; luego los triángulos son entre sí como las figuras enteras; pero dichos triángulos homólogos semejantes son entre sí (609) como los quadrados de sus lados homólogos; luego las dos figuras semejantes son tambien entre sí como los quadrados de sus lados homólogos.

611. Luego 1.° *las superficies de los polygonos regulares semejantes son entre sí como los quadrados de sus lados homólogos, de sus perímetros, de sus radios rećtos y oblicuos*; pues los lados homólogos son entre sí como los perímetros (559), los radios rećtos y oblicuos.

612. Luego 2.° *los círculos, y por consiguiente los semicírculos son entre sí como los quadrados de las circunferencias, de los radios y de los diámetros.*

Porque podemos considerar los círculos (531) como polygonos regulares semejantes de una infinidad de lados.

613. Hemos visto (554) como una perpendicular bajada desde el vértice del ángulo rećto de un triángulo rećtángulo á la hypotenusa, divide el triángulo en otros dos semejantes al triángulo grande, y semejantes entre sí; luego en virtud de lo demostrado (609), $BAC : BAP : PAC :: (BC)^2 : (AB)^2 : (AC)^2 ::$ 119.
$BCHK : ABFG : ACDE$; pero $BAC = BAP + PAC$; luego $BCHK = ABFG + ACDE$; esto es, que *el quadrado de la hypotenusa es igual á la suma de los quadrados de los otros dos lados que forman el ángulo rećto.*

614. Luego una vez que $BAC : BAP : PAC :: (BC)^2 : (BA)^2 : (AC)^2$, y que los triángulos BAC, BAP, PAC que tienen una misma altura PC han de ser (607) entre sí como sus bases; será $BAC : BAP : PAC :: BC : BP : CP$, y por consiguiente tambien se-

Fig. será $(BC)^2 : (BA)^2 : (AC)^2 :: BC : BP : CP$; luego
119. *el quadrado formado sobre la hypotenusa tiene con los quadrados formados sobre los otros dos lados, la misma razon que la hypotenusa con los segmentos correspondientes á dichos lados.*

120. 615 2.° Luego *los quadrados de las cuerdas* BA, BE *tiradas desde el estremo de un diámetro* BC, *son entre sí como las porciones* BD, BF *que cortan en dicho diámetro las perpendiculares que se le bajan desde los estremos de dichas cuerdas.*

Porque si desde los estremos A y E de las cuerdas se tiran al otro estremo C del diámetro las cuerdas AC, EC, el triángulo rectángulo BAC (447) dá $(BC)^2 : (BA)^2 :: BC : BD$ (614), y el triángulo rectángulo BEC dará $(BC)^2 : (BE)^2 :: BC : BF$. Luego $(BA)^2 : (BE)^2 :: BD : BF$.

616. 3.° Luego *el círculo trazado sobre la hypotenusa será igual á la suma de los círculos trazados sobre los otros dos lados que forman el ángulo recto.*

121. Porque si sobre BC, BA, AC como diámetros se trazan los semicírculos BPC, BMA, ANC, estos semicírculos serán entre sí como los quadrados de sus diámetros (612), esto es $BPC : BMA : ANC :: (BC)^2 : (BA)^2 : (AC)^2$; pero $(BC)^2 = (BA)^2 + (AC)^2$ (613) ; luego $BPC = BMA + ANC$; por otra parte los semicírculos tienen entre sí la misma razon que los círculos enteros ; luego &c.

617. En esta última proposicion se funda un método para *hacer dos círculos que sean entre sí en la razon dada de* m *á* n.

122. Para este fin se tomarán dos lineas BD y DC que sean entre sí como $m : n$; si fuere $m : n :: 1 : 3$, se tomará $DC = 3BD$, y se juntarán de modo que no formen mas que una linea BC que se dividirá por el medio en M. Desde este punto como centro, y con un radio MB se trazará un semicírculo, y desde el pun- Fig.
to D se levantará la perpendicular DA que le encuen- 122.
tre en A ; se tirarán las cuerdas AB y AC, y los círculos que se trazaren sobre estas cuerdas como diámetros serán entre sí $:: m : n$.

Porque $(BA)^2 = BC \times BD$ (569), y por la misma razon $(CA)^2 = BC \times CD$; luego $(BA)^2 : (CA)^2 : BC \times BD : BC \times CD :: BD : CD :: 1 : 3$; pero los círculos formados sobre BA y CA como radios ó diámetros están (612) en razon de $(BA)^2 : (CA)^2$; luego tambien estarán en razon de $BD : CD$ ó de $1 : 3$, como se pide.

618. *Si un quadrado y un pentágono fuesen ambos regulares é isoperímetros, el que mayor número de lados tuviere, será mayor en superficie : quiero decir, que en general de las figuras regulares isoperímetras aquella tiene mayor superficie que mas lados tiene.*

Porque si inscribimos un círculo en cada una de las 123.
dos figuras propuestas, y tiramos los radios CA y CB, el pentágono será igual al producto de la mitad de su perímetro por el radio CB (586), y el quadrado será tambien igual al producto de la mitad de su perímetro por el radio CA ; ya que los perímetros son iguales por la suposicion, el pentágono y el quadrado son entre sí como los radios CB y CA. Pero el radio CB es mayor que el radio CA ; porque si fuesen iguales estos dos radios, sus dos círculos lo serían tambien ; y por consiguiente el perímetro del pentágono sería menor que el perímetro del quadrado, porque de todos los polygonos regulares circunscriptos á círculos iguales, el que mayor número de lados tiene, tiene menor perímetro (530). Pero son iguales, segun suponemos, los perímetros del pentágono y del quadrado ; luego el círculo del pentágono ha de ser mayor que el del quadrado : luego el radio CB es mayor

Fig. yor que CA; luego la superficie del pentágono es mayor que la del quadrado.

Lo propio se probará por el mismo camino respecto de otros dos polygonos regulares isoperímetros, de los quales el uno tuviese mas lados que el otro.

619. Luego *ya que el círculo es un polygono de una infinidad de lados* (531), *contiene mas superficie que otra qualquiera figura, cuyo perímetro es igual.*

De los Planos.

620. Dejamos dicho desde el principio (330) que por *plano* se entiende una superficie tan lisa que se la puede aplicar en todos sus puntos sin que quede hueco ninguno una regla, ó una linea recta.

621. Por consiguiente, *por una linea recta pueden pasar una infinidad de planos*, así como por un mismo punto pueden pasar infinitas lineas rectas.

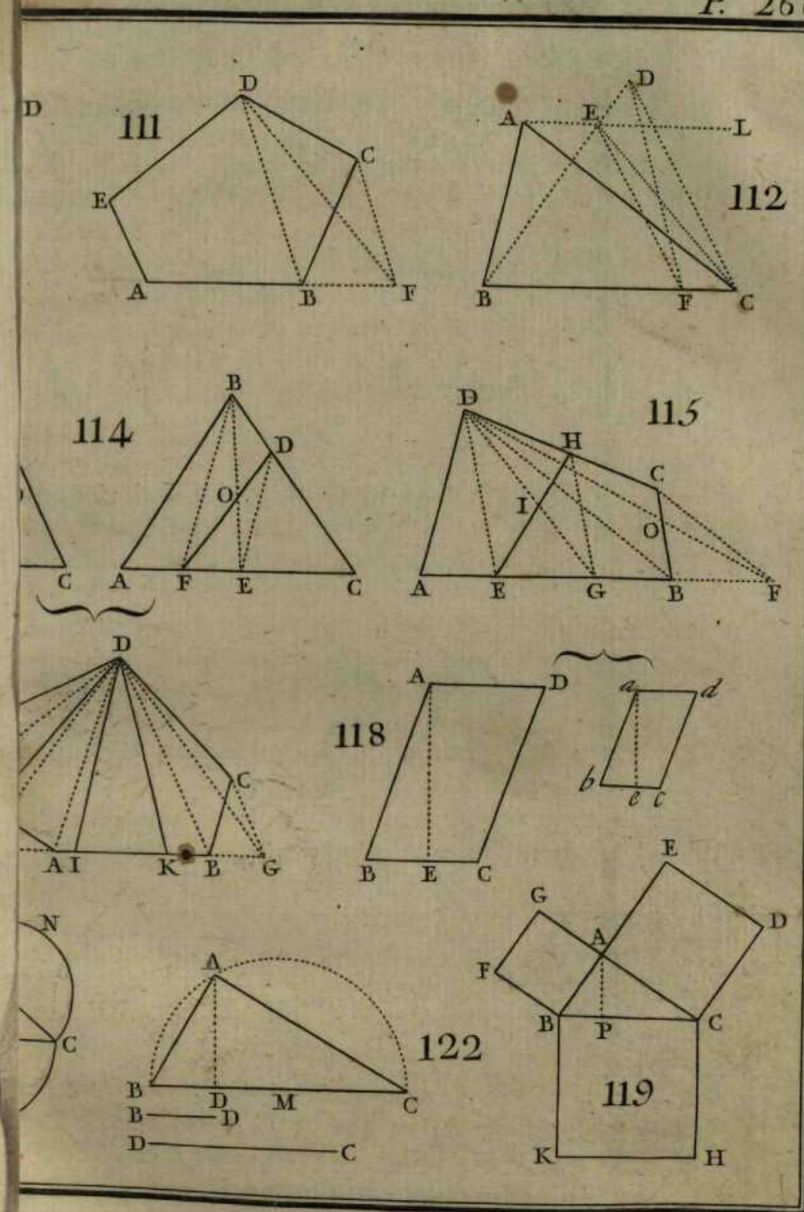
622. Luego 1.° *una linea recta ó dos puntos qualesquiera no son bastantes para determinar la posicion de un plano; son menester tres puntos por lo menos para que quede enteramente determinada.*

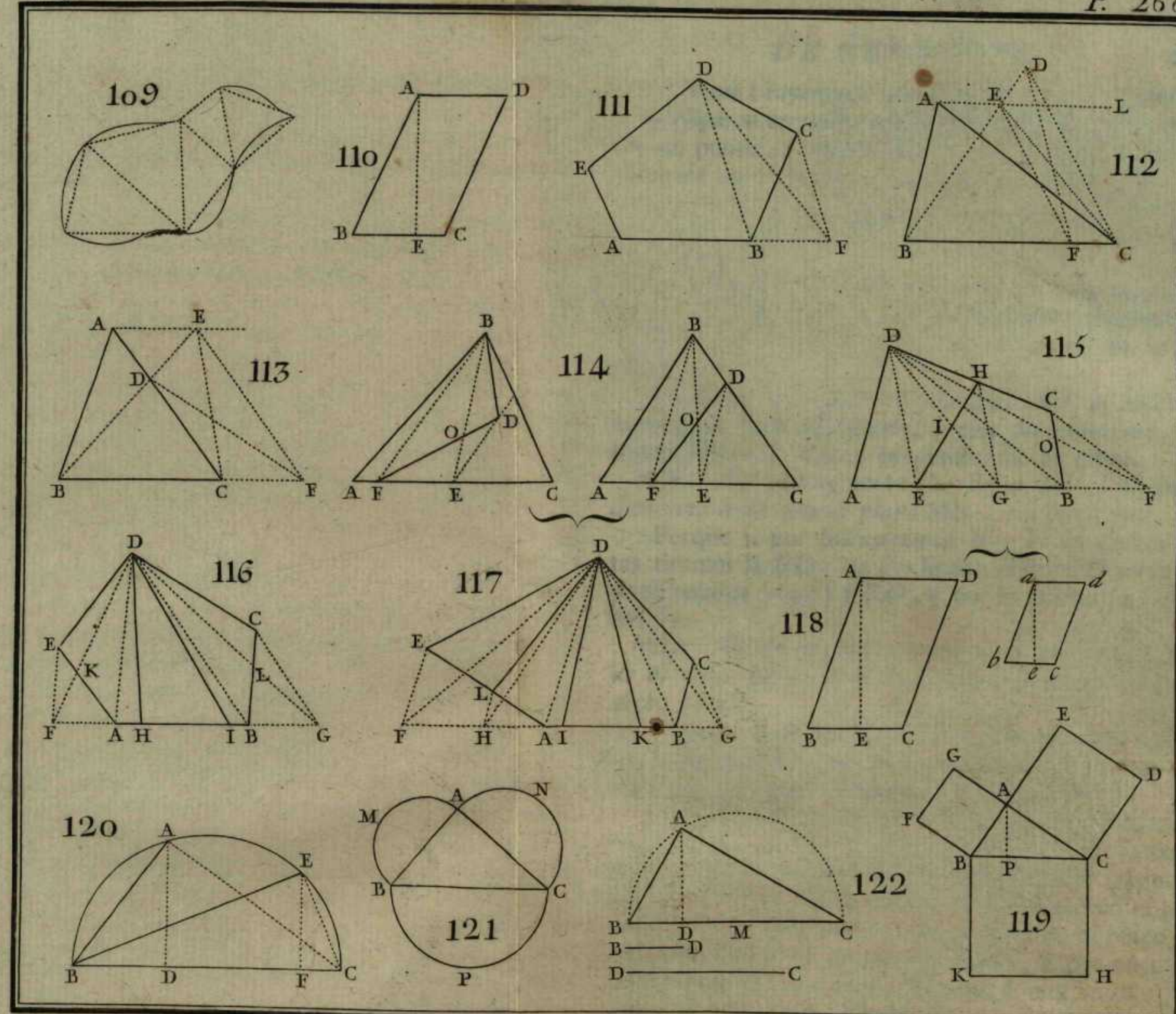
Porque si se tiran tres lineas rectas á estos puntos, formarán un triángulo que es una superficie plana. Luego si por tres puntos dados mas arriba ó mas abajo de un plano qualquiera se hace que pase otro plano, quedará enteramente determinada la posicion del último plano respecto del primero.

623. 2.° *La interseccion de dos planos es una linea recta.*

Porque si tomamos dos puntos en dicha interseccion comun, la recta que pase por estos dos puntos, ha de estár enteramente en cada uno de los dos planos, segun suponemos (620). Luego la comun seccion de dos planos es una linea recta.

624. 3.° *Dos lineas rectas paralelas están en un mis-*




109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122

mismo plano ; tambien lo están dos rectas que se cortan. Fig.

Porque si en cada una de estas últimas lineas se toma un punto , y desde uno á otro se tira una linea, resultará un triángulo cuyo vértice estará en el punto de interseccion de dichas rectas ; luego las rectas que se cortan y son los lados de dicho triángulo , están en un mismo plano.

625. *Una linea* AB *perpendicular á un plano* MN *es perpendicular á todas las demás lineas puestas en el mismo plano , que pasen por el estremo* B *de la perpendicular.* 124.

Porque si no fuera así , la linea *AB* se inclinaría ácia algun lado del plano ; y esto no puede ser , pues suponemos que *AB* es perpendicular al plano.

626. Por consiguiente *dos lineas* AB , CD *perpendiculares á un mismo plano* MN , *son paralelas.* 125.

Porque si por los estremos *B* y *D* de dichas rectas tiramos la *BD* , las dos lineas *AB* y *CD* serán perpendiculares (625) á *BD* , y por lo mismo (412) paralelas.

627. *Desde un punto tomado en un plano ó fuera de él no se puede tirar mas que una perpendicular á dicho plano.*

Porque si se pudieran tirar dos , desde un mismo punto se podrian tirar dos perpendiculares á una misma recta , y esto es imposible (384 y 385).

628. Luego si un plano *AB* es perpendicular á otro *CD* , y por un punto qualquiera G de su comun seccion se levanta una perpendicular *FG* al mismo plano *CD* , esta recta estará enteramente en el plano *AB*. Porque á no hallarse dicha recta en el plano *AB*, se podria tirar en un mismo plano , y por un mismo punto mas de una perpendicular á una misma recta *AE* , y esto es un absurdo (385 y 627). 126.

629. Luego 1.° si un plano *AB* fuere perpendicular á otro plano *CD* , pasará forzosamente por to-

das

Fig. das las perpendiculares á la comun seccion *AE*.

126. 630. 2.° Y recíprocamente, si una linea *FG* fuere perpendicular á un plano *CD*, y otro plano *AB* pasare por *FG* cogiéndola, el plano *AB* será perpendicular al plano *CD*.

127. 631. *La inclinacion de dos planos* AP, QB *se mide por el ángulo* CDE *que forman dos lineas* CD, DE, *perpendiculares á la comun seccion* AB *de los planos, tiradas una en el plano* QB, *y otra en el plano* AP.

Porque si concebimos el punto *C* sobrepuesto al punto *E*, y que dando despues el plano *QB* la vuelta al rededor de la linea *AB*, ande el punto *C* el arco *EC*, es evidente que este arco medirá (361) el ángulo *CDE*, que es evidentemente el mismo que forman los dos planos.

632. De aquí se infiere 1.° que siendo la inclinacion de dos planos la misma que la de las perpendiculares á un mismo punto de su seccion comun, se les puede aplicar á los planos todo lo que dejamos sentado (374 &c.) acerca de las lineas que se encuentran, y por consiguiente:

Si dos planos se cortan, los ángulos opuestos al vértice son iguales (378).

633. 2.° *Todos los ángulos formados por muchos planos que se cortan en una linea, valen* 360° (375).

634. 3.° *Quando dos planos paralelos son cortados por otro plano, los ángulos alternos internos, ó alternos esternos son iguales* (404 y 405); *y los ángulos internos ó esternos de un mismo lado valen juntos dos ángulos rectos* (406 y 407).

635. 4.° Y recíprocamente *quando en dos planos cortados por otro plano, se verifique alguna de estas condiciones, dichos dos planos serán paralelos* (408).

128. 636. *Las intersecciones* AB, CD *de dos planos paralelos* PQ, MN *cortados por otro plano* ABCD, *son lineas paralelas.*

Por-

Porque si las lineas *AB*, *CD* que son (623) lineas rectas, no fuesen paralelas, se encontrarían, y por consiguiente los planos *PQ*, *MN* se encontrarían tambien; y esto es imposible, pues suponemos que son paralelos; luego &c. Fig. 128.

637. *Si dos planos* EF, DG *son perpendiculares á un mismo plano* MN, *su comun seccion* AB *será tambien perpendicular á dicho plano.* 129.

Porque como en el punto *B* en donde la comun seccion de los planos *EF*, *DG* encuentra el plano *MN*, se puede levantar una perpendicular á dicho plano, que pasará enteramente por el plano *DG* (628), y por el mismo punto *B* se puede levantar tambien una perpendicular al plano *MN* que pasará enteramente por el plano *EF*; y por otra parte como desde un punto *B* no se le puede (627) levantar á un plano mas que una perpendicular, es evidente que esta linea estará á un mismo tiempo en el plano *DG* y en el plano *EF*; luego la interseccion comun de los dos planos es perpendicular al plano *MN*.

638. Llamamos *ángulo sólido* el espacio indefinito *ABCD* que encierran muchos ángulos planos *DAB*, *BAC*, *CAD* que se juntan en un mismo punto *A*. 130.

639. Se necesitan por lo menos tres ángulos planos para formar un ángulo sólido, y quando *un ángulo sólido* A *resulta del concurso de tres ángulos planos, dos ángulos planos* BAD, DAC *qualesquiera siempre son mayores que el tercero* CAB.

Tírese á arbitrio la linea *BC*, y hágase el ángulo $BAE = BAD$, y la linea $AD = AE$; tírese *BD* que será igual á *BE*; por ser iguales los triángulos *BAD*, *BAE* (484); tírese tambien *CD*. En virtud de esto en los triángulos *DAC*, *CAE* que tienen los lados *DA*, *AE* iguales entre sí, y el lado *AC* es comun, la base *DC* del primero es mayor que *CE* base del segundo, porque $BD + DC > BC$ (471); luego si de

la

Fig. la suma de aquellas se quita la linea BD, y de la
130. linea BC se quita $BE = BD$, resultará $DC > CE$; luego el ángulo CAE será menor que DAC, y el total BAC será menor que la suma de los dos ángulos BAD y DAC.

131. 640. *La suma de todos los ángulos planos, sean quantos se quiera, que forman un ángulo sólido, jamás llega á valer quatro ángulos rectos ó 360°.*

Concíbase por debajo del vértice S del ángulo sólido un plano qualquiera $ABDEF$ que corte todos los ángulos planos que forman el ángulo sólido. Desde el vértice S bájese la perpendicular SC al mismo plano, y tírense las lineas CA, CB, CD, CE, CF á todos los ángulos del polygono $ABDEF$. Es constante que todos los ángulos en C valen (375) quatro ángulos rectos, y lo es tambien que todos los ángulos ASB, BSD, DSE &c. son menores que sus correspondientes ACB, BCD, DCE &c. pues teniendo unos y otros ángulos bases comunes, los primeros tienen su vértice á mayor distancia de su base que los segundos; y como todos los primeros son los que forman el ángulo sólido en S, se sigue que todos los ángulos planos que forman un ángulo sólido, valen menos de quatro rectos.

De los Sólidos.

641. Dejamos dicho (329) que se llama *volumen* ó *sólido* todo lo que tiene las tres dimensiones longitud, latitud y profundidad. Esta es la tercera de las tres especies de estension que dimos allí mismo á conocer, y de la qual nos resta tratar, bien que nos ceñiremos á los sólidos terminados por superficies planas; y entre los que son terminados por superficies curvas, solo consideraremos el cilindro, el cono, y la esfera.

Del

Del Prisma y de la medida de su superficie. Fig.

642. Llamamos *prisma* todo sólido cuyas dos caras opuestas son dos planos iguales y paralelos, y las demas caras son paralelogramos. Podemos concebirle como formado por el movimiento de un plano BDF que se moviere paralelamente á sí mismo á lo largo de una linea recta AB. 132 y sig.

643. Los dos planos paralelos se llaman las *bases* del prisma. La perpendicular LM tirada desde un punto de la una de las bases á la otra, se llama la *altura del prisma*; y se llaman sus *aristas* las lineas como BA donde concurren dos caras consecutivas. 132.

644. El prisma es *recto* quando las aristas son perpendiculares á la base; en este caso todas las aristas son iguales á la altura. Y es *oblicuo* el prisma quando sus aristas no son perpendiculares á la base. 132. 133.

645. Los prismas toman el nombre 1.° del número de lados de su base, y por esta razon:

Si la base es un triángulo, se llama *prisma triangular*. 132.

Si la base es un quadrilátero, se llama *prisma quadrangular*, y así de los demas. 134.

646. 2.° Tambien le toman de la figura de su plano generador, y así:

Si el plano generador BF fuese un paralelogramo, en cuyo caso todas las caras lo serán tambien, el prisma toma el nombre de *paralelipípedo*. 134.

Quando el plano generador es un quadrado BD, y la arista AB es igual y perpendicular al lado BC de dicho quadrado, el prisma se llama *cubo*. Es evidente que las seis caras del cubo son seis quadrados iguales. 135.

Si el plano generador fuese un círculo $BEDF$, el prisma se llamará *cilindro*. Es *recto* el cilindro quando la linea LM que pasa por los centros de las dos bases opuestas y se llama *el ege* del cilindro, las es perpendicu- 136.

cu-

Fig. 137. cular ; y es *oblicuo* siempre que su ege LM está inclinado á las bases.

647. Podemos concebir el cilindro como engendrado ó bien por el movimiento del círculo $BEDF$ que se moviese paralelamente á sí mismo por una recta BA, ó bien por el movimiento de un paralelogramo $ABML$ que diese la vuelta al rededor de su lado LM que es el ege del cilindro.

648. Sentado esto, como las caras laterales del prisma son paralelogramos que sabemos (581) como se miden, y sus bases son figuras que igualmente sabemos (581 y sig.) medir, la suma total de todas las caras medidas separadamente compondrá la superficie del prisma; por esta razon sin detenernos á individualizar mas este punto, pasarémos á dar para lo mismo una regla concebida en los términos mas sucintos y generales que puede ser.

649. *La superficie de un prisma, sin contar la de las dos bases, es igual al producto de una arista* AF *multiplicada por el perímetro de una seccion* abcde *perpendicular á dicha arista.*

133. Porque como el plano $abcde$ es perpendicular á la arista AF, es perpendicular tambien á todas las demas aristas GB, HC &c. que son paralelas á AF. Luego si concebimos que las rectas AF, BG, CH &c. son las bases de los paralelogramos FB, GC, HD &c. las rectas ab, bc, cd &c. serán sus alturas. Luego la superficie lateral del prisma será $AF \times ab + BG \times bc + CH \times cd +$ &c. ó, por razon de ser iguales (503) las lineas AF, BG, CH &c. será $AF \times ab + AF \times bc + AF \times cd$ &c. ó finalmente $AF \times (ab + bc + cd +$ &c$)$.

650. De aquí inferirémos 1.° que quando un prisma es recto, la seccion $abcde$ es lo mismo que la base $ABCDE$, y la arista AF es entonces igual á la altura del prisma (644); luego *la superficie de un prisma recto* (no contando las dos bases) *es igual al producto del perímetro de la base multiplicado por la altura.*

651. 2° Luego *la superficie convexa de un cilindro recto es igual al producto de la altura* AB *por la circunferencia de su base inferior ó superior.* Fig. 136.

652. 3.° *Y la superficie convexa de un cilindro oblicuo es igual al producto de su lado* AB *multiplicado por la circunferencia de una seccion* bfde *perpendicular á dicho lado.* 137.

Para valuar la superficie del cilindro oblicuo es preciso contentarnos por ahora con medirla mecánicamente arrollando un hilo al cilindro por el mismo vestigio de la seccion. Este método aunque no es enteramente exacto, es por lo comun suficiente para la práctica.

Medida de la solidez de los Prismas.

653. *Medir un sólido es lo mismo que hallar el número de veces que cabe otro sólido, cuyas dimensiones son conocidas, en el sólido que se vá á medir.*

Supongamos, pues, que nos importe sacar la solidez de un prisma qualquiera $ABDFHGEC$, y que el sólido $abdfb$ sea la unidad de medida que hemos elegido. Es evidente que quantas mas veces quepa su base en la base $BDFH$ del prisma, tantas mas veces cabrá en este último el sólido que nos sirve de medida, sea la que fuese la altura de dicho prisma. Del mismo modo puntualmente, quantas mas veces quepa la altura ab de la unidad de medida en la altura AB del prisma ABD &c. tantas mas veces cabrá tambien en el prisma dicha unidad. Por consiguiente, la solidez del prisma está en razon compuesta de los números de veces que cabe en su base la base de la unidad sólida, y en su altura la altura de la misma unidad; de aquí se saca la regla siguiente, que es general para la medida de todos los prismas: 134.

Búsquese el número de veces que la base del sólido que

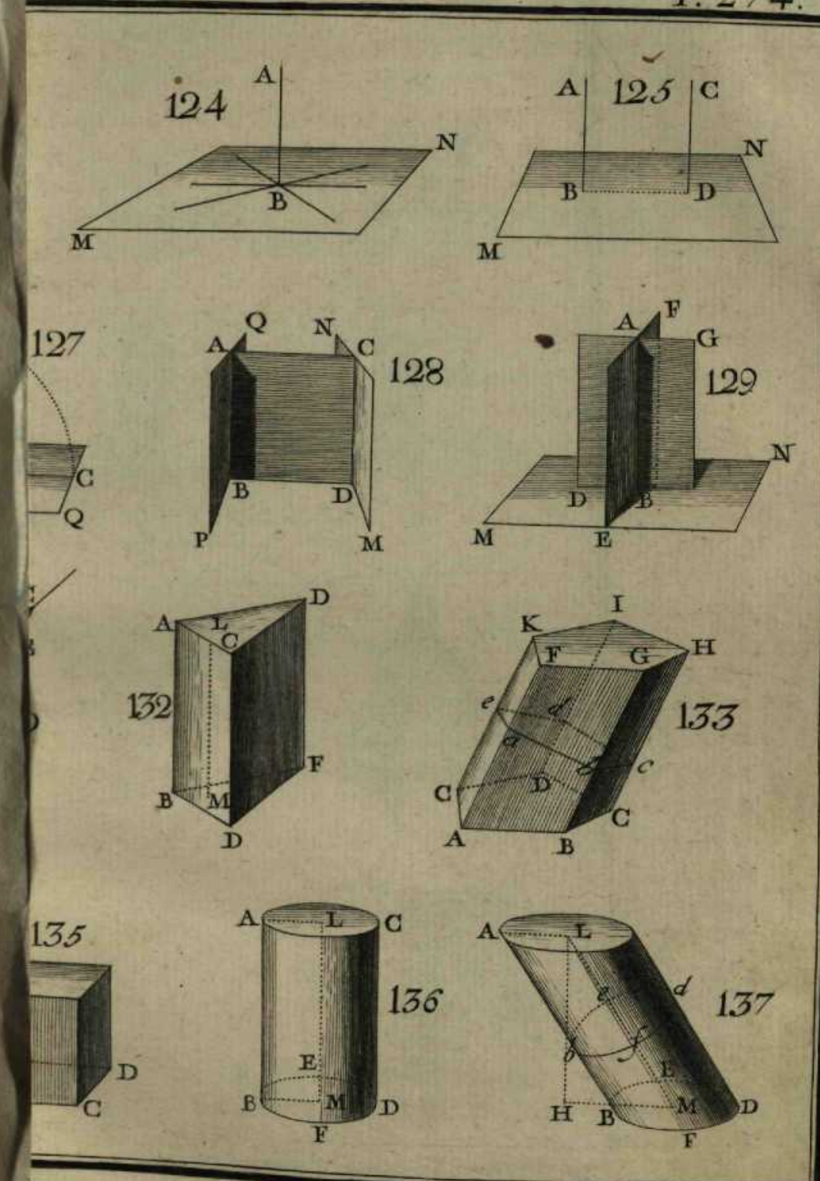
Fig. *que sirve de medida, cabe en la base del sólido que se vá á medir; búsquese tambien el número de veces que cabe en la altura del prisma la altura de la unidad sólida; multiplíquense uno por otro estos dos números, y su producto espresará el número de veces que se ha de tomar la unidad para sacar la solidez del cuerpo propuesto.*

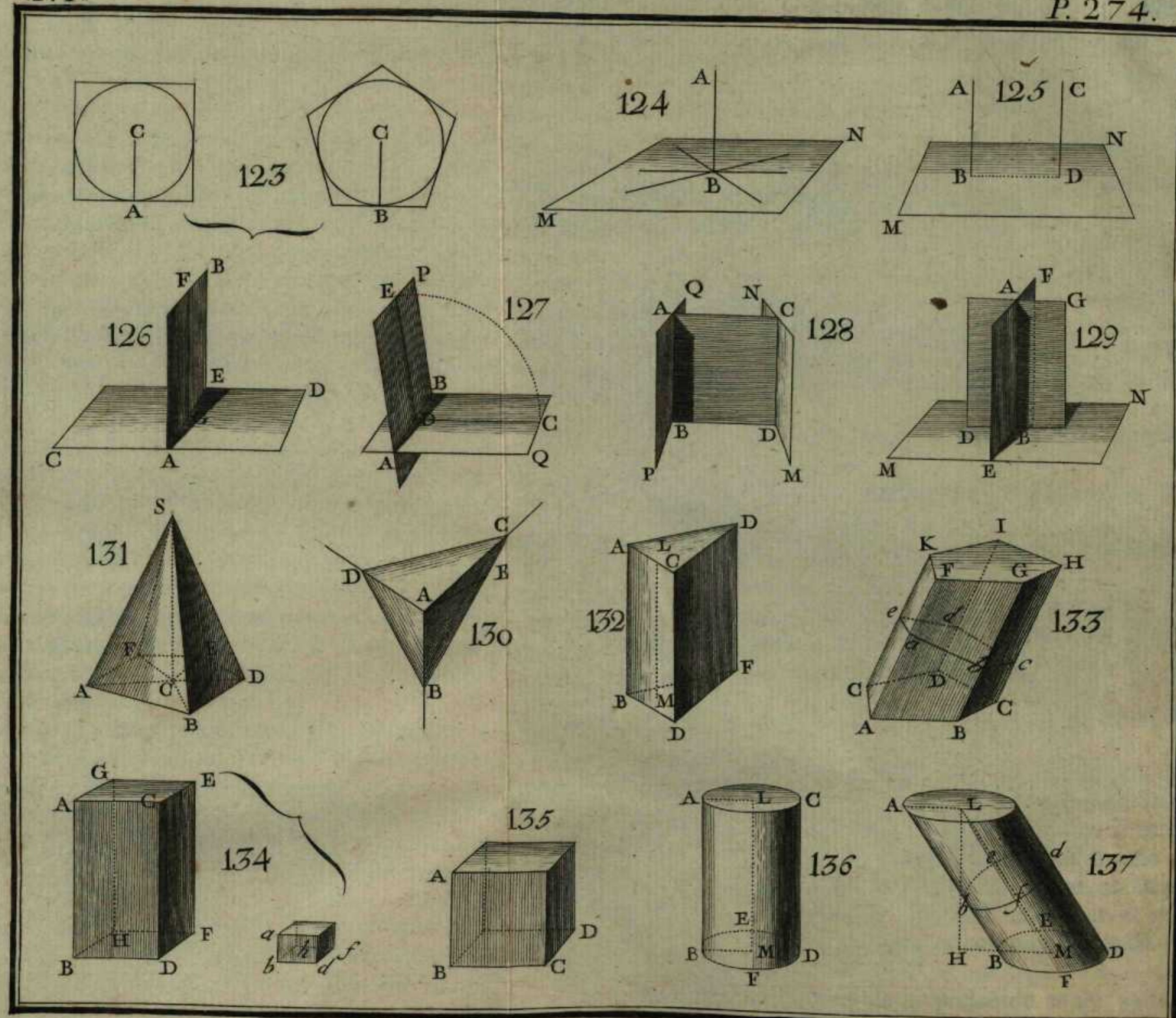
654. Es muy comun dar la regla que acabamos de manifestar, diciendo que *la solidez de un prisma es igual al producto de su base por su altura.* Con este motivo harémos aquí una observacion análoga á otra que hicimos (581) respecto de la medida de las superficies. Esta espresion, si se tomase á la letra, sería contraria á los principios de la multiplicacion; porque siendo el multiplicando una superficie, y el multiplicador una linea, no se podría egecutar la multiplicacion por no ser un número abstracto el multiplicador (33), y aun quando quisiéramos pasar que el producto constase de unidades sólidas, no serían estas unidades de la misma especie que las del multiplicando, conforme debe ser (34). Sin embargo, como de dicha espresion, aunque padece las referidas nulidades, no se sigue error ninguno en la práctica, y es ademas de eso mas facil de estamparse en la memoria, nosotros tambien la usarémos siempre que se nos ofrezca.

132. 655. Luego 1.° si el prisma es recto, *su solidez será igual al producto de su base por una de sus aristas,*
134. *que en este caso son iguales con su altura.*

137. 656. 2.° *La solidez de un cilindro qualquiera será igual al producto de su base* BDEF *por su altura* LH, y si fuese recto, *al producto de su base* BDEF *por su ege* LH.

136. 657. 3.° *Para que dos prismas ó dos cilindros sean iguales en solidez, basta que tengan sus bases recíprocamente proporcionales á sus alturas.* Porque en este caso, los productos que espresan sus solideces son forzosamente iguales.




123
124
125
126
127
128
129
131
130
132
133
134
135
136
137